MAT1610 Cálculo I — Mayo 2020 (Estudiatón I2)

Esta guía fue hecha con ❤️ por novatos para novatos, para la estudiatón de cálculo el 13 de mayo de 2020, específicamente en preparación a la I2. Incluso si no pudiste estar en la estudiatón, esperamos que esta guía te sea útil para practicar y prepararte.

Esta guía tiene 14 preguntas, 11 de alternativas y 3 de desarrollo. Estimamos el tiempo completo en 1h y 40m, sin contar el desafío (último ejercicio).

Puedes encontrar una hoja de fórmulas en la penúltima página de este documento, aunque te **recomendamos enfáticamente no usarla** al menos que te encuentres pegado en un ejercicio.

Notas para Participantes

Todos en el Zoom van a ser divididos en grupos de **5 a 8 personas** al iniciar la estudiatón.
Una vez que seas asignado a un grupo, **tendrás que presentarte antes de empezar** y después podrán comenzar a hacer en orden cada pregunta.

Si tienen alguna duda, primero intenten llevarlo al grupo en el que están. Si nadie puede resolver su duda, pueden solicitar ayuda desde Zoom para que vaya un tutor a ayudar. Si todos en tu grupo terminan la guía, o están muy pegados con una pregunta de desarrollo, pueden pedir la pauta de esta guía.

Delegados Generacionales 2020 Ing. UC

Pregunta 1

Determina la recta tangente de la curva $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ para el punto $(0, \frac{1}{2})$.

- ○ $f(x) = -x + \frac{1}{2}$
- ● $f(x) = x + \frac{1}{2}$
- ○ $f(x) = -x - \frac{1}{2}$
- ○ $f(x) = x - \frac{1}{2}$

Pregunta 2

Dada la curva $2y^3 + 2x^3 + y^2 - y^5 = x^4 + x^2$, encuentre **todos** los valores de x donde la primera derivada es cero.

- ○ $x = \{-1, 0\}$
- ● $x = \{\frac{1}{2}, 1, 0\}$
- ○ $x = \{1, 0\}$
- ○ Ninguna de las anteriores.

Pregunta 3

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la siguiente función en el punto pedido:

$$x^2 + 4xy + y^2 = 13, \text{ en el punto } (2, 1)$$

- ● $f(x) = \frac{-4}{5}x + \frac{13}{5}$
- ○ $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$
- ○ $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$
- ○ $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$

Pregunta 4

Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{-x^2 + 25}$ en el punto $x = 3$.

- ○ $L(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$
- ○ $L(x) = \frac{-3}{4}x - \frac{25}{4}$
- ● $L(x) = \frac{-3}{4}x + \frac{25}{4}$
- ○ $L(x) = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

Pregunta 5

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ identifique los valores máximo y mínimo absolutos para el rango $[-2, 2]$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- ○ Existe un máximo absoluto en $x = -2$, con 4 de altura.
- ○ Existe un mínimo absoluto en $x = -1$, y yace en el eje x.
- ○ Existen máximos absoluto en $x = -2$ y $x = 1$ y ambos yacen en el eje x.
- ● **Existe un máximo absoluto en $x = 2$ y $x = -1$, con valor 4.**

Pregunta 6

Si a y b son números reales positivos, el valor máximo absoluto de $f(x) = x^a(1-x)^b$ en el intervalo $[0, 1]$ es:

- ● $\frac{a^a \cdot b^b}{(a+b)^{a+b}}$
- ○ $\frac{a^a \cdot b^b}{(a-b)^{a-b}}$
- ○ $-\frac{a^a \cdot b^b}{(a+b)^{a+b}}$
- ○ $\frac{a^a \cdot b^b}{(a-b)^{a+b}}$

Pregunta 7

Dos autos (🚗) A y B viajan por dos calles perpendiculares desde la intersección de estas. El auto A viaja a 30 km/h y el auto B a 70 km/h ¿A qué velocidad se alejan los autos cuando A se encuentra a 3 km de la intersección?

