5. Transformação espacial de semelhança - Relação entre coordenadas modelo e coordenadas terreno.

5.1.Transformação espacial de semelhança

A figura que se segue representa dois sistemas de coordenadas cartesianos com escalas diferentes mas homogéneas em cada sistema, tal como acontece com o sistema de coordenadas modelo (xm,ym,zm) e o sistema de coordenadas terreno (X,Y,Z).

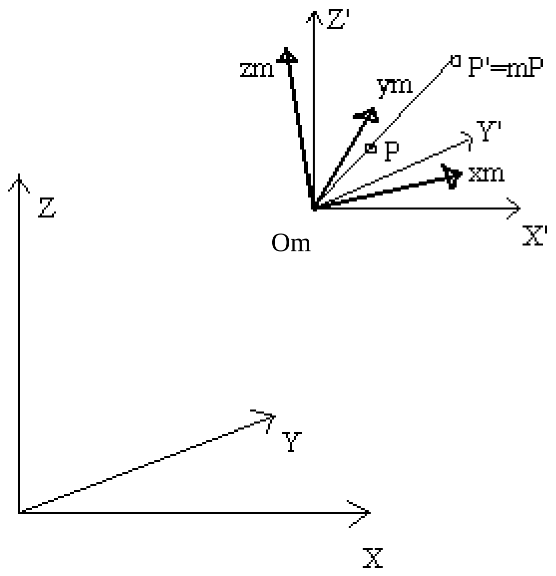

Figura 5.1.1: Sistemas de coordenadas terreno(X,Y,Z), modelo (xm,ym,zm) e intermédio(X',Y',Z')

Pretende-se agora determinar qual a relação existente entre as coordenadas (X,Y,Z) e as coordenadas (xm,ym,zm) de um mesmo ponto P, ou seja, como exprimir X,Y e Z em função de xm,ym,zm. Para isso, percorreremos três fases:

1) multiplicando as componentes de P, xm,ym,zm, pela escala existente entre os dois sistemas de coordenadas, *m*, obteremos P'=mP

2) Considerando um sistema intermédio X',Y',Z' com origem coincidente com Om (origem do sistema de coordenadas modelo) e com a mesma escala e os eixos paralelos aos do sistema de coordenadas terreno, P' terá coordenadas (X',Y',Z') que se relacionam com as suas coordenadas terreno pela seguinte translacção: Xom,Yom,Zom são as coordenadas terreno de Om.

$$\vec{X} = \vec{X}om + \vec{X}' \longrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xom \\ Yom \\ Zom \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

3) o sistema de coordenadas (xm,ym,zm) encontra-se rodado espacialmente relativamente ao sistema (X',Y',Z') e têm a mesma origem. A relação entre P'

num sistema e noutro é expressa por uma matriz de rotação espacial. Os seus elementos são a expressão dos vectores unitários de um dos sistemas em função dos vectores unitários do outro sistema.

$$\vec{P}' = mx_m\vec{i} + my_m\vec{j} + mz_m\vec{k}$$
$$\vec{P}' = X'\vec{I} + Y'\vec{J} + Z'\vec{K}$$

$$(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) - vectores..unitários..sist..coord..\text{mod}\,elo..(\vec{x}_m,\vec{y}_m,\vec{z}_m)$$
$$(\vec{I},\vec{J},\vec{K}) - vectores.unitários..sist..coord..terreno..paralelos...aos..do...sist..(\vec{X}',\vec{Y}',\vec{Z}')$$

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} \vec{i} \bullet .\vec{I} \\ \vec{i} \bullet .\vec{J} \\ \vec{i} \bullet .\vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{x}_m\vec{X}') \\ \cos(\vec{x}_m\vec{Y}') \\ \cos(\vec{x}_m\vec{Z}') \end{bmatrix}$$
$$aná\log o..para...\vec{j}..e..para..\vec{k}.$$
$$pelo..que$$

$$m(x_m\vec{i} + y_m\vec{j} + z_m\vec{k}) = m.\begin{bmatrix} \cos(\vec{x}_m\vec{X}') & \cos(\vec{y}_m\vec{X}') & \cos(\vec{z}_m\vec{X}') \\ \cos(\vec{x}_m\vec{Y}') & \cos(\vec{y}_m\vec{Y}') & \cos(\vec{z}_m\vec{Y}') \\ \cos(\vec{x}_m\vec{Z}') & \cos(\vec{y}_m\vec{Z}') & \cos(\vec{z}_m\vec{Z}') \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$
$$ou...seja$$

