

# MEC 8211

—

# Devoir 11

<https://github.com/Eouann/MEC8211-Devoirs>

Cédric COURCOUX – 2402493

Claire SORDET – 2309949

E'ouann KERINO – 2402199

# QUESTION A – MMS RETENUE

- Nous conservons l'équation du devoir I, ainsi que les conditions aux limites :

$$L(C) = D_{eff} \cdot \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) - kC - \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

- Condition de **Dirichlet** :  $C(r = R) = C_e$ , concentration de sel dans l'eau.
- Condition de **Neumann** :  $\frac{dC}{dr}(r = 0) = 0$  par symétrie, le flux de concentration sera nulle au centre.

La forme analytique choisie pour la MMS est alors :  $\hat{C} = C_e \cdot \frac{r^2}{R^2} + \exp\left(\frac{t}{T_f}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

- Le terme source analytique est alors :

$$s = L(\hat{C}) = -D_{eff} \cdot \frac{4}{R^2} \cdot \left( C_e - \exp\left(\frac{t}{T_f}\right) \right) + k \cdot \left[ C_e \cdot \frac{r^2}{R^2} + \exp\left(\frac{t}{T_f}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \right] + \frac{1}{T_f} \cdot \exp\left(\frac{t}{T_f}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

L'équation modifiée à résoudre est alors :

$$L(C) = s$$

# QUESTION A – EQUATIONS EN CHACUN DES NŒUDS

- Nous utilisons le schéma de la question E du devoir I : (au nœud i au temps n)

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{i,n} = \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta r} \quad ; \quad \left. \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right|_{i,n} = \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta r^2} \quad ; \quad \left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{i,n} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t}$$

- Pour i = 1** : r = 0, nous sommes à la condition frontière de symétrie (Condition de Neumann), nous utilisons un schéma de Gear :

$$-C_3^n + 4 C_2^n - 3 C_1^n = 0$$

- Pour i = 5** : r = R, nous sommes avec la condition de Dirichlet :

$$C_5^n = C_e$$

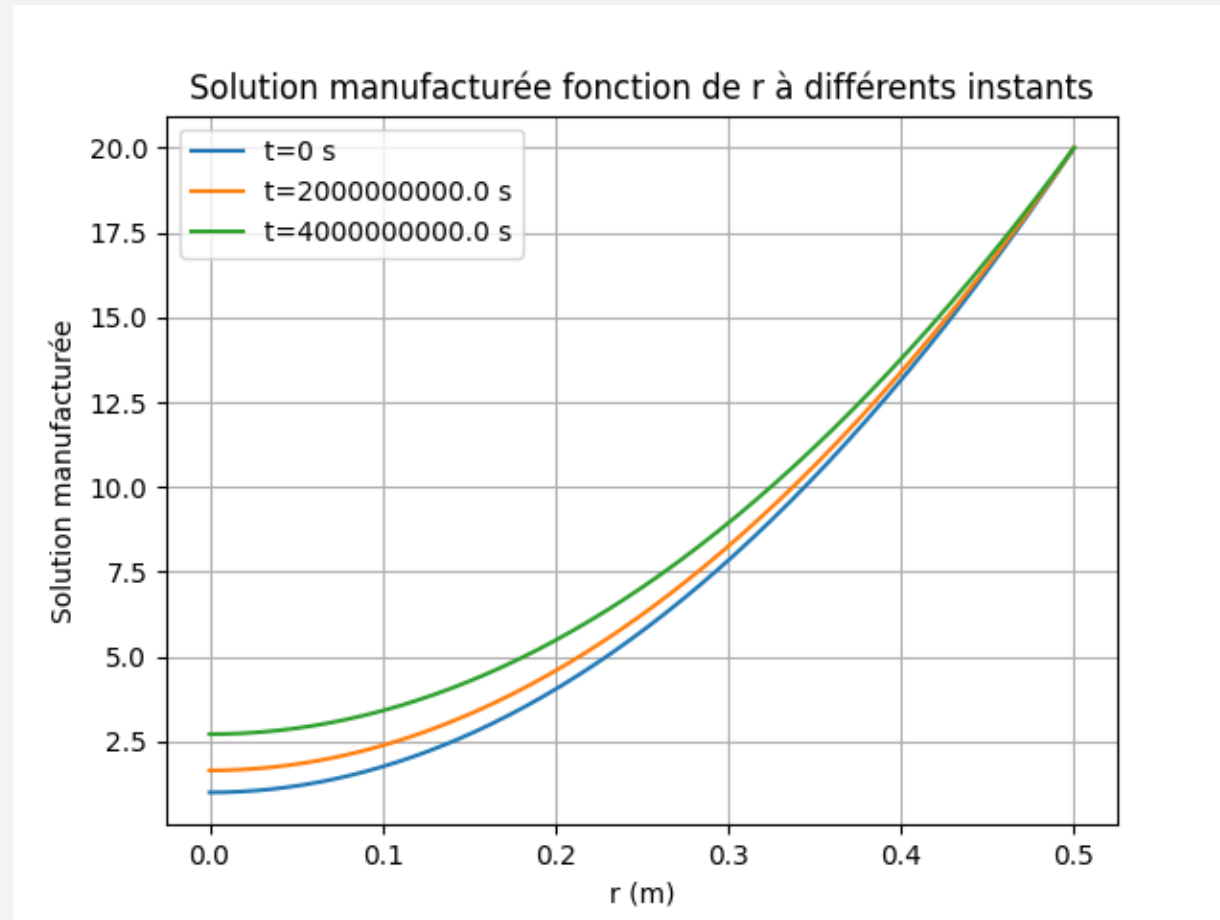
- Pour i = 2 ou 3 ou 4** :