- ○ $\frac{\sqrt{58}}{1160}$
- ● $\frac{580}{\sqrt{58}}$
- ○ $\frac{\sqrt{58}}{580}$
- ○ $\frac{\sqrt{1160}}{58}$

Pregunta 8

Compute el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

- ○ 0
- ○ 1
- ● 2
- ○ ∞

Pregunta 9

Se instala una cámara de televisión a 12 000 m de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. (🚀) El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la proporción correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 800 m/s cuando se ha elevado 5000 m. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento? (Pista: usa tangente)

- ● $\frac{48}{845}$
- ○ $\frac{144}{169}$
- ○ $\frac{4000}{13}$
- ○ $\frac{5}{17}$

Pregunta 10

Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1+3x}$ en $x = 0$.

- ● $L(x) = x + 1$
- ○ $L(x) = -x + 1$
- ○ $L(x) = 3x + 1$
- ○ $L(x) = x^3 + 1$

Pregunta 11

Compute el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

- ● $\frac{1}{2}$
- ○ 0
- ○ $-\infty$
- ○ Solo Thor-res sabe.

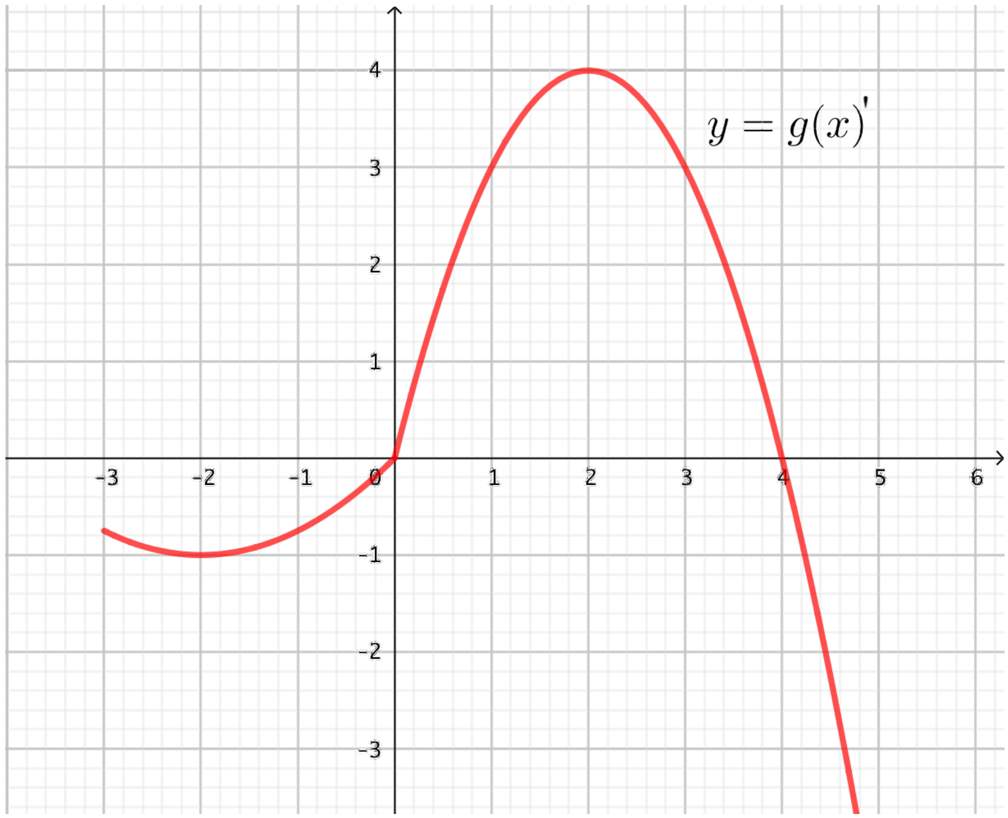

Figura 2: Función $g'(x)$.

Pregunta 12

En base a la figura 2 describiendo $g'(x)$, analice la función y responda las siguientes preguntas.

(a) Determine dónde la derivada de $g(x)$ se anula.

> **Solución:**
> Dado que se tiene el gráfico de la derivada ($g'(x)$), solo necesitamos buscar donde la ordenada es 0, que en este caso es $x = 4$ y $x = 0$.

(b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x)$.

> **Solución:**
> Buscaremos los intervalos en donde nuestra derivada es positiva y negativa. Tenemos que tener mucho ojo en tomar valores en el eje x, puesto que justo ahí el valor de nuestra derivada es 0. Dicho esto, el intervalo de crecimiento es $(0, 4)$ y decrece en $(-3, 0) \cup (4, 5)$.