$$\vec{X}' = m.\vec{R}.\vec{x}_m$$

Nas equações acima, *cos(ab)* significa coseno do ângulo entre os vectores *a* e *b*
Substituindo, na expressão obtida em 2), *X'* pela expressão agora obtida, a relação entre coordenadas modelo x_m e coordenadas terreno *X* do mesmo ponto será então dada pela expressão:

$$\boxed{\vec{X} = \vec{X}om + m.\vec{R}.\vec{x}_m}$$

A matriz R é a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas modelo e terreno. A este tipo de transformação de coordenadas chama-se **transformação espacial de semelhança.** É aplicável entre dois sistemas coordenados sempre que estes sejam semelhantes (com iguais ângulos entre os eixos coordenados) e tenham, cada um deles escala homogénea ao longo de todos os eixos. Esta transformação tem **7 parâmetros**, que, no caso referido de transformação de coordenadas modelo em terreno, representam os parâmetros da orientação absoluta do modelo:

m, Xt,Yt,Zt e Ω,Φ, K sendo Xt =Xom,Yt =Yom, Zt =Zom.

Se a sequência das rotações for a indicada, omega após fi após kapa, então os elementos da matriz de rotação exprimem-se em função destes ângulos do modo descrito no capítulo 3.4.

Se forem, portanto, conhecidos os três ângulos de rotação sob os quais o sistema de coordenadas modelo está rodado em relação ao sistema de coordenadas terreno, podem-se calcular os 9 elementos da matriz $R_{\Omega\Phi K}$ pelas fórmulas indicadas no capítulo 3.4.

Se, por outro lado, forem conhecidos os 9 elementos da matriz R, então os parâmetros de rotação podem ser calculados por:

$$\tan\Omega = -\frac{r23}{r33} \qquad R = \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 \\ r21 & r22 & r23 \\ r31 & r32 & r33 \end{bmatrix}$$

$$sen\Phi = r13$$

$$\tan\mathrm{K} = -\frac{r12}{r11}$$

Há que tomar atenção aos quadrantes dos ângulos, os quais se deduzem dos sinais dos senos e cosenos. Ω e K podem ser determinados inequívocamente. Há, no entanto, dois ângulos Φ que satisfazem a rotação espacial.

5.2.Linearização da equação da T.E.S.

Como se viu atrás, as relações entre coordenadas modelo e coordenadas terreno não são lineares. Para a determinação dos seus parâmetros, há necessidade de linearizar as suas equações para que seja aplicável o método dos mínimos quadrados. Para linearizar equações, necessitamos primeiro de ter valores aproximados de todos os parâmetros a determinar. Neste caso concreto, dos 7 parâmetros da orientação absoluta.

5.2.1.Valores aproximados

Os valores aproximados referidos são geralmente conhecidos *a priori*, ou então, são calculados a partir de pontos fotogramétricos dos quais são conhecidas as coordenadas <u>modelo</u> e <u>terreno</u>.
Caso estejamos a lidar com fotografias aéreas, podem-se tomar como valores aproximados iniciais:

$$\Omega^{(0)} = 0$$

$$\Phi^{(0)} = 0$$

$$K^{(0)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - rumo ....rumo \in 1^{o} Q \\ \frac{5\pi}{2} - rumo ....rumo \notin 1^{o} Q \end{cases}$$

$$m^{(0)} = \frac{mf.bf}{bm}$$

sendo *mf* o módulo da escala da foto, *bf* a base fotográfica e *bm* essa base medida no modelo.

Os valores iniciais para as coordenadas da origem do sistema de coordenadas modelo podem-se obter a partir de um ponto fotogramétrico.

Em alternativa a estes valores conhecidos *a priori*, existem métodos de calcular os valores aproximados dos parâmetros a partir dos pontos fotogramétricos, que são mais adequados a processos automáticos computacionais de determinação analítica da orientação absoluta. Veremos de seguida um desses métodos.

