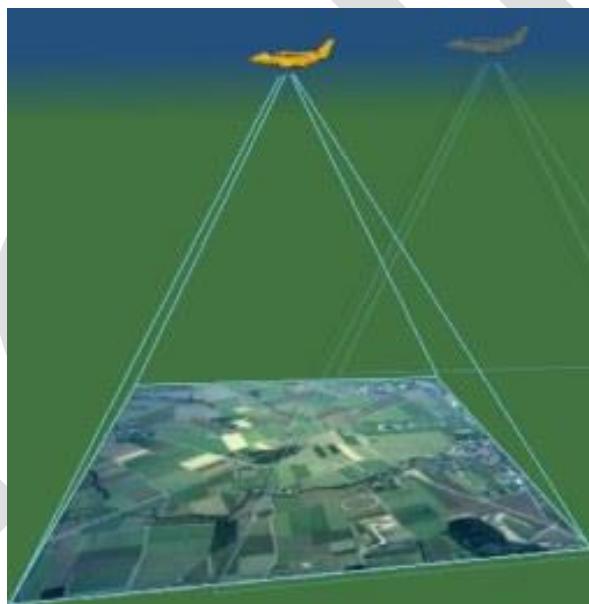


# FOTOGRAFETRIA DIGITAL



Professora Doutora Paula Redweik  
Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia  
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
2019



# 1 - Projeto fotogramétrico

## 1.1 Essencialidade da fotografia aérea na produção de informação geográfica

A Fotogrametria aérea é já há largas dezenas de anos uma peça indispensável na produção cartográfica. De facto, o levantamento fotogramétrico está atualmente na base de qualquer carta topográfica, mesmo de zonas de dimensões reduzidas em que os levantamentos por UAV concorrem com os levantamentos por topografia clássica. Isto deve-se a vários fatores, entre os quais, uns de carácter geral, como:

- a afinidade entre o conteúdo de uma fotografia aérea e aquilo que se convencionou representar numa carta topográfica (edifícios, caminhos, muros, etc. vistos de uma perspetiva vertical);
- a densidade de informação contida numa fotografia;
- a possibilidade de restituir diversos tipos de informação em variadas épocas;

e outros cuja relevância se foi revelando a par da evolução tecnológica, como:

- a possibilidade de mecanizar o processo de produção fotogramétrica;
- a possibilidade de associar o processamento eletrónico de dados e a computação gráfica à restituição fotogramétrica;
- a possibilidade de automatizar o processo de restituição, utilizando o processamento digital de imagens e modelos analíticos (equações).

O produto final da Fotogrametria até há poucos anos era considerado como sendo a carta em papel. Atualmente esse produto é considerado um conjunto de dados geoespaciais (tridimensional) que constitui a base de qualquer sistema de informação geográfica (SIG), sobre os quais se combinam dados de natureza não geográfica, quer para obtenção de novas cartas temáticas, quer para permitir análises de variadas situações. Deste ponto de vista, a Fotogrametria é uma das técnicas de aquisição de dados para um SIG.

Mas, não só a carta (em papel ou digital) é um produto da Fotogrametria. Os modelos tridimensionais de elevação, também importantes para os SIG quando a terceira dimensão é relevante para a análise, podem ser obtidos com elevada precisão por métodos fotogramétricos. As ortofotocartas e os modelos tridimensionais urbanos e não urbanos (realistas ou não) com crescente importância em contextos de gestão urbana e simulação, são também produtos da Fotogrametria, embora a associação e integração de dados provenientes de outros sensores e por outras técnicas seja cada vez mais comum.

## 1.2 Técnicas fotogramétricas para produção de informação geográfica

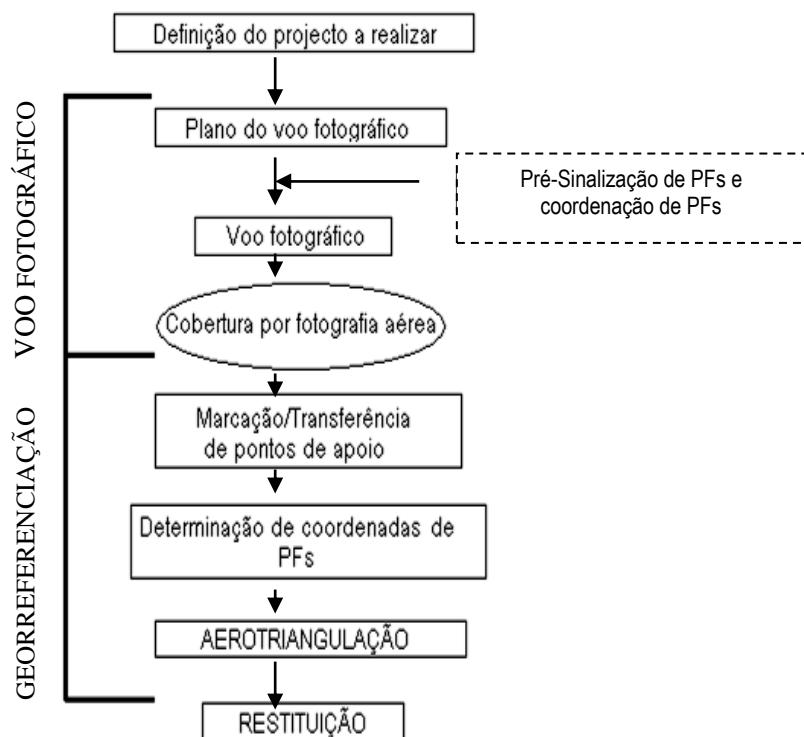
Para a produção cartográfica e dos outros produtos mencionados é utilizada primordialmente a fotogrametria aérea. Os métodos de restituição utilizados são a retificação fotográfica e a estereorrestituição interativa ou automática. Para projetos de modelação 3D urbana surgiram nos últimos anos soluções com restituição múltipla de fotografias aéreas convergentes.

Quanto ao formato dos resultados, os produtos fotogramétricos podem constituir uma representação de traço (carta), uma representação em formato de imagem (ortofoto, modelo 3D com textura realista) ou uma representação puramente numérica (modelo digital de elevação, nuvem de pontos 3D). Associada a cada uma das técnicas e formatos está uma determinada precisão que, complementada com a precisão dos dados de entrada (fotografia, imagem digitalizada e respetiva georreferenciação) vai condicionar a precisão do produto fotogramétrico final (precisão do produto final = função de [precisão das imagens, precisão da georreferenciação, precisão da técnica e formato final]).

## 1.3 Operações fotogramétricas preliminares

A base de todos os processos fotogramétricos para produção de informação geográfica é composta por duas grandes fases que são o voo fotográfico e a georreferenciação. Só após estas operações é que se pode passar à restituição do pormenor (extracção de informação da fotografia), por retificação, por estereorrestituição ou por restituição múltipla.

O esquema geral das operações preliminares é o seguinte:



### 1.3.1 Definição do projeto

Neste passo há que formular em problema fotogramétrico a tarefa proposta (pelo cliente, pelo plano, etc.)

Em especial interessa saber e definir :

- a área a levantar (localização e dimensões)
- a disposição espacial da área (região extensa bidimensionalmente ou uma tira ao longo de um eixo ainda que de orientação variável)
- o tipo de representação que se pretende (carta de traço, ortofoto, modelo tridimensional do terreno, etc.)
- a escala da representação (condiciona a escala da foto inicial e o tipo de pormenor a representar)
  - a precisão pretendida (planimétrica, altimétrica, e de pormenor: determina métodos a utilizar, escala da foto e número de pontos de apoio)
  - o prazo de execução
  - restrições ao voo (época do ano, vegetação, luminosidade, dimensão das sombras, zonas interditadas)
  - outros aspectos relevantes para a restituição.

## 1.4 Voo fotográfico

### 1.4.1 Plano de voo

No planeamento do voo fotográfico há que decidir e considerar os aspectos que se seguem.

#### 1.4.1.1 Escala da fotografia

A escala deve ser escolhida ponderando dois aspectos opostos:

- . o aspecto técnico, segundo o qual, para produzir uma carta a uma determinada escala, quanto maior for a escala da fotografia aérea, melhor se identificam os pormenores do terreno e maior será a precisão das medições a efectuar.
- . o aspecto económico, segundo o qual, quanto menor for a escala da foto, mais terreno será abrangido por cada foto e serão necessárias menos fotos para cobrir a mesma área, o que significa economia no número de restituições a realizar e no número de pontos de apoio necessários (Pontos fotogramétricos (PFs) e outros).

Empiricamente estabeleceu-se a seguinte regra para determinar a escala da foto em função da escala da carta pretendida (Regra de ‘von Gruber’), onde  $m_f$  é o módulo da escala da foto,  $m_c$  o módulo da escala da carta e  $k$  um valor que varia

$$m_f = k \sqrt{m_c}$$

$$E_f = 1/m_f$$

$$E_c = 1/m_c$$

entre 150 e 200 para câmaras analógicas e cerca de 350 para câmaras digitais.

A tabela seguinte mostra o módulo das escalas de foto em função do módulo das escalas de carta mais usuais para uma constante de 150. Na prática, devido ao facto de a atmosfera terrestre não ser totalmente transparente, e de, a escalas menores corresponder, em geral, uma maior altura da plataforma onde se encontra a câmara fotográfica (avião, por exemplo), a camada de atmosfera que medeia o avião e a superfície terrestre é mais espessa e menos transparente e consequentemente, a qualidade das fotografias obtidas a menores escalas pode não ser suficiente para produzir cartas. Por isso, sobretudo em face de câmaras analógicas, opta-se frequentemente por escalas maiores do que as que estão indicadas na tabela (para a carta 1:25000 é corrente utilizarem-se fotografias à escala 1:22000). As imagens de câmaras aéreas digitais, no entanto, têm mostrado ter definição suficiente para se poderem utilizar escalas muito menores de foto para produzir uma mesma escala de carta ( $k \approx 350$ ).

mc	mf
500	3500-5000
1000	5100-8000
2500	8500-13000
5000	12100-18000
10000	17000-26000
25000	28000-42000
50000	40000-60000
100000	60000-90000

Tabela 1.4.1.1 - Módulo de escala da foto para diversas escalas de carta ou ortofoto

Uma outra expressão para a escala de uma fotografia ou imagem aérea, mais utilizada em imagens digitais, aéreas e de satélite, é o Ground Sampling Distance, GSD. O GSD corresponde à distância entre os centros de dois pixels adjacentes no terreno. Considerando que o pixel da imagem é quadrado, o GSD corresponde também à dimensão (linear) no terreno coberta pelo lado do pixel da imagem. Assim, se dissermos que uma imagem tem um GSD de 15cm, significa que o lado do pixel, ou a sua largura no terreno são cerca de 15 cm. A relação entre GSD e escala da imagem é a seguinte:

$$1 \text{ GSD} = \text{pixel métrico} \times mf$$

onde, *pixel métrico* significa a dimensão do pixel na imagem em unidades do sistema métrico. Sendo dada a resolução de uma imagem digital em ppp (pixels por polegada) ou dpi (dots per inch), o pixel métrico obtém-se pela seguinte relação:

$$\text{Pixel métrico}[mm] = \text{valor da polegada}[mm] / \text{resolução}[dpi]$$

$$1 \text{ polegada} = 25.4[\text{mm}]$$

### 1.4.1.2 Sobreposições

Os voos fotogramétricos são planeados de modo a que se venha a obter uma cobertura da região a levantar constituída por fotografias verticais (idealmente nadirais), na qual as fotografias sucessivas apresentem uma zona de sobreposição, ou seja, a mesma área da superfície terrestre deverá ser captada e registada em duas (ou mais) imagens distintas.

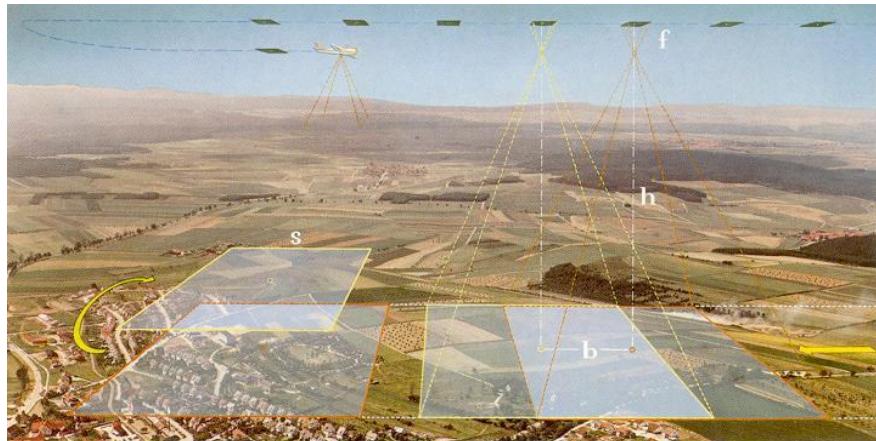


Figura 1.4.1.2.1 - Voo fotogramétrico

A sobreposição mede-se em percentagem da dimensão da fotografia, quer na direção de voo (sobreposição longitudinal  $\ell$ ), quer na direção perpendicular à do voo (sobreposição lateral  $q$ ). É comum descrever a sobreposição longitudinal como a sobreposição entre fotos sucessivas e a lateral como a sobreposição entre fiadas sucessivas ou adjacentes. O objetivo da sobreposição longitudinal é permitir a visualização tridimensional e a restituição estereoscópica na zona comum a duas fotografias, enquanto a sobreposição lateral tem principalmente a função de constituir uma margem de segurança para evitar lacunas entre fiadas.

Para efeitos de estereorrestituição é exigida normalmente uma sobreposição longitudinal de 60 % da dimensão da foto na direção do voo e uma sobreposição lateral de 20 a 30 % da dimensão da foto na direção transversal à do voo.

Para efeitos de aerotriangulação, para medições de alta precisão, voa-se com  $\ell = 60\%$  e  $q = 60\%$  e fazem-se ainda fiadas na direção perpendicular à principal com o objetivo de cada ponto do objeto poder ser medido num grande número de fotografias (até 18).

Em voos com UAV usam-se também sobreposições  $\ell$  e  $q$  iguais mas geralmente maiores (80%) com o intuito também de aumentar o número de medições de cada ponto do objeto.

Para efeitos de retificação fotográfica, para produzir ortofotomapas, embora em teoria não seja necessária qualquer sobreposição longitudinal para além da margem de segurança, pois não se pretende usufruir da estereoscopia, os voos são geralmente feitos com sobreposições superiores a 70%. As fórmulas a utilizar no plano de voo para ortoretificação têm algumas particularidades e são apresentadas na secção 1.4.2.1 - Orçamento.

O relevo do terreno influencia as sobreposições que se vão obter na cobertura fotográfica (figura 1.4.1.2.2), pelo que, por vezes é necessário ajustar o plano de voo à realidade do terreno considerando o seu relevo.

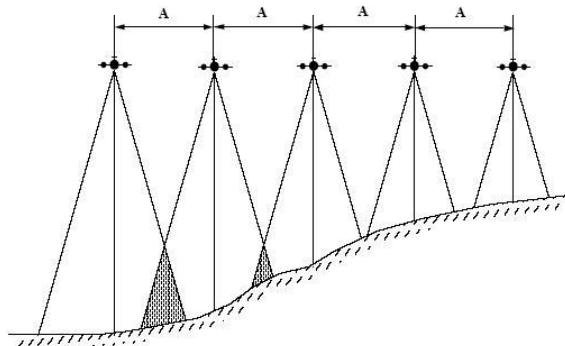


Figura 1.4.1.2.2 - Influência do relevo na sobreposição lateral (Alvarez)

Em geral se o terreno sobe, o valor da sobreposição desce. Isto é válido tanto para a sobreposição longitudinal como para a lateral. Sendo a sobreposição lateral em regra muito menor que a longitudinal, facilmente deixa de existir dando origem a lacunas fotográficas devidas ao relevo. Conhecendo o relevo do terreno previamente (por meio da carta topográfica ou informação 3D semelhante) esta situação pode-se evitar, alterando no mapa de voo um de dois parâmetros: a distância entre eixos de fiadas, mantendo a altura absoluta de voo (figura 1.4.1.2.3) ou a altura absoluta de voo, mantendo a altura sobre o solo e a distância entre eixos de fiadas (figura 1.4.1.2.4). A altura absoluta de voo é a que se refere ao datum altimétrico.

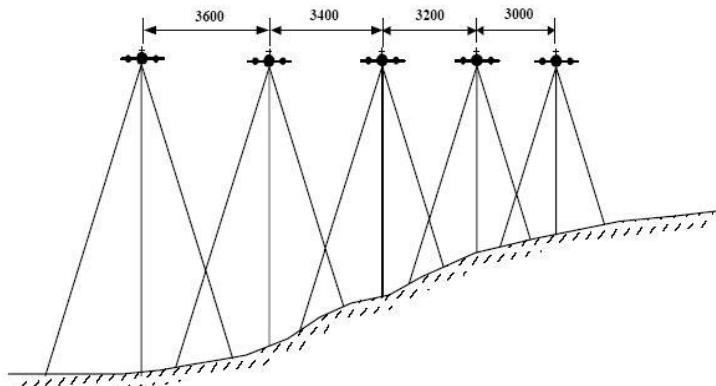
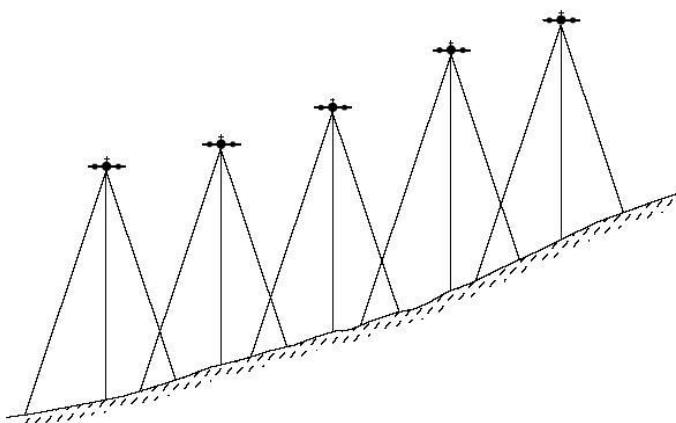


Figura 1.4.1.2.3 - Variação de distância entre eixos para garantir sobreposição lateral (Alvarez)



**Figura 1.4.1.2.4 - Variação de altura absoluta de voo para garantir sobreposição lateral (Alvarez)**

A nível da sobreposição longitudinal, uma sobreposição menor que 55% vai prejudicar a ligação entre modelos e uma redução abaixo dos 50% vai originar mesmo lacunas estereoscópicas. Analogamente, a solução para este problema passa pela variação da base aérea, mantendo a altura absoluta, ou pela variação da altura absoluta. Sendo tecnicamente mais exequível que o avião mantenha a altura absoluta ao longo da fiada, opta-se preferencialmente pela primeira solução. Nas câmaras aéreas analógicas com controlador de sobreposição, é possível corrigir em tempo real o intervalo de tempo entre os disparos consecutivos o que equivale a alterar a distância entre os disparos (= base aérea). Nas câmaras aéreas digitais, tal correção é realizada com base nos dados posicionais fornecidos por GPS a alta frequência durante o voo fotográfico.

Caso o relevo varie ao longo da direção da fiada de modo crítico, e se não for possível controlar e alterar a base “on-line”, ter-se-á que, semelhante ao que está ilustrado na figura 1.4.1.2.5, na fase de planeamento realizar uma partição de fiadas, planeando para cada direção uma fiada parcial a uma determinada altura absoluta de voo e uma segunda (ou terceira) fiada parcial a uma altura absoluta diferente. O avião realizará primeiro as fiadas à mesma altura e numa segunda fase as restantes fiadas a altura(s) diferente(s). O plano deve incluir pelo menos um modelo de sobreposição entre as fiadas parciais da mesma direção de alturas diferentes.

Para cartografia sistemática, em que a intenção é cartografar grandes extensões de terreno de um país, as direções de voo preferenciais para as fiadas são Norte-Sul ou Este-Oeste, mas qualquer outra direção é restituível, optando-se normalmente pela direção ao longo da qual as fiadas poderão ser mais longas.

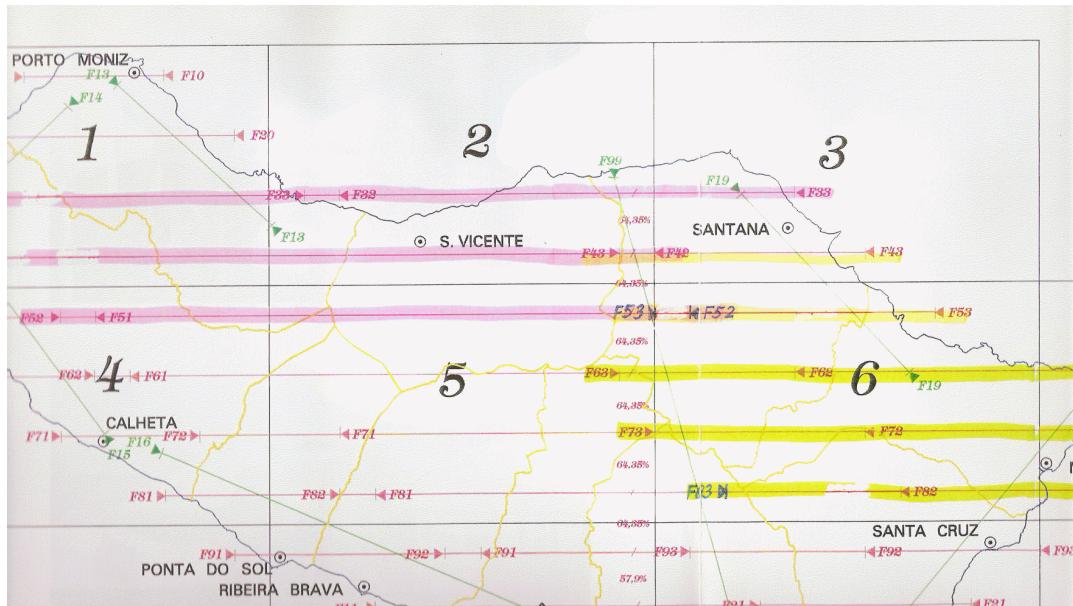


Figura 1.4.1.2.5 - Esquema de voo com partição de fiadas. As setas indicam o início e o fim de cada fiada. (Cavaca e Sequeira, Relatório de Estágio)

### 1.4.1.3 Câmaras e objetivas a utilizar

As câmaras a utilizar em fotogrametria aérea para produção cartográfica dependem da dimensão do projeto. Para projetos de maior dimensão, como para cartografia sistemática, são usadas câmaras métricas aéreas digitais de grande formato de imagem, as quais produzem séries de fotografias com a sobreposição que se pretende. Atualmente, para produção cartográfica, podem ser ainda usadas câmaras de médio formato e de pequeno formato, sobretudo para projetos de menor dimensão em que a câmara pode ir a bordo de um UAV (ou drone). Há ainda a alternativa de utilizar imagens de satélite de alta resolução (Ikonos, Quickbird, Orbview, Worldview), embora estas sejam apenas aplicáveis para cartografia de média/pequena escala a partir de imagens estereoscópicas ou na produção de ortoimagens de grandes zonas.

Existem câmaras com objetivas de diferentes distâncias focais (diferentes constantes de câmara). Em algumas câmaras, sobretudo nas mais recentes, existe a possibilidade de intermutar as objetivas mantendo o mesmo corpo da câmara. As câmaras (ou objetivas) de diferentes distâncias focais, devem ser escolhidas para o tipo de missão em vista. Variando a objetiva numa mesma câmara é possível variar a escala da foto mantendo a altura de voo ou então, variar a altura de voo mantendo a escala da foto.

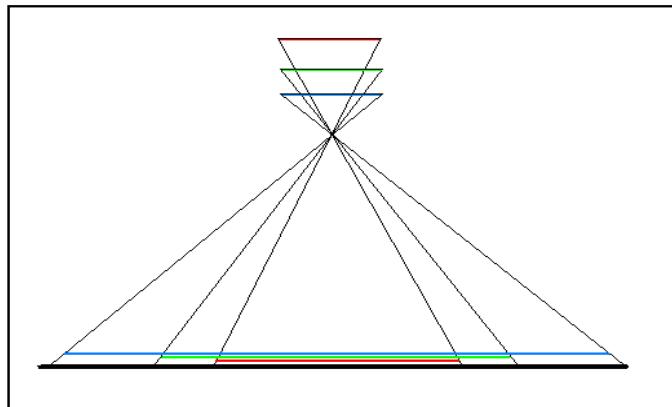


Figura 1.4.1.3.1 - variação de escala a partir da mesma altura de voo usando diferentes objetivas (diferentes constantes da câmara)

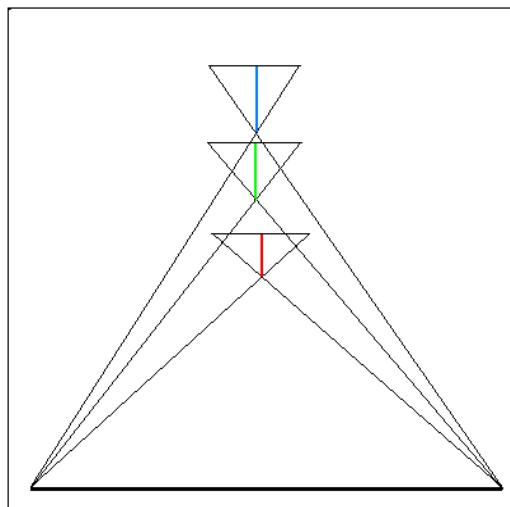


Figura 1.4.1.3.2 - Escala igual a partir de várias alturas de voo usando diferentes objetivas (diferentes constantes da câmara)

Existem vários critérios para a escolha da objetiva certa. Há uma tendência para usar distâncias focais maiores (cone de menor abertura  $\rightarrow$  menores distorções perspectivas) quando o objetivo da missão fotográfica é:

- a fotointerpretação
- produzir ortofotocartas
- cartografar terreno com altas montanhas e vales profundos
- cartografar cidades com prédios muito altos.

A tendência é para usar distâncias focais menores quando o objetivo é:

- a aerotriangulação
- reduzir custos de voo
- realizar voos panorâmicos
- aumentar a precisão altimétrica dos resultados (aumentando a relação base-altura)

As objetivas mais usuais em câmaras analógicas (não digitais) que maioritariamente apresentavam formatos de imagem quadrados, eram as seguintes:

objetiva	abertura [grados]	constante [cm]
ang. estreito	33	60
ang. normal	62	30
ang. intermédio	85	21
grande angular	100	15
super grande angular	140	9

Tabela 1.4.1.3.1 - Constantes e aberturas de objetivas de câmaras analógicas - formato de fotografia: 23cm x 23cm

Na maioria das câmaras digitais que associam várias câmaras numa só, não existe a possibilidade de alterar a constante da câmara, visto a imagem final distribuída ao utilizador ser uma construção analítica das imagens originais captadas pela câmara, à qual está associado um determinado valor de constante de câmara fictício. O formato da imagem final não é quadrado (é retangular ou em faixa) pelo que os ângulos de abertura da objetiva são diferentes na direção do voo e na direção perpendicular à do voo (Figura 1.4.1.3.3).

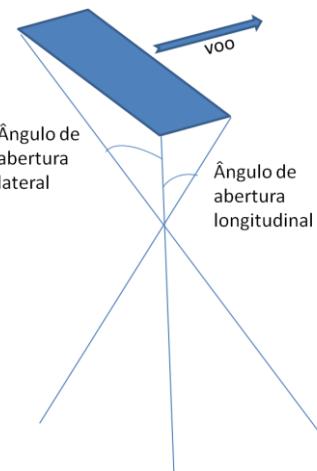


Figura 1.4.1.3.3 - ângulos de abertura em câmaras digitais

As constantes e aberturas de algumas câmaras digitais de grande formato atualmente mais implantadas no mercado estão indicadas na tabela abaixo.

Câmera Digital	c	Abertura longitudinal	Abertura lateral
ADS 40	62,5mm	-	69 grad
DMC	120mm	49 grad	78 grad
UltraCamD	100mm	41 grad	61 grad

Tabela 1.4.1.3.2 - Constantes e aberturas de câmaras digitais

#### 1.4.1.4 Traçado de voo

O traçado de voo que vai determinar a rota a seguir pelo avião, depende diretamente da forma dos limites e extensão do terreno a levantar fotogrametricamente. O objetivo é, sempre que possível, obter fiadas rectilíneas de fotografias com determinada sobreposição entre si. Tanto o eixo da fiada como as margens superior e inferior das fotografias devem ser projectáveis como rectas no terreno.

-Se o terreno a levantar for uma área extensa aproximadamente retangular, o avião deverá sobrevoá-lo em traçados paralelos, varrendo toda a área como ilustrado na figura.