$$\frac{C_i^{n-1}}{\Delta t} + s = C_{i+1}^n \cdot D_{eff} \cdot \left[ \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \right] + C_i^n \cdot \left[ \frac{1}{\Delta t} - 2 \frac{D_{eff}}{\Delta r^2} - k \right] + C_{i-1}^n \cdot D_{eff} \cdot \left[ \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r_i \Delta r} \right]$$

# QUESTION A – PROCÉDURE GÉNÉRALE

- Pour résoudre l'équation de diffusion du sel dans le pilier (équation en régime instationnaire), nous allons utiliser la procédure suivante :
  - **Discretisation de l'équation par différence finie** (avec les schémas présentés à la diapo précédente)
  - **Construction du système matriciel** : à partir des équations obtenues grâce à la discrétisation, il est possible de transposer le problème sous la forme d'un système matriciel, tout prenant en compte les conditions aux limites
  - **Résoudre le système matriciel** : en utilisant des méthodes comme la triangulation LU (méthode de Thomas) ou encore la méthode de Gauss Seidel. Pour cela, il faut réaliser une initialisation (à l'instant initial), pour faire une boucle temporelle (on résout le système à chaque pas spatial, puis on recommence au pas de temps suivant) jusqu'au temps final
  - **Afficher et vérifier les résultats** : faire la vérification de l'algorithme avec des analyses de convergence

# QUESTION B – GRAPHIQUE MMS



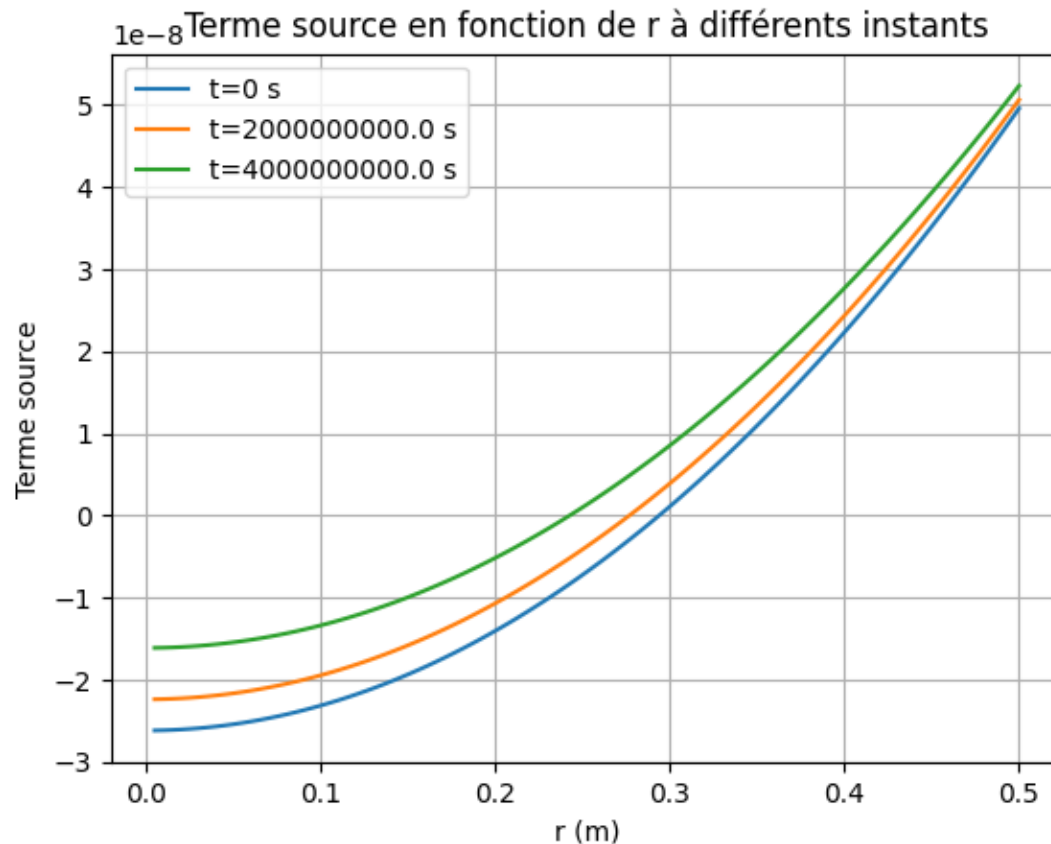
Graphique de la solution manufacturée respectant :