Para este método computacional é necessário que existam pelo menos 4 Pfs dos quais se conheçam as coordenadas terreno e se meçam as coordenadas modelo (num par estereoscópico devidamente orientado relativamente). Nestas condições, é possível resolver a seguinte transformação linear de 12 parâmetros, semelhante à anterior transformação não linear de 7 parâmetros:

$$\vec{X} = \vec{X}om + \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} . \vec{x}_m$$

$$ou..seja$$

$$\vec{X} = \vec{X}om + \vec{A}.\vec{x}_m$$

As 12 incógnitas desta transformação são as três translacções Xom, Yom, Zom e os 9 coeficientes *a*ij. Esta transformação engloba três equações, uma para cada coordenada terreno. Com 4 Pfs, poderemos formular 4 x 3 equações para determinar 12 incógnitas. O sistema é determinado.

Determinados os *a*ij , resta saber como se chega aos valores aproximados que nos interessam, nomeadamente para *m*, Ω,Φ,K.
Ora os elementos *a*ij da matriz A diferem dos elementos *r*ij da matriz R apenas pelo factor *m*. Sendo a matriz A ortogonal, mas não normada, vem que

$$\sqrt{a11^2 + a21^2 + a31^2} = m^{(0)}$$

de onde sai um valor aproximado para *m* que será $m^{(0)}$. Dividindo todos os elementos de A por $m^{(0)}$ e aplicando as expressões referidas em 5.1. à matriz assim calculada, obtém-se os valores aproximados para Ω,Φ,K, ou seja $\Omega^{(0)},\Phi^{(0)},K^{(0)}$.

O passo seguinte na linearização é calcular coordenadas terreno aproximadas a partir das coordenadas modelo de que dispomos, aplicando os valores iniciais aproximados dos parâmetros às equações originais da T.E.S. Às coordenadas assim obtidas chamaremos coordenadas pseudo-terreno e designá-las-emos por x_p, y_p, z_p.

5.2.2. Equação linearizada

Feito isto, ficaremos nas condições que nos permitem linearizar o problema, ou seja, as coordenadas terreno são pouco diferentes das coordenadas pseudo-terreno. As diferenças que existem entre os dois conjuntos de coordenadas são:

pequenas rotações:
$\Omega = d\Omega,\ \Phi = d\Phi,\ K = dK$

Pequena correcção de escala (escala aproximadamente igual):
$m = 1+dm$

pequenas translações:

$$\vec{X}om = d\vec{X}om$$

Considerando que os ângulos de rotação são muito pequenos, teremos que:

$sen\ d\Omega = d\Omega$
$cos\ d\Omega = 1$
$d\Omega.d\Omega \rightarrow 0$

e analogamente para $d\Phi$ e dK, pelo que a matriz de rotação $R\Omega\Phi K$ com estes pequenos ângulos virá muito simplificada:

$$dR = \begin{bmatrix} 1 & -dK & d\Phi \\ dK & 1 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz só é ortogonal para elementos de primeira ordem. Os produtos foram, por isso, considerados nulos. A linearização do produto mR da T.E.S. nas condições atrás referidas, $m = 1+dm$ e $R = dR$, virá então:

$$mR \Rightarrow (1+dm).dR = \begin{bmatrix} 1+dm & -dK & d\Phi \\ dK & 1+dm & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1+dm \end{bmatrix} = \mathrm{I} + \begin{bmatrix} dm & -dK & d\Phi \\ dK & dm & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & dm \end{bmatrix}$$

A linearização da equação completa da transformação espacial de semelhança será então:

$$\vec{X} = \vec{X}om + mR\vec{x}_m \Rightarrow \vec{X} = d\vec{X}om + (1+dm)dR.\vec{x}_p$$

Enquanto a equação da esquerda traduz a relação entre coordenadas terreno e coordenadas modelo, a da direita estabelece a relação entre coordenadas terreno e coordenadas pseudo-terreno, já definidas atrás.

Discriminando esta equação para cada coordenada teremos 3 equações lineares:

$$\begin{cases} X = dXom + x_p dm + z_p d\Phi - y_p dK + x_p \\ Y = dYom + y_p dm - z_p d\Omega + x_p dK + y_p \\ Z = dZom + z_p dm + y_p d\Omega - x_p d\Phi + z_p \end{cases}$$

Nestas equações, como se pode verificar, surgem as sete incógnitas da orientação absoluta em formato linear como se pretendia.