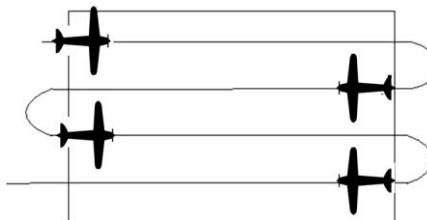


Figura 1.4.1.4.1 - Traçado de voo em área de terreno retangular

- Se a área a levantar apresentar um formato irregular, normalmente é subdividida em vários rectângulos de diversas dimensões e orientações, de modo a que o conjunto de todas as sub-áreas cubra toda a área pretendida. Dentro de cada rectângulo planeia-se o traçado de voo como no caso anterior.

-Se a área a levantar for apenas uma faixa estreita coberta em largura por apenas uma fiada de fotografias, por ex. ao longo de um rio, da linha de costa, de uma estrada, caminho de ferro ou faixa de terreno onde virá a ser implantada uma estrada ou caminho de ferro, o voo terá de ser constituído por vários troços rectilíneos mas de direções variáveis, como ilustra a figura.

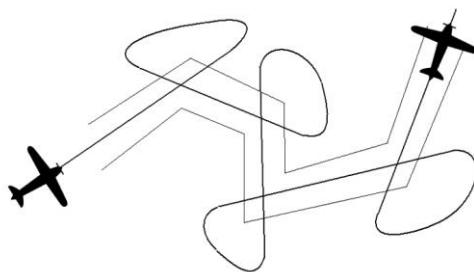


Figura 1.4.1.4.2 -Traçado de voo em faixa estreita de terreno

Neste caso, os traçados sobre a zona de interesse deverão ser retilíneos, sendo todas as curvas necessárias à mudança de direção realizadas fora da zona de interesse.

#### 1.4.1.5 Época do voo

A época em que o voo terá lugar depende, por um lado, das condições climatéricas da região a sobrevoar e, por outro lado, do estado da cobertura vegetal. Para um levantamento fotogramétrico o mais completo possível, não deve haver nuvens nem copas de árvores a cobrir o terreno. Assim, a melhor época do ano para realizar um voo fotogramétrico às nossas latitudes é o princípio da Primavera, quando a maior parte das árvores ainda não tem muita folhagem e já não há tantas nuvens no céu (tudo isto varia muito de região para região). Para que a fotografia aérea tenha luminosidade suficiente, e as sombras não tenham dimensões que impossibilitem a restituição, é normalmente exigido que o Sol tenha uma determinada altura mínima durante a sessão fotográfica. O valor para essa altura mínima varia não só com a latitude média da região a levantar como também com o objetivo final do voo fotográfico. Enquanto para cartografia de traço, às nossas latitudes é exigida uma altura mínima do Sol de 30°, para ortofotomaps poderá ser exigida uma altura mínima superior, visto pretender-se evitar as sombras no produto final. Para fotointerpretação, sobretudo em zonas de pouco contraste, as sombras podem ser úteis na identificação de objetos, pelo que se deve voar com Sol baixo. O valor da altura mínima do Sol determina para cada dia do ano uma janela temporal dentro da qual é possível realizar um voo fotográfico em condições, desde que não haja nuvens. Por outro lado, há situações que obrigam a voar sob um tecto de nuvens para obter uma luminosidade homogénea. As imagens “sem sombras” assim obtidas, permitem a restituição de zonas que estão permanentemente em sombra (vales, falésias, fajãs). As imagens de câmaras digitais, pelo facto de terem uma maior resolução radiométrica que o filme fotográfico, permitem distinguir muito mais pormenores em zona de sombra, pelo que os voos com câmaras digitais podem ser realizados dentro de janelas temporais mais alargadas.

#### 1.4.1.6 Tipo de imagens

Interessa também definir se se pretendem imagens pancromáticas, coloridas ou de infra-vermelhos (multiespectrais). Em geral as câmaras digitais atuais são capazes de fornecer num só voo imagens de todos os tipos referidos. As resoluções geométricas dessas imagens é que poderão ser diferentes. Em geral, as imagens pancromáticas proporcionam melhor resolução geométrica e as imagens coloridas apresentam informação radiométrica mais diferenciada, o que facilita a interpretação do pormenor. Para as câmaras digitais, tanto a resolução geométrica e radiométrica como a sensibilidade com que a imagem é captada, são características da câmara (sensor) visto a captação de imagens ser realizada pelos sensores CCD que as integram.

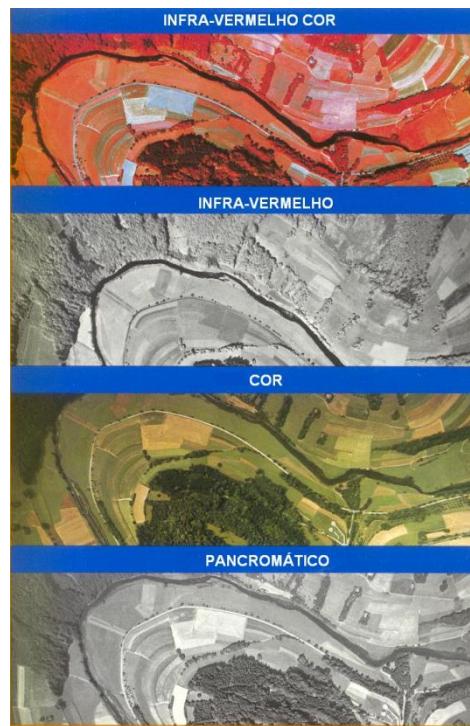


Figura 1.4.1.6.1 - Tipos de imagem utilizados em Fotogrametria aérea

### 1.4.1.7 Avião fotogramétrico/ plataforma aérea

Embora atualmente se possa realizar coberturas aéreas a partir de vários tipos de plataformas aéreas, incluindo UAV (drones), grandes projetos cartográficos continuam a preferir câmaras digitais de grande formato montadas em aviões fotogramétricos. O avião a utilizar, caso haja hipótese de escolha, deve ser um aparelho que apresente poucas vibrações durante o voo. Em princípio, qualquer avião onde seja possível perfurar a fuselagem inferior para montar uma câmara aérea pode ser transformado num avião fotogramétrico. Geralmente as firmas optam por aviões de pequeno porte que são mais económicos na manutenção. A considerar na escolha, se a velocidade mínima, a altura máxima de voo (teto), o alcance máximo e a autonomia de voo satisfazem os requisitos do projeto.

Marca/modelo	Num.Lugares	Capacidade p/ combustível	Altitude máxima operacional	Velocidade horizontal	Alcance	Autonomia de voo
Beach/King air	6-10	1170 l	7800m	320km/h	2125km	6:10h
De Havilland/ Twin Otter	22	1150 l	8150m	258km/h	1200km	4:50h
Cessna 402	8	~500 l	7980m	180-300km/h	640km	6:30h
Cessna 404	8	~500 l	7980m	200-340km/h	1000km	10:00h

Tabela 1.4.1.7.1 - Características de alguns aviões fotogramétricos



Figura 1.4.1.7.1 - Exemplos de aviões fotogramétricos

#### 1.4.2. Mapa de voo

Pertence ao plano de voo um esquema de navegação, ou mapa de voo, elaborado sobre uma carta topográfica da região a levantar, de escala menor que a da cobertura fotográfica pretendida. O mapa de voo deverá conter o traçado planeado para a rota do avião ao longo de cada fiada, na mudança de fiada e por vezes no início e no fim do voo fotográfico. Apenas o traçado dentro da área a levantar é da responsabilidade de quem pretende a cobertura, sendo os restantes traçados da responsabilidade de quem voa. Em cada fiada podem estar assinalados todos os pontos de tomada de foto ou apenas o primeiro, o último e a indicação da sobreposição entre fotos requerida. No início de cada fiada está ainda indicado o rumo a tomar pelo avião e a altura absoluta a garantir na entrada da fiada. Juntamente com o mapa de voo, deve ser elaborada uma folha ou ficheiro de informações adicionais de onde constem os seguintes elementos:

- nome do projeto
- data pretendida para a realização do voo
- escala das fotos
- constante da câmara a utilizar
- altura absoluta do avião
- sobreposições longitudinal e lateral
- tipo de imagem (pancromático, RGB, IV,etc)

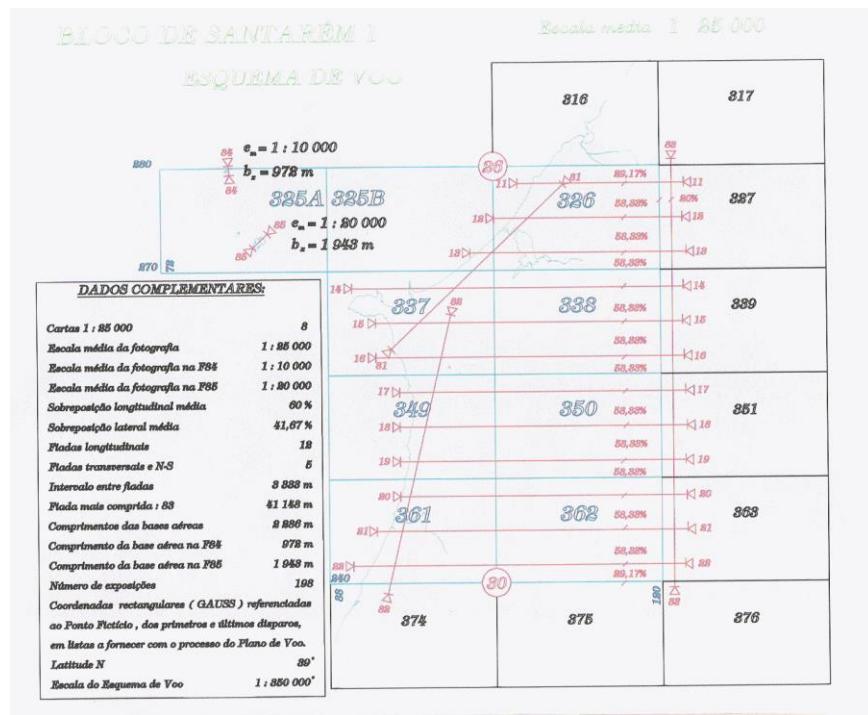


Figura 1.4.2.1 - Exemplo de esquema de voo com dados complementares  
(Cavaca e Sequeira, Relatório de Estágio)

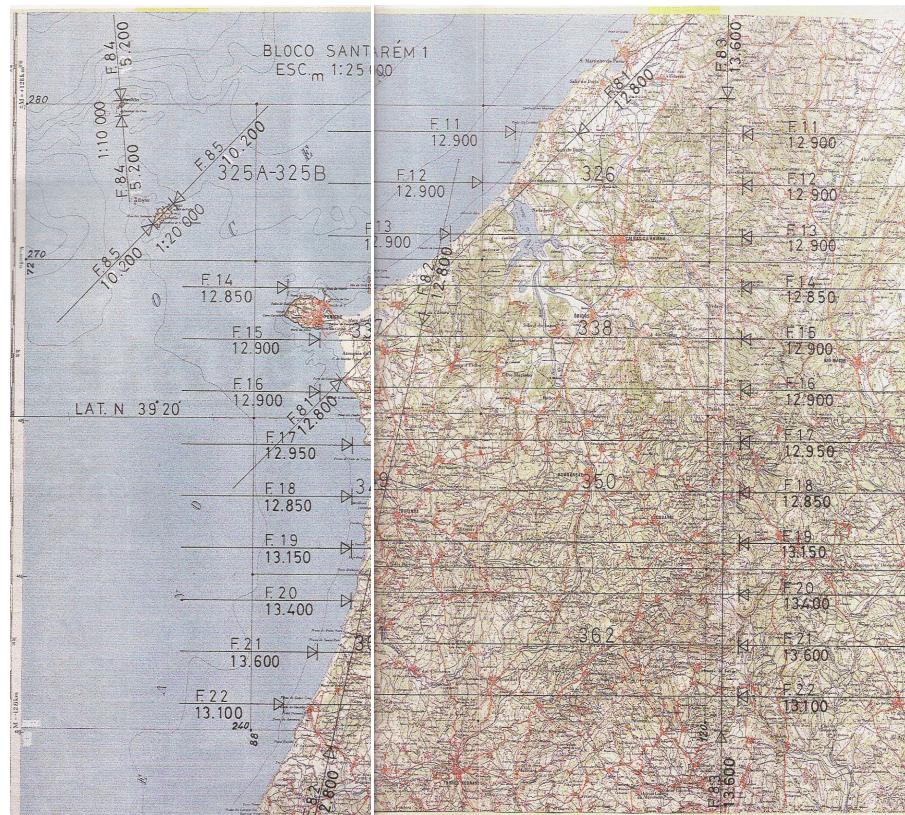


Figura 1.4.2. 2 - Exemplo de mapa de voo (Cavaca e Sequeira, Relatório de Estágio)

### 1.4.2.1 Orçamento

O orçamento de um projeto fotogramétrico envolve os custos na aquisição das imagens, na georreferenciação e na restituição. Aqui, limitar-nos-emos a considerar a parte relativa ao voo (aquisição das imagens).

Ao plano de voo está normalmente associado um orçamento dos custos. Para efeitos de planeamento e de cálculo do orçamento considera-se o caso geral da cobertura de uma extensa área retangular (dimensões  $L \times Q$ ,  $L > Q$ ) por fiadas paralelas, assumindo ainda o terreno plano e as fotografias rigorosamente verticais. As velocidades do avião estão normalmente expressas em nós (milhas náuticas por hora), sendo a conversão a seguinte:

$$1 \text{ nó} = 0.515 [\text{m/s}] = 1.852 [\text{km/h}]$$

Vejamos então como calcular as variáveis que nos permitem elaborar o mapa de voo e o orçamento.

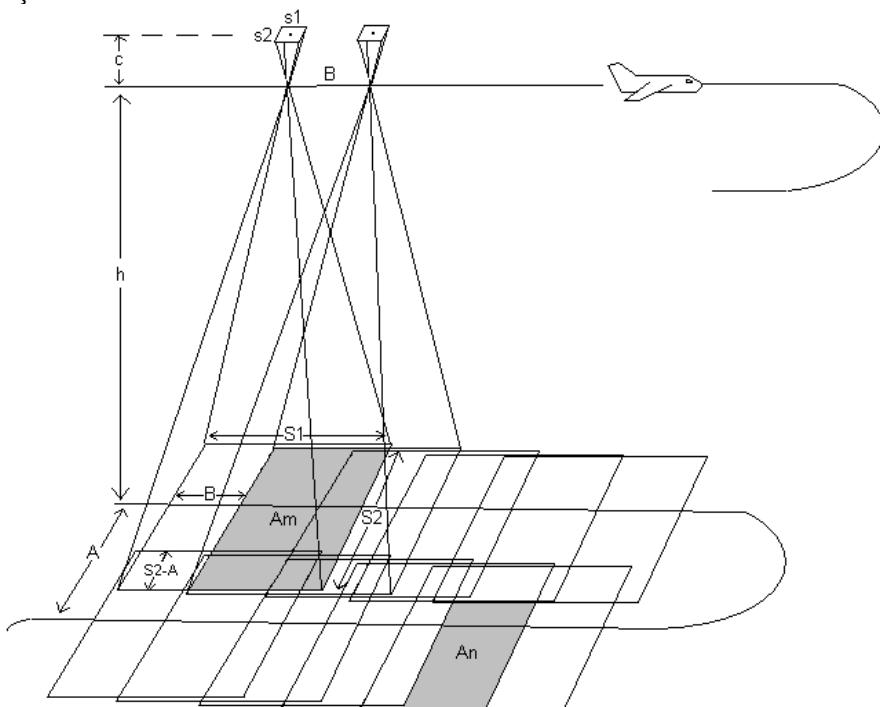


Figura 1.4.2.1.1 - Esquema do plano de voo

A- distância entre eixos de fiada

B- base real: distância entre pontos de tomada de foto

c- constante da câmera

s1- lado da fotografia na direção do voo (sem informações marginais)

s2- lado da fotografia na direção perpendicular à do voo

h- altura acima do solo

Z- cota do terreno

Zo- altura absoluta do avião

v- velocidade média do avião (durante a sessão fotográfica)

L- comprimento de uma faixa ou do bloco

Q- largura do bloco

### Formulário geral para o plano de voo

módulo da escala da foto:  $mf = h / c$

lado da foto no terreno ao longo da fiada :  $S1 = s1 \cdot mf$

lado da foto no terreno perpendicular à fiada :  $S2 = s2 \cdot mf$

base fotográfica :  $b = B / mf$

altura de voo sobre o solo :  $h = c \cdot mf$

altura de voo absoluta :  $Zo = h + Z$

sobreposição longitudinal % :  $\ell = ((S1-B)/S1) \cdot 100 = (1-B/S1) \cdot 100$

sobreposição lateral % :  $q = ((S2-A)/S2) \cdot 100 = (1-A/S2) \cdot 100$

área coberta por uma foto:  $Af = S1 \cdot S2 = s1 \cdot mf \cdot s2 \cdot mf$

comprimento da base aérea para  $\ell\%$  de sobreposição longitudinal :  $B = S1 (1 - \ell / 100)$

distância entre eixos de fiadas para  $q\%$  de sobreposição lateral :  $A = S2 (1 - q / 100)$

número de modelos por fiada:  $nm = \text{int}((L/B) + 1)$

número de fotos por fiada:  $nf = nm + 1$

número de fiadas por bloco :  $nfx = \text{int}((Q/A)+1)$

área estereoscópica coberta por um modelo :  $Am = (S1-B) \cdot S2$

área de sobreposição entre modelos consecutivos :  $Asm = (S1-2B) \cdot S2$

área nova no bloco, por modelo (a partir da 2ª fiada):  $An = A \cdot B$

intervalo de sequência de fotos :  $t[s] = B[m] / v[m/s]$  > ciclo da máquina fotográfica (2.0 seg p/camaras analógicas, varia para câmaras digitais)

tempo de exposição máximo :  $dt = a \times mf/v$  (a - arrastamento admissível de 5 a 15  $\mu m$ )

### Especificidades para voos para ortofotomaps:

Como referido anteriormente, para efeitos de retificação fotográfica, para produção de ortofotomaps, embora em teoria não seja necessária qualquer sobreposição longitudinal para além da margem de segurança, os voos são geralmente feitos com sobreposições superiores a 70% sendo estas variáveis. Assim, o ortofotomap final pode ser produzido a partir apenas das zonas centrais das várias fotografias aéreas as quais vão formar um mosaico fotográfico. As zonas centrais são onde as distorções radiais devidas ao relevo e à altura dos objetos são menores. Essas distorções são inerentes à projeção central, ou seja, devem-se à natureza da fotografia aérea que é aproximadamente uma projeção central.

Normalmente é adotada no plano de voo para este caso, uma distância entre eixos de fiadas (A) igual à base aérea (B). B corresponde à distância real entre dois pontos de tomada de foto sucessivos, enquanto A corresponde à distância entre as linhas que unem os pontos de tomada de foto ao longo de cada fiada, em duas fiadas adjacentes.

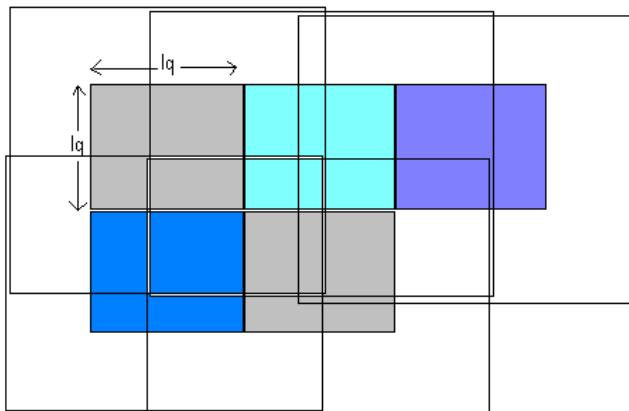


Figura 1.4.2.1.2- Mosaico de ortofotos de quadrados centrais de fotografias aéreas. As zonas coloridas são as que se aproveitam para o ortofotomap final.

O valor da sobreposição longitudinal,  $\ell$ , para além de no caso geral ser superior a 70%, depende ainda, da dimensão do lado do quadrado central das fotografias,  $lq$ , que se pretende aproveitar para a ortofoto final. A base aérea B toma-se, então, igual à dimensão do lado do quadrado central no terreno, ou seja, a dimensão  $lq$  na foto multiplicada pelo módulo da escala média da foto  $mf$ :

$$B = lq \cdot mf$$

A dimensão do quadrado central depende da distorção radial admissível na ortofoto final  $\Delta r$ , a qual por sua vez, depende diretamente da variabilidade (amplitude)  $\Delta h$  do relevo na zona coberta pela fotografia aérea (para zonas pouco acidentadas pode  $lq$  ser maior do que para zonas muito acidentadas ou com objetos elevados, como prédios altos).

$$\Delta r = \frac{r}{h_0} * \Delta h = \frac{r}{c.m_f} * \Delta h$$

$$r = \frac{\Delta r}{\Delta h} \cdot c.m_f$$

$$\ell q = r\sqrt{2}$$

r = distância radial máxima do quadrado central (= semi diagonal do quadrado)

$\Delta r$  = distorção radial máxima admissível na ortofoto ( $\approx$  erro de grafismo 0,2 mm no produto impresso)

$\Delta h$  = variação máxima de cota dentro do quadrado central

$h_0$  = altura de voo sobre o ponto médio da fotografia.

$\ell q$  = lado do quadrado central

c = constante da câmara

$m_f$  = módulo da escala da fotografia

Os custos considerados para o orçamento são a soma de:

- o número total de fotografias, N, a multiplicar pelo preço de cada fotografia ;

$$N = nfx \times nf$$

$$\text{Custo fotos} = N \times \text{preço foto}$$

- o tempo total de voo em horas, T, a multiplicar pelo preço da hora de voo (inclui eventualmente o tempo de deslocação entre a base aérea (aeródromo) e o local na ida e na volta)

$$T = (B / v) \cdot nfx \cdot (nf - 1) + tf \cdot (nfx - 1)$$

$$\text{Custo tempo voo} = T \times \text{preço hora de voo}$$

tf : tempo de mudança de faixa [h]

v : velocidade do avião [km/h]

B : Base aérea [km]

### 1.4.3 Análise do voo fotográfico

O vôo fotográfico não é realizado em regra por engenheiros geoespaciais, mas a sua qualidade é controlada posteriormente por eles. Da qualidade do voo depende a qualidade e a precisão dos produtos fotogramétricos.

De posse das fiadas de fotografias do voo em formato digital, há que analisar:

- a qualidade da fotografia em si (luminosidade homogénea, ausência de nuvens e de sombras profundas, arrastamento dentro dos limites, contraste, nitidez, etc.)
- a verticalidade da foto, caso se trate de um voo vertical
- as linhas de voo (eixos de fiadas)
- as sobreposições entre fotos e entre fiadas
- a homogeneidade da escala ao longo do bloco

Tanto a presença de nuvens como a de sombras profundas impossibilita a restituição das zonas ocultas. Quanto à cobertura por nuvens, pode acontecer que a zona oculta numa faixa já não esteja oculta na faixa seguinte (a qual foi obtida num momento diferente, podendo as nuvens entretanto ter alterado a posição ou a respetiva densidade).

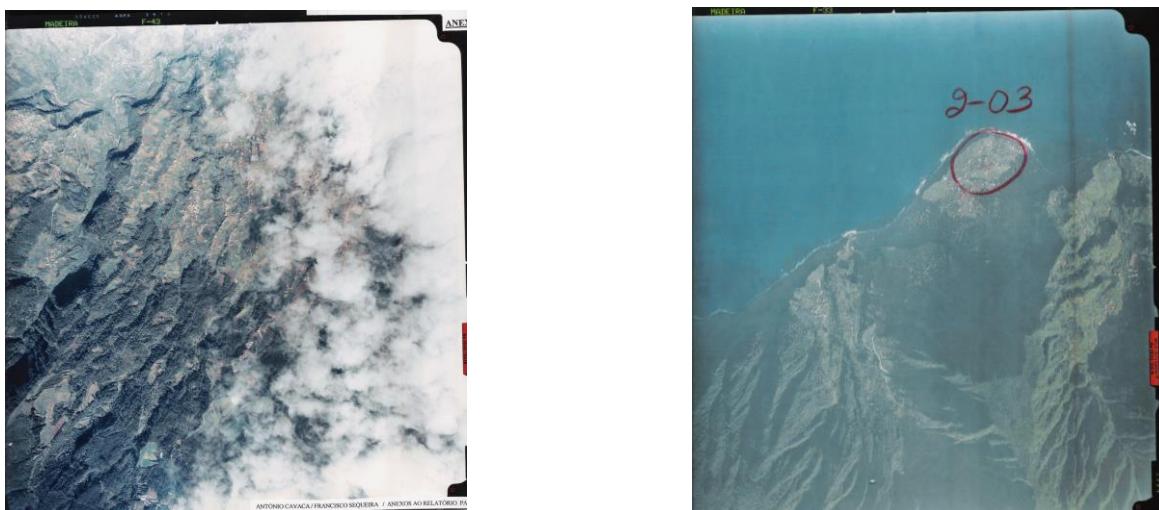


Figura 1.4.3.1 - Exemplos de fotografias não aceitáveis por cobertura por nuvens (esq.) e sombra profunda (dir. abaixo do círculo)

Enquanto a estereorrestituição dessas zonas poderá em grande parte ser realizada (desde que a cobertura por nuvens não seja total), a ortorretificação dessas imagens é impossível, pois, como é lógico, não deve constar qualquer nuvem numa ortofoto. Quanto às sombras profundas devidas ao relevo, elas impossibilitam qualquer tipo de restituição na zona oculta. Nas imagens de câmaras aéreas digitais que apresentam uma resolução radiométrica muito superior à do filme analógico (12 bits em vez de 8 bits) é possível restringir as sombras profundas a áreas muito menores, visto que é possível reconhecer pormenores suficientes para restituir nas zonas de sombra desde que se altere a luminosidade e o contraste localmente no momento de visualização e restituição no monitor do computador.



Figura 1.4.3.2 - Imagem da câmara digital DMC Z/I. Detalhes visíveis em zonas de sombra “profunda” limitadas pela linha branca (Lauenroth)

Se a linha de voo apresentar grandes desvios em relação ao planeado, pode acontecer que haja lacunas entre fiadas ou que todo o bloco se apresente rodado em relação ao que foi planeado.

Assumindo uma cobertura com sobreposições homogéneas ao longo do bloco, a análise das sobreposições e da escala é geralmente feita por amostragem representativa das fotografias, ou seja, perante o mosaico total da cobertura, é determinada a escala da foto, com base na carta topográfica, de três em três fotografias ou mesmo a intervalos maiores. A mesma regra se aplica para a determinação de sobreposições longitudinais e laterais.

Finda a análise do voo é elaborado um relatório, e consoante a gravidade das falhas encontradas, poderá o voo ter que ser repetido no seu todo ou em parte. Existe um regulamento para a execução de voos fotogramétricos em Portugal publicado pela Autoridade Nacional de Cartografia (Direção Geral do Território) onde estão compiladas todas as normas e tolerâncias aceitáveis para os diferentes parâmetros de voo - Regulamento Técnico para as Coberturas Aerofotográficas em Portugal (RTCAP).

Satisfazendo o voo fotográfico as condições exigidas no planeamento, dentro das tolerâncias do RTCAP, está-se em posição de encomendar as imagens digitais que interessam ao projeto e passar à fase seguinte. Normalmente é elaborado um mapa índice constituído pela implantação sobre uma base cartográfica (em formato digital) de todas as fotografias do projecto enquadradas pelo centro ou pela mancha (limites), com a respetiva identificação e data de voo.

## 1.5. Georreferenciação

A georreferenciação constitui a segunda fase das operações preliminares da cadeia de produção cartográfica. De posse da cobertura fotográfica de uma zona é necessário determinar a relação existente entre fotografias e terreno, a georreferenciação, a qual é inequivocamente descrita pelos parâmetros de orientação externa de cada fotografia da cobertura ( $X_0, Y_0, Z_0$ , omega, fi, kappa). Essa operação pode ser realizada de um modo direto, semi-direto ou indireto. O modo direto, também denominado georreferenciação direta, exige a utilização de um instrumento GNSS-IMU a bordo do avião associado à câmara durante o voo fotográfico. O modo semi-direto apenas utiliza GNSS a bordo durante o voo fotográfico e denomina-se geralmente por aerotriangulação com GNSS. O modo indireto, normalmente denominado aerotriangulação, não exige nenhuns instrumentos a bordo para além da câmara fotográfica aérea, mas necessita do chamado apoio geodésico. O apoio geodésico é constituído por um conjunto de pontos do terreno bem visíveis na cobertura fotográfica e que vai ser utilizado para calcular os parâmetros de orientação externa das fotografias do bloco.