- Les deux conditions limites
- La physique du problème

Le graphique montre trois courbes de la MMS pour différents instants.

- La solution reste quadratique en  $r$  à tout instant, comme attendu avec la théorie.
- L'évolution temporelle se fait via le terme exponentiel, modifiant la concentration globale avec le temps.

# QUESTION C – TERME SOURCE



Les courbes du terme source  $s = L(\hat{C})$  à différents instants :

Nous pouvons observer une évolution temporelle cohérente car :

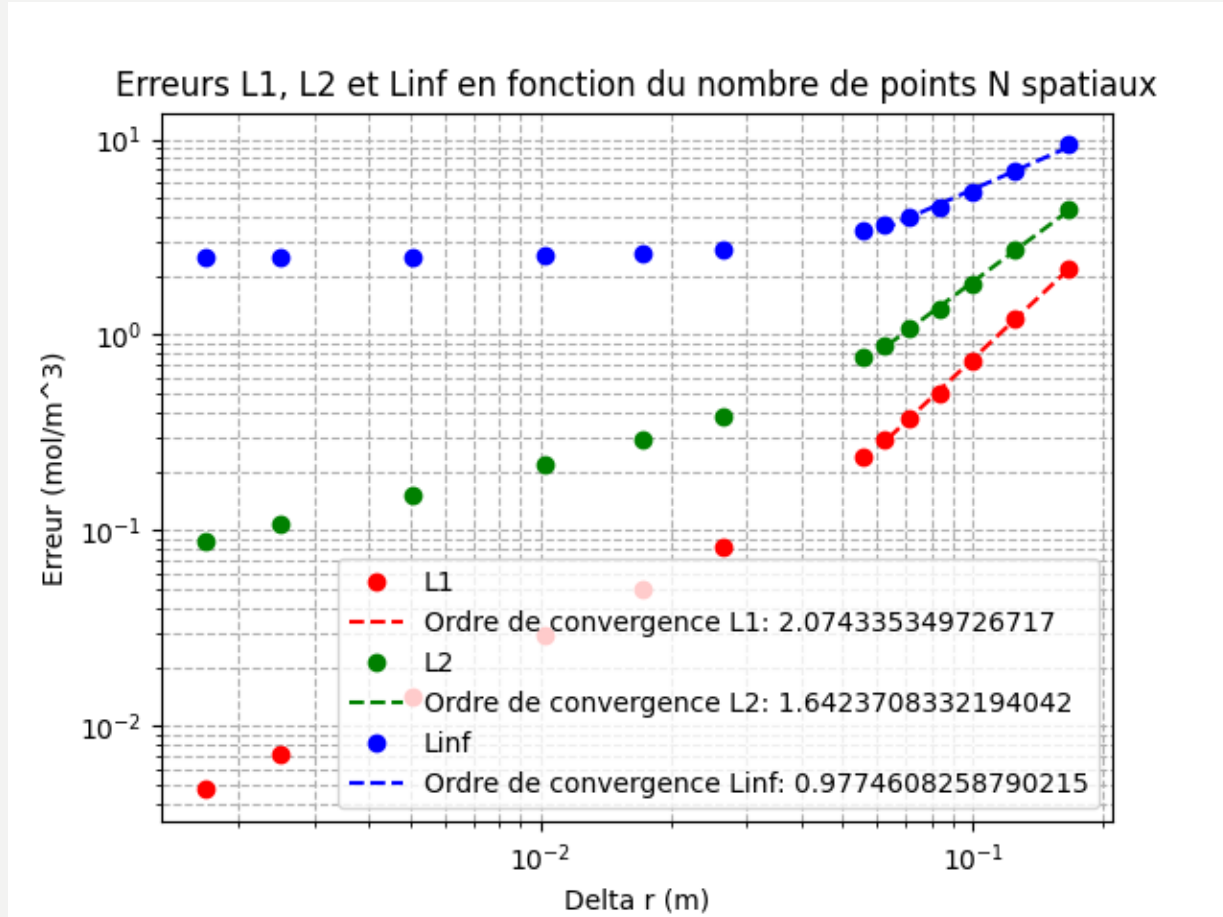
- Elle suit l'évolution exponentielle de la MMS
- Le profil est en accord avec la forme quadratique spatiale (en  $r$ )