5.3.Determinação da orientação absoluta de um modelo

Estas equações linearizadas podem-se transformar em equações de observação (de correcção ou de erro) com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} vx &= dXom + x_p dm + z_p d\Phi - y_p dK - (X - x_p) \\ vy &= dYom + y_p dm - z_p d\Omega + x_p dK - (Y - y_p) \\ vz &= dZom + z_p dm + y_p d\Omega - x_p d\Phi - (Z - z_p) \end{aligned}$$

Em forma matricial vem:

$$\vec{v} = A\vec{x} - \vec{\ell}$$

representando *v* o vector das correcções às coordenadas pseudo-terreno, *A* a matriz de configuração, *x* o vector das correcções aos parâmetros a determinar e ℓ o vector dos termos independentes.

Para determinar a orientação absoluta de um modelo, é necessário ter um número de Pfs mínimo de três (dois completos e um altimétrico), mas de preferência mais do que três nesse modelo. Desses pontos é necessário conhecer as coordenadas terreno e medir as coordenadas modelo. Primeiro determinam-se valores aproximados para os parâmetros de orientação por um dos métodos indicados. Depois calculam-se coordenadas pseudo-terreno .

Estabelecem-se então equações de observação como as descritas acima para todos os Pfs. Um Pf completo dá origem a três equações de observação, uma por cada coordenada. Um Pf planimétrico dá origem a duas equações como as primeiras duas e um Pf altimétrico originará uma equação como a terceira. Obtem-se assim o sistema de equações de observação.

Para determinar as correcções aos parâmetros pretendidos, dXom, dYom, dZom, dm, $d\Omega$, $d\Phi$, dK, resolve-se este sistema pelo método de ajustamento pelos mínimos quadrados por observações indirectas (paramétrico).

$$\begin{aligned} &\vec{v} = A\vec{x} - \vec{\ell} \\ &solução \\ &\vec{x} = (A^T PA)^{-1} A^T P\ell \\ &\vec{x} = N^{-1} A^T \ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N^{-1} = Q_{xx} \rightarrow matriz..cofactor \\ &P \rightarrow matriz..dos..pesos..das..observações \end{aligned}$$

Os valores das correcções aos parâmetros determinados deverão ser adicionados aos valores aproximados iniciais para obter novos valores aproximados com os quais se calculam novas coordenadas pseudo-terreno e se estabelecem novas equações de observação para resolver de novo o sistema. O processo iterativo termina quando os parâmetros dXom, dYom, dZom, dm, dΩ, dΦ, dK determinados pelo ajustamento deixarem de ser significativos.

5.4.Determinação das coordenadas de um ponto novo

De posse de todos os elementos de orientação absoluta de um modelo, poderemos então calcular as coordenadas terreno de qualquer ponto a partir das suas coordenadas modelo medidas em aparelho aplicando a fórmula directa da T.E.S.

$$\vec{X} = \vec{X}om + mR\vec{x}_m$$

O cálculo das coordenadas terreno dos Pfs, dos quais já conhecemos um conjunto de coordenadas terreno determinadas de modo independente, possibilita-nos o controlo do ajustamento realizado (se os Pfs forem de confiança, o que se assume aqui), nomeadamente calculando o erro médio de uma observação:

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^T Pv}{n-i}}$$

sendo *v* o vector dos resíduos nos Pfs, *n* o número de equações e *i* o número de incógnitas. *s*o é, neste caso a precisão com que foi medida uma coordenada modelo. Do cálculo directo *s*o sai nas unidades das coordenadas terreno. Em termos de modelo obteremos a precisão dividindo este valor por *m* (módulo da escala do modelo) .
A relação que existe entre coordenadas modelo e coordenadas terreno é a mesma que existe entre coordenadas modelo e coordenadas objecto arbitrárias. Os parâmetros de orientação determinados referem-se então a uma orientação do modelo estereoscópico relativamente ao sistema de coordenadas do objecto. Também entre modelos adjacentes com sistemas de coordenadas independentes se podem calcular os parâmetros de uma T.E.S. com os quais se possa transformar as coordenadas medidas num modelo nas coordenadas referidas ao sistema do segundo modelo.