### 1.5.1 Escolha de pontos de apoio nas fotografias

Os pontos de apoio (geodésico) devem ser pontos bem identificáveis em mais do que uma fotografia. Às diferentes imagens do mesmo ponto do terreno em fotografias distintas chama-se pontos homólogos. Normalmente, por causa da cobertura fotográfica ser realizada com sobreposições longitudinal e lateral, a maioria dos pontos numa fotografia tem pontos homólogos em fotografias vizinhas. No entanto, como cada fotografia é obtida de um ponto de vista diferente, acontece frequentemente que um ponto não tenha homólogo em fotografias vizinhas (por estar oculto) ou que este não esteja bem definido de modo a garantir uma boa medição de coordenadas. Daí a importância da escolha criteriosa dos pontos de apoio.

Os pontos de apoio dividem-se geralmente em

- pontos triangulados (PT ou TP)**
- pontos fotogramétricos (PF)**

#### 1.5.1.1. Pontos Triangulados

Enquanto é absolutamente necessário saber quais as coordenadas objeto (ou terreno) dos pontos fotogramétricos, as quais deverão ser determinadas de um modo direto em campo, os pontos triangulados verão as suas coordenadas objeto determinadas indiretamente por aerotriangulação, em gabinete, e primeiramente destinam-se a ser medidos nas fotos, e não no terreno. Por isso, a sua escolha deve recair sobre pontos bem visíveis mas não necessariamente acessíveis no terreno como é exigido para os PFs. Consoante a função que os PTs desempenham no bloco de fotografias, podem ainda ser subdivididos em duas classes: os pontos que servem para ligação entre modelos numa mesma fiada designam-se por pontos de passagem (em inglês: Passpoints); os pontos que servem de ligação entre fiadas adjacentes designam-se por pontos de ligação (em inglês: Tiepoints).

De um modo geral, atendendo a que nem todas as coberturas fotográficas têm a configuração regular ideal com sobreposições homogéneas em todo o bloco (sobretudo as coberturas por UAV são por norma irregulares) mais recentemente adoptou-se a designação de ‘tiepoints’ - TP, para todos os pontos homólogos independentemente de ligarem fotografias, modelos ou fiadas entre si.

A quantidade de pontos de apoio necessária depende do tipo de restituição a realizar. O mínimo teórico de pontos de apoio para orientar uma fotografia espacialmente é: três pontos não colineares. A orientação espacial de um modelo estereoscópico é também conseguida à custa de um mínimo de três pontos não colineares.

Para que não haja grandes zonas de extrapolação, é aconselhado localizar os pontos de apoio de modo a formarem um triângulo de maior área possível dentro da área da foto ou do modelo. Isso não evita, no entanto, que continue a haver uma grande área da imagem (ou modelo) não incluída no triângulo, visto que o formato desta não é triangular, mas quadrado ou rectangular. Quatro pontos de apoio localizados nos extremos do modelo já permitem minimizar a zona de extrapolação, para além de matematicamente permitirem um controlo de qualidade da orientação espacial calculada (orientação absoluta do modelo). No caso de uma fotografia individual, um ponto de apoio adicional na zona central da foto estabiliza a geometria do feixe melhorando a precisão da orientação externa calculada. Combinando os critérios apresentados para a foto e para o modelo numa só solução, chegou-se à conclusão que o número mínimo de pontos de apoio, do ponto de vista técnico será de seis por modelo, o que corresponde a nove por foto (no caso de voos com sobreposição longitudinal superior a 50%) com a localização indicada na figura 1.5.1.1.1., que coincide com as posições denominadas tradicionalmente como pontos de Von Gruber.

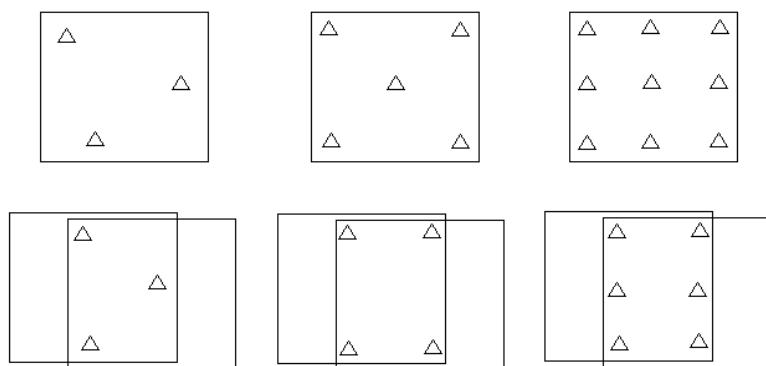


Figura 1.5.1.1.1 - Localização de pontos de apoio em fotos e modelos. Esquerda: mínimo teórico. Centro: área de extrapolação mínima. Direita: combinação dos dois critérios para foto e modelo

A distribuição de pontos de apoio num bloco deve ser tal, que cada ponto apoie o maior número possível de fotografias simultaneamente, garantindo-se assim uma ligação de modelos e de fiadas por pontos homólogos que favorece a estabilidade da geometria do bloco, o que se reflecte na precisão das orientações calculadas. A figura 1.5.1.1.2 ilustra a distribuição mínima (na prática) de pontos de apoio num bloco de três fiadas com cinco fotografias por fiada.

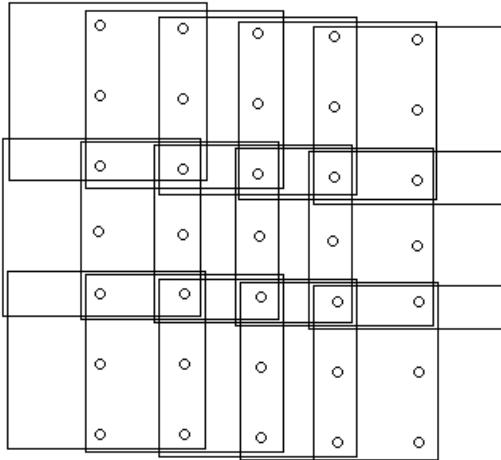


Figura 1.5.1.1.2 - Localização de pontos de apoio num bloco na sua configuração mínima

As características visuais destes pontos de apoio têm de ser tais que os tornem conspícuos (bem diferenciáveis do meio envolvente e bem identificáveis) em todas as fotos onde aparecem, de modo a garantir uma boa precisão na medição das suas coordenadas foto.

### 1.5.1.2. Pontos Fotogramétricos

Utilizando a aerotriangulação para coordenar os pontos de apoio de um bloco de fotografias, só haverá necessidade de coordenar um número reduzido desses pontos diretamente no campo, os tais Pontos Fotogramétricos ou PFs. Regra geral para a escolha da localização desses pontos num bloco de forma retangular é a seguinte: localiza-se um PF duplo em cada canto do bloco, um PF de 3 em 3 modelos ao longo da primeira e da última fiada, e um PF de 3 em 3 modelos em todas as zonas de sobreposição lateral. Os PFs do interior do bloco só necessitam de ter a cota determinada (PFs altimétricos) enquanto os da periferia necessitam de ter as três coordenadas determinadas (PFs completos).

Os pontos fotogramétricos podem ser pré-sinalizados, como se descreverá a seguir ou naturais, ou seja, serem materializados por objetos existentes na paisagem com uma forma favorável. Esta última opção é mais económica mas pode redundar em menos precisão se os pontos escolhidos não forem adequados.

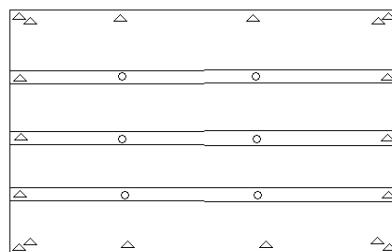


Figura 1.5.1.2.1 - Distribuição convencional de PFs num bloco

### 1.5.2. Sinalização de PFs no terreno

A sinalização aqui referida realiza-se antes do voo pelo que é também conhecida por pré-sinalização. Trata-se da marcação no terreno de marcas cujos centros virão a ser coordenados no terreno pelo topógrafo, as quais deverão ter uma forma que se veja bem na fotografia aérea. O objetivo dos PFs pré-sinalizados é proporcionar medições mais precisas de coordenadas foto, pelo facto de ser inequivocamente identificável na foto o ponto cujas coordenadas terreno foram determinadas pelo topógrafo. Uma correspondência precisa entre ponto imagem e ponto objeto nos PFs é essencial para a precisão da determinação da orientação externa da foto ou da orientação absoluta do modelo estereoscópico ou para permitir uma georreferenciação de precisão de todas as fotos de um bloco.

A operação de pré-sinalização deve ter em conta os seguintes aspetos:

- localização das marcas
- forma das marcas
- dimensão das marcas
- material de marcação
- cor utilizada

#### 1.5.2.1 Localização

A localização das marcas deverá ser planeada com base no mapa de voo da zona a levantar e deve satisfazer os requisitos para a distribuição geral e localização estratégica de PFs num bloco, a qual depende do objetivo a que o bloco se destina (tipo de aerotriangulação a utilizar, orientação par a par, orientação individual, etc). Cada marca deverá localizar-se em terreno plano horizontal, com boa visibilidade para cima e longe de objetos altos (edifícios, árvores, aterros) de modo a garantir a sua mensurabilidade em várias fotografias (quanto maior o número de fotos onde um mesmo ponto é medido mais fiáveis serão as coordenadas terreno calculadas). Locais privilegiados para as marcas de PFs pré-sinalizados são as faixas de socorro de auto-estradas, passeios largos, parques de estacionamento, clareiras em florestas e prados.

#### 1.5.2.2 Forma

As marcas são constituídas por:

- uma figura geométrica regular cujo centro geométrico constitui o ponto fotogramétrico propriamente dito (círculo, quadrado, triângulo equilátero)
- de uma a quatro faixas retangulares irradiando da marca central cujo objetivo é facilitar a localização das marcas na fotografia aérea não as confundindo com qualquer outro objeto.

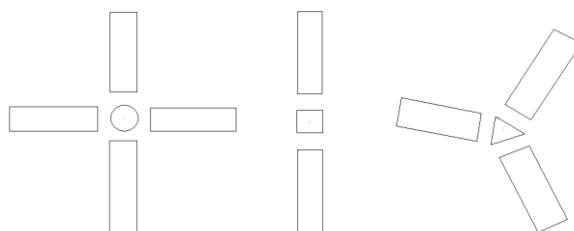


Figura 1.5.2.2.1 - Várias marcas de pré-sinalização

Apenas o espaço disponível no terreno para a sinalização de cada marca é determinante para a utilização de uma ou de mais faixas identificadoras. Os PFs sinalizados com três e quatro faixas identificam-se mais facilmente. Quanto à marca central, a experiência dita que o círculo proporciona leituras mais precisas de coordenadas na foto, pois em geral as distorções geométricas que o afetam permitem, ainda assim, uma identificação precisa do centro (o ponto que é coordenado), o mesmo já não acontecendo ao quadrado e ao triângulo. Estes últimos só deverão ser usados em voos de grande escala nos quais as distorções não são tão evidentes.



Figura 1.5.2.2.2 - Marcação de PF pré-sinalizado (Cavaca e Sequeira, Relatório de Estágio)

### 1.5.2.3 Dimensões

As dimensões das marcas dependem da escala da cobertura fotográfica que será realizada. Em teoria, a resolução da imagem sobre a qual serão medidas as coordenadas foto é um critério de partida para determinar a dimensão da marca pré-sinalizada. Considerando  $d$  igual ao diâmetro do círculo central (ou ao lado do quadrado ou ao lado do triângulo respetivamente) como o único parâmetro variável em função do qual se constrói toda a marca, dever-se-á tomar  $d$  igual a um múltiplo ímpar da dimensão do pixel no terreno (normalmente de 3 a 5 vezes o GSD). O esquema seguinte sugere as restantes dimensões da marca de centro circular, que se podem adaptar às de centro quadrado ou triangular. Não só a resolução da imagem, como também o contraste local, a luminosidade e as próprias condições atmosféricas na altura em que é realizado o voo são fortemente determinantes para a boa visualização dos PFs pré-sinalizados na fotografia aérea e consequentemente para a precisão da sua medição.

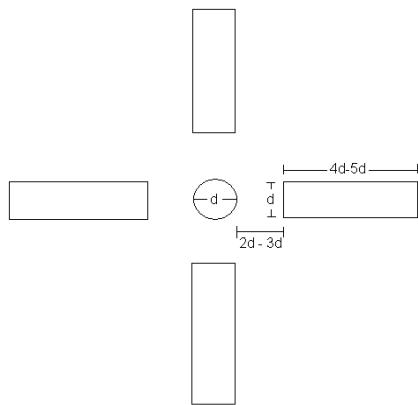
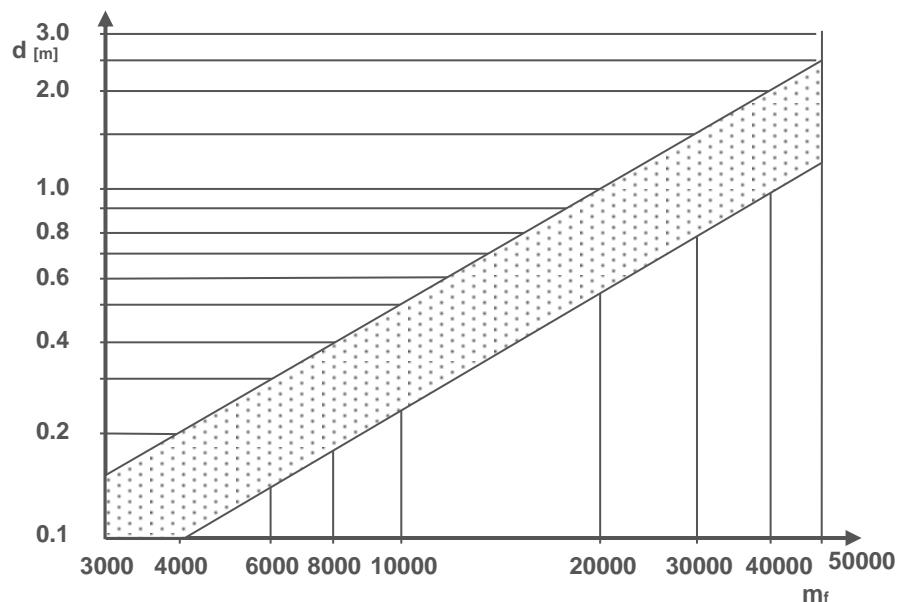


Figura 1.5.2.3.1 - Medidas aconselhadas para marcas de pré-sinalização

Figura 1.5.2.3.2 - Gráfico de  $d$  em função da escala da foto

#### 1.5.2.4 Material

As marcas são geralmente materializadas com tinta ou telas plásticas fixas ao chão. Na escolha da tinta a utilizar há que ponderar o grau de permanência pretendido para a marca. Do ponto de vista fotogramétrico, será desejável que as marcas sejam o mais permanentes possível, pelo que não se aconselha uma pintura que desapareça numa eventual chuvida próxima. No entanto, a localização de certas marcas, sobretudo em zonas urbanas, pode levantar problemas de ordem estética ou técnica (por ex. confundir-se com outros sinais na estrada) sendo então desejável que a sua permanência seja curta, havendo no entanto que garantir que a marca permanece em boas condições até ser realizado o voo e até o PF ser coordenado pelo topógrafo.

Quanto à cor a utilizar, ela deve ser tal que o contraste com o meio envolvente seja grande. Para imagens pancromáticas, cores claras como o branco e o amarelo são muito utilizadas, apesar do branco provocar por vezes uma reflexão da luz solar muito forte redundando em distorções geométricas do sinal. Para imagens RGB e IV usa-se frequentemente a cor vermelha que é bem captada pelos sensores.



Figura 1.5.2.4.1 - Coordenação de PF pré-sinalizado. (Cavaca e Sequeira, Relatório de Estágio)

### 1.5.3 Escolha de PFs Naturais

Caso não se pretenda ou não seja possível realizar aerotriangulação, todos os pontos de apoio referidos acima (de passagem e de ligação) têm de ser fotogramétricos, ou seja, têm de ser igualmente coordenados no terreno e por isso bem identificáveis não só na foto como também no terreno, para além de terem de ser acessíveis ao topógrafo que os vai coordenar. Neste caso, que atualmente é raro acontecer, se a área for extensa, normalmente coordenam-se apenas quatro pontos por modelo (nos cantos) em vez dos seis habituais, porque a determinação do apoio no campo é uma operação muito dispendiosa.

Tradicionalmente, as zonas onde se devem situar os PFs, eram assinaladas sobre as provas de contacto em papel das fotografias do bloco com um lápis dermatográfico. Eram geralmente marcadas com um círculo e identificadas com um código numérico ou alfanumérico único (Fig. 1.5.3.1), operação que se chamava “zonagem”.

Mais recentemente, esta fase de “zonagem” em papel foi substituída por uma “zonagem” digital na qual, com apoio do computador, são elaboradas fichas provisórias com ampliações das zonas de localização preferencial do ponto de apoio obtidas a partir da imagem digital, e identificadas com um código numérico ou alfanumérico (Fig. 1.5.3.2), o qual vai coincidir com a identificação do ponto de apoio que for coordenado nessa zona. Associada às fichas deve constar uma imagem completa com a indicação aproximada da zona ampliada para orientação geral.

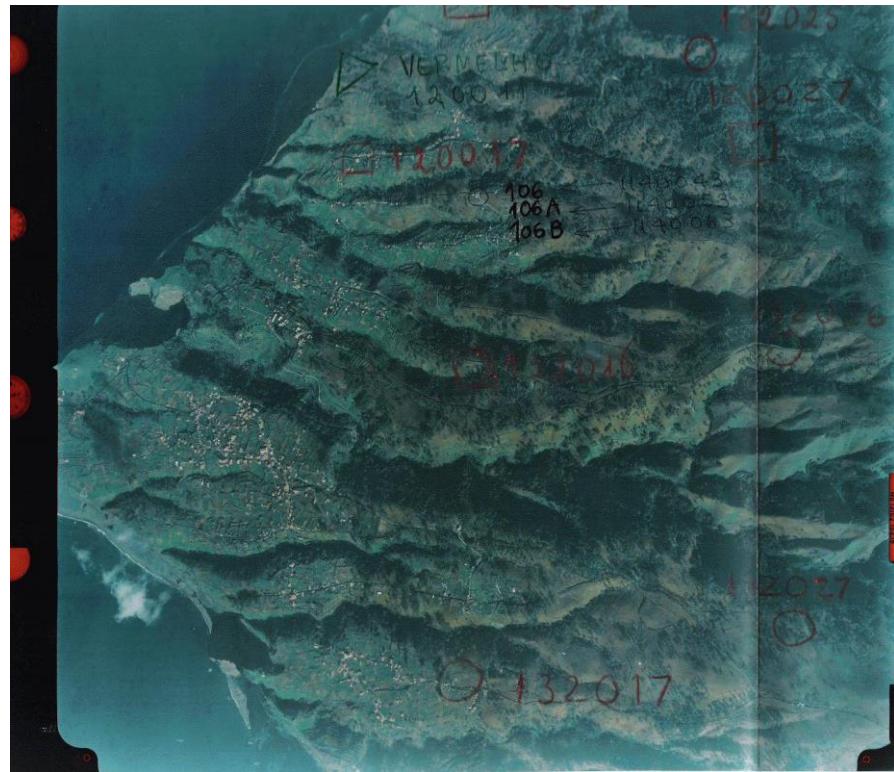


Figura 1.5.3.1 - zonas para pontos de apoio numa fotografia, marcadas com lápis dermatográfico (Cavaca e Sequeira, Relatório de Estágio)

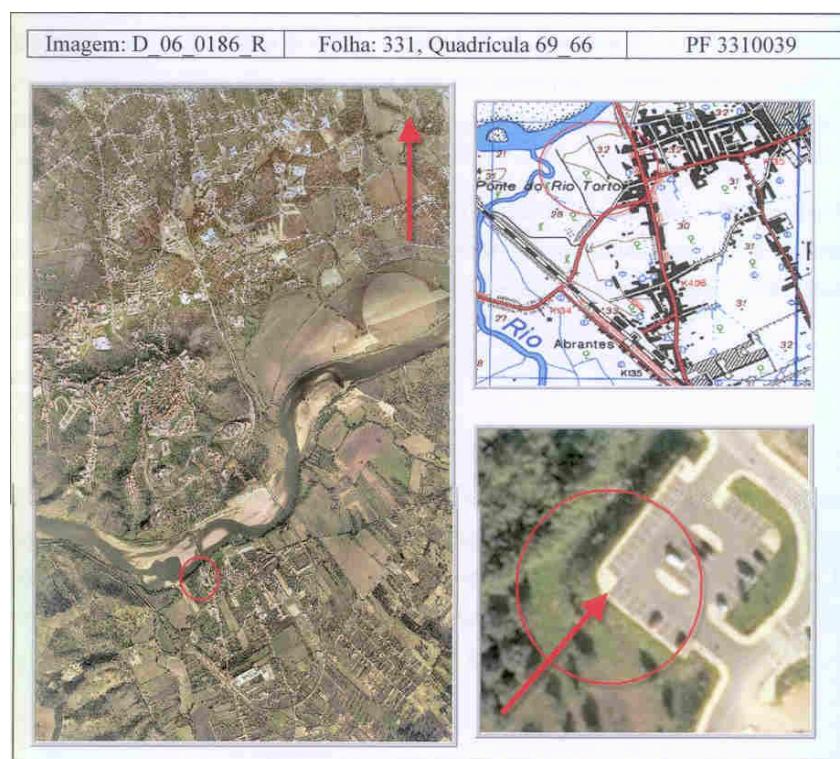


Figura 1.5.3.2 - Ficha provisória de marcação de ponto de apoio (Gaspar, Relatório de Estágio)

Enquanto a escolha da localização dos PFs pré-sinalizados se faz com base no mapa de voo seguindo os critérios já descritos em 1.5.2.1, as zonas de localização dos pontos fotogramétricos naturais a determinar no terreno deve obedecer a vários critérios, e deve ser feita observando o par de fotografias em causa em modo estereoscópico de modo a se poder avaliar as características do terreno e a acessibilidade para o topógrafo que se vai deslocar e os vai coordenar no local. Bons pontos fotogramétricos são, em geral, pormenores no solo ou junto ao solo que apresentem uma forma geometricamente bem definida, contrastante com o meio envolvente e de carácter permanente, como por exemplo:

- cruzamento de eixos de vias
- intersecção de eixos de valas de irrigação
- esquinas de propriedades
- objectos isolados
- etc.

Exemplos de maus pontos fotogramétricos consistem em pormenores por vezes bem definidos na foto mas pouco definidos no terreno ou vice-versa ou ainda de carácter não permanente:

- esquinas arredondadas
- cruzamentos com ângulos pequenos
- pontos altos, árvores
- cantos de florestas
- pontos em aterros ou desaterros
- pontos em margens de cursos de água.

#### 1.5.4 Determinação de PFs no terreno

A escolha definitiva dos PFs é feita pelo topógrafo no campo após verificação das condições *in loco*. O PF, após terem sido determinadas as suas coordenadas topo-geodesicamente, é gravado definitivamente numa ficha definitiva, que contenha um desenho (ou ampliação de fotografia aérea digital) que esclareça a localização do ponto no contexto geral da fotografia aérea, a descrição textual do mesmo (podendo ser substituída por uma foto esclarecedora obtida no local), a sua identificação inequívoca, as coordenadas M, P e cota determinadas bem como o método de coordenação utilizado para se poder avaliar da precisão das coordenadas obtidas.

PFs isolados são normalmente coordenados por intersecção directa ou inversa, podendo o PF eventualmente ser obtido por irradiação de um ponto auxiliar. Conjuntos de PFs são normalmente coordenados por poligonais. As cotas são determinadas, conforme a precisão exigida, por nivelamento trigonométrico ou geométrico. Actualmente, sempre que é possível, utilizam-se métodos de coordenação por GNSS. Prefere-se o método diferencial estático, estacionando um receptor num ponto de coordenadas conhecidas e estacionando um segundo receptor em cada ponto a coordenar durante 10 a 15 minutos. O receptor fixo pode ser substituído, caso possível, pela utilização dos dados de uma rede de estações GNSS permanente. O receptor móvel deve ser de dupla frequência e deve utilizar-se a fase das ondas portadoras como sinal, permitindo uma precisão centimétrica.

**FACULDADE DE CIÉNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**REGISTRO DOS PONTOS FOTOGRAFÉTICOS**

**P. F.: 006 – Muro da Capitania do lado da Avenida**

Coordenadas HG DATUM LISBOA Militares

M = ... 113743,032  
 P = ..... 283207,127  
 Cota Terreno = ..... 3,675

Coordenadas HG DATUM73

M = ... -86256,866  
 P = ..... -16789,796  
 Cota Terreno = ..... 3,675

**DESCRIÇÃO:**

Ponto situado junto à extremidade do Muro da Capitania do Porto de São Martinho do Porto, junto à Avenida Marginal. O Muro tem a altura de 1,28 metros.

Data da Aquisição:  
 20 / Novembro / 2004

Elaborado por:  



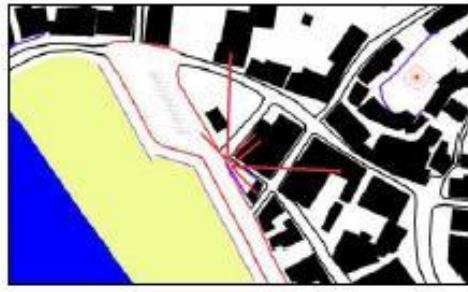



Figura 1.5.4.1 Exemplo de croquis - Ficha definitiva de PF.

A precisão exigida para a determinação das coordenadas dos PFs, depende da escala a que se destina a restituição e das limitações não só da imagem como do hardware/software utilizado na sua restituição.

Um dos indicadores numéricos para a precisão exigida baseia-se no erro de graficismo. Assim, admitindo uma tolerância para o erro geométrico no produto final (carta ou ortofoto) igual ao valor da incerteza devida ao graficismo (0.2 mm) e uma propagação igual do erro pelas três fases principais da cadeia de produção cartográfica (determinação de PFs no campo - determinação de pontos de apoio

por aerotriangulação - restituição) exige-se que o erro cometido na determinação das coordenadas dos pontos no terreno (na primeira fase) seja:

-em planimetria  $s_p[\text{cm}] \leq 1/3 \cdot 0,02 \cdot m_c$

$$s_p = \sqrt{(sX^2 + sY^2)}$$

onde  $m_c$  é o módulo da escala da carta a restituir sendo 0.02 [cm] o erro de grafismo.

Outro indicador baseia-se, não no produto final, mas sim na resolução geométrica da foto, a qual poderá ser utilizada para elaborar produtos em várias escalas. Assim sendo, o critério tolera uma incerteza em planimetria menor que o valor da resolução geométrica da imagem no terreno (o GSD em imagens digitais).

Em restituições digitais, a resolução geométrica é regida, então, pela dimensão do pixel (assumido como quadrado) da imagem (digitalizada ou digital de raiz). Exige-se, por este critério:

-em planimetria  $s_p \leq \text{pixel} \cdot m_f$

onde  $m_f$  - módulo da escala da foto e  $s_p = \sqrt{(sX^2 + sY^2)}$

Para a altimetria, toma-se como valor limite da incerteza da cota determinada por estereorrestituição o chamado erro de cota que se considera igual a 0.3 % da altura média de voo. Pelo mesmo princípio referido anteriormente aplicado à deterioração da precisão altimétrica ao longo das três fases principais da cadeia de produção, exige-se uma incerteza na determinação dos PFs:

- em altimetria  $s_z \leq h \cdot 0,0001$  visto que  $1/3 \times 0,0003=0,0001$   
 $h$  = altura média de voo

Para determinados objetivos, como por exemplo a completagem de uma carta, poderá ser suficiente determinar as coordenadas de PFs em cartas já existentes, desde que sejam de qualidade e de escala maior. A incerteza associada a esses pontos terá como determinantes o erro de grafismo para a planimetria e um terço a um quinto da equidistância natural da carta para a altimetria.

## 2. Aerotriangulação

A aerotriangulação, mais recentemente denominada triangulação fotogramétrica, é o conjunto de operações matemáticas e estatísticas que permite obter a orientação espacial da cobertura fotográfica de um objecto (de uma zona do terreno) usando o mínimo de apoio geodésico (Pfs) possível. Assim, a partir de coordenadas objecto (terreno) de alguns dos pontos que aparecem fotografados e considerando quer a geometria da fotografia individual, quer a do modelo estereoscópico e a da configuração geral da cobertura é possível determinar quer as orientações externas de cada foto (caso mais geral) quer as orientações absolutas de cada modelo estereoscópico (caso de coberturas estereoscópicas), ou seja, os conjuntos de parâmetros que relacionam analiticamente as imagens com o objecto. O método permite igualmente determinar coordenadas de pontos objecto com grande precisão.

