MEC 8211 – Devoir 1

https://github.com/Eouann/MEC8211-Devoirs

Cédric COURCOUX – 2402493

Claire SORDET – 2309949

E'ouann KERINO – 2402199

Question A

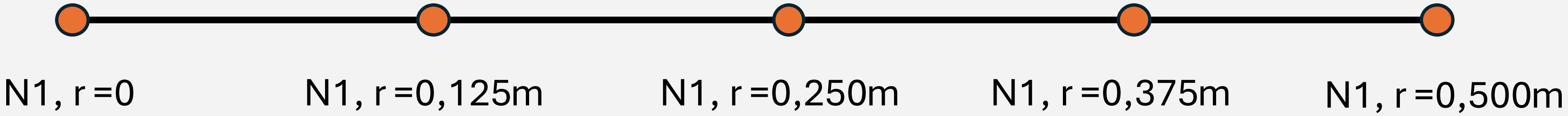
A) Nous avons dans les conditions stationnaires un problème du type Diffusion = Constante; ce qui correspond à des **solutions elliptiques**.

B) L’étude sera réalisée en **coordonnée cylindrique**, l’étude se déroulant sur un cylindre de béton.

C) L’énoncé annonce que l’on considère la poutre infiniment haute, ce qui induit une indépendance suivant l’axe Z. De plus, la symétrie suivant l’axe de révolution, et la diffusion pouvant être considérée isotrope dans notre matériau, **le problème dépend uniquement de la coordonnée r**. L’équation à résoudre est donc en 1D.

D)

$$\Delta r = \frac{1}{4} R = 0{,}125\ m$$



E) i. Les conditions aux limites sont les suivantes :

- $C(r = R) = Ce$, concentration de sel dans l’eau. Condition de **Dirichlet**
- $\frac{dC}{dr}$ (r=0) = 0 par symétrie, le flux de concentration sera nulle au centre. Condition de **Neumann**.

Question A et B

E) ii. Le problème résolu ici étant stationnaire, la condition initiale n'a pas besoin d'être utilisée

B) Résolution analytique :

$$\Delta^2 C * Deff = S$$

$$Deff * \left(\frac{1}{r}\right) * \frac{d}{dr}\left(r * \frac{dC}{dr}\right) = S$$

Par double intégration,

$$C(r) = \frac{S}{4 * Deff} r^2 + C1 * \ln(r) + C2$$

La condition de Neumann implique :

$$C1 = 0$$

La condition de Dirichlet impose :

$$C2 = Ce - \frac{S}{4 * Deff} R^2$$

D'où

$$C(r) = \frac{1}{4} * \frac{S}{Deff} R^2 * \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) + Ce$$

Question C – a : équations en chacun des nœuds

L'équation stationnaire et en coordonnées cylindriques devient alors : $\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{S}{D_{eff}}$

Avec la discrétisation suivante: $\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_i = \frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta r}$ et $\left.\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right|_i = \frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta r^2}$

Nous obtenons l'équation discrétisée générale :

$$\left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i}\cdot\frac{1}{\Delta r}\right).C_{i+1} - \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i}\cdot\frac{1}{\Delta r}\right).C_i + \frac{1}{\Delta r^2}.C_{i-1} = \frac{S}{D_{eff}}$$

- Au nœud 1 (r=0) : $\frac{dC}{dr} = 0$ donc $C_1 = C_2$
- Au nœud 2 (r= 0,125 m) : $128\ C_3 - 192\ C_2 + 64\ C_1 = 200$
- Au nœud 3 (r= 0,25 m) : $96\ C_4 - 160\ C_3 + 64\ C_2 = 200$
- Au nœud 4 (r= 0,375 m) : $\frac{256}{3}\ C_5 - \frac{448}{3}\ C_4 + 64\ C_3 = 200$
- Au nœud 5 (r= 0,5 m =R) : $C_5 = C_e = 20\ mol\ /m^3$

Question C – b : Procédure générale

1. <u>Discrétisation du domaine :</u> on doit définir N, les positions des nœuds et la taille de l'intervalle Δr
2. <u>Assemblage du système d'équations linéaires :</u> on utilise les équations discrétisées pour chaque nœud
3. <u>Implémentation d'une méthode de résolution :</u> on utilise une méthode numérique – la méthode de Gauss Seidel ou la décomposition LU par exemple
4. <u>Rentrer les conditions aux limites :</u>
    - À r= 0, nous avons une symétrie : $\frac{dC}{dr} = 0$ donc $C_1 = C_2$
    - À r= R, $C(R) = C_N = C_e$

Question C – c : Erreur de troncature et ordre de précision

Développement limité de Taylor : $C_{i+1} = C_i + \Delta r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\Delta r^3}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial r^3} + O(\Delta r^4)$

$$C_{i-1} = C_i - \Delta r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - \frac{\Delta r^3}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial r^3} + O(\Delta r^4)$$

Dérivée première

$$\frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta r} = \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + O(\Delta r^2)$$

- L'erreur de troncature est alors proportionnelle à $\frac{\Delta r}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}$.
- Le schéma a pour ordre de précision : 1 avec Δr.