6. Condição de complanaridade - **Relação entre coordenadas foto e coordenadas modelo**

A relação entre coordenadas foto e coordenadas modelo é relevante no contexto da orientação relativa analítica. A determinação analítica dos cinco parâmetros da orientação relativa de um par estereoscópico (ou de duas fotos de um mesmo objecto que não formem um par estereoscópico), baseia-se na condição de complanaridade dos raios homólogos, ou seja dos dois raios projectivos que passam pelo centro de projecção e pela imagem de um mesmo ponto em cada uma das duas fotos. Vejamos como se determinam esses parâmetros.

Considere-se a seguinte figura:

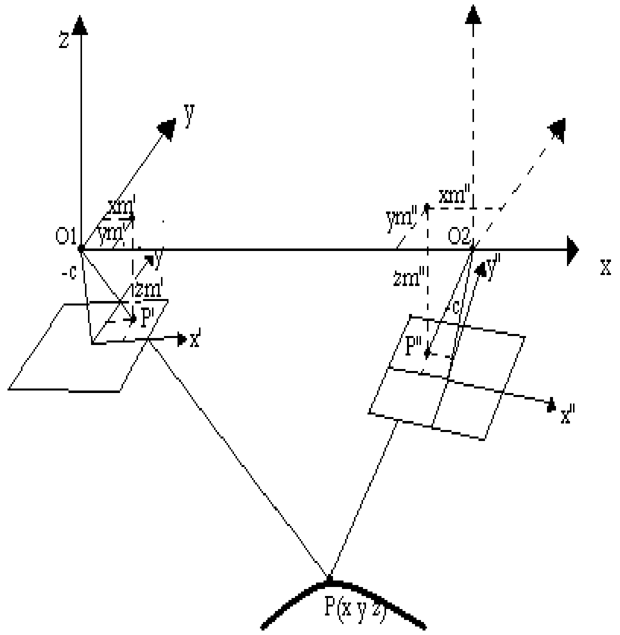

Figura 6.1 Complanaridade dos raios homólogos

O1 e O2 representam os centros de projecção das duas fotos de um par. P representa um ponto do modelo (estereoscópico) cujas coordenadas modelo são (x,y,z). O sistema de coordenadas modelo que tem uma origem arbitrária, está, neste caso particular, centrado em O1, sendo o eixo dos xx coincidente com a base O1 O2, e o eixo dos yy perpendicular ao eixo dos xx e paralelo ao plano da foto 1 (plano x'y'). O eixo dos zz é perpendicular ao plano xy formando um sistema directo com esses eixos. c representa a constante da câmara e x'y' e x''y'' representam os eixos dos sistemas de coordenadas foto em cada uma das fotos 1 e 2 . P' é a imagem do ponto P na foto 1 e P'' a sua imagem na foto 2. As rectas
O1 P'P e O2 P''P representam os raios homólogos correspondentes ao ponto P do modelo. Estas rectas são espaciais (3D).

Para que estes raios homólogos se intersectem no espaço, tal como está representado na figura, as suas rectas e a base O1O2 têm que se situar num mesmo plano, ou seja, têm que ser complanares. Caso esta condição seja satisfeita, cada par das três rectas define o **plano epipolar**. Como a cada ponto do modelo corresponde um par de raios homólogos, deduz-se que para todos os pontos do modelo tem de existir complanaridade entre os seus raios homólogos e a base. Esta condição geométrica para que se forme um modelo (estereoscópico) pode ser expressa por equações em

que entrem os parâmetros da orientação relativa das duas fotos ($\omega 1$ $\varphi 1$ $\kappa 1$ $\omega 2$ $\varphi 2$ $\kappa 2$ bx by bz) para posteriormente determinar esses parâmetros. Estes parâmetros não são independentes. De facto basta determinar 5 desses parâmetros para que a orientação relativa das duas fotos fique determinada.
O plano epipolar de cada ponto modelo intersecta os planos das duas fotografias sobre uma recta denominada **recta epipolar**. A condição de complanaridade dos raios homólogos verifica-se também em fotografias convergentes de um mesmo objecto (por exemplo na restituição múltipla) e está na base de muitos operadores para determinação automática de pontos homólogos em várias fotografias de orientação relativa conhecida.