A aerotriangulação pode ser realizada:

- em faixa
- em bloco.

A aerotriangulação em faixa pode ser feita

- por ligação instrumental de modelos ( só em restituidores analógicos )
- por modelos independentes ( em restituidores mecânicos e analíticos)

A aerotriangulação em bloco pode, por sua vez, ser executada:

- por modelos independentes (em restituidores mecânicos com computador, analíticos e estações digitais)
- por feixes perspectivos (em restituidores analíticos e estações digitais)

### 2.1. Aerotriangulação em faixa

#### 2.1.1. Por ligação instrumental de modelos

A aerotriangulação em faixa é aplicada quando o objecto fotografado se dispõe ao longo de uma só fiada, ou então como método de aquisição de coordenadas e elementos de orientação aproximados para servirem de valores iniciais para uma aerotriangulação em bloco.

Este método foi o primeiro a ser desenvolvido e era aplicado em estereorestituidores mecânicos que possuíam alternância de base interna - base externa (Wild A7) ou em aparelhos puramente ópticos com múltiplos projectores (Multiplex). Começava-se por orientar o primeiro modelo parcial, resolvendo analogicamente a orientação relativa. Se este modelo possuisse apoio geodésico completo (pelo menos 3 pfs), poder-se-ia orientar absolutamente com recurso a esses Pfs. O passo que se seguia era anexar uma terceira fotografia, orientando-a relativamente a uma das do modelo anterior sem alterar a orientação espacial deste (operação denominada orientação relativa por anexação de uma foto). Para isso, movia-se apenas o projector ou o porta-placas que continha a foto nova e alterava-se a base do aparelho (distância espacial entre os dois porta-placas). Após

esta orientação relativa completa, ficava o segundo modelo, formado pelas fotos 2 e 3 automaticamente também orientado absolutamente no espaço.

Procedendo sucessivamente deste modo instrumental, adicionando fotos aos dois modelos anteriores por orientação relativa via anexação, poder-se-ia orientar absolutamente todos os modelos parciais da fiada, à custa apenas dos três Pfs do primeiro modelo (em vez de três Pfs por modelo que são necessários caso não se faça aerotriangulação). Teoricamente, ficariam assim determinados os elementos de orientação absoluta de cada modelo parcial e poder-se-ia em seguida obter as coordenadas terreno dos pontos de apoio à restituição (pontos de passagem) em cada modelo parcial, sem ter de ir ao campo coordená-los .

No entanto, devido à configuração geometricamente desfavorável da fiada (muito mais longa do que larga), existe uma propagação complexa dos erros de orientação relativa e de transmissão de escala, os quais provocam uma torção espacial do modelo total em relação ao objecto. Ou seja, as coordenadas objecto obtidas para os pontos de apoio à restituição nos modelos que não têm apoio geodésico, não podem ser usadas directamente sem serem corrigidas, senão toda a informação que seja extraída desses modelos estará geometricamente incorrecta.

Para minorar ou controlar a influência desses erros, utilizavam-se mais Pfs ao longo da fiada (no meio e no fim da fiada ou, caso ela seja longa, de três em três modelos) os quais “prendem” o modelo total ao terreno.

### **2.1.2. Por modelos independentes**

No método de triangulação em faixa por modelos independentes, como o próprio nome indica, não existe ligação física entre os modelos parciais de uma faixa, como existia no método anterior. A ligação entre modelos é feita analiticamente, pelo que este método é também denominado algumas fontes por triangulação por ligação analítica de modelos.

Cada par estereoscópico é primeiramente orientado relativamente, criando-se o modelo parcial. Cada modelo parcial tem associado um sistema de coordenadas cartesiano tridimensional de origem arbitrária que constitui o sistema de coordenadas modelo.

Em seguida são medidas em cada modelo parcial, as coordenadas modelo de:

- Pfs que eventualmente apareçam no modelo,
- pontos de apoio à restituição dos quais pretendemos obter as coordenadas terreno (6 pontos de passagem),
- centros de projecção das duas fotos que formam o modelo (mais modernamente, estes são calculados e não medidos directamente).

Após esta operação ter sido realizada para todos os modelos da faixa, realiza-se em seguida a ligação analítica dos modelos da fiada. O modelo matemático empregue

para esta operação analítica é a transformação espacial de semelhança realizada em cadeia.

1. calcula-se os 7 parâmetros de transformação entre o último modelo e o penúltimo, com base em quatro pontos comuns (3 pontos não colineares eram suficientes). Geralmente usam-se 3 pontos na zona de sobreposição entre modelos e o quarto é o centro de projecção da foto comum aos dois modelos.

2. transforma-se com esses parâmetros, as coordenadas modelo dos restantes pontos medidos no último modelo, em coordenadas modelo do modelo anterior. Os sistemas de coordenadas modelo são independentes uns dos outros. Cada modelo foi medido no seu próprio sistema.

3. calcula-se os 7 parâmetros de transformação entre o modelo seguinte e os dois que já estão num só sistema de coordenadas pelos pontos comuns existentes entre o modelos actual e os anteriores

4. repete-se o segundo passo

5. repetem-se os passos 1 e 2 para cada par de modelos até chegar ao primeiro.

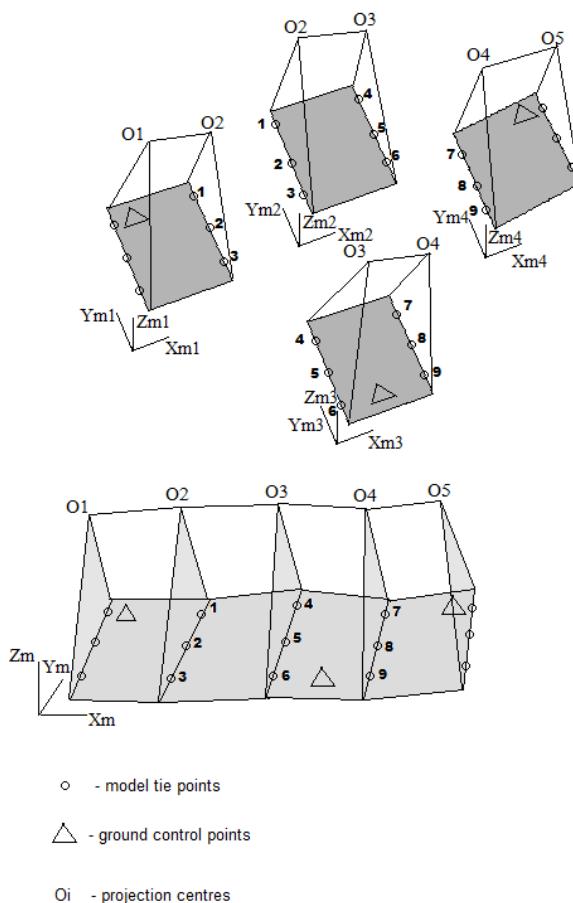


Figura 2.1.2.1: Modelo total após a ligação analítica

Obtêm-se, então todos os pontos medidos agora referenciados a um só sistema de coordenadas modelo, geralmente o do primeiro modelo da faixa.

Falta-nos ainda «ligar à Terra», ou seja determinar a orientação absoluta do modelo total.

A orientação absoluta do modelo total obtido pelas operações anteriores, é efectuada por uma única transformação espacial de semelhança entre o sistema de coordenadas modelo e o sistema de coordenadas objecto (terreno), cujos parâmetros são calculados a partir dos pontos fotogramétricos que se encontram espalhados pela faixa. Após o cálculo desses 7 parâmetros, os parâmetros da orientação absoluta (escala, 3 translações da origem, 3 rotações dos eixos), estamos em posição de poder determinar as coordenadas terreno de qualquer dos pontos de apoio à restituição, dos quais apenas havíamos medido as coordenadas modelo.

O problema prático mais grave que surge na execução deste método é a medição das coordenadas modelo dos centros de projecção, a qual é essencial para a estabilidade da ligação espacial dos modelos.

### **2.1.3. Compensação polinomial de uma faixa**

Como já foi referido, a aerotriangulação em faixa, pela geometria pouco equilibrada que possui, dá lugar a uma acumulação de erros sistemáticos e acidentais que se propaga de uns modelos parciais para os outros de um modo complexo.

Para poder no entanto tirar partido das vantagens que a aerotriangulação traz, nomeadamente evitar ir ao campo para coordenar pontos fotogramétricos para cada modelo parcial, utilizam-se métodos para uma compensação dos erros nos resultados obtidos. Essa compensação é feita com base em alguns pontos fotogramétricos e pontos de controlo, localizados normalmente no início no meio e no fim da faixa, podendo haver mais se a faixa contiver muitos modelos parciais. A estes pontos é aplicado um modelo matemático que descreve o comportamento dos erros em cada coordenada.

O modelo matemático utilizado na compensação de faixa é o polinómio de vários graus para cada coordenada X, Y e Z. Estudos de vários anos, mostraram que polinómios de grau superior a 3 não traziam melhorias significativas. Por isso utilizam-se sempre polinómios de segundo ou terceiro grau. As diferenças encontradas entre as coordenadas reais dos Pfs e as calculadas pela aerotriangulação vão ser usadas para determinar os coeficientes do polinómio a aplicar na correcção das coordenadas calculadas para todos os restantes pontos.

Procede-se então do seguinte modo:

-após a medição ou o cálculo das coordenadas dos pontos de apoio através da transformação espacial de semelhança, obtemos coordenadas supostamente geodésicas, eivadas de erros.

-através dos Pfs e dos pontos de controlo espalhados pela faixa, conseguimos determinar as diferenças entre as coordenadas calculadas e as reais nesses pontos.

-usando agora um modelo polinomial que descreva a propagação dos erros em cada coordenada ao longo da faixa, por exemplo o de Schwidefsky ( grau 2) ou o de Zarzycki (grau 3 para X), determinam-se primeiro os seus coeficientes, formulando tantas equações com os Pfs quantas as necessárias. O modelo de Schwidefsky tem 12 coeficientes pelo que necessita da informação de 4 Pfs. O de Zarzycki tem 14 parâmetros pelo que são necessários 5 Pfs no mínimo.

-de posse dos coeficientes das equações do modelo polinomial, pode-se então calcular as correcções às coordenadas obtidas por aerotriangulação para obter coordenadas terreno compensadas.

#### Modelo de Schwidefsky:

$$\Delta X = A_0 + A_1 X^* + A_3 X^{*2}$$

$$\Delta Y = B_0 + B_2 Y^* + B_3 X^{*2} + B_4 X^* Y^*$$

$$\Delta Z = C_0 + C_1 X^* + C_2 Y^* + C_3 X^{*2} + C_4 X^* Y^*$$

#### Modelo de Zarzycki:

$$\Delta X = A_0 + A_1 X^* + A_3 X^{*2} + A_4 X^* Y^* + A_5 X^{*3}$$

$$\Delta Y = B_0 + B_1 X^* + B_2 Y^* + B_3 X^{*2} + B_4 X^* Y^*$$

$$\Delta Z = C_0 + C_1 X^* + C_3 X^{*2} + C_4 X^* Y^*$$

X\*,Y\*,Z\* - coordenadas pseudo-geodésicas (rectangulares tangenciais)

Quanto maior a quantidade e mais homógena a distribuição dos Pfs pela faixa melhores resultados se obterão da compensação.

A maior aplicação da aerotriangulação em faixa é a aquisição de valores iniciais para outras triangulações mais rigorosas, pois apesar da compensação polinomial, os resultados obtidos em geral ficam aquém da precisão que é exigida em trabalhos de fotogrametria.

#### 2.1.4 Compensação em bloco de várias faixas

Quando as coberturas fotográficas para trabalhos fotogramétricos têm uma extensão bidimensional homogénea, como é normalmente o caso, especialmente

quando o seu objectivo final é a cartografia de uma região, essa cobertura constitui um bloco formado por várias fiadas que têm uma determinada sobreposição entre si, no mínimo 20 %.

É evidente que ao aerotriangular, ou seja, ao determinar coordenadas objecto dos pontos de apoio à restituição sem ir ao campo, pode-se compensar cada fiada individualmente, pelo processo polinomial já estudado.

No entanto, não se está a ter em conta que há pontos de uma fiada que também aparecem noutra fiada. Pode, portanto, acontecer que o mesmo ponto de apoio receba umas coordenadas objecto na fiada de cima e outras coordenadas objecto ligeiramente diferentes na fiada de baixo. A ligação entre o modelo de cima e o modelo de baixo não fica assegurada. Em termos práticos, pode acontecer que na restituição aparezam pormenores repetidos em posições diversas (por ex. a mesma casa em duas posições diferentes) ou que não haja continuidade entre pormenores do modelo de cima e pormenores correspondentes no modelo de baixo (por ex. estradas desfasadas).

Para evitar problemas destes, convém que a compensação dos resultados obtidos por aerotriangulação tenha como critério regente a seguinte premissa: um mesmo ponto (do objecto/terreno) tem que ter as mesmas coordenadas objecto, qualquer que seja a faixa em que se encontra a sua imagem. Uma compensação deste tipo no contexto da aerotriangulação em faixa, designa-se por compensação em bloco de várias faixas.

Procede-se do seguinte modo: depois de todas as faixas estarem aerotrianguladas, compensa-se a primeira pelo processo polinomial. Determinam-se as coordenadas objecto de todos os pontos de ligação entre faixas. Estes pontos e os Pfs que eventualmente existirem na segunda faixa, vão ser usados para calcular os coeficientes do polinómio a aplicar para compensação da segunda faixa. Após esta compensação, os pontos de ligação entre a segunda e a terceira faixa obtêm coordenadas objecto e vão ser usados na compensação da terceira faixa, juntamente com os Pfs que existirem nesta. E assim sucessivamente até à última faixa.

Por fim, para compensar possíveis rotações do bloco, é feito ainda um ajustamento às coordenadas por meio de uma transformação plana de Helmert, com base em pontos fotogramétricos existentes nos cantos do bloco.

Transformação de Helmert: (transformação plana de semelhança)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \cos K & -\sin K \\ \sin K & \cos K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{**} \\ Y^{**} \end{bmatrix}$$

$$X^{**} = X^* + \Delta X$$

$$Y^{**} = Y^* + \Delta Y$$

*m = escala*

*K = rotação*

## 2.2. Aerotriangulação em bloco

Generalizemos a premissa de que cada ponto objecto só pode ter umas coordenadas objecto qualquer que seja a faixa onde aparecem as suas imagens, aos modelos e às fotografias, ou seja qualquer que seja o modelo e qualquer que seja a fotografia onde apareçam as suas imagens, cada ponto objecto tem apenas umas coordenadas objecto (X,Y,Z). Assim, deixa de haver necessidade de formar faixas, bastando apenas adquirir as coordenadas dos pontos de apoio em todos os modelos ou fotos do bloco e transformá-las, por um modelo matemático que traduza a condição referida, em coordenadas objecto compensadas. A este processo chama-se aerotriangulação em bloco, ou apenas triangulação em bloco.

A triangulação em bloco pode então ser realizada:

- por modelos independentes
- por feixes perspectivos (geometria das fotografias)

### 2.2.1. Por modelos independentes

- A unidade geométrica deste método é o modelo estereoscópico (par estereoscópico orientado relativamente).
- Os dados primários para a aerotriangulação em bloco por modelos independentes, ou seja, aquilo que é necessário medir nos aparelhos ou estações digitais, são as coordenadas modelo de todos os pontos de apoio, de todos os Pfs e eventualmente de todos os centros de projecção do bloco.
- Constituem também dados de entrada no processo as coordenadas terreno de todos os Pfs, medidas em campo.
- O modelo matemático subjacente a este algoritmo é o da transformação espacial de semelhança em cadeia entre modelos e objecto.
- São necessários valores iniciais para todas as incógnitas (parâmetros de orientação absoluta de cada modelo e coordenadas objecto/terreno de cada ponto novo)
- Cada ponto observado/medido dá origem a três equações de observação (ver capítulo da TES)
- O sistema de equações normais tem tantas equações quantas as incógnitas
- Estes valores são compensados pelo algoritmo de aerotriangulação, de modo a que as discordâncias entre pontos homólogos nos vários modelos sejam mínimas e as discordâncias nos pontos fotogramétricos sejam também mínimas (MMQ).

- Os resultados da aerotriangulação em bloco por modelos independentes são:
  - para cada modelo, 7 parâmetros de orientação absoluta (escala,  $\Omega$ ,  $\Phi$ ,  $K$ ,  $X_t$ ,  $Y_t$ ,  $Z_t$ )
  - para cada ponto  $i$  de concatenação entre modelos, incluindo o centro de projecção, 3 coordenadas objecto ( $X, Y, Z$ ) $_i$ .

Quanto à precisão das coordenadas objecto obtidas por aerotriangulação em bloco por modelos independentes, foram feitos vários estudos e chegou-se à conclusão de que a configuração de bloco mais favorável à precisão é o quadrado.

### 2.2.2. Por feixes perspectivos

Na triangulação por feixes perspectivos parte-se da informação na foto para se chegar a informação no objecto, sem haver a necessidade de operações intermédias como no método descrito anteriormente, em que é sempre necessária a formação de modelos estereoscópicos com a necessária determinação da orientação relativa. Por isso, este tipo de triangulação pode ser também aplicado a coberturas fotográficas não estereoscópicas de um mesmo objecto, como as que surgem na restituição múltipla.

A denominação de feixes perspectivos revela que neste tipo de triangulação se consideram os vários raios perspectivos com origem num ponto objecto genérico, que passam por vários centros de projecção (polos de feixes perspectivos) e intersectam vários planos imagem nos pontos imagem respectivos em cada uma das fotos (no mínimo duas) onde esse ponto objecto aparece fotografado.

- Os dados primários para este método de aerotriangulação são as coordenadas foto de todos os pontos de apoio e de todos os Pfs em todas as fotos onde aparecem (no mínimo duas). Se a triangulação tiver como objectivo final a coordenação de pontos e não apenas a determinação do apoio (pontos de apoio ou orientações espaciais) para outras operações posteriores, as coordenadas foto dos pontos a coordenar também têm de constituir dados de entrada (caso da restituição múltipla e de projectos de triangulação sem restituição posterior).
- É necessário também conhecer as coordenadas objecto de todos os Pfs do bloco.
- São necessários os parâmetros de orientação interna das câmaras que obtiveram as fotografias do bloco (uma ou várias)
- A unidade básica deste processo é a fotografia e o feixe perspectivo de polo no centro de projecção que lhe está associado, cujos raios projectivos unem pontos objecto com os respectivos pontos imagem.

- O modelo matemático utilizado no algoritmo de aerotriangulação é o da projecção central, traduzida pelas equações de colinearidade entre ponto imagem, centro de projecção e ponto objecto (ver capítulo das EC).
- São necessários valores iniciais para todas as incógnitas (parâmetros de orientação externa de todas as fotos do bloco e coordenadas objecto de todos os pontos medidos).
- Cada ponto imagem medido dá origem a duas equações de observação (as do cap.2.1.).
- O sistema de equações normais tem tantas equações quantas as incógnitas.

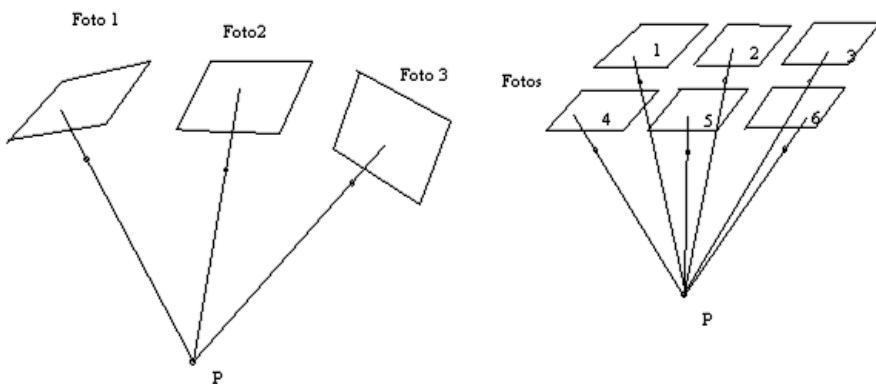


Figura 2.2.2.1. Triangulação por feixes perspectivos

- Os resultados deste método são :
  - para cada foto do bloco, 6 parâmetros de orientação externa ( $X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa$ )
  - para cada ponto medido, 3 coordenadas objecto.
  - parâmetros de calibração (parâmetros adicionais)

Estes valores são determinados iterativamente de modo a que as discordâncias nos pontos homólogos das várias fotografias e nos  $Pfs$  sejam mínimas (MMQ).

### 2.2.2.1. Parâmetros adicionais. Auto-calibração

As primeiras experiências com triangulações com feixes perspectivos mostraram que a precisão obtida nas coordenadas objecto finais ficava aquém da esperada, e que dependia muito da quantidade de  $Pfs$ .

Tinha-se de facto previsto que pelo facto de se partir da relação directa entre foto e objecto sem passar por operações intermédias como a orientação relativa, a precisão dos resultados iria aumentar, visto as fontes de erro serem reduzidas. Ao verem-se goradas as expectativas teóricas, começaram a analisar-se outras fontes prováveis de erro.

Como a aquisição de dados era feita directamente na foto (coordenadas foto), investigou-se os erros que poderiam influenciar as coordenadas foto. Chegou-se à conclusão de que as habituais correcções de **deformação da película, distorção da objectiva, refracção e curvatura terrestre** aplicadas às coordenadas medidas no aparelho restituidor, não eram suficientes. Era necessário aplicar correcções adicionais devidas a outros erros sistemáticos existentes em cada fotografia. Formularam-se então essas correcções em termos de equações às coordenadas foto que incluíam um certo número de parâmetros. Estes são determinados no decurso da triangulação e denominam-se **parâmetros adicionais**. O seu modelo tem sido aperfeiçoado e o seu número tem aumentado ao longo do tempo nos modelos matemáticos que têm sido sucessivamente propostos (de 3 a 24 ou mais).

Ao algoritmo que considera os parâmetros adicionais passou a denominar-se **triangulação em bloco por feixes perspectivos com parâmetros adicionais ou auto-calibração**. Este tipo de triangulação fotogramétrica tem igualmente aplicação na operação de calibração de câmaras, objectivas e sensores. Neste caso, todo o processo é igual, mas a parte dos resultados que interessa é apenas o conjunto dos parâmetros de auto-calibração que vai caracterizar uma determinada câmara/objectiva. Estes parâmetros serão exigidos em qualquer processo fotogramétrico posterior onde entrem fotografias obtidas pela câmara em questão.

A consideração dos parâmetros adicionais implica a formação de mais um conjunto de equações de observação e aumenta também o número de incógnitas. Mas a precisão conseguida nas coordenadas objecto finais torna este método no mais preciso.

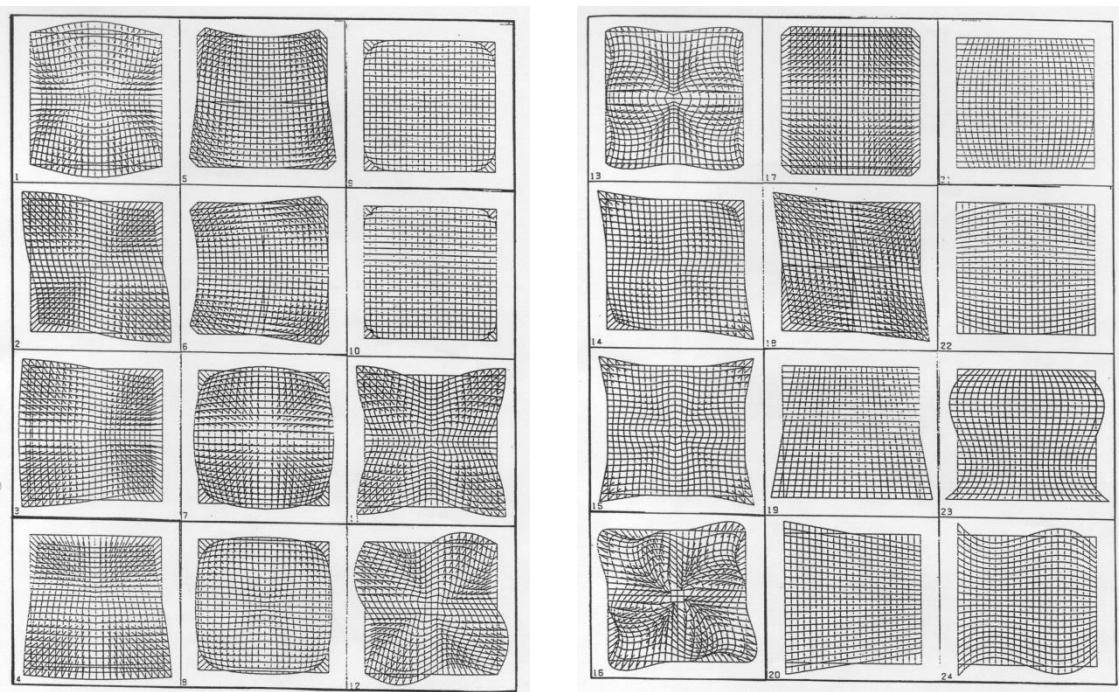


Figura 2.2.2.1.1: Efeitos sistemáticos na foto corrigidos pelos parâmetros adicionais



## Parâmetros Adicionais

$$x, y \text{ coordenadas foto} [\text{mm}] \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} [\text{mm}]$$

$$1.) x' = x - x + \cos 2\alpha + P 1$$

$$y' = y - y + \cos 2\alpha + P 1$$

$$2.) x' = x - x + \sin 2\alpha + P 2$$

$$y' = y - y + \sin 2\alpha + P 2$$

$$3.) x' = x - x + \cos \alpha + P 3$$

$$y' = y - y + \cos \alpha + P 3$$

$$4.) x' = x - x + \sin \alpha + P 4$$

$$y' = y - y + \sin \alpha + P 4$$

$$5.) x' = x + y + r + \cos \alpha + P 5$$

$$y' = y - x + r + \cos \alpha + P 5$$

$$6.) x' = x + y + r + \sin \alpha + P 6$$

$$y' = y - x + r + \sin \alpha + P 6$$

$$7.) x' = x - x + (r^2 - A) + P 7$$

$$y' = y - y + (r^2 - A) + P 7$$

$$8.) x' = x - x + (r^2 - B + r - c) + P 8$$

$$y' = y - y + (r^2 - B + r - c) + P 8$$

$$9.) x' = x - x + (r^4 - D + r^3 - E + r^2 - F + r - G) + P 9$$

$$y' = y - y + (r^4 - D + r^3 - E + r^2 - F + r - G) + P 9$$

$$10.) x' = x - x + (r^8 - H + r^7 - \dots - N + r - P) + P 10$$

$$y' = y - y + (r^8 - H + r^7 - \dots - N + r - P) + P 10$$

$$11.) x' = x - x + \cos 4\alpha + P 11$$

$$y' = y - y + \cos 4\alpha + P 11$$

$$12.) x' = x - x + \sin 4\alpha + P 12$$

$$y' = y - y + \sin 4\alpha + P 12$$

$$13.) x' = x - x + (r^2 - 12100) + \cos 2\alpha + P 13$$

$$y' = y - y + (r^2 - 12100) + \cos 2\alpha + P 13$$

$$14.) x' = x - x + (r^2 - 12100) + \sin 2\alpha + P 14$$

$$y' = y - y + (r^2 - 12100) + \sin 2\alpha + P 14$$

$$15.) x' = x - x + (r^2 - 12100) + \cos 4\alpha + P 15$$

$$y' = y - y + (r^2 - 12100) + \cos 4\alpha + P 15$$

$$16.) x' = x - x + (r^2 - 12100) + \sin 4\alpha + P 16$$

$$y' = y - y + (r^2 - 12100) + \sin 4\alpha + P 16$$

$$17.) x' = x - x + P 17$$

$$y' = y + y + P 17$$

$$18.) x' = x - y + P 18$$

$$y' = y - x + P 18$$

$$19.) x' = x - x + y + P 19$$

$$y' = y$$

$$20.) x' = x$$

$$y' = y - x + y + P 20$$

$$21.) x' = x - x + y^2 + P 21$$

$$y' = y$$

$$22.) x' = x$$

$$y' = y - x^2 + y + P 22$$

$$23.) x' = x - x + (y^2 - 8100) + y + P 23$$

$$y' = y$$

$$24.) x' = x$$

$$y' = y - y + (x^2 - 8100) + x + P 24$$

Figura 2.2.2.1.2.: Equações de correção às coord. foto com parâmetros adicionais.