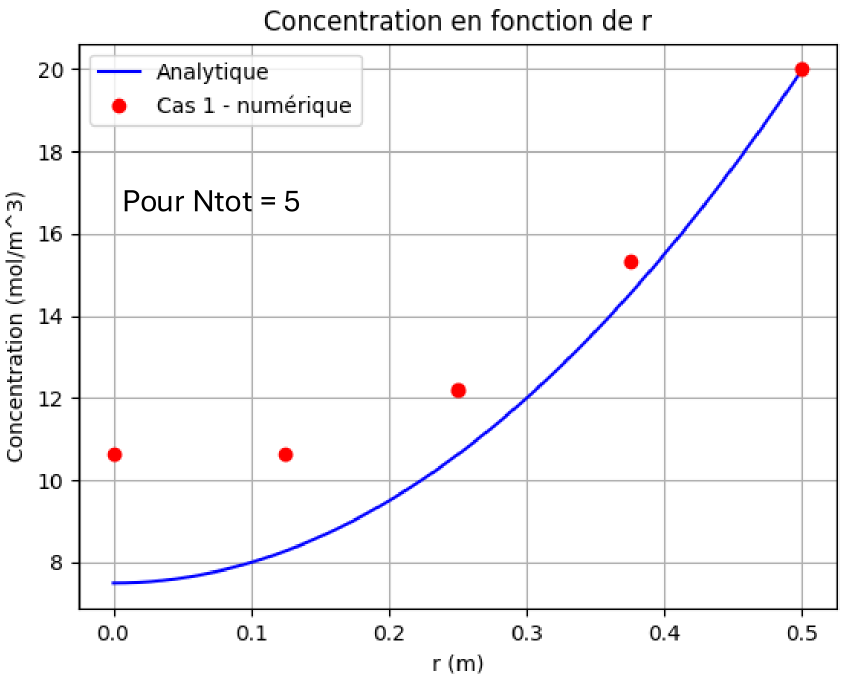
Dérivée seconde

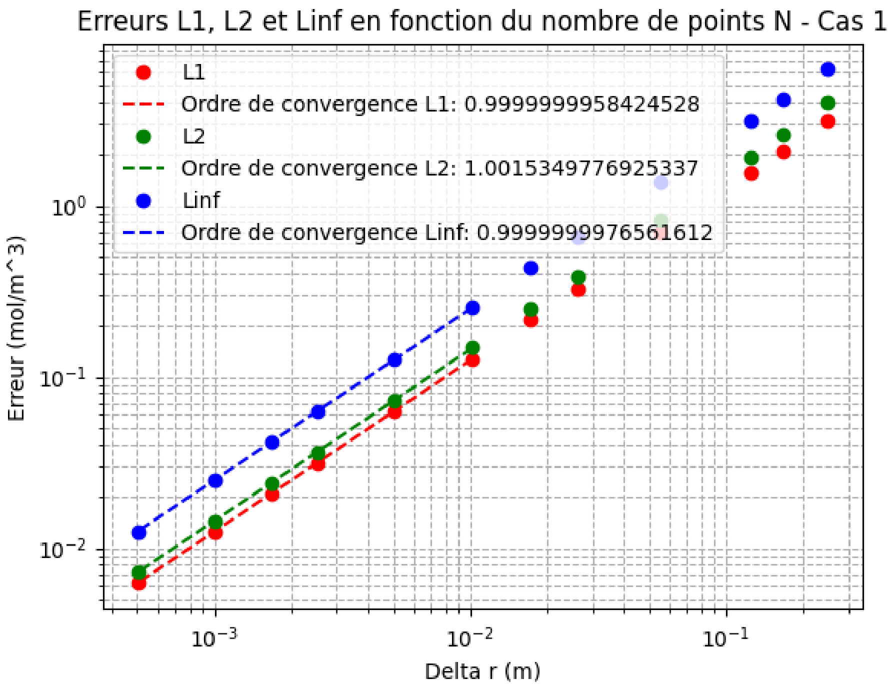
$$\frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta r^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + O(\Delta r^2)$$

- L'erreur de troncature est alors proportionnelle à 1 + $O(\Delta r^2)$, soit aura des termes en Δr^2
- Le schéma a pour ordre de précision : 2 avec $O(\Delta r^2)$.

L'ordre attendu est alors l'ordre qui domine entre les deux dérivées, à savoir <u>l'ordre 1</u>.

Question D : Programmation en python pour N quelconque (Cas 1)





Erreur importante en r=0 à cause du schéma de différenciation imposant C1=C2

On a bien $\lim_{N\to\infty} C_N - \tilde{C} = 0$, donc l’erreur de discrétisation tend vers 0

Les 3 erreurs nous donnent **l’ordre de précision observée de 1** égal à l’ordre de précision formel déterminée sur la diapo précédente.