A condição de complanaridade das três rectas pode ser traduzida pelo valor nulo do seguinte determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & xm' & xm'' \\ 0 & ym' & ym'' \\ 0 & zm' & zm'' \end{vmatrix} = 0$$

As colunas do determinante representam, respectivamente, o vector unitário da base O1 O2, o vector O1 P' e o vector O2 P'', ambos em coordenadas modelo.

As componentes dos vectores O1 P'= (xm',ym',zm') e de O2 P'' = (xm'',ym'',zm'') são expressas em função das coordenadas foto de P' e P'' do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} xm' \\ ym' \\ zm' \end{bmatrix} = R_1 . \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} xm'' \\ ym'' \\ zm'' \end{bmatrix} = R_2 . \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

As matrizes R1 e R2 são matrizes de rotação espacial de parâmetros $\omega 1$ $\varphi 1$ $\kappa 1$ para R1 e $\omega 2$ $\varphi 2$ $\kappa 2$ para R2. Os parâmetros $\omega 1$ e $\omega 2$ que representam as rotações das fotos em torno do eixo do xx, não são, neste caso, independentes. Portanto pode-se considerar um deles igual a zero e determinar o outro. Suponhamos que pretendemos determinar os parâmetros $\omega 1$ $\varphi 1$ $\kappa 1$ $\varphi 2$ $\kappa 2$ considerando assim $\omega 2 = 0$.

Segue-se um resumo dos passos a seguir na determinação dos parâmetros.

1) Estipulam-se valores iniciais aproximados para $\omega 1$ $\varphi 1$ $\kappa 1$ $\varphi 2$ $\kappa 2$.

2) Para 5 pares de pontos homólogos (no mínimo) cujas coordenadas foto se medem em ambas as fotos, calculam-se as coordenadas modelo iniciais a

partir das coordenadas foto e introduzindo os valores iniciais dos parâmetros nas matrizes de rotação R1 e R2 .

3) Formulam-se as equações de erro para esses cinco pares de pontos homólogos

para i = 1..5

$$
\begin{aligned}
&v_{\Delta i} = K_{1i}.d\omega_1 + K_{2i}.d\varphi_1 + K_{3i}.d\kappa_1 + K_{4i}.d\varphi_2 + K_{5i}.d\kappa_2 + \Delta_{0i} \\
&onde: \\
&K_{1i} = -zm'_i.zm''_i - ym'_i.ym''_i \\
&K_{2i} = (zm''_i.\sin\omega_1 + ym''_i.\cos\omega_1).xm'_i \\
&K_{3i} = (xm'_i.\cos\omega_1.\cos\varphi_1 - zm'_i.\sin\varphi_1).zm''_i - (xm'_i.\sin\omega_1.\cos\varphi_1 + ym'_i.\sin\varphi_1).ym'' \\
&K_{4i} = -xm''_i.ym'_i \\
&K_{5i} = ym'_i.ym''_i.\sin\varphi_2 - (xm''_i.\cos\varphi_2 - zm''_i.\cos\varphi_2).zm'_i \\
&\Delta_{0i} = ym'_i.zm''_i - ym''_i.zm'_i
\end{aligned}
$$

Obtem-se assim um sistema de 5 equações a 5 incógnitas que são as correcções aos parâmetros iniciais da orientação relativa.

4) Configura-se o sistema no formato v = AX - ℓ

A – matriz de configuração
X – vector das incógnitas
ℓ - vector dos termos independentes

Resolve-se o sistema.

Solução: $X = (A^T A)^{-1} A^T \ell$

5) Corrigem-se os parâmetros aproximados iniciais. Após a iteração n :

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{n+1} &= \omega_1^n + d\omega_1 \\
\varphi_1^{n+1} &= \varphi_1^n + d\varphi_1 \\
\kappa_1^{n+1} &= \kappa_1^n + d\kappa_1 \\
\varphi_2^{n+1} &= \varphi_2^n + d\varphi_2 \\
\kappa_2^{n+1} &= \kappa_2^n + d\kappa_2
\end{aligned}
$$

5) Repetem-se os passos 2 a 5 até os elementos de orientação não apresentarem variação significativa.

