Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEInf

Cálculo para Engenharia

folha 10 — 2021'22

Séries numéricas.

1. Considere a sucessão $1, 3, 8, 19, 42, \cdots$

(a) Qual o 6.º termo da sucessão? E o 100.º?

(b) Defina o termo geral da sucessão.

2. Estude a monotonia, a limitação e a convergência das sucessões definidas por

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(b) $b_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(c) $c_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$

(d) $u_n = r^n, \quad \text{com } r \in \mathbb{R}$

(e) $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

(f) (recursivamente) $w_1 = \sqrt{6}$ e, para $n \geq 1$,

$$w_{n+1} = \sqrt{6 + w_n},$$

3. Escreva na forma $\sum_{n=3}^{10} u_n$ e $\sum_{k=0}^{7} u_{k+3}$ as seguintes somas:

(a) $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$;

(b) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots - \frac{10}{11}$.

4. Considere a série definida por $\sum_{n=2}^{+\infty} \cos(n\pi)$.

(a) Quais os primeiros quatro termos da série?

(b) Será possível definir-se o termo geral da série de outra forma? Qual?

5. Escreva na forma $\sum_{n\geq 1} u_n$ as séries cujos primeiros termos são:

(a) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$;

(b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{25} + \frac{5}{125} - \frac{6}{625} + \frac{7}{3125} \cdots$.

6. Escreva os primeiros quatro termos, da sucessão das somas parciais, para cada uma das seguintes séries.

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

(c) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} \cdots$

(d) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{i+1}}$

7. Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\text{2 termos}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots}_{\text{8 termos}}+\cdots$

(b) $1+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\text{2 termos}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\cdots}_{\text{8 termos}}+\cdots$

(c) geométricas: $\sum_{i\geq 1} a.r^{i-1}$, com a constante real e $r\in\mathbb{R}$

(d) de Riemann*[1]: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^r}$, com $r\in\mathbb{R}$

8. Expresse $0,555555...$ na forma de um número racional.

9. Prove que $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{26}{(n+1)(n+2)}\right)=-8$

10. Considere a soma $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}$, $n\in\mathbb{N}$, onde cada a_k é um número inteiro entre 0 e 9.

(a) Escreva a soma anterior, com $n=3$, na forma de uma fração decimal.

(b) Comente a afirmação "A convergência de séries geométricas de razão $1/10$ permite atribuir um significado preciso a dízimas infinitas".

(c) Escreva as seguintes dízimas na forma de uma série e expresse a soma dessa série como quociente de dois números naturais:

i. 0.7(7) ii. 0.24(24) iii. 0.112(112) iv. 0.6245(45)

11. Estude a natureza da série e, no caso de ser convergente, encontre a sua soma.

(a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\cdots$

(b) $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{6^{\frac{i}{2}}}$

(c) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^n-2^n}{6^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{n+1}n}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty}n.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(h) $1\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+7\frac{7}{8}+15\frac{15}{16}+\cdots$

(i) $1+2+3+4+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots$

(j) $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{1+i}$

(k) *[2] $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(l) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

(m) $\sum_{n\geq 1}\frac{2}{7^{n+1}}$

[1] Já Resolvida nas aulas teóricas, da semana de 3 a 10 de janeiro.
[2] Já Resolvida nas aulas teóricas, da semana de 3 a 10 de janeiro.

(n) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{3}{e}\right)^n$

(o) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n$

(p) $\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}+3^n}{6^{n-1}}$

(q) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{5n}}$

(r) $\sum_{n\geq 1}\frac{\pi^{n-1}}{3^{2n}}$

(s) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}+2^{2n}}{3^{n-1}}$

(t) $\sum_{i\geq 1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^i+\left(\frac{1}{3}\right)^{2i}+\left(\frac{1}{4}\right)^{3i+1}\right]$

(u) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4+e^n}$

(v) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\,(\ln n)^2}$

(w) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$