# QUESTION D – CONVERGENCE SPATIALE

D'après la norme de l'erreur  $L_1$ , on obtient bien une convergence spatiale d'ordre 2 comme attendu (schémas de différenciation d'ordre 2 du devoir I).

Pour une raison qui nous échappe, les normes  $L_2$  et  $L_{\infty}$  ne retournent pas le même ordre. Cela pourrait venir de :

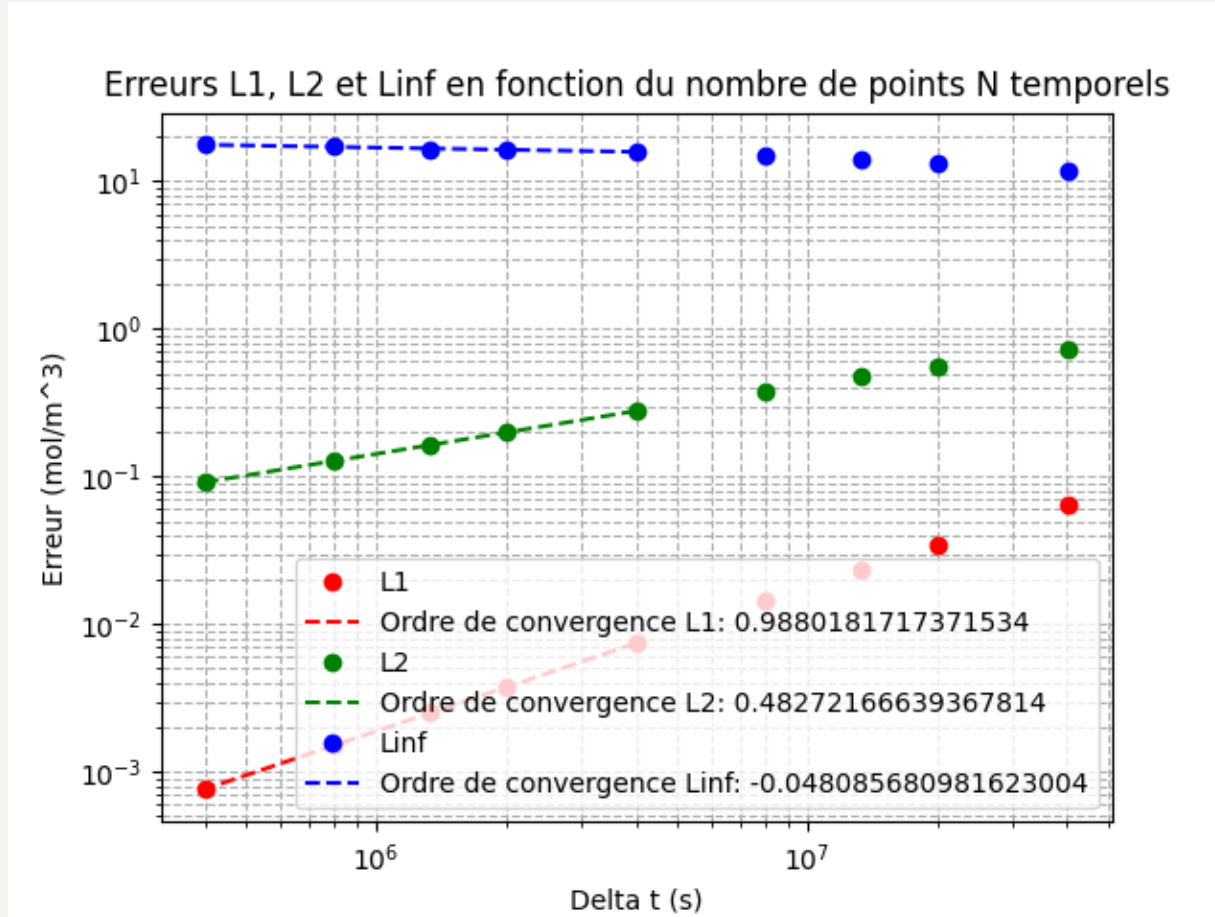
- Une mauvaise résolution aux extrémités (où le schéma de Gear pour la condition de Neumann pourrait générer une erreur plus importante)
- Ou comme  $L_{\infty}$  représente le maximum d'erreur, si des erreurs locales sont plus grandes à certains points (comme proches des bords) cela peut influencer sur cette norme