A precisão referida depende, no entanto, de:

- quantidade de fotos em que o mesmo ponto é medido
- precisão dos dados primários
- distribuição dos Pfs no bloco
- quantidade de Pfs.

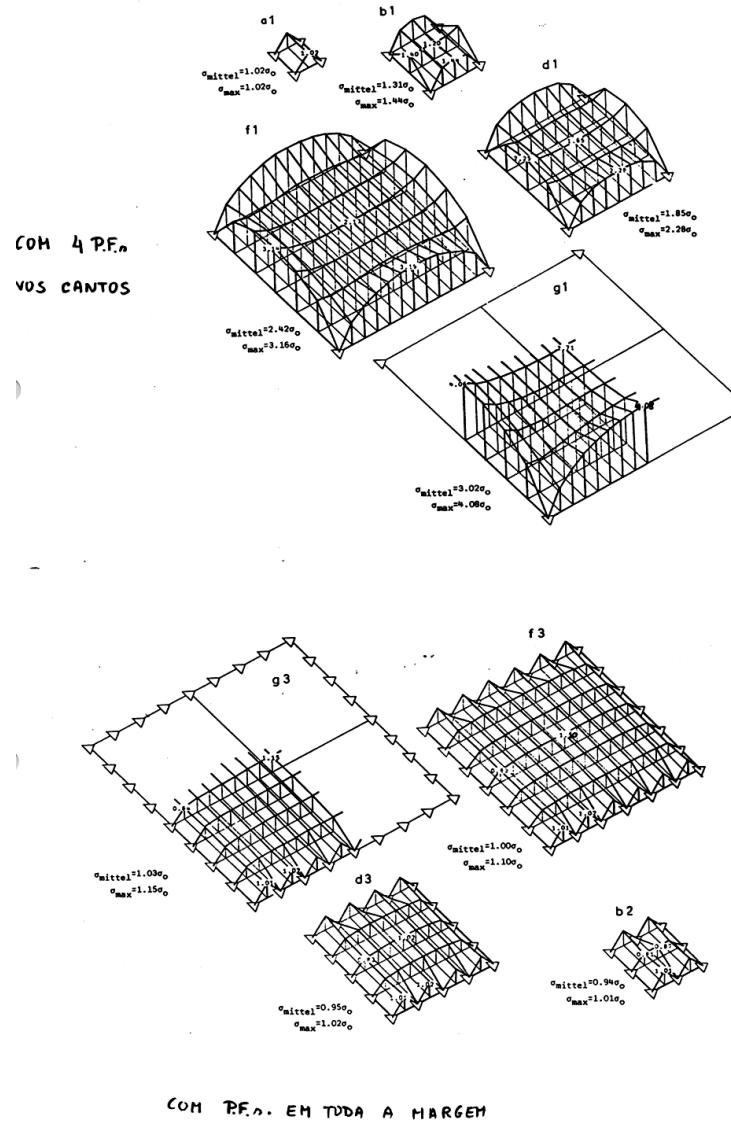


Figura 2.2.2.1.3. : Precisão das coordenadas num bloco em dependência do número e distribuição de Pfs

Para um bloco regular com uma distribuição uniforme de Pfs na margem, com Pfs altimétricos nas zonas de sobreposição entre fiadas, com  $l = 60\%$  e  $q = 30\%$ , obtém-se os seguintes valores para a precisão:

em planimetria:  $s = \pm 4 \mu\text{m}$  na escala da foto analógica (subpixel na digital)

em altimetria:  $s = \pm 0,04\%$  da distância ao objecto (altura de voo)  
para âng. estreito a grande angular

$s = \pm 0,05\%$  da distância ao objecto (altura de voo)  
para supergrandeangular

Normalmente adopta-se a configuração tradicional de Pfs da figura seguinte:

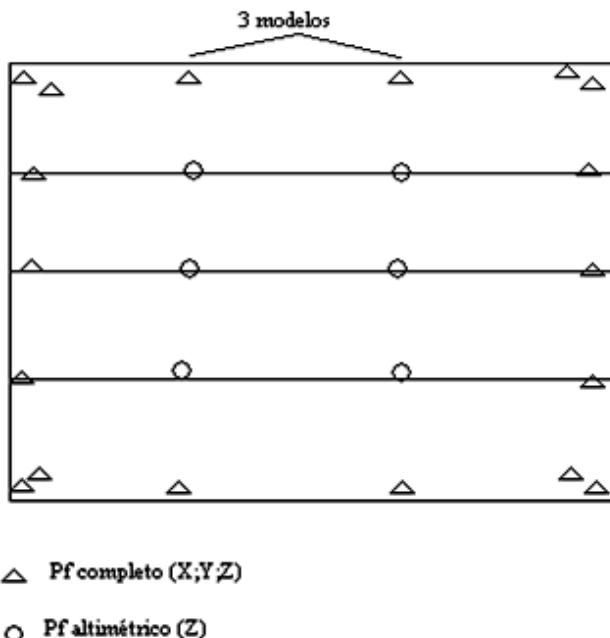


Figura 2.2.2.1.4. Distribuição clássica de PFs num bloco fotogramétrico

Como desvantagens da triangulação por feixes perspectivos poder-se-á referir o seguinte:

- é um problema não linear que exige o fornecimento de valores aproximados para todas as incógnitas.(normalmente estes saem de uma aerotriangulação em faixa calculada previamente)
- é o método de aerotriangulação que mais cálculos envolve.
- para a aquisição dos dados primários são necessários restituidores analíticos, digitais ou outros aparelhos medidores de coordenadas foto (monocomparadores).  
(actualmente não constitui desvantagem)
- não se pode separar o cálculo da planimetria do da altimetria. É sempre um problema tridimensional.

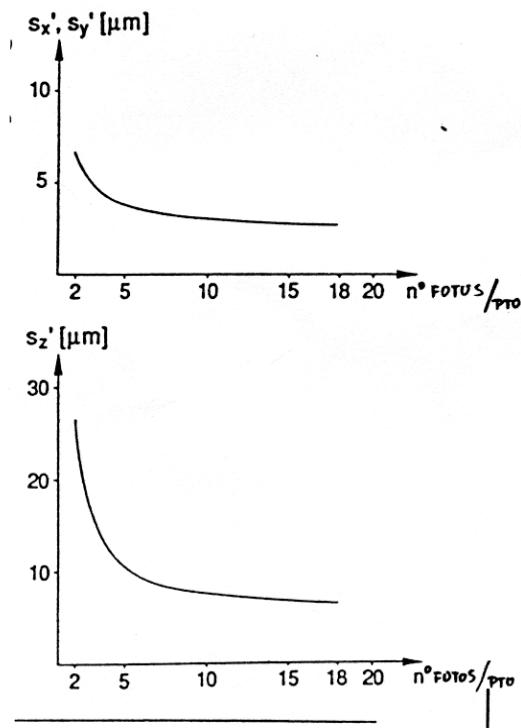


Figura 2.2.2.1.5: Precisão das coordenadas objecto em função do num.de fotos por ponto

Como vantagens do método pode-se referir que:

- é o método mais preciso da aerotriangulação.
- é fácil de aperfeiçoar o modelo matemático, por exemplo, aumentando o número de parâmetros adicionais.
- é fácil introduzir no cálculo observações adicionais, por exemplo, distâncias entre pontos, ângulos, condições de paralelismo, de perpendicularidade, etc.
- é possível triangular blocos não convencionais, onde nem sequer há pares estereoscópicos (restituição múltipla).

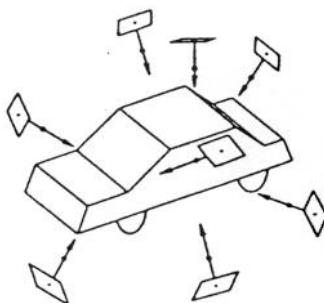


Figura 2.2.2.1.6.: Triangulação em fotogrametria próxima por feixes perspectivos

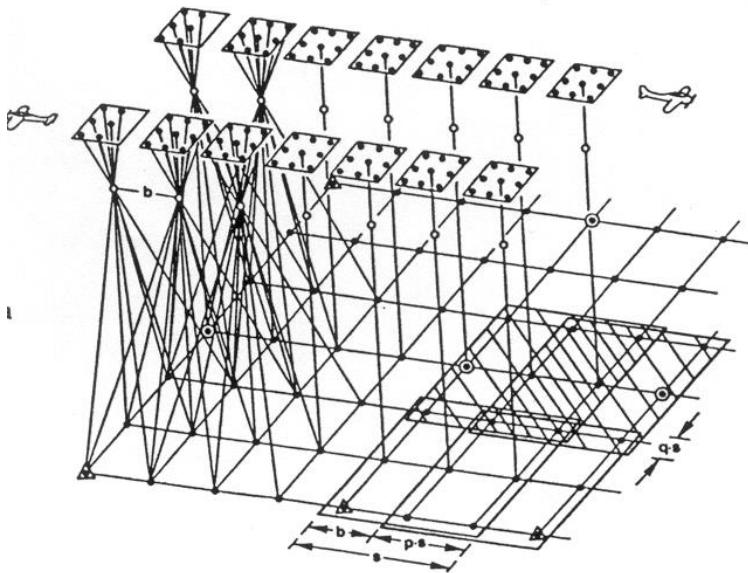


Figura 2.2.2.1.7.: Aerotriangulação por feixes perspectivos

- é possível triangular fotografias não métricas, usando parâmetros adicionais para a orientação interna e é possível triangular blocos obtidos com várias câmaras fotográficas.
- é possível determinar coordenadas de pontos em projectos de alta precisão (monitorização)
- os elementos da orientação externa , que saem do cálculo, podem ser introduzidos directamente nas estações digitais quer para restituição, quer para rectificação de fotografias.

### 3. Fundamentos matemáticos da Fotogrametria

#### 3.1. Rotação no plano

Sejam dadas as coordenadas de um ponto P num sistema de coordenadas plano x,y. Pretende-se saber como obter as coordenadas desse ponto P noutro sistema de coordenadas X,Y que tem a mesma origem que o primeiro sistema mas está rodado em relação a ele de um determinado ângulo  $\alpha$ .

Sendo  $i, j$  os vectores unitários do sistema x,y e  $I, J$  os vectores unitários do sistema X,Y, exprimindo os vectores unitários de um sistema em função dos vectores unitários do outro sistema, obteremos as componentes de P no segundo sistema de coordenadas, como pretendíamos.

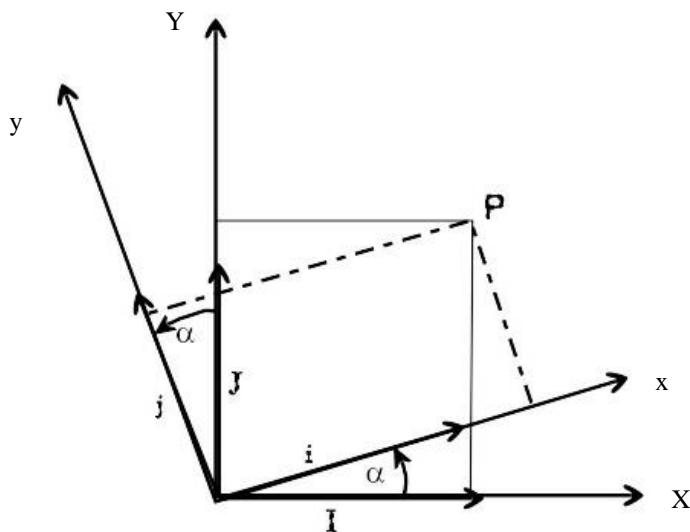


Figura 3.1.1: Rotação no plano

$$\vec{OP} = X\vec{I} + Y\vec{J}$$

$$X = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y = x \cdot \operatorname{sen} \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

ou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tendo em consideração que  $-\sin \alpha = \cos(\alpha + 90^\circ)$  e  $\sin \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)$

vem:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha + 90) \\ \cos(\alpha - 90) & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

representando  $(xX)$  o ângulo entre o eixo  $x$  e o eixo  $X$  dos dois sistemas de coordenadas , sendo análogo para os restantes eixos dos dois sistemas.

### 3.2. Matriz de rotação e suas propriedades

Reduzindo a forma de escrever o sistema anterior teremos:

$$\vec{X} = R \vec{x}$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

R é a matriz de rotação entre os dois sistemas de coordenadas planos e os seus elementos são os cosenos dos ângulos existentes entre os eixos de coordenadas do primeiro e do segundo sistema ou os produtos internos dos vectores unitários dos dois sistemas pela mesma ordem.

A matriz de rotação é quadrada mas não simétrica. Além disso, a matriz de rotação tem que ser ortonormada. Isso significa que o produto interno de cada coluna por si própria é igual a 1 (normalidade) e o produto interno de colunas diferentes é igual a 0 (ortogonalidade). Obedecendo a estas condições, a matriz de rotação no plano depende apenas de um parâmetro. Tem apenas um grau de liberdade que é neste caso o ângulo  $\alpha$ .

O determinante de uma matriz de rotação é igual a 1. A inversa da matriz de rotação é a sua transposta, pois:

$$R^{-1} \cdot R = I$$

Como..na..matriz..de..rotação

$$R^T \cdot R = I$$

vem

$$R^{-1} = R^T$$

o que representa uma propriedade muito útil. Por exemplo, se quisermos passar do sistema X,Y para o sistema x,y teremos a transformação inversa, ou seja:

$$\begin{aligned}\vec{X} &= R\vec{x} \\ R^{-1}\vec{X} &= R^{-1}R\vec{x} \\ R^{-1}\vec{X} &= I\vec{x} \\ R^T\vec{X} &= \vec{x} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

pelo que só precisamos de calcular os elementos da matriz de rotação entre dois sistemas uma vez para podermos facilmente transformar coordenadas num sentido e no sentido inverso.

### 3.3. Rotação no espaço

Pretende-se agora exprimir as coordenadas de um ponto P, X,Y,Z, num determinado sistema em função das coordenadas x,y,z do mesmo ponto noutro sistema, sabendo que os dois sistemas têm a mesma origem e os eixos do segundo,(X,Y,Z), estão rodados de determinados ângulos em relação aos eixos do primeiro, (x,y,z). Analogamente à rotação no plano, teremos agora:

$$P(x,y,z) \rightarrow P(X,Y,Z)$$

$$\vec{X} = R\vec{x}$$

em que R é a matriz de rotação espacial cujos elementos são os cosenos dos ângulos existentes entre os eixos do primeiro e do segundo sistema de coordenadas (ou os produtos internos dos vectores unitários dos dois sistemas)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Pelos condicionalismos de uma matriz de rotação, vistos no capítulo anterior, a matriz de rotação no espaço tem três graus de liberdade, ou seja , é função de três parâmetros independentes.

### 3.4. Matriz de rotação $R\Omega\Phi K$

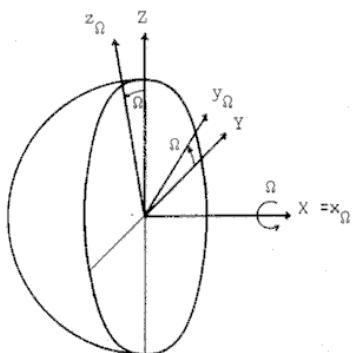
Na Fotogrametria consideram-se normalmente como parâmetros independentes da matriz de rotação espacial os ângulos omega, fi e kapa em torno dos eixos coordenados (omega = rotação em torno do eixo x, fi em torno do eixo y, kapa em torno do eixo z).

A rotação espacial pode ser obtida como uma sucessão de 3 rotações planas, por exemplo:

- a primeira rotação de magnitude omega, em torno do eixo x no plano yz.
- a segunda de magnitude fi, em torno do eixo  $y_\Omega$  (eixo y rodado de  $\Omega$ ), no plano  $X_\Omega, Z_\Omega$ .
- a terceira de magnitude kapa, em torno do eixo  $Z_{\Omega\Phi}$ , no plano  $X_{\Omega\Phi}, Y_{\Omega\Phi}$ .

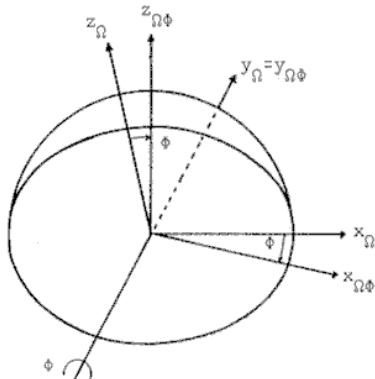
Os ângulos consideram-se positivos quando crescem no sentido anti-horário, observando o sistema de coordenadas do lado positivo de cada eixo de rotação em direcção à origem do sistema.

As figuras que se seguem ilustram as rotações explicitadas atrás e as matrizes de rotação que as traduzem.



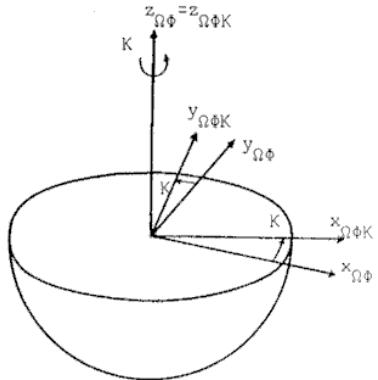
$$R_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega & -\sin\Omega \\ 0 & \sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix}$$

$\alpha = \Omega$       Figura 3.4.1: rotação Omega



$$R_\Phi = \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix}$$

$\alpha = -\Phi$       Figura 3.4.2: Rotação Fi



$$R_K = \begin{bmatrix} \cos K & -\sin K & 0 \\ \sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = K$$

Figura 3.4.3: Rotação Kapa

A multiplicação sucessiva das três matrizes de rotação resulta na matriz  $R_{\Omega\Phi\kappa}$  que tem a seguinte forma, se a sequência for a indicada (omega após fi após kapa):

$$\begin{bmatrix} \cos\Phi\cos K & -\cos\Phi\sin K & \sin\Phi \\ \cos\Omega\sin K + \sin\Omega\sin\Phi\cos K & \cos\Omega\cos K - \sin\Omega\sin\Phi\cos K & -\sin\Omega\cos\Phi \\ \sin\Omega\sin K - \cos\Omega\sin\Phi\cos K & \sin\Omega\cos K + \cos\Omega\sin\Phi\cos K & \cos\Omega\cos\Phi \end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes não é comutativa pelo que há que ter atenção à ordem pela qual é executada a rotação. O resultado é uma matriz de rotação com todas as respectivas propriedades.

### 3.5. Matriz de rotação com funções algébricas

A matriz de rotação espacial pode ser parametrizada de várias formas. A utilização dos 3 ângulos de Euler ( $\omega\varphi\kappa$ ) é uma dessas formas. Outra passa pela definição de um angulo  $\theta$  de rotação em torno de um só eixo espacial definido pelos seus 3 cosenos directores  $\alpha\beta\lambda$ . Uma terceira parametrização da matriz de rotação espacial surge no contexto da teoria dos quaterniões. Com esta parametrização, desaparecem da matriz as funções trigonométricas passando a ser substituídas por funções algébricas que não apresentam valores críticos para a singularidade da matriz. Esta é a grande vantagem desta forma de apresentar a matriz de rotação espacial.

Um quaternião é composto por um escalar e um vector em 3D com três componentes complexas:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

Em forma vectorial:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 i \\ q_2 j \\ q_3 k \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \end{aligned}$$

$$q_i (i = 0, 1, 2, 3) \in \Re$$

Um quaternião unitário é aquele para o qual a soma dos quadrados das componentes é igual a 1. O inverso de um quaternião  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  é o quaternião  $q^{-1} = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$ . O produto de  $q$  por  $q^{-1}$  é igual a 1.

A multiplicação entre dois quaterniões  $q$  e  $r$  segue a regra:

$$q.r = Q(q).r$$

$$r.q = \bar{Q}(q).r$$

onde  $Q$  e  $\bar{Q}$  são matrizes ortogonais da forma:

$$Q(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

Entre estas matrizes a primeira linha e coluna são iguais e as restantes submatrizes são transpostas uma da outra. Os seus elementos são todos números reais.

Qualquer ponto P de coordenadas X, Y, Z pode ser descrito como um quaternião z:

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ Xi \\ Yj \\ Zk \end{bmatrix}$$

Considerando agora dois pontos A e B no espaço 3D e um quaternião unitário  $q$ , o quaternião de A pode ser transformado no quaternião de B por multiplicação com  $q$  e com o seu inverso.:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} q^{-1} = \bar{Q}(q)^T Q(q) \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

$$B = M(q)A$$

onde:

$$M(\vec{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$m = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

$M$  é uma matriz 3x3 ortonormada, pelo que pode representar a rotação espacial de A para B.

Nesta matriz, como é evidente, não há funções trigonométricas nem ângulos a definir a rotação. Apenas funções algébricas de números reais. A matriz em si depende de quatro parâmetros,  $q_0, q_1, q_2, q_3$  que não são independentes. A condição de  $m$  ser igual a 1 tem, por isso, de ser incluída no cálculo dos parâmetros de rotação quando é utilizada esta forma da matriz de rotação espacial. Embora a interpretação geométrica dos parâmetros não seja possível, uma comparação de elementos com os da matriz de rotação  $R\Omega\Phi K$  permite-nos relacionar os  $qi$  com os parâmetros de orientação externa da fotografia:

$$\begin{aligned} \cos\varphi \sin\kappa &= -2(q_0q_1 - q_2q_3) \\ \cos\varphi \cos\kappa &= q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 \\ \cos\varphi \sin\omega &= 2(q_0q_3 - q_1q_2) \\ \cos\varphi \cos\omega &= q_3^2 - q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 \\ \sin\varphi &= 2(q_0q_2 + q_1q_3) \end{aligned}$$

#### 4. Equações de colinearidade e sua linearização - Relação entre coordenadas foto e coordenadas objecto.

A figura que se segue ilustra a relação existente entre coordenadas foto ( $x,y,z$ ) e coordenadas objecto ( $X,Y,Z$ ) do mesmo ponto, na altura em que a fotografia foi obtida. Nela estão representados:

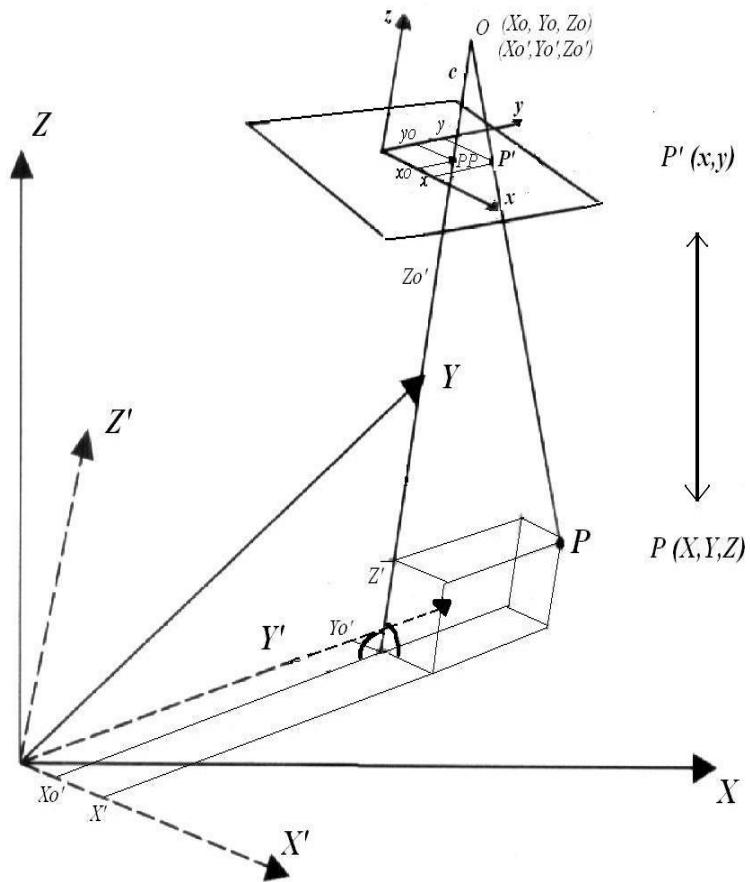


Figura 4.1: Relação entre imagem e objecto

$x,y,z$  - sistema 3D de coordenadas foto com origem no ponto médio da foto (intersecção das rectas que unem as marcas fiduciais diametralmente opostas).

$X',Y',Z'$  - sistema 3D de coordenadas paralelo a  $(x,y,z)$  com origem coincidente com a do sistema de coordenadas objecto  $X,Y,Z$ .

$X,Y,Z$  - sistema de coordenadas objecto (eventualmente coordenadas terreno).

$(x_0,y_0,0)$  - coordenadas foto do ponto principal.

$(x_0,y_0,c)$  - coordenadas foto do centro de projecção.

c - constante da câmara

$z = 0$  para todos os pontos da foto.

Na altura em que foi obtida a fotografia, existia colinearidade entre o centro de projecção O, o ponto objecto P e a sua imagem P' na fotografia. Essa colinearidade advém de assumirmos que a luz se propaga em linha recta e que no momento de captação da imagem houve um raio luminoso rectilíneo que partiu do ponto objecto P, passou pelo centro óptico da lente da câmara fotográfica (que assumimos coincidir com o centro de projecção O) e atingiu a película ou o sensor digital sobre um suporte que assumimos plano no ponto P' gerando a imagem fotográfica do ponto P. Vejamos como se pode exprimir analiticamente esse processo.

Considerando um sistema de coordenadas tridimensional X',Y',Z', paralelo ao sistema de coordenadas foto e com a mesma origem do sistema de coordenadas objecto, encontrando-se rodado espacialmente em relação a este último, poderemos exprimir a condição de colinearidade referida do seguinte modo:

$$\frac{x - x_0}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z'_0 - Z'}$$

$$\frac{y - y_0}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z'_0 - Z'}$$

Resolvendo estas equações em ordem às coordenadas foto vem:

$$x = x_0 - c \frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$$

$$y = y_0 - c \frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0}$$

Interessa-nos agora relacionar as coordenadas X', Y', Z' com as coordenadas objecto. Ora as coordenadas objecto X,Y,Z estão rodadas no espaço em relação a X',Y',Z', pelo que  $X = R X'$ , sendo R a matriz de rotação entre o sistema de coordenadas foto (paralelo ao sistema X'Y'Z') e o sistema de coordenadas objecto, ou seja:

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{bmatrix}$$

$$R^T X = R^T R X'$$

$$R^T R = I$$

$$R^T X = X'$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{bmatrix}$$

$$(X' - X'_0) = r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)$$

$$(Y' - Y'_0) = r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)$$

$$(Z' - Z'_0) = r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)$$

A relação entre coordenadas foto e coordenadas objecto vem, então, expressa da seguinte forma :

$$\begin{cases} x = x_0 - c \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \\ y = y_0 - c \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \end{cases}$$

que são as chamadas **equações de colinearidade** entre o centro de projecção ( $X_0, Y_0, Z_0$ ), o ponto imagem ( $x, y, 0$ ) e o ponto objecto ( $X, Y, Z$ ). Como já foi referido, ( $x_0, y_0, c$ ) são, nestas equações as coordenadas foto do centro de projecção.

As equações de colinearidade também se podem exprimir em ordem às coordenadas objecto, como se mostra a seguir. Consideremos de novo as equações que relacionam os sistemas de coordenadas ( $X, Y, Z$ ) e ( $X', Y', Z'$ ).

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{bmatrix}$$

Constatando da figura anterior que

$$X' - X'_0 = m(x - x_0)$$

$$Y' - Y'_0 = m(y - y_0)$$

$$Z' - Z'_0 = -(Z'_0 - Z') = -mc$$

vem

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = mR \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix}$$

sendo  $m$  um factor de escala entre as coordenadas foto  $(x,y,z)$  e as coordenadas intermédias  $(X',Y',Z')$ . Teremos então:

$$\begin{cases} X - X_0 = m(r11(x - x_0) + r12(y - y_0) - r13.c) \\ Y - Y_0 = m(r21(x - x_0) + r22(y - y_0) - r23.c) \\ Z - Z_0 = m(r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c) \end{cases}$$

Da terceira equação é possível determinar o  $m$ :

$$m = \frac{Z - Z_0}{(r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c)}$$

verificando-se que  $m$  é uma função das coordenadas foto e da cota do ponto, pelo que varia de ponto para ponto na foto (facto já conhecido). Substituindo  $m$  pela expressão anterior, as outras duas equações podem-se exprimir em função das coordenadas foto independentemente da escala existente entre os sistemas de coordenadas:

$$\begin{cases} X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{r11(x - x_0) + r12(y - y_0) - r13.c}{r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c} \\ Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{r21(x - x_0) + r22(y - y_0) - r23.c}{r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c} \end{cases}$$

Estas são as equações de colinearidade expressas em ordem às coordenadas objecto ou em função das coordenadas foto.