(c) Determine la concavidad de $g(x)$ en el intervalo $(-3, 5)$.

> **Solución:**

Para calcular la concavidad, solo debemos analizar el signo de nuestra segunda derivada. En $(-3,-2) \cup (2,5)$ nuestra funcion es cóncava hacia abajo, puesto que $G''(x) < 0$. En el intervalo $(-2,2)$ nuestra $G''(x) > 0$, por lo que será cóncava hacia arriba.

(d) Determine los máximos y mínimos locales de $g(x)$ en el dominio del gráfico.

Solución:

Para determinar los puntos mínimos y maximos tenemos que analizar nuestra segunda derivada en los puntos críticos de la función, es decir, en donde nuestra primera derivada sea igual a 0.

Notamos que nuestra derivada es 0 en $x = 0$ y $x = 4$, por lo que nos toca analizar el signo de nuestra segunda derivada en las cercanías de $x = 0$ y $x = 4$

En $x = 0$ nuestra G''(x) es > 0, por lo qué hay un mínimo local en $x = 0$, $y = 0$.

Pregunta 13

Mediante el teorema del valor medio (TVM), demuestre que si $x > 0$, entonces $\arctan(x) < x$.

Solución:

Debemos comenzar definiendo el rango de valores de x vamos a trabajar. Sabemos que arctan es una función continua en todo los R, al igual que x. Sin embargo, tenemos la condición de $x > 0$, por lo que nuestro rango de valores se acota a $(0, x)$, donde x puede tomar cualquier valor.

Se define una función auxiliar llamada $h(x)$ la cual será igual a el valor mas grande de la desigualdad, menos el valor mas chico de la desigualdad. Dado eso, sabemos que $h(x)$ siempre será positivo.

Luego, establecemos la condición del TVM, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Reemplazando con nuestra función sabemos que $b = x$ y $a = 0$ (por el intervalo dado).
Ahora reemplazamos, $\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(c)$. (Evaluando 0 en $h(x)$ nos queda $0 - \arctan(0) = 0$).
Despejando $h(x)$ de lo anterior:

$$h(x) = h'(c) \cdot x$$

Notamos que $x > 0$. Por lo que necesitamos saber si $h'(c) > 0$. Derivando $h(x)$ para encontrar su signo, y evaluando en c tenemos:

$$h'(c) = 1 - \frac{1}{1 + c^2}$$

Por hipótesis del teorema del valor medio, $0 < c < x$, por lo que nuestra fracción será > 0 y < 1, dando como resultado que $h'(c) > 0$. Ahora que sabemos que $x > 0$, $h'(c) > 0$ y $h(x) > 0$, reemplazamos en la expresión $h(x) = h'(c) \cdot x > 0$, quedando:

$$(x - \arctan(x) = (1 - \frac{1}{1 + c^2}) \cdot x > 0$$

Y ahora por transitividad de la desigualdad $x - \arctan x > 0$ y despejando x, $x > \arctan x$.

Pregunta 14

Desafío: Dado $a \geq 0$, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$$

Pista (1): Recuerda sacar las constantes del límite (opcional).
Pista (2): Si vas a la mitad del ejercicio y no te preguntas "cómo es posible", hazlo de nuevo.
Pista (3): La dificultad del ejercicio es solamente lo largo, si vas determinado es relativamente fácil!

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^3} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

(L'Hôpital) $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln(a) - a^{\sin(x)} \ln(a) \cdot \cos(x)}{3x^2}$$

$$\frac{\ln(a)}{3} \lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$$

(L'Hôpital) $\frac{f''(x)}{g''(x)}$

$$\frac{\ln(a)}{3} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln(a) - \left(a^{\sin(x)} \cdot (-\sin(x)) + a^{\sin(x)} \ln(a) \cdot \cos^2(x)\right)}{2x}$$

$$\frac{\ln(a)}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln(a) - a^{\sin(x)}\left(-\sin(x) + \ln(a)\cos^2(x)\right)}{x} = \frac{0}{0}$$

