Куробатяни Г.К.
38??М1?
№45

Рассм. задачу восстановления зависимости $Y = f^*(X)$, где X - с.в., а f^* - неизвестная детерминир. ф-я. $\exists$ $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N)}$ суть независимые реализации X. В качестве модельной зависимости возьмем функцию $f(X, D)$, где $D = \{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N)}\}$.
Разложим $E_D(f(x,D) - f^*(x))^2$ в сумму квадрата мат. ожид. bias и Var.

$$E_D(f(x,D) - f^*(y))^2 = E_D\big((f(x,D) - E_D f(x,D)) + (E_D f(x,D) - f^*(x)) \big)^2 =$$

$$= E_D(f(x,D) - E_D f(x,D))^2 + E_D(E_D f(x,D) - f^*(x))^2 + 2E_D\big((f(x,D) - E_D f(x,D)) \cdot$$

$$\cdot (E_D f(x,D) - f^*(x))\big) = Var_D f(x,D) + Bias_D^2 + 2E_D((f(x,D) - E_D f(x,D)))E_D(E_D f(x,D) - f^*(x)) =$$

$$= Var_D(x,D) + Bias_D^2$$

№46

$Y = \{0, 1\}$

$P(Y=0) = P(Y=1) = 1/2$

$X|y=0 \sim N((-1,-1), I)$, $X|y=1 \sim N((1,1), I)$

1) $corr(x, x_2)$ - ?

$X \sim N((0,0), 0.5 I) \Rightarrow corr(x, x_2) = 0$

2) $\exists$ x_1

$$f^*(x_1) = \arg\max p(x_1|y) = \arg\max\{p(x_1|y=0), p(x_1|y=1)\}$$

$$p(x_1|y=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x+1)^2}, \quad p(x_1|y=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-1)^2}$$

$$f^*(x_1) = \arg\max\{e^{-1/2(x+1)^2}, e^{-1/2(x-1)^2}\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$R(f^*) = \int_{-\infty}^{0} P_r(y=1|x) p(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} P_r(y=0|x) p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{p(x|y=1)}{2} dx +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} \frac{p(x|y=0)}{2} dx = \varphi(-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \varphi(1)) = \frac{1}{2}(1 - 2\varphi_0(1)) = 0.1587$$

3) $\exists$ x_1, x_2

$$f^*(x) = \arg\max(p(x|y=0), p(x|y=1))$$

$$p(x|y=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((x_1+1)^2 + (x_2+1)^2)}, \quad p(x|y=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2)}$$

Курбабаканов Г.К
3824М1ПМки

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & x_1 + x_2 < 0 \\ 1 & x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$R(f^*) = \iint\limits_{x_1+x_2<0} \frac{P(x|y=1)}{2}\,dx + \iint\limits_{x_1+x_2\geq 0} \frac{P(x|y=0)}{2}\,dx = 0.0786$$

4) Да, ошибка уменьшилась

№48

$x^{(0)} = 0,\quad x^{(1)} = 1,\quad k_0, k_1 \sim U[-1, 1],\quad x = (0.32, 0)$

$\rho(x, x^{(1)}) = \sqrt{(1 + k_1 - 0.32)^2}$; $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{(0 + k_0 - 0.32)^2}$

$P(\rho(x, x^{(1)}) > \rho(x, x^{(0)})) = P((k_1 + 0.68)^2 > (k_0 - 0.32)^2) \,=$

$$\left[\begin{array}{l} = (k_1 + 0.68)^2 = (k_0 - 0.32)^2 \Rightarrow k_1 + 0.68 = \pm\sqrt{(k_0 - 0.32)^2} \\ k_1 > |k_0 - 0.32| - 0.68 \\ k_1 < -|k_0 - 0.32| - 0.68 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k_1 \geq k_0 - 1 \\ k_1 < -k_0 - 0.36 \end{cases},\ k_0 \geq 0.32 \\ \begin{cases} k_1 < k_0 - 1 \\ k_1 \geq -k_0 - 0.36 \end{cases},\ k < 0.32 \end{array}\right]$$

$= P(k_1 \geq k_0 - 1)P(k_0 \geq 0.32) + P(k_1 < -k_0 - 0.36)P(k_0 \geq 0.32) + P(k_1 \geq -k_0 - 0.36)\,\cdot$

$\cdot\, P(k_0 < 0.32) + P(k_1 < k_0 - 1)P(k_0 < 0.32) = 0.932416$

$$\left[\begin{array}{ll} P(k_0 < 0.32) = 1.32/2 & P(k_1 < -k_0 - 0.36) = 0.3362 \\ P(k_1 \geq k_0 - 1) = 3.5/4 & P(k_1 < k_0 - 1) = 0.125 \\ P(k_1 \geq k_0 - 0.36) = 1 - \frac{1.3448}{2} & P(k_0 \geq 0.32) = 0.125 \end{array}\right]$$

№49

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^d$. Построим для X диаграмму Вороного. Область для $x_i \in X$ задаётся системой из $N-1$ лин. неравенств. Для $k=1$ область, в которой все точки имеют один k ближ. сосед, явл. политопом. Для $k=2$. Возьмем 2 точки $x_i, x_j \in X$, области Вороного которых соприкасаются. Построим область Вороного вокруг x_i с учетом точек $X \setminus \{x_j\}$. Данная область может быть получена из исходной для x_i путем исключения неравенства, отвечающего за границу x_i и x_j. Аналогично построим область для x_j. Пересечение данных областей будет представлять совокупность всех точек, для которых x_i и x_j являются 2-мя ближ. соседями и будет задана $N-2$ лин. уравнениями. Аналогично для $k>2$ все точки будут иметь k ближ. соседей. Данная область будет политопом.