Se compararmos os dois conjuntos de equações de colinearidade deduzidos, vemos que o primeiro conjunto nos indica que **a cada ponto objecto** de coordenadas  $(X,Y,Z)$  **corresponde** nesta projecção (central ou perspectiva central), **um e um só ponto imagem** de coordenadas  $(x,y,0)$ .

O segundo conjunto de equações, por outro lado, mostra-nos que as coordenadas objecto  $X,Y$  de um ponto cuja imagem é  $(x,y,0)$  são dependentes da coordenada  $Z$  objecto do próprio ponto, sendo esta indeterminada naquele sistema de 2 equações. Isto é, **a cada ponto imagem** de coordenadas  $(x,y,0)$  **correspondem** nesta projecção, **infinitos pontos objecto**, que são todos aqueles que se encontram sobre a recta (raio projectivo) que passa pelo centro de projecção e pelo ponto imagem  $(x,y,0)$ . Por esta razão, para determinarmos as coordenadas objecto  $X,Y,Z$  de um ponto **necessitamos de mais do que uma fotografia onde apareça esse ponto**. Se tivermos, por exemplo, duas fotografias obtidas de pontos de vista diferentes (caso da estereorrestituição, por exemplo), teremos coordenadas foto diferentes para o mesmo ponto objecto em cada uma das fotos. Poderemos formular então um sistema de 4 equações, duas para cada terceto de coordenadas foto. Neste sistema de

equações apenas surgem 3 incógnitas que são as coordenadas X, Y e Z objecto desse ponto, desde que os restantes parâmetros sejam conhecidos. O sistema passa assim de indeterminado a redundante (tinha 2 equações a 3 incógnitas e passa a ter 4 eq. a 3 inc.). Se tivermos mais fotografias diferentes onde o mesmo ponto apareça, maior será a redundância do sistema (caso da restituição múltipla).

Os parâmetros das equações de colinearidade são os seguintes:

$x_0, y_0, c$  - parâmetros da orientação interna da fotografia: coordenadas foto tridimensionais do centro de projecção da fotografia

$X_0, Y_0, Z_0$  - 3 parâmetros da orientação externa da fotografia : coordenadas objecto do centro de projecção no momento da exposição

$r_{ij}$  - elementos da matriz de rotação espacial entre os sistemas de coordenadas foto e objecto, função de três parâmetros

Os elementos  $r_{ij}$ , como foi deduzido, são os da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas  $X', Y', Z'$  e o sistema de coordenadas  $X, Y, Z$ , que é igual à matriz de rotação existente entre o sistema de coordenadas foto  $x, y, z$  e o sistema de coordenadas objecto  $X, Y, Z$ , visto  $X', Y', Z'$  e  $x, y, z$  serem paralelos por definição.

Estes elementos da matriz representam os cosenos dos ângulos existentes entre os eixos dos dois sistemas, foto e objecto (terreno), ou seja, são funções dos ângulos  $\omega, \varphi, \kappa$  que a fotografia (os seus eixos coordenados) apresentava em relação ao sistema de coordenadas objecto (terreno) no exacto momento da exposição.

As matrizes de rotação  $R_{\omega\varphi\kappa}$  ou  $R_{\varphi\omega\kappa}$  são as mais aplicadas em fotogrametria e são formalmente iguais às matrizes  $R_{\Omega\Phi\kappa}$  ou  $R_{\Phi\Omega\kappa}$  já deduzidas anteriormente para um caso geral. Os seus parâmetros são, neste caso concreto, os ângulos da orientação externa da câmara (fotografia) no momento da exposição. Em fotogrametria aérea é comum referir estes ângulos como os da atitude do avião no momento da exposição. Tal poderá não ser válido, caso a câmara se move relativamente ao avião (por ex. quando está montada com suspensão inercial na fuselagem do avião).

#### 4.1. Linearização das equações de colinearidade. Determinação dos parâmetros.

As equações de colinearidade não são lineares. Para determinar os seus parâmetros quando não são conhecidos, há que obter redundância de observações (medir coordenadas foto de pontos), formular um sistema de equações de observação redundante e estimar os parâmetros que se pretendem pelo método dos mínimos quadrados. Para isso é necessário primeiro determinar valores aproximados dos parâmetros e depois linearizar as equações. Os parâmetros em causa são  $c, x_0, y_0, \omega, \varphi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0$ .

Exprimindo as equações de colinearidade originais (coordenadas foto em função das coordenadas objecto) de uma forma simplificada em que  $N_x$  representa o numerador

da equação em x , Ny o numerador da equação em y e D o denominador das equações (igual nas duas), virá:

$$\begin{cases} x = x_0 - c \frac{N_x}{D} \\ y = y_0 - c \frac{N_y}{D} \end{cases}$$

Cada ponto medido numa foto dá origem a duas equações de observação (de correção ou de erro) por cada fotografia onde aparece. Essas equações têm a seguinte forma:

$$v_x = dx_0 + \left( \frac{\partial x}{\partial c} \right)^0 dc + \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^0 d\omega + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^0 d\varphi + \left( \frac{\partial x}{\partial \kappa} \right)^0 d\kappa + \left( \frac{\partial x}{\partial X_0} \right)^0 dX_0 + \left( \frac{\partial x}{\partial Y_0} \right)^0 dY_0 +$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial Z_0} \right)^0 dZ_0 + \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)^0 dX + \left( \frac{\partial x}{\partial Y} \right)^0 dY + \left( \frac{\partial x}{\partial Z} \right)^0 dZ + (x^0 - \bar{x})$$

$$v_y = dy_0 + \left( \frac{\partial y}{\partial c} \right)^0 dc + \left( \frac{\partial y}{\partial \omega} \right)^0 d\omega + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^0 d\varphi + \left( \frac{\partial y}{\partial \kappa} \right)^0 d\kappa + \left( \frac{\partial y}{\partial X_0} \right)^0 dX_0 + \left( \frac{\partial y}{\partial Y_0} \right)^0 dY_0 +$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial Z_0} \right)^0 dZ_0 + \left( \frac{\partial y}{\partial X} \right)^0 dX + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right)^0 dY + \left( \frac{\partial y}{\partial Z} \right)^0 dZ + (y^0 - \bar{y})$$

onde:

$(\partial x / \partial \dots)^0$  representam as derivadas parciais da equação em x em ordem a cada uma das variáveis,  $(\partial y / \partial \dots)^0$  representam as derivadas parciais da equação em y em ordem a cada uma das variáveis, calculadas para os valores aproximados dos parâmetros;

$x^0$  e  $y^0$  são coordenadas foto calculadas pelas equações de colinearidade originais a partir de valores aproximados dos parâmetros;

$\bar{x}, \bar{y}$  são as coordenadas foto medidas.

Estas equações são lineares e denominam-se equações linearizadas das equações de colinearidade.

Após a formulação das equações de observação para todos os pontos medidos em todas as fotos (duas por ponto por foto onde o ponto aparece), obteremos um sistema de equações de observação cujas incógnitas serão as correções aos valores aproximados dos parâmetros, ou seja,  $dc, dx_0, dy_0, d\omega, d\varphi, d\kappa, dX_0, dY_0, dZ_0, dX, dY$  e  $dZ$ . Do ajustamento pelos mínimos quadrados, que se pode aplicar porque as

equações são lineares, resultarão estimativas para estas incógnitas. Após serem somadas aos valores iniciais, resultam em valores aproximados dos parâmetros para a segunda iteração. Com estes, formulam-se novas equações de observação. E assim sucessivamente até se obterem valores não significativos de correções aos parâmetros.

As expressões das derivadas parciais que entram nas equações linearizadas têm a seguinte forma:

$$\frac{\partial x}{\partial c} = -\frac{N_x}{D}$$

$$\frac{\partial y}{\partial c} = -\frac{N_y}{D}$$

$$\frac{\partial x}{\partial X_0} = -\frac{c}{D^2} (r13.N_x - r11.D)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_0} = -\frac{c}{D^2} (r13.N_y - r12.D)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y_0} = -\frac{c}{D^2} (r23.N_x - r21.D)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_0} = -\frac{c}{D^2} (r23.N_y - r22.D)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z_0} = -\frac{c}{D^2} (r33.N_x - r31.D)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z_0} = -\frac{c}{D^2} (r33.N_y - r32.D)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{c}{D} \left\{ (Y - Y_0)r33 - (Z - Z_0)r23 \frac{N_x}{D} - (Y - Y_0)r31 + (Z - Z_0)r21 \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{c}{D} \left\{ (Y - Y_0)r33 - (Z - Z_0)r23 \frac{N_y}{D} - (Y - Y_0)r32 + (Z - Z_0)r22 \right\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{c}{D} \left\{ (N_x \cos k - N_y \operatorname{sen} k) \frac{N_x}{D} + D \cos k \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{c}{D} \left\{ (N_x \cos k - N_y \operatorname{sen} k) \frac{N_y}{D} - D \operatorname{sen} k \right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial k} &= -\frac{c}{D} N_y \\ \frac{\partial y}{\partial k} &= \frac{c}{D} N_x \\ \frac{\partial x}{\partial X} &= -\frac{c}{D^2} (D.r11 - N_x r13) \\ \frac{\partial x}{\partial Y} &= -\frac{c}{D^2} (D.r21 - N_x r23) \\ \frac{\partial x}{\partial Z} &= -\frac{c}{D^2} (D.r31 - N_x r33) \\ \frac{\partial y}{\partial X} &= -\frac{c}{D^2} (D.r12 - N_y r13) \\ \frac{\partial y}{\partial Y} &= -\frac{c}{D^2} (D.r22 - N_y r23) \\ \frac{\partial y}{\partial Z} &= -\frac{c}{D^2} (D.r32 - N_y r33)\end{aligned}$$

#### 4.1.1. Casos particulares

Resumindo o que foi dito, cada ponto medido numa foto dá origem a duas equações linearizadas com 12 parâmetros relativos a essa foto. Estas equações são utilizadas na resolução de vários problemas específicos, como veremos em capítulos seguintes.

As equações linearizadas apresentadas estão formuladas para um ponto genérico de coordenadas  $(x,y,0)$  de uma fotografia genérica. São, portanto, de aplicação geral.

No entanto, se a fotografia em causa for um fotograma, ou seja, obtida por uma câmara métrica da qual são conhecidos rigorosamente os elementos de orientação interna, desaparecem nas equações de  $v_x$  e de  $v_y$  de todos os pontos medidos nessa foto, os termos em  $d_{x0}$ ,  $d_{y0}$  e  $d_c$ , pois esses factores são considerados nulos, visto  $x_0, y_0$  e  $c$  serem constantes (derivada de uma constante é igual a zero).

Se o ponto de coordenadas foto  $(x,y,0)$  for a imagem de um ponto fotogramétrico de coordenadas terreno  $(X,Y,Z)$  conhecidas e de confiança, desaparecem nas equações de observação respectivas os termos em  $dX, dY, dZ$  por serem considerados nulos.

Pelo facto de todos os pontos de uma fotografia terem a coordenada foto z igual a zero, é usual considerar apenas as coordenadas foto x e y de um ponto. No texto que se segue será adoptada a designação de  $(x,y)$  como coordenadas foto de um ponto, significando isso, de facto  $(x,y,0)$  no sistema de coordenadas foto tridimensional.

#### 4.2. Quaterniões e colinearidade

O facto de se exprimir a rotação entre os sistemas de coordenadas foto e objecto utilizando quaternões não vai alterar formalmente as equações de colinearidade, mas sim os parâmetros de que elas dependem:

$$\begin{cases} x = x_0 - c \frac{a_1(X - X_0) + b_1(Y - Y_0) + c_1(Z - Z_0)}{a_3(X - X_0) + b_3(Y - Y_0) + c_3(Z - Z_0)} \\ y = y_0 - c \frac{a_2(X - X_0) + b_2(Y - Y_0) + c_2(Z - Z_0)}{a_3(X - X_0) + b_3(Y - Y_0) + c_3(Z - Z_0)} \end{cases}$$

onde  $(a_i, b_i, c_i)$  corresponde à coluna  $i$  da matriz de rotação  $R$  que neste caso depende dos parâmetros  $q_0, q_1, q_2, q_3$ .

$$R = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, as equações linearizadas apresentarão termos relativos a estes novos parâmetros :

$$v_x = dx_0 + k_{10}dc + k_{11}dX_0 + k_{12}dY_0 + k_{13}dZ_0 + k_{14}dq_0 + k_{15}dq_1 + k_{16}dq_2 + k_{17}dq_3 - k_{11}dX - k_{12}dY - k_{13}dZ - (\bar{x} - x^0)$$

$$v_y = dy_0 + k_{20}dc + k_{21}dX_0 + k_{22}dY_0 + k_{23}dZ_0 + k_{24}dq_0 + k_{25}dq_1 + k_{26}dq_2 + k_{27}dq_3 - k_{21}dX - k_{22}dY - k_{23}dZ - (\bar{y} - y^0)$$

onde:

$$k_{10} = -\frac{N_x}{D}; \quad k_{20} = -\frac{N_y}{D}$$

$$k_{11} = \frac{1}{D}(a_1c + a_3x); \quad k_{12} = \frac{1}{D}(b_1c + b_3x); \quad k_{13} = \frac{1}{D}(c_1c + c_3x)$$

$$k_{21} = \frac{1}{D}(a_2c + a_3y); \quad k_{22} = \frac{1}{D}(b_2c + b_3y); \quad k_{23} = \frac{1}{D}(c_2c + c_3y)$$

$$k_{14} = 2 \left[ -\frac{xy}{c}q_1 + \left( c + \frac{x^2}{c} \right)q_2 + yq_3 \right]$$

$$k_{15} = 2 \left[ \frac{xy}{c}q_0 + yq_2 - \left( c + \frac{x^2}{c} \right)q_3 \right]$$

$$k_{16} = 2 \left[ -\left( c + \frac{x^2}{c} \right)q_0 - yq_1 - \frac{xy}{c}q_3 \right]$$

$$k_{17} = 2 \left[ -yq_0 + \left( c + \frac{x^2}{c} \right) q_1 + \frac{xy}{c} q_2 \right]$$

$$k_{24} = 2 \left[ -\left( c + \frac{y^2}{c} \right) q_1 + \frac{xy}{c} q_2 - xq_3 \right]$$

$$k_{25} = 2 \left[ \left( c + \frac{y^2}{c} \right) q_0 - xq_2 - \frac{xy}{c} q_3 \right]$$

$$k_{26} = 2 \left[ -\frac{xy}{c} q_0 + xq_1 - \left( c + \frac{y^2}{c} \right) q_3 \right]$$

$$k_{27} = 2 \left[ xq_0 + \frac{xy}{c} q_1 + \left( c + \frac{y^2}{c} \right) q_2 \right]$$

Pelo facto de a matriz de rotação com funções algébricas não apresentar singularidades, os cálculos convergem mesmo para pequenas variações de atitude, como acontece no cálculo de orientações externas de linhas vizinhas em imagens da câmara digital ADS40 da Leica.

### 4.3 Aplicações das equações linearizadas

#### 4.3.1. Determinação da orientação externa de uma foto (intersecção inversa espacial)

Esta operação pode ser efectuada a partir de, no mínimo, 3 Pf's cujas imagens apareçam numa fotografia.

Formam-se as equações de observação vx e vy para cada um dos pontos (após terem sido medidas as respectivas coordenadas foto) e resolve-se o sistema assim obtido de 6 equações a 6 incógnitas, sendo estas as correções aos parâmetros da orientação externa da foto, ou seja, dXo, dYo, dZo, dω, dφ, dκ.

Os valores iniciais aproximados destes parâmetros, necessários para calcular as derivadas parciais podem ser obtidos do plano de voo (ou do plano de missão fotogramétrica) ou calculados a partir dos PFs.

#### 4.3.2. Determinação das orientações externa e interna de uma foto

Caso a orientação interna da foto também não seja conhecida, o problema pode ser resolvido com 5 Pf's, aumentando o sistema descrito na alínea anterior de mais três incógnitas (dc, dxo, dyo) e de mais 4 equações (10 eq a 9 incog.).

#### 4.3.3. Determinação das orientações externas de um par de fotografias

Este método consiste em determinar simultaneamente os parâmetros de orientação externa de um par de fotografias (6 parâmetros por foto) e os respectivos parâmetros de orientação interna, a partir de pontos fotogramétricos e de pontos novos, dos quais não se conhecem as coordenadas terreno e que são medidos apenas nas duas fotografias.

As incógnitas deste problema são 12 parâmetros de orientação externa e de zero até 6 parâmetros de orientação interna consoante:

- 1- a(s) câmara(s) utilizada(s) estejam calibradas -> 0 parâmetros
- 2- tenha sido usada a mesma câmara para as duas fotos-> 3 parâmetros:  $(c, x_0, y_0)$
- 3- tenham sido usadas duas câmaras diferentes -> 6 parâmetros:  $(c, x_0, y_0)_1$  e  $(c, x_0, y_0)_2$ .

Cada PF dá origem a duas equações de observação para cada foto onde aparece, o mesmo acontecendo a cada ponto novo. Os pontos novos são sempre medidos nas duas fotos. A diferença que existe entre as equações dos Pf's e as dos pontos novos é que estas últimas incluem mais três incógnitas por ponto novo, dX, dY e dZ, aumentando o número total de incógnitas do problema.

Portanto, é necessário ponderar o número de pontos necessário, Pf's e novos, para conseguir determinar o total de parâmetros que se pretende.  
Apresentam-se a seguir algumas soluções:

#### Caso 1: orientação interna conhecida

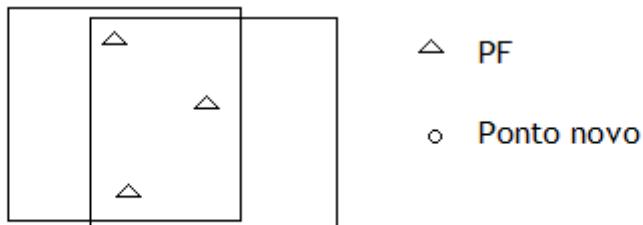


Figura 4.3.3.1. Determinação da orientação externa de um par. (Caso 1)

Solução mínima:

3 Pf's medidos nas duas fotos:  $3 \times 2 + 3 \times 2 = 12$  eq. de observação

6 parâmetros de or. externa a determinar: 12 incógnitas

Sistema solúvel mas não controlável.

Se se medir mais um ponto novo passaremos a ter 16 eq. de observação (mais duas por cada foto onde o ponto é medido) e 15 incógnitas (mais três para as coordenadas objecto do ponto novo). O sistema é sobredeterminado com 1 grau de liberdade ( $16 - 15 = 1$ ), ou seja, pouco controlável. Cada ponto novo que se meça adicionalmente nas duas fotos, vai trazer mais 4 equações e 3 incógnitas ao sistema, aumentando a redundância.

### Caso 2: três parâmetros de orientação interna a determinar

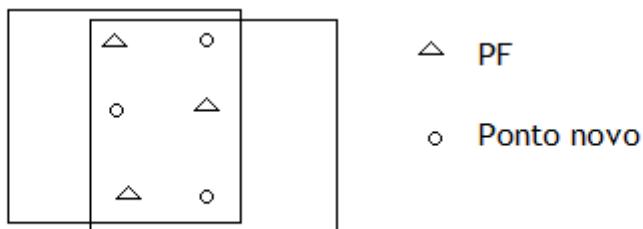


Figura 4.3.3.2. Determinação da orientação externa de um par. (Caso 2)

Solução mínima:

$$3 \text{ Pfs medidos nas duas fotos: } 3 \times 2 + 3 \times 2$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ Pontos novos nas duas fotos: } & 3 \times 2 + 3 \times 2 \\ & = 24 \text{ eq. de observação} \end{aligned}$$

$$6 \text{ parâmetros de or. externa por foto: } 6 \times 2$$

$$3 \text{ parâmetros de or. interna a determinar : } 3$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ coord. objecto por ponto novo : } & 3 \times 3 \\ & = 24 \text{ incógnitas} \end{aligned}$$

Sistema solúvel mas não controlável.

### Caso 3: seis parâmetros de orientação Interna a determinar

$$3 \text{ Pfs medidos nas duas fotos: } 3 \times 2 + 3 \times 2$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ Pontos novos nas duas fotos: } & 3 \times 2 + 3 \times 2 \\ & = 24 \text{ eq. de observação} \end{aligned}$$

$$6 \text{ parâmetros de or. externa por foto: } 6 \times 2$$

$$3 \text{ parâmetros de or. interna por foto : } 3 \times 2$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ coord. objecto por ponto novo : } & 3 \times 3 \\ & = 27 \text{ incógnitas} \end{aligned}$$

Sistema subdeterminado (insolúvel). Para se chegar a uma solução é necessário medir mais Pfs ou mais pontos novos em ambas as fotos.

Mais 1 PF -> 28 eq. a 27 inc. -> solúvel

Mais 1 Pn -> 28 eq. a 30 inc. -> insolúvel

Mais 2 Pn -> 32 eq. a 33 inc. -> insolúvel

Mais 3 Pn -> 36 eq. a 36 inc. -> solúvel não controlável

Como se vê, este método necessita em média de menos Pfs por foto do que o anterior para determinar os parâmetros de orientação externa das fotografias. É sempre mais económico optar pela medição de pontos novos nas fotografias do que pela utilização de pontos fotogramétricos cuja coordenação obriga deslocações ao campo.

Deve-se evitar escolher os pontos todos no mesmo plano objecto, pois isso poderá causar singularidades na matriz das equações normais.

### **4.3.4. Determinação das coordenadas objecto de um ponto novo. Intersecção directa espacial.**

Este método consiste em determinar as coordenadas objecto X,Y,Z de um ponto cujas coordenadas foto são medidas em duas fotos de um par,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , sendo conhecidos os parâmetros de orientação interna e externa das duas fotos.

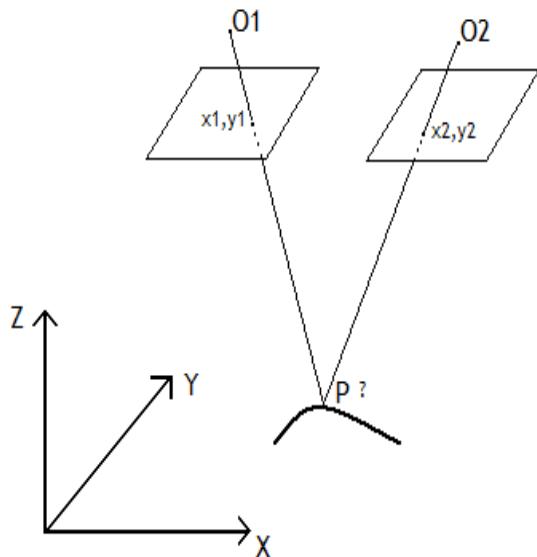


Figura 4.3.4.1. Intersecção directa espacial

Em primeira aproximação, as coordenadas objecto podem ser calculadas a partir das seguintes equações, deduzidas a partir das equações de colinearidade expressas em ordem às coordenadas objecto:

$$\begin{cases} X = X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1} \\ Y = Y_{01} + (Z - Z_{01})K_{y1} \\ X = X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2} \\ Y = Y_{02} + (Z - Z_{02})K_{y2} \end{cases}$$

As duas primeiras equações dizem respeito à foto 1 e as duas últimas à foto 2. Os termos K são calculados a partir dos elementos conhecidos da orientação interna e externa das fotos de acordo com a fórmula das equações de colinearidade atrás referidas.

Como  $X_{01}, Y_{01}, Z_{01}$  e  $X_{02}, Y_{02}, Z_{02}$  são também conhecidos (elem. da or. ext.), temos neste sistema quatro equações lineares com três incógnitas, X, Y e Z, que são as coordenadas objecto do ponto em questão.

Da primeira e da terceira equação vem:

$$Z = \frac{X_{02} - Z_{02}K_{x2} + Z_{01}K_{x1} - X_{01}}{K_{x1} - K_{x2}}$$

Da primeira ou da terceira equação pode-se extrair um valor para X. O valor de Y calcula-se da segunda e da quarta equação. Normalmente obtém-se dois valores diferentes, tomndo-se a média aritmética como valor para Y. Os valores assim calculados para X,Y e Z entram apenas como valores iniciais para uma determinação mais rigorosa por meio de uma compensação pelo método dos mínimos quadrados, pois encontramo-nos perante o caso de observações redundantes (4 equações a 3 incógnitas). As equações de observação serão as de vx e vy descritas anteriormente, apenas com os termos em dX, dY e dZ.

Um ponto novo dará então origem a 4 equações de observação, uma para x e uma para y em cada foto onde foi medido, a 3 incógnitas dX,dY,dZ. O sistema de equações de observação deverá ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados

Equações de observação:

$$\begin{aligned} vxi &= \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)^{(0)} dX + \left( \frac{\partial x}{\partial Y} \right)^{(0)} dY + \left( \frac{\partial x}{\partial Z} \right)^{(0)} dZ + (xi^{(0)} - \bar{x}_i) \\ vyi &= \left( \frac{\partial y}{\partial X} \right)^{(0)} dX + \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right)^{(0)} dY + \left( \frac{\partial y}{\partial Z} \right)^{(0)} dZ + (yi^{(0)} - \bar{y}_i) \end{aligned}$$

**i=1,2** número da foto em que o ponto foi medido

As equações de colinearidade a que se referem as derivadas parciais aqui consideradas são as expressas em ordem às coordenadas foto (coordenadas foto como função das coordenadas objecto e dos parâmetros de orientação).

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial X} &= -\frac{c}{D^2} (D.r11 - Nx.r13) \\ \frac{\partial x}{\partial Y} &= -\frac{c}{D^2} (D.r21 - Nx.r23) \\ \frac{\partial x}{\partial Z} &= -\frac{c}{D^2} (D.r31 - Nx.r33) \\ \frac{\partial y}{\partial X} &= -\frac{c}{D^2} (D.r12 - Ny.r13) \\ \frac{\partial y}{\partial Y} &= -\frac{c}{D^2} (D.r22 - Ny.r23) \\ \frac{\partial y}{\partial Z} &= -\frac{c}{D^2} (D.r32 - Ny.r33) \end{aligned}$$

D- denominador das equações de colinearidade

Nx - numerador da equação de x

Ny - numerador da equação de y

Os valores de dX,dY,dZ obtidos do ajustamento (MMQ) serão somados aos valores iniciais para obter novos valores aproximados das incógnitas para calcular as

equações de observação para a segunda iteração. O processo termina quando os valores das correcções deixarem de ser significativos.

## 5. Transformação espacial de semelhança - Relação entre coordenadas modelo e coordenadas terreno.

### 5.1. Transformação espacial de semelhança

A figura que se segue representa dois sistemas de coordenadas cartesianos com escalas diferentes mas homogéneas em cada sistema, tal como acontece com o sistema de coordenadas modelo ( $x_m, y_m, z_m$ ) e o sistema de coordenadas terreno ( $X, Y, Z$ ).