7. Modelos matemáticos alternativos - Coordenadas homogéneas

7.1. - Coordenadas homogéneas

Qualquer ponto de um espaço 3D se pode descrever em termos de um vector de coordenadas homogéneas. Este contém quatro elementos reais, representando o último o factor de escala homogéneo.

$$\vec{x}_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$

A relação entre coordenadas homogéneas e coordenadas cartesianas do mesmo ponto é a seguinte:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_h/w \\ y_h/w \\ z_h/w \\ w/w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A representação em coordenadas homogéneas é muito utilizada em programas de visualização de objectos 3D definidos por um conjunto de pontos. O factor de escala homogéneo pode ser interpretado como um factor de zoom aplicado ao conjunto de pontos. As coordenadas cartesianas de cada ponto do objecto mantêm-se inalteradas, mas aplicando vários factores de zoom, elas vão-se alterando e o ponto aparece noutras posições.

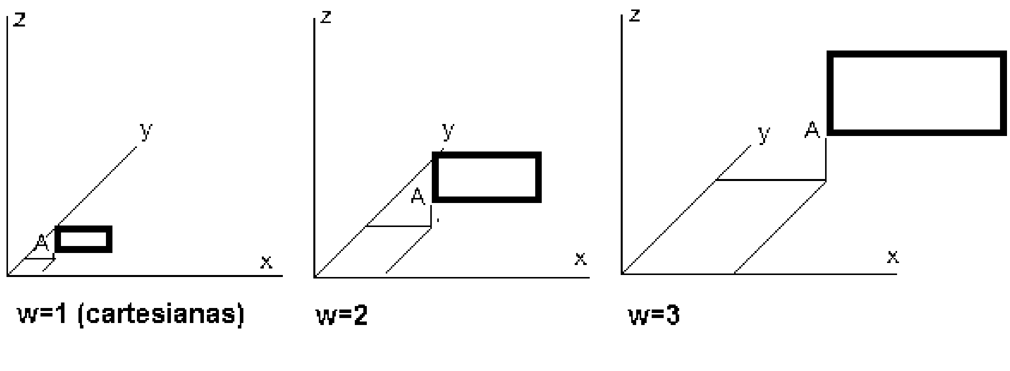

Figura 7.1.1. O ponto A tem sempre as mesmas coordenadas cartesianas mas várias coordenadas homogéneas, consoante o factor de escala homogéneo w.

A vantagem da representação em coordenadas homogéneas é que **qualquer que seja o tipo de transformação geométrica** (escala, rotação, translação, simetria, perspectiva, etc.) que se aplique a um ponto (ou conjunto de pontos) ela é sempre traduzida formalmente por uma **matriz 4x4**. Isto é tanto válido para uma só transformação como para uma sucessão de transformações.

$$\boxed{X = T.x}$$

$$T = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} T_{11} & T_{12} \\ \hdashline T_{21} & T_{22} \end{array}\right]$$

T_{11} – escala, reflexão, rotação

T_{12} – translação

T_{21} – perspectiva

T_{22} – factor de escala homógeneo

Cada submatriz T_{ij} é responsável por realizar uma ou mais transformações geométricas. As matrizes das transformações elementares usadas em fotogrametria são as que a seguir se apresentam:

$$T_s = \left[\begin{array}{ccc:c} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Escala e reflexão

$$T_R = \left[\begin{array}{ccc:c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rotação

$$T_T = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 1 & z_t \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Translação

$$X = T.x = T_n....T_2.T_1.x$$

$$x = T^{-1}.X = T_1^{-1}.T_2^{-1}.....T_n^{-1}.X$$

As equações anteriores mostram a relação entre os pontos X e x em coordenadas homogéneas, quando estes se encontram em diferentes sistemas de coordenadas.
T é uma matriz de transformação geral entre os dois sistemas de coordenadas, a qual corresponde à multiplicação sucessiva de matrizes de transformação elementares T_i.
A transformação inversa, ou seja de X para x, é calculada pela multiplicação das matrizes elementares inversas pela ordem inversa.