# QUESTION D – CONVERGENCE TEMPORELLE

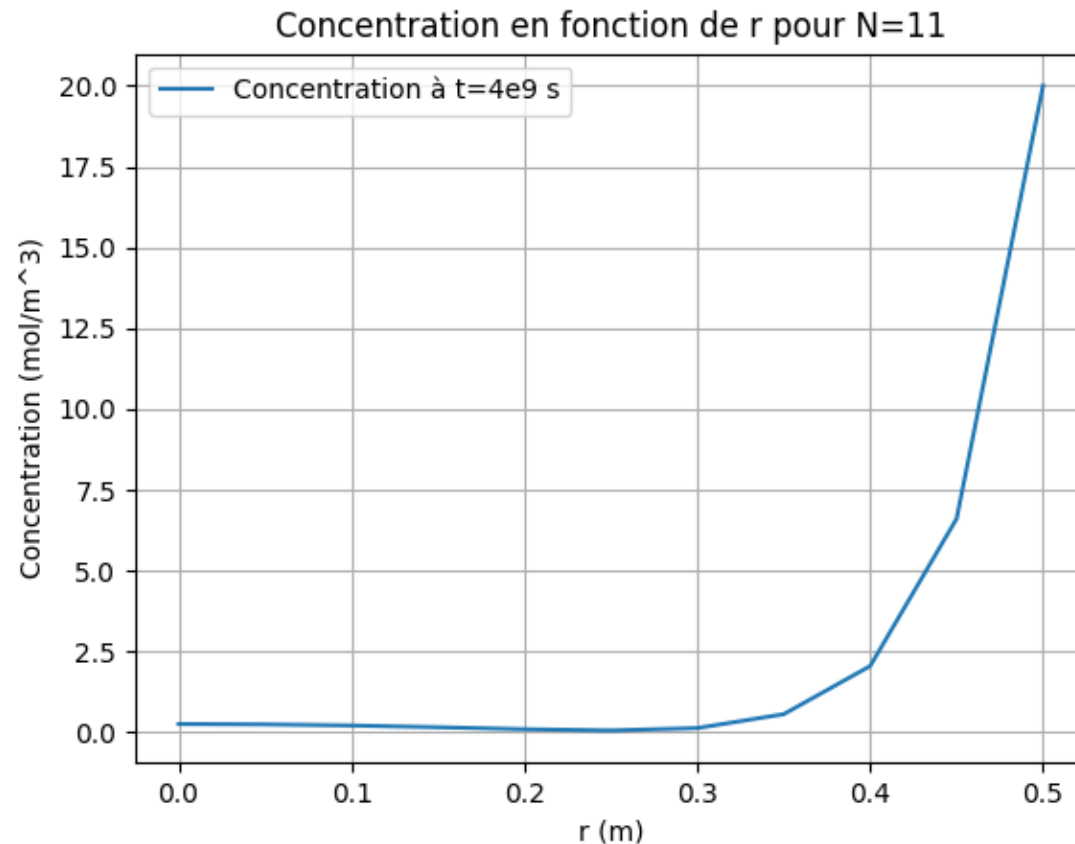
D'après la norme de l'erreur  $L_1$ , on obtient bien une convergence temporelle d'ordre 1 comme attendu (schéma d'Euler implicite en temps).

De même, les normes  $L_2$  et  $L_{\text{inf}}$  ne retournent pas le même ordre. Tout comme pour la diapo précédente, ces normes sont plus sensibles aux erreurs locales potentiellement,





# QUESTION F



Avec 11 points spatiaux et 100 incréments temporels ( $t$  allant de 0 à  $4 \cdot 10^9$  s).

Cela montre la convergence vers l'état stationnaire, qui est atteint à  $4 \cdot 10^9$  s (soit environ 126 ans).

La concentration sature aux valeurs attendues (à  $r = 0$  et et à  $r = R$ ).