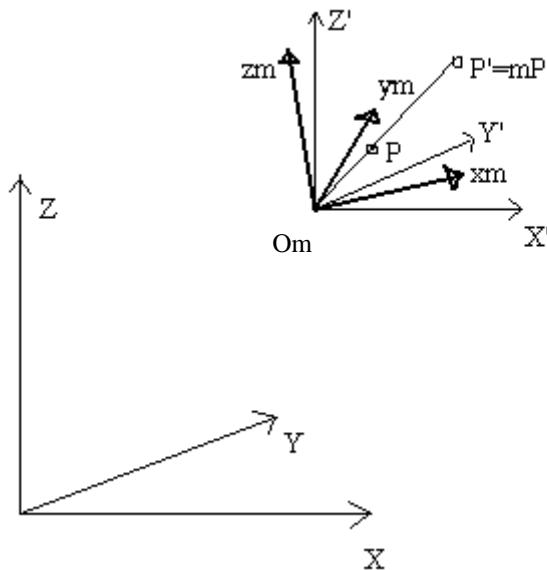


Figura 5.1.1: Sistemas de coordenadas terreno( $X, Y, Z$ ), modelo ( $x_m, y_m, z_m$ ) e intermédio( $X', Y', Z'$ )

Pretende-se agora determinar qual a relação existente entre as coordenadas ( $X, Y, Z$ ) e as coordenadas ( $x_m, y_m, z_m$ ) de um mesmo ponto P, ou seja, como exprimir  $X, Y$  e  $Z$  em função de  $x_m, y_m, z_m$ . Para isso, percorreremos três fases:

- 1) multiplicando as componentes de P,  $x_m, y_m, z_m$ , pela escala existente entre os dois sistemas de coordenadas,  $m$ , obteremos  $P' = mP$
- 2) Considerando um sistema intermédio  $X', Y', Z'$  com origem coincidente com  $Om$  (origem do sistema de coordenadas modelo) e com a mesma escala e os eixos paralelos aos do sistema de coordenadas terreno, P' terá coordenadas  $(X', Y', Z')$  que se relacionam com as suas coordenadas terreno pela seguinte translacção:  $X_{om}, Y_{om}, Z_{om}$  são as coordenadas terreno de  $Om$ .

$$\vec{X} = \vec{X}_{om} + \vec{X}' \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{om} \\ Y_{om} \\ Z_{om} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

- 3) o sistema de coordenadas ( $x_m, y_m, z_m$ ) encontra-se rodado espacialmente relativamente ao sistema  $(X', Y', Z')$  e têm a mesma origem. A relação entre  $P'$

num sistema e outro é expressa por uma matriz de rotação espacial. Os seus elementos são a expressão dos vectores unitários de um dos sistemas em função dos vectores unitários do outro sistema.

$$\vec{P}' = mx_m \vec{i} + my_m \vec{j} + mz_m \vec{k}$$

$$\vec{P}' = X' \vec{I} + Y' \vec{J} + Z' \vec{K}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  – vectores..unitários..sist..coord..modelo..( $\vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_m$ )

$(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  – vectores..unitários..sist..coord..terreno..paralelos..aos..do..sistema..( $\vec{X}', \vec{Y}', \vec{Z}'$ )

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} \vec{i} \bullet \vec{I} \\ \vec{i} \bullet \vec{J} \\ \vec{i} \bullet \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{x}_m \vec{X}') \\ \cos(\vec{x}_m \vec{Y}') \\ \cos(\vec{x}_m \vec{Z}') \end{bmatrix}$$

análoga para...j..e..para..k.

pelo..que

$$m(x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k}) = m \begin{bmatrix} \cos(\vec{x}_m \vec{X}') & \cos(\vec{y}_m \vec{X}') & \cos(\vec{z}_m \vec{X}') \\ \cos(\vec{x}_m \vec{Y}') & \cos(\vec{y}_m \vec{Y}') & \cos(\vec{z}_m \vec{Y}') \\ \cos(\vec{x}_m \vec{Z}') & \cos(\vec{y}_m \vec{Z}') & \cos(\vec{z}_m \vec{Z}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

ou...seja

$$\vec{X}' = m \vec{R} \vec{x}_m$$

Nas equações acima,  $\cos(ab)$  significa cosseno do ângulo entre os vectores  $a$  e  $b$

Substituindo, na expressão obtida em 2),  $X'$  pela expressão agora obtida, a relação entre coordenadas modelo  $x_m$  e coordenadas terreno  $X$  do mesmo ponto será então dada pela expressão:

$$\boxed{\vec{X} = \vec{X}_{om} + m \vec{R} \vec{x}_m}$$

A matriz  $R$  é a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas modelo e terreno. A este tipo de transformação de coordenadas chama-se **transformação espacial de semelhança**. É aplicável entre dois sistemas coordenados sempre que estes sejam semelhantes (com iguais ângulos entre os eixos coordenados) e tenham, cada um deles escala homogénea ao longo de todos os eixos. Esta transformação tem **7 parâmetros**, que, no caso referido de transformação de coordenadas modelo em terreno, representam os parâmetros da orientação absoluta do modelo:

$m, X_t, Y_t, Z_t$  e  $\Omega, \Phi, K$  sendo  $X_t = X_{om}, Y_t = Y_{om}, Z_t = Z_{om}$ .

Se a sequência das rotações for a indicada, omega após fi após kapa, então os elementos da matriz de rotação exprimem-se em função destes ângulos do modo descrito no capítulo 3.4.

Se forem, portanto, conhecidos os três ângulos de rotação sob os quais o sistema de coordenadas modelo está rodado em relação ao sistema de coordenadas terreno, podem-se calcular os 9 elementos da matriz  $R_{\Omega\Phi K}$  pelas fórmulas indicadas no capítulo 3.4.

Se, por outro lado, forem conhecidos os 9 elementos da matriz  $R$ , então os parâmetros de rotação podem ser calculados por:

$$\begin{aligned}\tan \Omega &= -\frac{r_{23}}{r_{33}} \\ \operatorname{sen} \Phi &= r_{13} \\ \tan K &= -\frac{r_{12}}{r_{11}}\end{aligned}\quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Há que tomar atenção aos quadrantes dos ângulos, os quais se deduzem dos sinais dos senos e cosenos.  $\Omega$  e  $K$  podem ser determinados inequivocamente. Há, no entanto, dois ângulos  $\Phi$  que satisfazem a rotação espacial.

## 5.2. Linearização da equação da T.E.S.

Como se viu atrás, as relações entre coordenadas modelo e coordenadas terreno não são lineares. Para a determinação dos seus parâmetros, há necessidade de linearizar as suas equações para que seja aplicável o método dos mínimos quadrados. Para linearizar equações, necessitamos primeiro de ter valores aproximados de todos os parâmetros a determinar. Neste caso concreto, dos 7 parâmetros da orientação absoluta.

### 5.2.1. Valores aproximados

Os valores aproximados referidos são geralmente conhecidos *a priori*, ou então, são calculados a partir de pontos fotogramétricos dos quais são conhecidas as coordenadas modelo e terreno.

Caso estejamos a lidar com fotografias aéreas, podem-se tomar como valores aproximados iniciais:

$$\begin{aligned}\Omega^{(0)} &= 0 \\ \Phi^{(0)} &= 0 \\ K^{(0)} &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{rumo} & \dots \text{rumo} \in 1^\circ Q \\ \frac{5\pi}{2} - \text{rumo} & \dots \text{rumo} \notin 1^\circ Q \end{cases} \\ m^{(0)} &= \frac{mf \cdot bf}{bm}\end{aligned}$$

sendo  $mf$  o módulo da escala da foto,  $bf$  a base fotográfica e  $bm$  essa base medida no modelo.

Os valores iniciais para as coordenadas da origem do sistema de coordenadas modelo podem-se obter a partir de um ponto fotogramétrico.

Em alternativa a estes valores conhecidos *a priori*, existem métodos de calcular os valores aproximados dos parâmetros a partir dos pontos fotogramétricos, que são mais adequados a processos automáticos computacionais de determinação analítica da orientação absoluta. Veremos de seguida um desses métodos.

Para este método computacional é necessário que existam pelo menos 4 Pfs dos quais se conheçam as coordenadas terreno e se meçam as coordenadas modelo (num par estereoscópico devidamente orientado relativamente). Nestas condições, é possível resolver a seguinte transformação linear de 12 parâmetros, semelhante à anterior transformação não linear de 7 parâmetros:

$$\vec{X} = \vec{X}_{om} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_m$$

ou..seja

$$\vec{X} = \vec{X}_{om} + \vec{A} \cdot \vec{x}_m$$

As 12 incógnitas desta transformação são as três translacções X<sub>om</sub>, Y<sub>om</sub>, Z<sub>om</sub> e os 9 coeficientes  $a_{ij}$ . Esta transformação engloba três equações, uma para cada coordenada terreno. Com 4 Pfs, poderemos formular  $4 \times 3$  equações para determinar 12 incógnitas. O sistema é determinado.

Determinados os  $a_{ij}$ , resta saber como se chega aos valores aproximados que nos interessam, nomeadamente para  $m$ ,  $\Omega$ ,  $\Phi$ ,  $K$ .

Ora os elementos  $a_{ij}$  da matriz A diferem dos elementos  $r_{ij}$  da matriz R apenas pelo factor  $m$ . Sendo a matriz A ortogonal, mas não normada, vem que

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} = m^{(0)}$$

de onde sai um valor aproximado para  $m$  que será  $m^{(0)}$ . Dividindo todos os elementos de A por  $m^{(0)}$  e aplicando as expressões referidas em 5.1. à matriz assim calculada, obtém-se os valores aproximados para  $\Omega$ ,  $\Phi$ ,  $K$ , ou seja  $\Omega^{(0)}$ ,  $\Phi^{(0)}$ ,  $K^{(0)}$ .

O passo seguinte na linearização é calcular coordenadas terreno aproximadas a partir das coordenadas modelo de que dispomos, aplicando os valores iniciais aproximados dos parâmetros às equações originais da T.E.S. As coordenadas assim obtidas chamaremos coordenadas pseudo-terreno e designá-las-emos por  $x_p, y_p, z_p$ .

### 5.2.2. Equação linearizada

Feito isto, ficaremos nas condições que nos permitem linearizar o problema, ou seja, as coordenadas terreno são pouco diferentes das coordenadas pseudo-terreno. As diferenças que existem entre os dois conjuntos de coordenadas são:

pequenas rotações:

$$\Omega = d\Omega, \Phi = d\Phi, K = dK$$

Pequena correção de escala (escala aproximadamente igual):

$$m = 1+dm$$

pequenas translações:

$$\vec{X}_{om} = d\vec{X}_{om}$$

Considerando que os ângulos de rotação são muito pequenos, teremos que:

$$\sin d\Omega = d\Omega$$

$$\cos d\Omega = 1$$

$$d\Omega \cdot d\Omega \rightarrow 0$$

e analogamente para  $d\Phi$  e  $dK$ , pelo que a matriz de rotação  $R\Omega\Phi K$  com estes pequenos ângulos virá muito simplificada:

$$dR = \begin{bmatrix} 1 & -dK & d\Phi \\ dK & 1 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz só é ortogonal para elementos de primeira ordem. Os produtos foram, por isso, considerados nulos. A linearização do produto  $mR$  da T.E.S. nas condições atrás referidas,  $m = 1+dm$  e  $R = dR$ , virá então:

$$mR \Rightarrow (1+dm).dR = \begin{bmatrix} 1+dm & -dK & d\Phi \\ dK & 1+dm & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1+dm \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} dm & -dK & d\Phi \\ dK & dm & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & dm \end{bmatrix}$$

A linearização da equação completa da transformação espacial de semelhança será então:

$$\vec{X} = \vec{X}_{om} + mR\vec{x}_m \Rightarrow \vec{X} = d\vec{X}_{om} + (1+dm)dR\vec{x}_p$$

Enquanto a equação da esquerda traduz a relação entre coordenadas terreno e coordenadas modelo, a da direita estabelece a relação entre coordenadas terreno e coordenadas pseudo-terreno, já definidas atrás.

Discriminando esta equação para cada coordenada teremos 3 equações lineares:

$$\begin{cases} X = dXom + x_p dm + z_p d\Phi - y_p dK + x_p \\ Y = dYom + y_p dm - z_p d\Omega + x_p dK + y_p \\ Z = dZom + z_p dm + y_p d\Omega - x_p d\Phi + z_p \end{cases}$$

Nestas equações, como se pode verificar, surgem as sete incógnitas da orientação absoluta em formato linear como se pretendia.

### 5.3. Determinação da orientação absoluta de um modelo

Estas equações linearizadas podem-se transformar em equações de observação (de correcção ou de erro) com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} vx &= dXom + x_p dm + z_p d\Phi - y_p dK - (X - x_p) \\ vy &= dYom + y_p dm - z_p d\Omega + x_p dK - (Y - y_p) \\ vZ &= dZom + z_p dm + y_p d\Omega - x_p d\Phi - (Z - z_p) \end{aligned}$$

Em forma matricial vem:

$$\vec{v} = A\vec{x} - \vec{\ell}$$

representando  $v$  o vector das correcções às coordenadas pseudo-terreno,  $A$  a matriz de configuração,  $x$  o vector das correcções aos parâmetros a determinar e  $\ell$  o vector dos termos independentes.

Para determinar a orientação absoluta de um modelo, é necessário ter um número de Pfs mínimo de três (dois completos e um altimétrico), mas de preferência mais do que três nesse modelo. Desses pontos é necessário conhecer as coordenadas terreno e medir as coordenadas modelo. Primeiro determinam-se valores aproximados para os parâmetros de orientação por um dos métodos indicados. Depois calculam-se coordenadas pseudo-terreno.

Estabelecem-se então equações de observação como as descritas acima para todos os Pfs. Um Pf completo dá origem a três equações de observação, uma por cada coordenada. Um Pf planimétrico dá origem a duas equações como as primeiras duas e um Pf altimétrico originará uma equação como a terceira. Obtem-se assim o sistema de equações de observação.

Para determinar as correcções aos parâmetros pretendidos,  $dXom$ ,  $dYom$ ,  $dZom$ ,  $dm$ ,  $d\Omega$ ,  $d\Phi$ ,  $dK$ , resolve-se este sistema pelo método de ajustamento pelos mínimos quadrados por observações indirectas (paramétrico).

$$\vec{v} = A\vec{x} - \vec{\ell}$$

*solução*

$$\vec{x} = (A^T PA)^{-1} A^T P \vec{\ell}$$

$$\vec{x} = N^{-1} A^T \vec{\ell}$$

$$N^{-1} = Q_{xx} \rightarrow \text{matriz..cofator}$$

$$P \rightarrow \text{matriz..dos..pesos..das..observações}$$

Os valores das correcções aos parâmetros determinados deverão ser adicionados aos valores aproximados iniciais para obter novos valores aproximados com os quais se calculam novas coordenadas pseudo-terreno e se estabelecem novas equações de observação para resolver de novo o sistema. O processo iterativo termina quando os parâmetros  $dX_{0m}$ ,  $dY_{0m}$ ,  $dZ_{0m}$ ,  $dm$ ,  $d\Omega$ ,  $d\Phi$ ,  $dK$  determinados pelo ajustamento deixarem de ser significativos.

#### 5.4. Determinação das coordenadas de um ponto novo

De posse de todos os elementos de orientação absoluta de um modelo, poderemos então calcular as coordenadas terreno de qualquer ponto a partir das suas coordenadas modelo medidas em aparelho aplicando a fórmula directa da T.E.S.

$$\vec{X} = \vec{X}_{0m} + mR\vec{x}_m$$

O cálculo das coordenadas terreno dos Pfs, dos quais já conhecemos um conjunto de coordenadas terreno determinadas de modo independente, possibilita-nos o controlo do ajustamento realizado (se os Pfs forem de confiança, o que se assume aqui), nomeadamente calculando o erro médio de uma observação:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - i}}$$

sendo  $\mathbf{v}$  o vector dos resíduos nos Pfs,  $n$  o número de equações e  $i$  o número de incógnitas.  $s_0$  é, neste caso a precisão com que foi medida uma coordenada modelo. Do cálculo directo  $s_0$  sai nas unidades das coordenadas terreno. Em termos de modelo obteremos a precisão dividindo este valor por  $m$  (módulo da escala do modelo).

A relação que existe entre coordenadas modelo e coordenadas terreno é a mesma que existe entre coordenadas modelo e coordenadas objecto arbitrárias. Os parâmetros de orientação determinados referem-se então a uma orientação do modelo estereoscópico relativamente ao sistema de coordenadas do objecto. Também entre modelos adjacentes com sistemas de coordenadas independentes se podem calcular os parâmetros de uma T.E.S. com os quais se possa transformar as coordenadas medidas num modelo nas coordenadas referidas ao sistema do segundo modelo.

## 6. Condição de complanaridade - Relação entre coordenadas foto e coordenadas modelo

A relação entre coordenadas foto e coordenadas modelo é relevante no contexto da orientação relativa analítica. A determinação analítica dos cinco parâmetros da orientação relativa de um par estereoscópico (ou de duas fotos de um mesmo objecto que não formem um par estereoscópico), baseia-se na condição de complanaridade dos raios homólogos, ou seja dos dois raios projectivos que passam pelo centro de projecção e pela imagem de um mesmo ponto em cada uma das duas fotos. Vejamos como se determinam esses parâmetros.

Considere-se a seguinte figura:

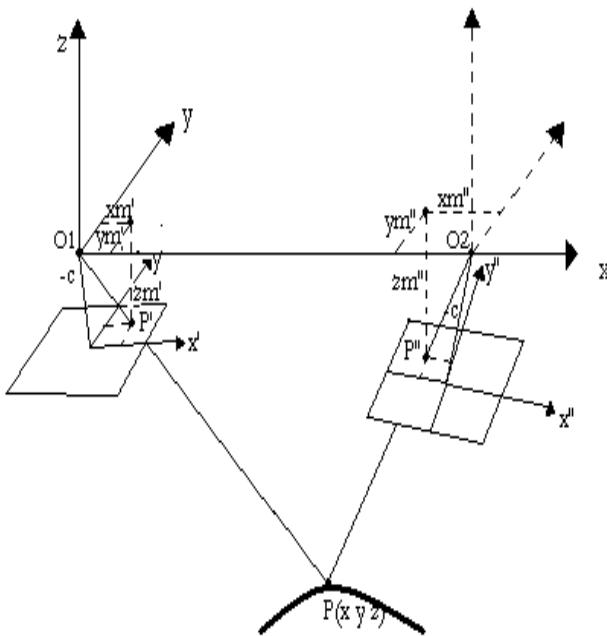


Figura 6.1 Complanaridade dos raios homólogos

O<sub>1</sub> e O<sub>2</sub> representam os centros de projecção das duas fotos de um par. P representa um ponto do modelo (estereoscópico) cujas coordenadas modelo são (x,y,z). O sistema de coordenadas modelo que tem uma origem arbitrária, está, neste caso particular, centrado em O<sub>1</sub>, sendo o eixo dos xx coincidente com a base O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>, e o eixo dos yy perpendicular ao eixo dos xx e paralelo ao plano da foto 1 (plano x'y'). O eixo dos zz é perpendicular ao plano xy formando um sistema directo com esses eixos. c representa a constante da câmara e x'y' e x''y'' representam os eixos dos sistemas de coordenadas foto em cada uma das fotos 1 e 2. P' é a imagem do ponto P na foto 1 e P'' a sua imagem na foto 2. As rectas O<sub>1</sub>P'P e O<sub>2</sub>P''P representam os raios homólogos correspondentes ao ponto P do modelo. Estas rectas são espaciais (3D).

Para que estes raios homólogos se intersectem no espaço, tal como está representado na figura, as suas rectas e a base O<sub>1</sub>O<sub>2</sub> têm que se situar num mesmo plano, ou seja, têm que ser complanares. Caso esta condição seja satisfeita, cada par das três rectas define o **plano epipolar**. Como a cada ponto do modelo corresponde um par de raios homólogos, deduz-se que para todos os pontos do modelo tem de existir complanaridade entre os seus raios homólogos e a base. Esta condição geométrica para que se forme um modelo (estereoscópico) pode ser expressa por equações em

que entrem os parâmetros da orientação relativa das duas fotos ( $\omega_1 \varphi_1 \kappa_1 \omega_2 \varphi_2 \kappa_2$  bx by bz) para posteriormente determinar esses parâmetros. Estes parâmetros não são independentes. De facto basta determinar 5 desses parâmetros para que a orientação relativa das duas fotos fique determinada.

O plano epipolar de cada ponto modelo intersecta os planos das duas fotografias sobre uma recta denominada **recta epipolar**. A condição de complanaridade dos raios homólogos verifica-se também em fotografias convergentes de um mesmo objecto (por exemplo na restituição múltipla) e está na base de muitos operadores para determinação automática de pontos homólogos em várias fotografias de orientação relativa conhecida.

A condição de complanaridade das três rectas pode ser traduzida pelo valor nulo do seguinte determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & xm' & xm'' \\ 0 & ym' & ym'' \\ 0 & zm' & zm'' \end{vmatrix} = 0$$

As colunas do determinante representam, respectivamente, o vector unitário da base O1 O2, o vector O1 P' e o vector O2 P'', ambos em coordenadas modelo.

As componentes dos vectores O1 P' = (xm', ym', zm') e de O2 P'' = (xm'', ym'', zm'') são expressas em função das coordenadas foto de P' e P'' do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} xm' \\ ym' \\ zm' \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} xm'' \\ ym'' \\ zm'' \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

As matrizes R1 e R2 são matrizes de rotação espacial de parâmetros  $\omega_1 \varphi_1 \kappa_1$  para R1 e  $\omega_2 \varphi_2 \kappa_2$  para R2. Os parâmetros  $\omega_1$  e  $\omega_2$  que representam as rotações das fotos em torno do eixo do xx, não são, neste caso, independentes. Portanto pode-se considerar um deles igual a zero e determinar o outro. Suponhamos que pretendemos determinar os parâmetros  $\omega_1 \varphi_1 \kappa_1 \varphi_2 \kappa_2$  considerando assim  $\omega_2 = 0$ .

Segue-se um resumo dos passos a seguir na determinação dos parâmetros.

- 1) Estipulam-se valores iniciais aproximados para  $\omega_1 \varphi_1 \kappa_1 \varphi_2 \kappa_2$ .
- 2) Para 5 pares de pontos homólogos (no mínimo) cujas coordenadas foto se medem em ambas as fotos, calculam-se as coordenadas modelo iniciais a

partir das coordenadas foto e introduzindo os valores iniciais dos parâmetros nas matrizes de rotação R1 e R2 .

- 3) Formulam-se as equações de erro para esses cinco pares de pontos homólogos para  $i = 1..5$

$$v_{\Delta i} = K_{1i} \cdot d\omega_1 + K_{2i} \cdot d\varphi_1 + K_{3i} \cdot d\kappa_1 + K_{4i} \cdot d\varphi_2 + K_{5i} \cdot d\kappa_2 + \Delta_{0i}$$

onde :

$$K_{1i} = -zm'_i \cdot zm''_i - ym'_i \cdot ym''_i$$

$$K_{2i} = (zm''_i \cdot \sin \omega_1 + ym''_i \cdot \cos \omega_1) \cdot xm'_i$$

$$K_{3i} = (xm'_i \cdot \cos \omega_1 \cdot \cos \varphi_1 - zm'_i \cdot \sin \varphi_1) \cdot zm''_i - (xm'_i \cdot \sin \omega_1 \cdot \cos \varphi_1 + ym'_i \cdot \sin \varphi_1) \cdot ym''_i$$

$$K_{4i} = -xm''_i \cdot ym'_i$$

$$K_{5i} = ym'_i \cdot ym''_i \cdot \sin \varphi_2 - (xm''_i \cdot \cos \varphi_2 - zm''_i \cdot \cos \varphi_2) \cdot zm'_i$$

$$\Delta_{0i} = ym'_i \cdot zm''_i - ym''_i \cdot zm'_i$$

Obtem-se assim um sistema de 5 equações a 5 incógnitas que são as correções aos parâmetros iniciais da orientação relativa.

- 4) Configura-se o sistema no formato  $v = AX - \ell$

A - matriz de configuração

X - vector das incógnitas

$\ell$  - vector dos termos independentes

Resolve-se o sistema.

$$\text{Solução: } X = (A^T A)^{-1} A^T \ell$$

- 5) Corrigem-se os parâmetros aproximados iniciais. Após a iteração n :

$$\omega_1^{n+1} = \omega_1^n + d\omega_1$$

$$\varphi_1^{n+1} = \varphi_1^n + d\varphi_1$$

$$\kappa_1^{n+1} = \kappa_1^n + d\kappa_1$$

$$\varphi_2^{n+1} = \varphi_2^n + d\varphi_2$$

$$\kappa_2^{n+1} = \kappa_2^n + d\kappa_2$$

- 5) Repetem-se os passos 2 a 5 até os elementos de orientação não apresentarem variação significativa.

## 7. Modelos matemáticos alternativos - Coordenadas homogéneas

### 7.1. - Coordenadas homogéneas

Qualquer ponto de um espaço 3D se pode descrever em termos de um vector de coordenadas homogéneas. Este contém quatro elementos reais, representando o último o factor de escala homogéneo.

$$\vec{x}_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$

A relação entre coordenadas homogéneas e coordenadas cartesianas do mesmo ponto é a seguinte:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A representação em coordenadas homogéneas é muito utilizada em programas de visualização de objectos 3D definidos por um conjunto de pontos. O factor de escala homogéneo pode ser interpretado como um factor de zoom aplicado ao conjunto de pontos. As coordenadas cartesianas de cada ponto do objecto mantêm-se inalteradas, mas aplicando vários factores de zoom, elas vão-se alterando e o ponto aparece noutras posições.

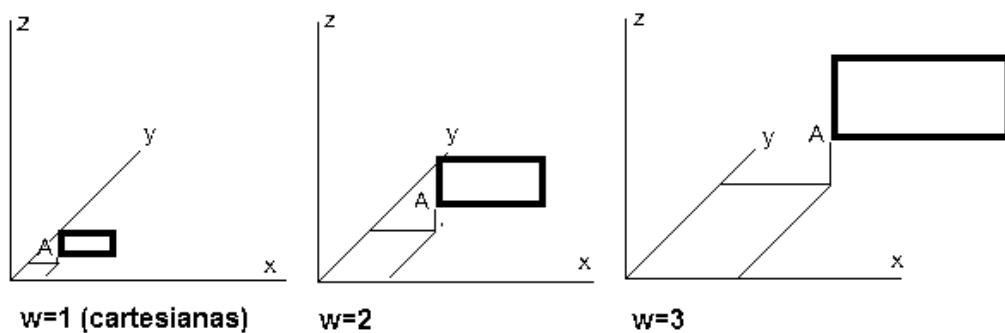


Figura 7.1.1. O ponto A tem sempre as mesmas coordenadas cartesianas mas várias coordenadas homogéneas, consoante o factor de escala homogéneo  $w$ .

A vantagem da representação em coordenadas homogéneas é que **qualquer que seja o tipo de transformação geométrica** (escala, rotação, translação, simetria, perspectiva, etc.) que se aplique a um ponto (ou conjunto de pontos) ela é sempre

traduzida formalmente por uma matriz **4x4**. Isto é tanto válido para uma só transformação como para uma sucessão de transformações.

$$X = T \cdot x$$

$$T = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline T_{21} & T_{22} \end{array} \right]$$

$T_{11}$  – escala, reflexão, rotação

$T_{12}$  – translação

$T_{21}$  – perspectiva

$T_{22}$  – factor de escala homógeo

Cada submatriz  $T_{ij}$  é responsável por realizar uma ou mais transformações geométricas. As matrizes das transformações elementares usadas em fotogrametria são as que a seguir se apresentam:

$$T_s = \left[ \begin{array}{ccc|c} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Escala e reflexão

$$T_r = \left[ \begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Rotação

$$T_t = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 1 & z_t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Translação

$$\boxed{X = T \cdot x = T_n \dots T_2 T_1 \cdot x}$$

$$\boxed{x = T^{-1} \cdot X = T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_n^{-1} \cdot X}$$

As equações anteriores mostram a relação entre os pontos X e x em coordenadas homogéneas, quando estes se encontram em diferentes sistemas de coordenadas. T é uma matriz de transformação geral entre os dois sistemas de coordenadas, a qual corresponde à multiplicação sucessiva de matrizes de transformação elementares  $T_i$ . A transformação inversa, ou seja de X para x, é calculada pela multiplicação das matrizes elementares inversas pela ordem inversa.

### 7.1.1 TES em coordenadas homogéneas

A Transformação Espacial de Semelhança aplicada a pontos expressos em coordenadas homogéneas tem a seguinte forma, onde a nomenclatura é a utilizada em capítulos anteriores:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr_{11} & mr_{12} & mr_{13} & X_0 \\ mr_{21} & mr_{22} & mr_{23} & Y_0 \\ mr_{31} & mr_{32} & mr_{33} & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 7.1.2 Colinearidade em coordenadas homogéneas

A colinearidade entre coordenadas do ponto objecto, do centro de projecção e do ponto imagem são expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}_S^{-1} \cdot \mathbf{T}_Z \cdot \mathbf{T}_R^{-1} \cdot \mathbf{T}_T^{-1} \cdot \mathbf{X}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \underline{r_{11}} & \underline{r_{21}} & \underline{r_{31}} & \underline{-(r_{11}X_0 + r_{21}Y_0 + r_{31}Z_0)} \\ \underline{m} & \underline{m} & \underline{m} & \underline{m} \\ \underline{r_{12}} & \underline{r_{22}} & \underline{r_{32}} & \underline{-(r_{12}X_0 + r_{22}Y_0 + r_{32}Z_0)} \\ \underline{m} & \underline{m} & \underline{m} & \underline{m} \\ \underline{r_{13}} & \underline{r_{23}} & \underline{r_{33}} & \underline{-(r_{13}X_0 + r_{23}Y_0 + r_{33}Z_0)} \\ \hline \underline{-r_{13}} & \underline{-r_{23}} & \underline{-r_{33}} & \underline{r_{11}X_0 + r_{21}Y_0 + r_{31}Z_0} \\ \hline c \cdot m & c \cdot m & c \cdot m & c \cdot m \end{array} \right] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  - ponto imagem,  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ - ponto objecto,  $X_0, Y_0, Z_0$  - centro de projecção e  $m = -Z/c$ .