(L'Hôpital) $\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$

$$\frac{\ln(a)}{6}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln^2(a)-a^{\sin(x)}\ln(a)\cos(x)\left(-\sin(x)+\ln(a)\cos^2(x)\right)-a^{\sin(x)}\left(-\cos(x)+\ln(a)2\cos(x)\cdot(-\sin(x))\right)}{1}$$

$$\frac{\ln(a)}{6}\cdot\left(\ln^2(a)-\ln(a)\left(\ln(a)\right)-(-1)\right) \qquad \boxed{x=0}$$

$$\frac{\ln(a)}{6}\left(\cancel{\ln^2(a)}-\cancel{\ln^2(a)}+1\right)$$

$$\frac{\ln(a)}{6}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin(x)}}{x^3}$$

FIN DE LA GUÍA

Hoja de Fórmulas
Cálculo I (MAT1610)
Mayo 2020 (Main)

Formulas Esenciales

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(c) = \lim_{b\to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivadas Notables

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \sec^2(x)$$

$$(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x)$$

$$(\csc(x))' = -\csc(x)\cot(x)$$

$$(\cot(x))' = -\csc^2(x)$$

$$(\sin^{-1}(x))' = (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1}(x))' = (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan^{-1}(x))' = (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec^{-1}(x))' = (\text{arcsec}(x))' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\csc^{-1}(x))' = (\text{arccsc}(x))' = -\frac{1}{|x|\ \sqrt{x^2-1}}$$

$$(\cot^{-1}(x))' = (\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a b)' = \frac{1}{\ln a \cdot b}$$

Análisis gráfico

$f'(x) > 0, \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a,b]$

$f'(x) < 0, \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ es decreciente en [a,b]

$f''(x) > 0, \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ es concava hacia arriba en [a,b]

$f''(x) < 0, \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ es concava hacia abajo en [a,b]

Punto Crítico: todo x tal que $f'(x) = 0$
Punto de Inflexión: todo x tal que $f''(x) = 0$

Máximos y Mínimos

Los máximos y mínimos locales de una función f(x) son aquellos puntos donde:

1. Hay un máximo o mínimo absoluto.
2. Son los puntos críticos de la función.

Para verificar cuales son máximos o mínimos se debe ver lo siguiente:

- Si a la izquierda del punto es creciente y a la derecha es decreciente, el punto es máximo local. Por otro lado, si a la izquierda del punto es decreciente y a la derecha es creciente, el punto es mínimo local.
- Si f"(x)>0, x es mínimo local, y si f"(x)<0, x es máximo local.
- Para verificar cuál es el valor máximo absoluto o mínimo absoluto hay que evaluar el punto en la función.

Nueva Asíntota, Asíntota Oblicua

Se define como asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ como aquella recta $y = mx + n$ que cumple las siguientes propiedades:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - xm$$

La asíntota oblicua de la función $f(x)$, si existe, es aquella recta de la siguiente forma:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot x + \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - xm$$

Observación: La máxima cantidad de asíntotas oblicuas y asíntotas horizontales es 2

Regla de L'Hopital (Hecha por Bernoulli)

La regla de L'Hopital se usa para calcular límites de funciones que al calcularles el límite queda de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^∞ y ∞^0. Para aplicar la Regla de L'Hopital se deben transformar estas formas a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Una vez transformada la función entonces se puede aplicar la Regla de L'Hopital, la cual es la siguiente:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Tutores y Organizadores

- Jorge Matamala (jnmatamala@uc.cl)
- Javier del Valle (javier.delvalle@uc.cl)
- Marco Gallegos (marco.a.gaymer@uc.cl)
- Sebastián Morales (smoralesc8@uc.cl)
- Gabriel Miranda (ggmiranda@uc.cl)
- Agustín Covarrubias (agucova@uc.cl)
- Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
- Paul Mac-Guire (paul.macguire@uc.cl)
- Fernando Smith (fdsmith@uc.cl)
- Matías Braun (matiasbraun@uc.cl)
- Fernando Bendek (fjbendek@uc.cl)
- Francisco Wulf (francisco.wulf@uc.cl)
- Exequiel Garay (exequiel.garay@uc.cl)
- Katherine Catoni (kcatoni@uc.cl)
- Rafael Rencoret (rafarencoretg@uc.cl)
- Benjamín Águila (benjaaguilaruiz@uc.cl)
- Gustavo Alarcón (gustavo.alarcon@uc.cl)
- Damián Díaz-Muñoz (damiandiazmu@uc.cl)
- Manuel Ramírez (manuel.ramirez@uc.cl)