Optimum Design Homework #4

NE6114011 人工智慧所 楊雲翔

1. 根據 Rao's book: Engineering Optimization, theory and practice, 4th Edition，為了解決問題，我們的最佳化問題為:

$$\min_{x,y} \frac{k}{xy^2}, s.t\ x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

其中$k = \frac{3M}{4}$, M 表示作用的彎矩，與材料相關，a 則是原木的半徑，k 與 a 為常數。在書中，根據解析解，可以計算出最佳解為$x^* = \frac{a}{\sqrt{3}}, y^* = \sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{3}}$

我們根據以上問題，可以根據 Exterior Penalty Method 列出新的式子:

$$\phi(x, y, r) = \frac{k}{xy^2} + r(x^2 + y^2 - a^2)^2$$

接著我利用 DFP method 去進行迭代以解答該問題，並利用書中的解析解去驗證 DFP 的解答，以下是我的實驗結果

- 參數設置

Parameters	K	A	r
Values	10	10	1000

- DFP start weights: [0.1, 0.1]
- 實驗結果:

使用 DFP 迭代 300 次後，獲得的最佳解與解析解近乎相同

```
With DFP Method, iter 300 times, x = 5.773, y = 8.165
Analytical Sol: x = 5.774, y = 8.165
```

2. 此題的最佳化問題如下:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{9} \left(\frac{F_i}{A_i}\right)^2, n = 2$$

Subject to

$$f_1 = d_1F_1 - d_2F_2 - d_{3a}F_3 - M_1 = 0$$
$$f_2 = -d_{3k}F_3 + d_4F_4 + d_{5k}F_5 - d_6F_6 - d_{7k}F_7 - M_2 = 0$$
$$f_3 = d_{5h}F_5 - d_{7h}F_7 + d_8F_8 - d_9F_9 - M_3 = 0$$
$$F_i \geq 0 (i = 1,2, \ldots ,9)$$

根據論文" Sensitivity of predicted muscle forces to parameters of the optimization-based human leg model revealed by analytical and numerical analyses"，我們可以依序寫出此題的解析解為:

$$\frac{\partial L}{\partial F_1}=\frac{nF_1^{n-1}}{A_1^n}-\lambda_1 d_1=0\to F_1^{n-1}=\frac{\lambda_1 d_1 A_1^n}{n}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_2}=\frac{nF_2^{n-1}}{A_2^n}+\lambda_1 d_2=0\to F_2^{n-1}=-\frac{\lambda_1 d_2 A_2^n}{n}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_3}=\frac{nF_3^{n-1}}{A_3^n}+\lambda_1 d_{3a}+\lambda_2 d_{3k}=0$$

$$\to F_3^{n-1}=-\frac{(\lambda_1 d_{3a}+\lambda_2 d_{3k})A_3^n}{n}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_4}=\frac{nF_4^{n-1}}{A_4^n}-\lambda_2 d_4=0\to F_4^{n-1}=\frac{\lambda_2 d_4 A_4^n}{n}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_5}=\frac{nF_5^{n-1}}{A_5^n}-\lambda_2 d_{5k}-\lambda_3 d_{5h}=0$$

$$\to F_5^{n-1}=\frac{(\lambda_2 d_{5k}+\lambda_3 d_{5h})A_5^n}{n}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_6}=\frac{nF_6^{n-1}}{A_6^n}+\lambda_2 d_6=0\to F_6^{n-1}=-\frac{\lambda_2 d_6 A_6^n}{n}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_7}=\frac{nF_7^{n-1}}{A_7^n}+\lambda_2 d_{7k}+\lambda_3 d_{7h}=0$$

$$\to F_7^{n-1}=-\frac{(\lambda_2 d_{7k}+\lambda_3 d_{7h})A_7^n}{n}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_8}=\frac{nF_8^{n-1}}{A_8^n}-\lambda_3 d_8=0\to F_8^{n-1}=\frac{\lambda_3 d_8 A_8^n}{n}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_9}=\frac{nF_9^{n-1}}{A_9^n}+\lambda_3 d_9=0\to F_9^{n-1}=-\frac{\lambda_3 d_9 A_9^n}{n}. \tag{3.9}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$又可以寫作

where $c_{11}=d_1^2A_1^2+d_2^2A_2^2+d_{3a}^2A_3^2$; $c_{12}=d_{3a}d_{3k}A_3^2$; $c_{22}=d_{3k}^2A_3^2+d_4^2A_4^2+d_{5k}^2A_5^2+d_6^2A_6^2+d_{7k}^2A_7^2$; $c_{23}=d_{5k}d_{5h}A_5^2+d_{7k}d_{7h}A_7^2$; $c_{33}=d_{5h}^2A_5^2+d_{7h}^2A_7^2+d_8^2A_8^2+d_9^2A_9^2$. Solving system (4.1)–(4.3) for λ_j ($j=1, 2, 3$) we obtain:

$$\lambda_1=\frac{2(M_1c_{33}c_{22}-M_1c_{23}^2-M_2c_{12}c_{33}+M_3c_{12}c_{23})}{c_{11}c_{22}c_{33}-c_{12}^2c_{33}-c_{23}^2c_{11}}, \tag{5.1}$$

$$\lambda_2=\frac{2(-M_1c_{12}c_{33}+M_2c_{11}c_{33}-M_3c_{23}c_{11})}{c_{11}c_{22}c_{33}-c_{12}^2c_{33}-c_{23}^2c_{11}}, \tag{5.2}$$

$$\lambda_3=\frac{2(M_1c_{12}c_{23}-M_2c_{11}c_{23}+M_3c_{11}c_{22}-M_3c_{12}^2)}{c_{11}c_{22}c_{33}-c_{12}^2c_{33}-c_{23}^2c_{11}}, \tag{5.3}$$

另外，在論文中有提到，當$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$與 0 之間的大小關係呈現特定關係時，有些肌肉實際上是呈現 silent muscle states 的，可以將這些肌肉的力F_i設置為 0，同樣地，這些肌肉對應的關節力臂d_i也設置為 0，將處於 silent muscle states 的關節力臂設為 0 後，再重新代入解析解中，該組解即為最佳解，下列解為我根據論文中的解析解代入題目提供的初始參數獲得的最佳解

```
F1 = 134.2
F2 = 0.0
F3 = 0.0
F4 = 707.7
F5 = 295.4
F6 = 0.0
F7 = 0.0
F8 = 718.0
F9 = 0.0
```

該組最佳解與論文中提供的實驗結果保持一致，以此驗證該解是正確的。