## 7.2. Transformação Linear Directa

Com a Transformação Linear Directa (DLT) consegue-se determinar a orientação interna e externa de uma fotografia através de equações lineares aplicadas a pontos fotogramétricos, eliminando a necessidade de determinar valores iniciais. É muito útil em situações em que a orientação interna da câmara não é conhecida ou não é estável (caso de imagens de câmaras desconhecidas, ou das imagens de câmaras de vídeo). A relação entre coordenadas objecto ( $X, Y, Z$ ) e coordenadas foto ( $x, y$ ) é a seguinte:

$$x = \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}$$

$$y = \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}$$

$L_i \ i=1..11$  parâmetros da DLT

As equações de observação a formular para PFs de modo a determinar os parâmetros  $L_i$  são da forma:

$$L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4 - xL_9X - xL_{10}Y - xL_{11}Z - x = 0$$

$$L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8 - yL_9X - yL_{10}Y - yL_{11}Z - y = 0$$

Para determinar os 11 parâmetros da DLT são necessários no mínimo 6 PFs na fotografia (cada PF origina duas equações), o que na prática nem sempre é fácil ter disponível. Determinados os parâmetros  $L_i$  é possível chegar aos valores dos parâmetros de orientação interna e externa da fotografia pelas seguintes relações:

$$L = \frac{-1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}}$$

Parâmetros de orientação interna:

$$x_0 = L^2 \cdot (L_1 \cdot L_9 + L_2 \cdot L_{10} + L_3 \cdot L_{11})$$

$$y_0 = L^2 \cdot (L_5 \cdot L_9 + L_6 \cdot L_{10} + L_7 \cdot L_{11})$$

$$c_x = \sqrt{L^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - x_0^2} \quad c_y = \sqrt{L^2 \cdot (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) - y_0^2}$$

c aparece com duas componentes, pois a DLT não assume obrigatoriamente sistemas de coordenadas cartesianas.

Parâmetros de orientação externa:

$$\varphi = \arcsin(L_9 \cdot L)$$

$$\omega = \arctan\left(-\frac{L_{10}}{L_{11}}\right)$$

$$r_{11} = \frac{L \cdot (x_0 \cdot L_9 - L_1)}{c_x}$$

$$\kappa = \arccos\left(\frac{r_{11}}{\cos\varphi}\right)$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} L_4 \\ L_8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para além da desvantagem do elevado número de PFs necessário por fotografia para a determinação dos parâmetros da DLT, estes não podem estar todos situados num só plano no espaço objecto, e além disso há que evitar configurações em que o denominador das equações seja quase nulo, o que provoca singularidades no sistema. Os parâmetros  $L_i$  não têm qualquer significado físico, pelo que, caso se conheça a orientação interna da fotografia, não é fácil introduzir essa informação no cálculo. Apesar destas limitações, a DLT é muitas vezes utilizada para a determinação de valores aproximados para ajustamentos por outros modelos matemáticos (eq. colinearidade).

## 8. Georreferenciação semi-directa: Aerotriangulação com apoio GNSS

Devido ao custo da componente de determinação do apoio geodésico ser ainda muito elevado no processo de produção cartográfica por fotogrametria, investiu-se durante décadas na tentativa de reduzir tais custos. Surgiu então a ideia de tentar determinar directamente os parâmetros de orientação espacial das fotos através de dados suplementares adquiridos durante o voo fotográfico. Várias técnicas foram ensaiadas ao longo dos tempos, sobretudo com o intuito de poupar a determinação de PFs altimétricos (por ex. câmara de horizonte, estatoscópio, registo de perfis, altimetria de radar, distanciómetro de laser), mas todas elas se mostraram não fiáveis, muito complexas, ou muito caras para virem a ser operacionais. O distanciómetro de laser, no entanto, começou recentemente a ser integrado na produção cartográfica (produção de MDT por LIDAR) mas não com o mesmo objectivo das primeiras tentativas.

Só com o aparecimento da técnica de posicionamento cinemático por GPS, especialmente após o segmento espacial do GPS estar completo (1994), é que se conseguiu finalmente testar procedimentos durante e após o voo que permitiram obter boas precisões das coordenadas dos centros de projecção das fotografias após processamento. Começou-se então a enveredar por esta técnica e a torná-la operacional.

Estando os centros de projecção coordenados no sistema de coordenadas objecto, poderiam desempenhar o papel de PFs espaciais (acima do terreno) e assim, o ponto principal de cada fotografia teria coordenadas terreno conhecidas. As rotações entrariam no programa de aerotriangulação com valores aproximados ( $\omega$  e  $\kappa$  iguais a zero e  $kappa$  em função do rumo de voo) e seriam por fim determinadas pelo próprio ajustamento.

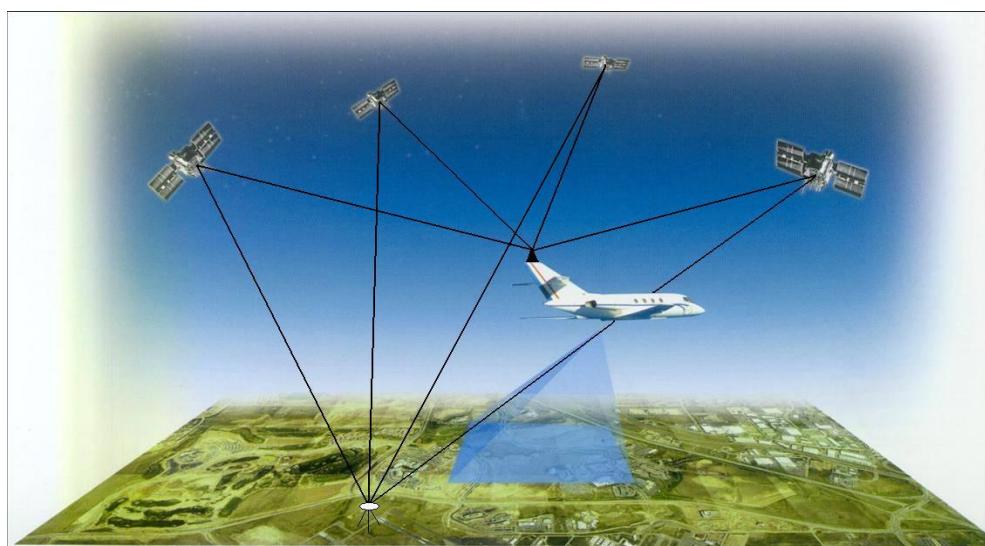


Figura 8.1. Voo fotográfico com apoio GNSS

Com tantos PFs espaciais disponíveis, não haveria teoricamente necessidade de determinar PFs no campo, o que era o objectivo inicial. Pelo facto de o GNSS ter um

referencial próprio que nem sempre é o mesmo referencial em que se pretendem as coordenadas objecto (terreno), há frequentemente necessidade de transformar as coordenadas obtidas por GNSS para as coordenadas (cartográficas) que se pretendem utilizar no processo de produção cartográfica.

Vejamos então como se faz actualmente a aerotriangulação com apoio GNSS. Este tipo de aerotriangulação, difere do habitual nos seguintes aspectos:

**1.equipamento utilizado para aquisição dos dados fotográficos:**

- avião com um receptor GNSS e uma câmara aérea que registe os instantes das exposições
- um receptor GNSS em terra num ponto de coordenadas conhecidas (DATUM)

**2.vôo fotográfico:**

- as voltas entre fiadas devem ser mais largas de modo a que o avião não incline muito as asas para não perder o sinal dos satélites GNSS (mínimo 4 simultâneos).
- terminado o varrimento da zona a levantar por fiadas paralelas, fazem-se duas fiadas transversais a rematar o bloco sobre as primeiras e as últimas fotos de cada fiada (fig.8.2.).
- caso a dimensão do bloco o justifique, a fiada transversal deve ser repetida de 30 em 30 bases.

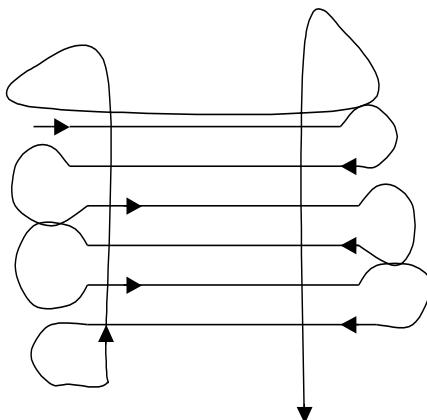


Figura 8.2. Traçado de voo com apoio GNSS

**3.apoio geodésico necessário:**

- dois PFs completos no início e no fim de cada fiada transversal, mas na zona de sobreposição com as fiadas normais.
- os restantes pontos de apoio à restituição(de passagem e de ligação) devem apresentar a disposição mínima habitual (6 PP por modelo, 2 PL entre modelos de fiadas diferentes).

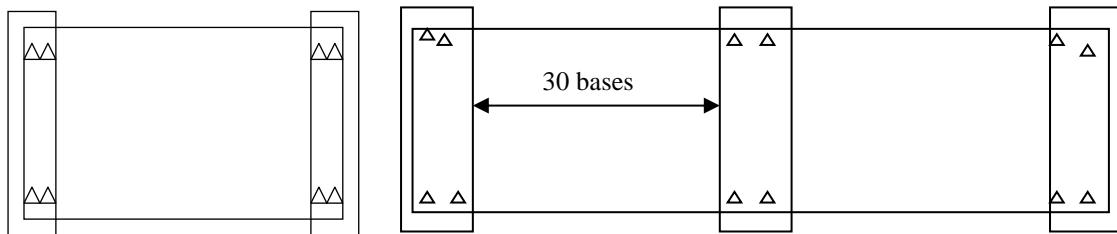


Figura 8.3. Distribuição de PFs num voo feito com apoio GNSS

#### 4. modelo para aerotriangulação:

- é acrescentado ao modelo matemático da aerotriangulação por feixes perspectivos um conjunto de equações de observação para cada centro de projecção (para cada foto onde foi determinado directamente), que traduzem a seguinte situação: as coordenadas GNSS recebidas pelo receptor do avião, após o processamento, são as coordenadas geodésicas da antena do avião. A câmara, nomeadamente o centro óptico da sua objectiva, que se admite ser o centro de projecção do qual pretendemos as coordenadas, encontra-se noutra posição. A posição espacial do CP varia em relação à posição espacial da antena de momento para momento, em função da variação da altitude do avião. É por isso necessário considerar o vector espacial antena-câmara. Este é normalmente medido directamente (por técnicas topográficas) dentro do avião antes do voo, e é expresso pelas suas três componentes espaciais  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  no sistema de coordenadas da câmara.

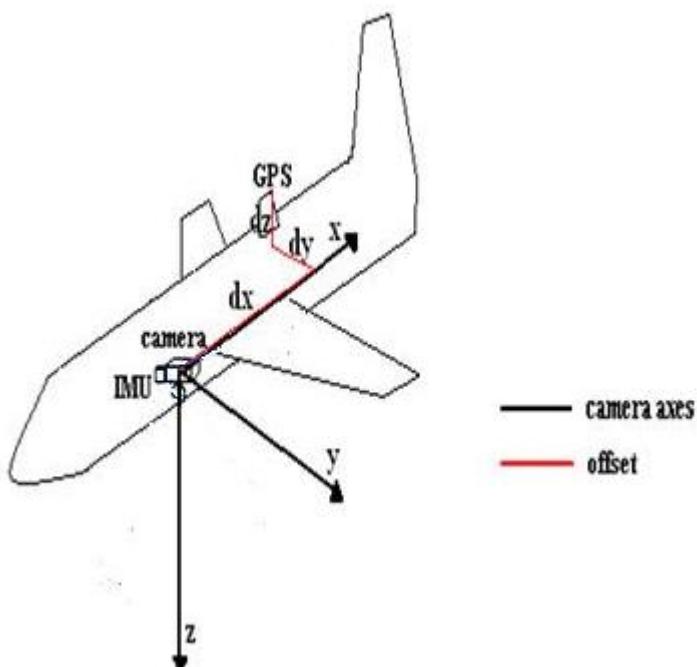


Figura 8.4. Componentes do vector antena câmara e sistema de coordenadas câmara

Equações de observação para cada centro de projecção j:

$$\begin{bmatrix} v_x^{GPS} \\ v_y^{GPS} \\ v_z^{GPS} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} X_j^{CP} \\ Y_j^{CP} \\ Z_j^{CP} \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} X_j^{GPS} \\ Y_j^{GPS} \\ Z_j^{GPS} \end{bmatrix}_3 + R\omega\varphi\kappa \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}_5 + \left( \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}_6 + \begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}_7 \cdot (t - t_0) \right)_k$$

- 1- correções às coordenadas GNSS observadas durante o voo
- 2- coordenadas do centro de projecção j (para a fotografia j)
- 3- coordenadas GNSS observadas durante o voo para a fotografia j
- 4- matriz de rotação espacial do vector antena-câmera ( $\omega\varphi\kappa$  - ângulos da atitude do avião)
- 5- vector antena-câmera (medido no referencial da câmera)
- 6 e 7- parâmetros de deriva, função linear do intervalo de tempo (8), iguais em cada faixa k

Após o cálculo do ajustamento total, obtém-se os mesmos parâmetros que na aerotriangulação tradicional (orientações externas e coordenadas terreno dos pontos novos) e ainda os parâmetros a e b para cada faixa.

Mais recentemente as antenas GNSS a bordo do avião são instaladas na vertical do eixo fotográfico, quando ele é passível de ser materializado (caso das câmaras analógicas), diminuindo a influência de erros nas componentes do vector antena-câmera (offset) nos resultados posteriores.

As coordenadas GNSS da antena são interpoladas para o momento t de tomada de foto a partir da trajectória do avião definida pelos sucessivos pontos 3D coordenados em modo cinemático diferencial pela determinação da fase da onda portadora.

## 9. Georreferenciação directa: Voo fotográfico com apoio GNSS/IMU

O GNSS/IMU é um sistema que combina as técnicas de posicionamento inercial e de posicionamento por GNSS.

O Inertial Measuring System, IMU, é um dispositivo constituído essencialmente por três acelerómetros que detectam acelerações lineares e três giroscópios que detectam acelerações (ou velocidades) angulares ao longo e em torno de três eixos perpendiculares de um corpo a que estão ligados, durante um movimento desse corpo. O sistema baseia-se nas leis de movimento de Newton e na de conservação do momento angular.

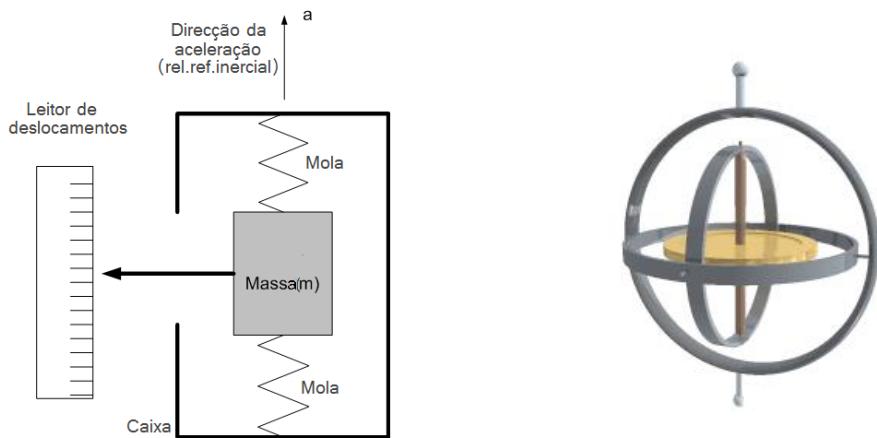


Figura 9.1. esquema de acelerómetro linear (esq.) e giroscópio mecânico (dir.)

Se o sistema estiver solidário com a câmara métrica que obtém a cobertura fotográfica de uma região durante um voo, o IMU fornece em cada momento do voo as acelerações (lineares e angulares) sofridas a partir de uma posição inicial. Calculando duas vezes o integral dessas acelerações em ordem ao tempo, por métodos numéricos, obtêm-se valores de posição X,Y,Z e de atitude  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\kappa$  do corpo nesse momento, relativas a um momento inicial.

O GNSS/IMU é então um duplo sistema de posicionamento, com a vantagem adicional de fornecer também informação sobre a atitude do avião (da câmara) no momento de cada exposição. Qual, então, o objectivo de usar um duplo sistema de posicionamento?

O funcionamento dos dois sistemas assenta em princípios físicos completamente diferentes e ambos apresentam falhas. O IMU é muito preciso momentaneamente, mas a sua deriva é muito grande ao longo do tempo. Ou seja, como é um sistema autónomo, após a inicialização as coordenadas calculadas são precisas, mas as que se sucedem baseiam-se nas anteriores, o que provoca, ao longo do tempo a deriva dos resultados, que é tanto maior quanto maior for o intervalo de tempo que passou desde a inicialização.

Intervalo de tempo		Precisão do sistema		
		alta	média	baixa
Posição	1 s	0.01 - 0.02 m	0.03 - 0.1 m	0.3 - 0.5 m
	1 min	0.3 - 0.5 m	0.5 - 3 m	30 - 50 m
	1 h	300 - 500 m	1 - 3 km	200 - 300 km
Inclinação	1 s	< 1''	10'' - 15''	30'' - 2'
	1 min	1'' - 2''	15'' - 20''	10' - 20'
	1 h	10'' - 30''	30'' - 3'	1° - 3°
Preço (US\$)		~1 000 000	~100 000	~10 000

Tabela 9.1. Classes de precisão de sistemas IMU. (Fonte: Kraus,K. Photogrammetry, 2nd Edition, de Gruyter, 2007)

O GNSS é mais estável no tempo, mas a recepção do sinal dos satélites (no min. 4 em simultâneo) é por vezes interrompida, tendo o sistema que ser reinicializado quando recupera o sinal, sem o que não poderá fornecer mais resultados a partir da interrupção. Num voo fotográfico isso significa deixar de haver informação posicional para as fotos posteriores à interrupção.

A integração dos dois sistemas permite que:

- o IMU seja reinicializado constantemente, à taxa de recepção do GNSS, com os valores de posição fornecidos por este, o que reduz significativamente a deriva dos resultados;
- caso o GNSS falhe, durante a sua ausência existem os dados posicionais do IMU para as fotos realizadas nesse intervalo de tempo. Além disso, quando se recupera o sinal dos satélites, o sistema é reinicializado com os últimos dados do IMU.

A integração dos dados dos dois sistemas é realizada por meio de filtros de Kalman.

Teoricamente, um voo fotográfico realizado com GNSS/IMU dispensa pontos fotogramétricos e, além disso, dispensa a etapa da aerotriangulação, visto que o sistema é capaz de fornecer, em cada momento de exposição,  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  do centro de projecção e  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$  da câmara, que são os elementos de orientação externa da fotografia no momento em que foi obtida.

De posse desses elementos pode-se, como é sabido, determinar coordenadas terreno a partir de coordenadas foto (em duas fotos) de qualquer ponto por intersecção directa espacial (eq. de colinearidade). Pode-se, caso se pretenda, determinar a orientação absoluta de um modelo a partir das coordenadas terreno, de pelo menos três pontos, determinadas pelo método anterior (transf. espacial de semelhança). Pode-se orientar cada foto no espaço objecto independentemente (orientação externa), podendo prosseguir com a orto-rectificação.

A determinação da orientação externa das fotografias sem aerotriangulação usando dados GNSS/IMU denomina-se **georreferenciação directa**.

Na prática, para determinados produtos fotogramétricos de grande escala, a georreferenciação directa ainda não atinge a precisão exigida, podendo no entanto satisfazer os requisitos de muitas outras aplicações.

Existem vários tipos de sistemas GNSS/IMU no mercado que se distinguem pela sua precisão, custo e portabilidade, podendo ser aplicados em diversas áreas.

Os sistemas mais precisos incluem giroscópios de fibra óptica que detectam velocidades angulares em vez de acelerações (caso dos mecânicos).

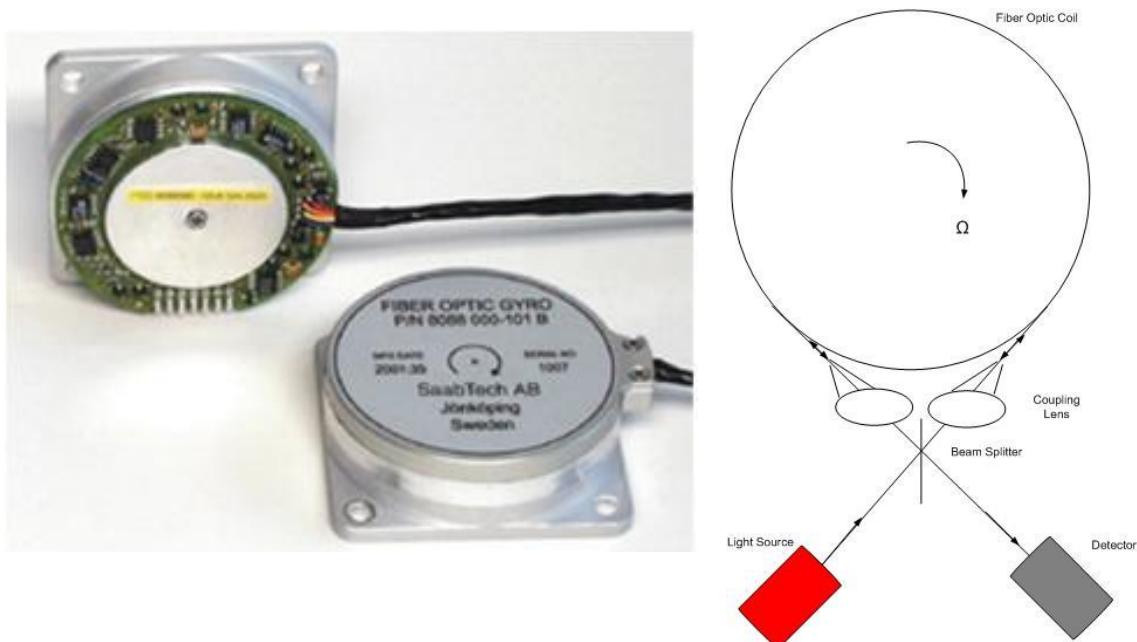


Figura 9.2. Giroscópio de fibra óptica e princípio de funcionamento

Para georreferenciação directa de fotografias aéreas de grande formato, um sistema IMU de média precisão associado a GNSS é suficiente. Mas no caso de câmeras aéreas digitais de sensores lineares (em que a orientação externa varia de linha para linha) e de levantamentos LIDAR (em que a orientação externa varia de ponto para ponto), os indispensáveis sistemas GNSS/IMU têm de ser de melhor precisão.

Os sistemas GNSS/IMU para fotogrametria devem ser regularmente calibrados para se poder relacionar os dados de navegação fornecidos pelo sistema com os parâmetros de orientação fotogramétrica de cada foto.

## 9.1. Calibração do sistema GNSS/IMU

Para calibrar o sistema tem-se seguido a estratégia que se descreve a seguir. Tendo um bloco a cobrir fotograficamente a uma escala  $M$ , realiza-se previamente um voo de uma pequena zona rectangular (área de calibração) no centro do bloco ou exterior a este, garantindo na área de calibração uma cobertura por PFs semelhante à existente em blocos aerotriangulados sem apoio GNSS, ou seja, de três em três bases. O voo de calibração inclui duas fiadas voadas em sentidos opostos.

Voa-se depois o bloco completo (área do projecto) à mesma escala  $M$ . Nesta área não há necessidade de existirem mais PFs (apenas o receptor GNSS em terra se não houver rede GNSS permanente com densidade suficiente), nem de manter uma configuração regular (necessária para a aerotriangulação clássica).

Seguidamente, realiza-se a aerotriangulação por feixes perspectivos apenas do pequeno bloco de calibração, da qual se obtêm os elementos de orientação externa de cada foto e as respectivas matrizes de rotação. Estes resultados são comparados estatisticamente com os dados de orientação GNSS/IMU fornecidos durante o voo do mesmo bloco de calibração e são determinadas as correcções a efectuar a esses dados (offset-translacção das origens dos sistemas de coordenadas foto e IMU, e misalignment - desalinhamento dos eixos dos sistemas de coordenadas do IMU e da câmara).

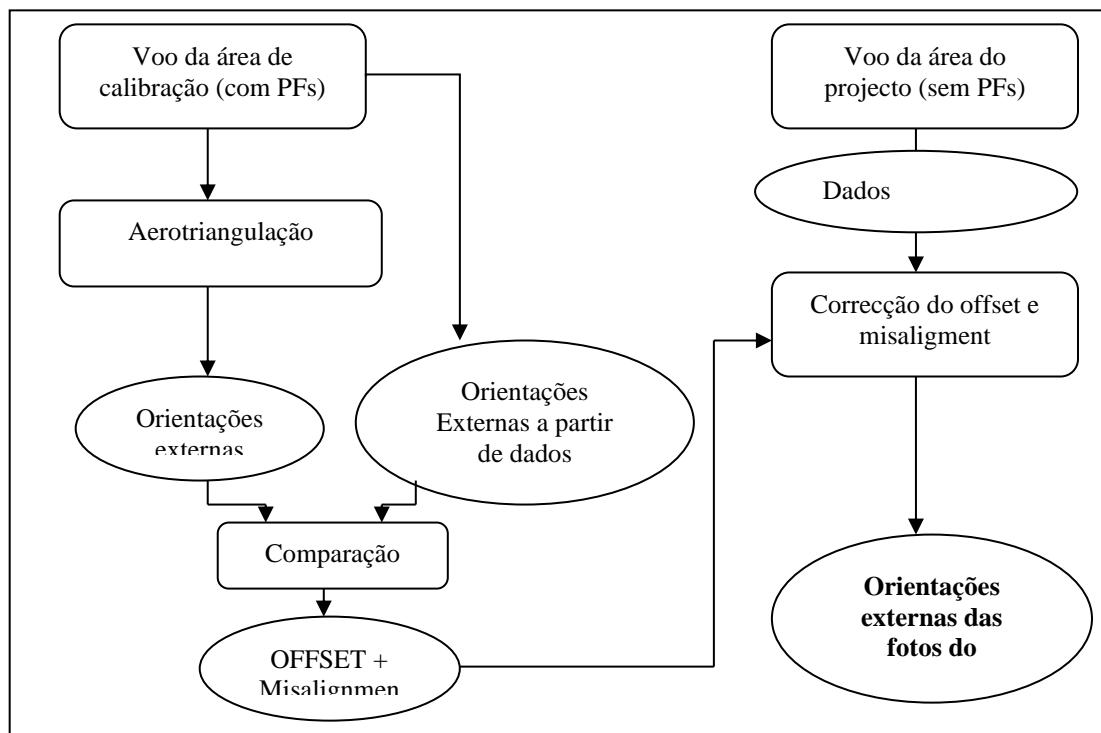


Figura 9.1.1. Esquema de calibração para georreferenciação directa

Essas correcções serão aplicadas aos dados de orientação externa fornecidos pelo sistema durante a cobertura do bloco do projecto. Nesta fase de calibração são também consideradas as transformações de datum entre o referencial do GNSS (WGS84) e o sistema de coordenadas objecto pretendido, eventuais correcções de convergência de meridianos para coordenadas cartográficas (obtidas por projecção cartográfica do elipsóide no plano) e as transformações para altitudes ortométricas por consideração da ondulação do geoide relativamente ao elipsóide de referência.

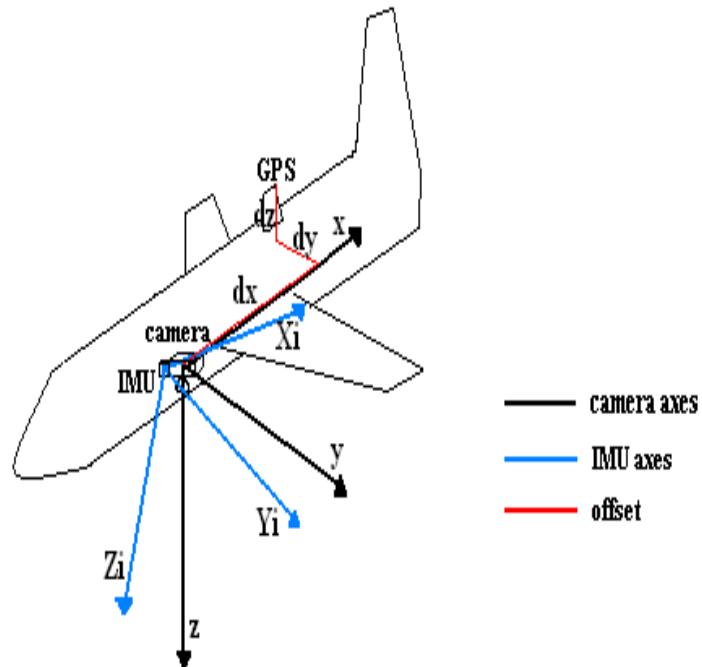


Figura 9.1.2. Avião com um sistema câmara/ GNSS/IMU. Offset e Misalignment.