7.1.1 TES em coordenadas homogéneas

A Transformação Espacial de Semelhança aplicada a pontos expressos em coordenadas homogéneas tem a seguinte forma, onde a nomenclatura é a utilizada em capítulos anteriores:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr_{11} & mr_{12} & mr_{13} & X_0 \\ mr_{21} & mr_{22} & mr_{23} & Y_0 \\ mr_{31} & mr_{32} & mr_{33} & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.1.2 Colinearidade em coordenadas homogéneas

A colinearidade entre coordenadas do ponto objecto, do centro de projecção e do ponto imagem são expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{x'} = \mathbf{T}_S^{-1} \cdot \mathbf{T}_Z \cdot \mathbf{T}_R^{-1} \cdot \mathbf{T}_T^{-1} \cdot \mathbf{X}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{r_{11}}{m} & \frac{r_{21}}{m} & \frac{r_{31}}{m} & \frac{-(r_{11}X_0 + r_{21}Y_0 + r_{31}Z_0)}{m} \\ \frac{r_{12}}{m} & \frac{r_{22}}{m} & \frac{r_{32}}{m} & \frac{-(r_{12}X_0 + r_{22}Y_0 + r_{32}Z_0)}{m} \\ \frac{r_{13}}{m} & \frac{r_{23}}{m} & \frac{r_{33}}{m} & \frac{-(r_{13}X_0 + r_{23}Y_0 + r_{33}Z_0)}{m} \\ \hline \frac{-r_{13}}{c \cdot m} & \frac{-r_{23}}{c \cdot m} & \frac{-r_{33}}{c \cdot m} & \frac{r_{11}X_0 + r_{21}Y_0 + r_{31}Z_0}{c \cdot m} \end{array}\right] . \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde **x',y',z'** - ponto imagem, **X,Y,Z-** ponto objecto, **Xo,Yo,Zo -** centro de projecção e $m = -Z/c$.

7.2. Transformação Linear Directa

Com a Transformação Linear Directa (DLT) consegue-se determinar a orientação interna e externa de uma fotografia através de equações lineares aplicadas a pontos fotogramétricos, eliminando a necessidade de determinar valores iniciais. É muito útil em situações em que a orientação interna da câmara não é conhecida ou não é estável (caso de imagens de câmaras desconhecidas, ou das imagens de câmaras de vídeo). A relação entre coordenadas objecto (X,Y,Z) e coordenadas foto (x,y) é a seguinte:

$$x = \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}$$

$$y = \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}$$

L_i $_{i=1..11}$ parâmetros da DLT

As equações de observação a formular para PFs de modo a determinar os parâmetros L_i são da forma:

$$L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4 - xL_9X - xL_{10}Y - xL_{11}Z - x = 0$$

$$L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8 - yL_9X - yL_{10}Y - yL_{11}Z - y = 0$$

Para determinar os 11 parâmetros da DLT são necessários no mínimo 6 PFs na fotografia (cada PF origina duas equações), o que na prática nem sempre é fácil ter disponível. Determinados os parâmetros L_i é possível chegar aos valores dos parâmetros de orientação interna e externa da fotografia pelas seguintes relações:

$$L = \frac{-1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}}$$

Parâmetros de orientação interna:

$$x_0 = L^2.(L_1.L_9 + L_2.L_{10} + L_3.L_{11})$$

$$y_0 = L^2.(L_5.L_9 + L_6.L_{10} + L_7.L_{11})$$

$$c_x = \sqrt{L^2.(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - x_0^2} \qquad c_y = \sqrt{L^2.(L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) - y_0^2}$$

c aparece com duas componentes, pois a DLT não assume obrigatoriamente sistemas de coordenadas cartesianas.

Parâmetros de orientação externa:

$$\varphi = \arcsin\,(L_9.L)$$

$$\omega = \arctan\,(-\frac{L_{10}}{L_{11}})$$

$$r_{11} = \frac{L.(x_0.L_9 - L_1)}{c_x}$$

$$\kappa = \arccos\left(\frac{r_{11}}{cos\varphi}\right)$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} L_4 \\ L_8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para além da desvantagem do elevado número de PFs necessário por fotografia para a determinação dos parâmetros da DLT, estes não podem estar todos situados num só plano no espaço objecto, e além disso há que evitar configurações em que o denominador das equações seja quase nulo, o que provoca singularidades no sistema. Os parâmetros L_i não têm qualquer significado físico, pelo que, caso se conheça a orientação interna da fotografia, não é fácil introduzir essa informação no cálculo. Apesar destas limitações, a DLT é muitas vezes utilizada para a determinação de valores aproximados para ajustamentos por outros modelos matemáticos (eq. colinearidade).