Question E – a : Erreur de troncature et ordre de précision

Développement limité de Taylor : $C_{i+1} = C_i + \Delta r\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\Delta r^3}{6}\frac{\partial^3 C}{\partial r^3} + O(\Delta r^4)$

$$C_{i-1} = C_i - \Delta r\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - \frac{\Delta r^3}{6}\frac{\partial^3 C}{\partial r^3} + O(\Delta r^4)$$

Dérivée première

$$\frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta r} = \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{6}\frac{\partial^3 C}{\partial r^3} + O(\Delta r^3)$$

- L'erreur de troncature est alors proportionnelle à $\frac{\Delta r^2}{6}\frac{\partial^3 C}{\partial r^3}$.
- Le schéma a pour ordre de précision : 2 avec Δr^2.

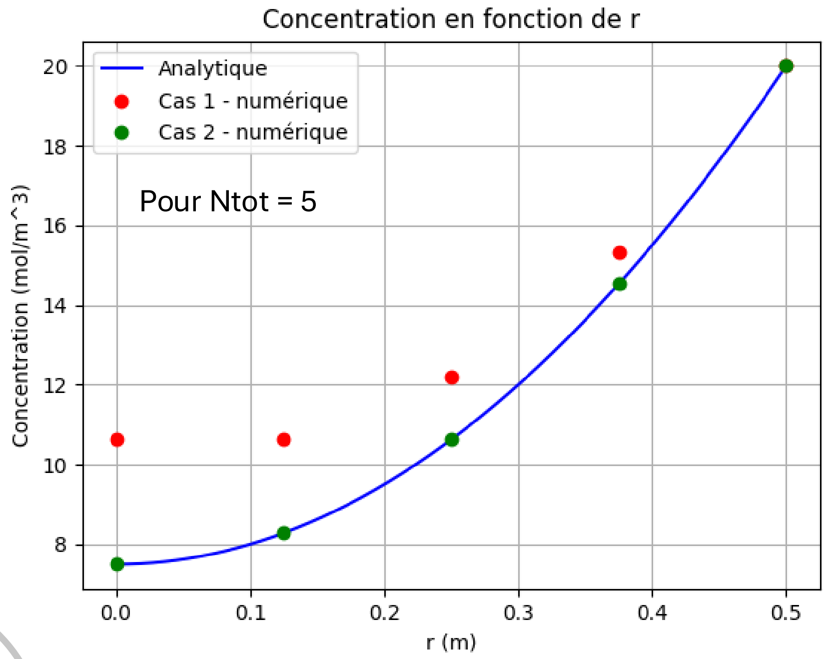
Dérivée seconde

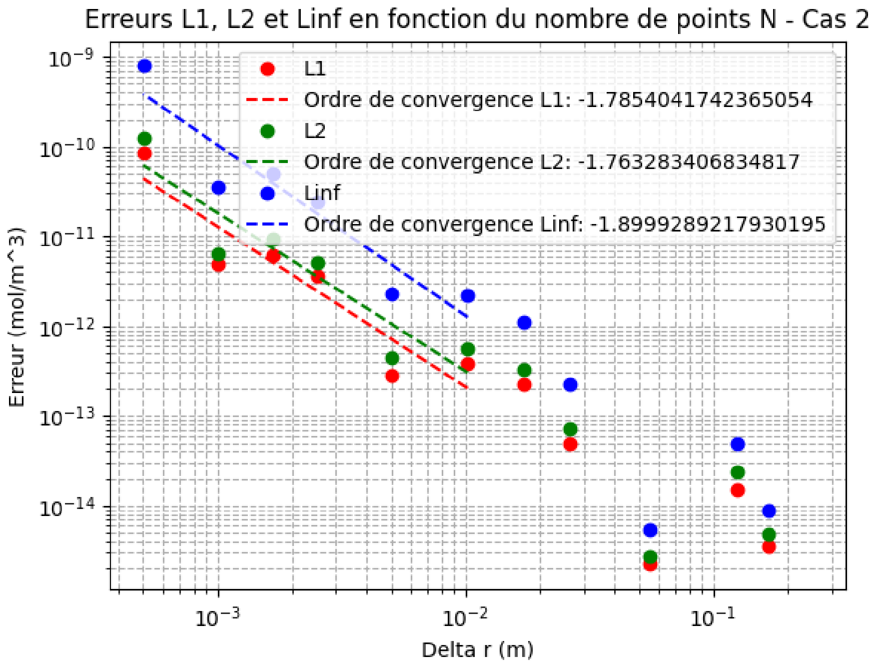
$$\frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta r^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + O(\Delta r^2)$$

- L'erreur de troncature est alors proportionnelle à 1 + $O(\Delta r^2)$, soit aura des termes en Δr^2
- Le schéma a pour ordre de précision : 2 avec $O(\Delta r^2)$.

L'ordre attendu est <u>l'ordre 2</u>, puisque que c'est le même pour les deux dérivées.

Question E – b,c,d : Programmation (Cas 2)





Le nouveau schéma de différenciation et la méthode de Gear en r=0 règlent le problème du cas 1 pour les petits nombres de points N (comme ici N=5).

Les 3 erreurs nous donnent un ordre de convergence **négatif**. Or, nous devrions trouvé un ordre de précision égale à 2.

De plus, les point des erreurs ne s'appuient pas correctement aux courbes de régression linéaire.

Le schéma de différentiation diverge. Quand le pas devient plus fin, l'erreur augmente.