

Integral Definida

E.G. Tita Dolce

Agosto de 2022

Resumen

El objetivo de este documento es dar una explicación práctica para que el alumno logre comprender la integral definida con la profundidad suficiente para ser capaz de resolver ejercicios de nivel universitario y utilizar los conocimientos adquiridos en situaciones prácticas.

Las definiciones, enunciados de teoremas (o referencias a los mismos), deducciones, etc. son solo para fines didácticos y con la intención de explicar el concepto de la forma más sencilla posible. De ninguna manera la teoría presentada en este documento cumple con el rigor matemático suficiente para ser utilizada con otro fin más que el didáctico.

Introducción

¿Qué es una integral definida? Recordemos primero qué es una integral.

A grandes rasgos sabemos que la integral de una función $f(x)$ es otra función $H(x)$ tal que al derivar $H(x)$ obtengo nuevamente la función $f(x)$.

Es decir, si al derivar la función H obtengo la función f , entonces, H es la anti derivada (o primitiva) de la función f .

De forma simple... la integral es la operación opuesta a la derivada. De ahí el nombre de anti derivada. Esto es lo que demuestra el primer teorema fundamental del cálculo.

También sabemos que, si dos funciones difieren solo en una constante, entonces tienen la misma derivada.

Por ejemplo, $f(x) = X^2 + 3$ y $h(x) = X^2 - 2$ son funciones que difieren solo en una constante, luego al derivar ambas obtenemos el mismo resultado.

$$f'(x) = 2X \text{ y } h'(x) = 2X.$$

Por este motivo es que se dice que una función tiene una familia de primitivas o anti derivadas y que ponemos la famosa constante $+C$ al final de cada integral que resolvemos.

Debemos notar que incluso con la constante C determinada como hicimos en algunas ocasiones anteriores, el resultado de la integral sigue siendo una función y no un valor en particular.

A este tipo de integrales se les llama **Integral Indefinida**.

Integral Definida

Ahora bien, la integral definida es una integral que al terminar de resolverla me devuelve un valor y no una función. Es decir, la integral definida es un **número**.

¿Cómo es esto? Una forma fácil de explicarlo, es decir que al resolver la integral voy a obtener una función, a esa función la evalúo en dos valores (que son indicados cómo límites de integración) y resto los resultados que obtenga para conseguir el valor de la integral definida.

Viendo la notación lo vamos a entender mejor...

$$\int_a^b f(x)dx = H(b) - H(a)$$

¿Qué significa esto? Significa que primero debo integrar la función $f(x)$ para obtener la función $H(x)$ y luego a esta función $H(x)$ evaluarla en el número b (límite superior), $H(b)$ y restarle el valor de la misma función $H(x)$ pero evaluada en el número a (límite inferior), $H(a)$.

Veamos un ejemplo sencillo para terminar de entenderlo. Supongamos que tenemos lo siguiente...

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{2^3}{3} - \frac{-1^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

Traduzcamos esto a lenguaje humano... tengo la función x^2 , la integro y obtengo la función $\frac{x^3}{3}$ y a esta última función la evalúo en 2 (cómo indica el límite superior de la integral) y luego en -1 (cómo indica el límite inferior de la integral), luego resto ambos valores, $\frac{8}{3} + \frac{1}{3}$ (en este caso se suman por la regla de signos) y obtengo el resultado de la integral definida.