4. Equações de colinearidade e sua linearização - Relação entre coordenadas foto e coordenadas objecto.

A figura que se segue ilustra a relação existente entre coordenadas foto (x,y,z) e coordenadas objecto (X,Y,Z) do mesmo ponto, na altura em que a fotografia foi obtida. Nela estão representados:

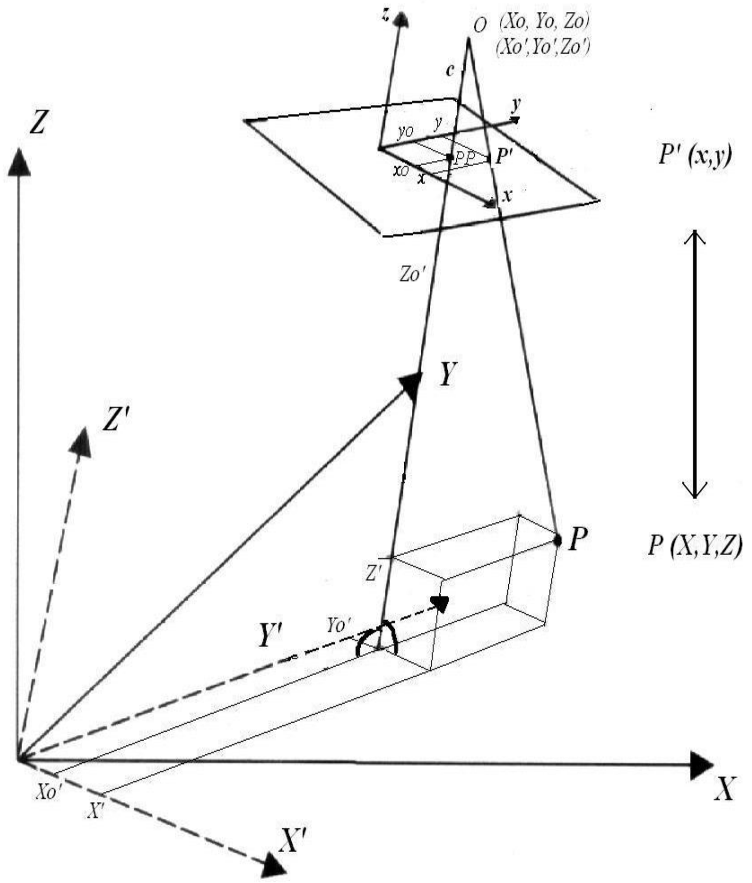

Figura 4.1: Relação entre imagem e objecto

x,y,z – sistema 3D de coordenadas foto com origem no ponto médio da foto (intersecção das rectas que unem as marcas fiduciais diametralmente opostas).

X',Y',Z' – sistema 3D de coordenadas paralelo a (x,y,z) com origem coincidente com a do sistema de coordenadas objecto X,Y,Z.

X,Y,Z – sistema de coordenadas objecto (eventualmente coordenadas terreno).

(xo,yo,0) – coordenadas foto do ponto principal.

(xo,yo,c) – coordenadas foto do centro de projecção.

c – constante da câmara z = 0 para todos os pontos da foto.

Na altura em que foi obtida a fotografia, existia colinearidade entre o centro de projecção O, o ponto objecto P e a sua imagem P' na fotografia. Essa colinearidade advém de assumirmos que a luz se propaga em linha recta e que no momento de captação da imagem houve um raio luminoso rectilíneo que partiu do ponto objecto P, passou pelo centro óptico da lente da câmara fotográfica (que assumimos coincidir com o centro de projecção O) e atingiu a película ou o sensor digital sobre um suporte que assumimos plano no ponto P' gerando a imagem fotográfica do ponto P. Vejamos como se pode exprimir analiticamente esse processo.

Considerando um sistema de coordenadas tridimensional X',Y',Z', paralelo ao sistema de coordenadas foto e com a mesma origem do sistema de coordenadas objecto, encontrando-se rodado espacialmente em relação a este último, poderemos exprimir a condição de colinearidade referida do seguinte modo:

$$\frac{x - x_0}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z'_0 - Z'}$$

$$\frac{y - y_0}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z'_0 - Z'}$$

Resolvendo estas equações em ordem às coordenadas foto vem:

$$x = x_0 - c\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$$

$$y = y_0 - c\frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0}$$

Interessa-nos agora relacionar as coordenadas X', Y', Z' com as coordenadas objecto. Ora as coordenadas objecto X,Y,Z estão rodadas no espaço em relação a X',Y',Z', pelo que X = R X', sendo R a matriz de rotação entre o sistema de coordenadas foto (paralelo ao sistema X'Y'Z') e o sistema de coordenadas objecto, ou seja:

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 \\ r21 & r22 & r23 \\ r31 & r32 & r33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{bmatrix}$$

$$R^T X = R^T R X'$$

$$R^T R = I$$

$$R^T X = X'$$

$$\begin{bmatrix} r11 & r21 & r31 \\ r12 & r22 & r32 \\ r13 & r23 & r33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{bmatrix}$$

$$(X' - X'_0) = r11(X - X_0) + r21(Y - Y_0) + r31(Z - Z_0)$$
$$(Y' - Y'_0) = r12(X - X_0) + r22(Y - Y_0) + r32(Z - Z_0)$$
$$(Z' - Z'_0) = r13(X - X_0) + r23(Y - Y_0) + r33(Z - Z_0)$$

A relação entre coordenadas foto e coordenadas objecto vem, então, expressa da seguinte forma :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 - c\dfrac{r11(X - X_0) + r21(Y - Y_0) + r31(Z - Z_0)}{r13(X - X_0) + r23(Y - Y_0) + r33(Z - Z_0)} \\ y = y_0 - c\dfrac{r12(X - X_0) + r22(Y - Y_0) + r32(Z - Z_0)}{r13(X - X_0) + r23(Y - Y_0) + r33(Z - Z_0)} \end{cases}}$$

que são as chamadas **equações de colinearidade** entre o centro de projecção (Xo,Yo,Zo), o ponto imagem (x,y,0) e o ponto objecto (X,Y,Z). Como já foi referido, (xo,yo,c) são, nestas equações as coordenadas foto do centro de projecção.

As equações de colinearidade também se podem exprimir em ordem às coordenadas objecto, como se mostra a seguir. Consideremos de novo as equações que relacionam os sistemas de coordenadas (X,Y,Z) e (X’,Y’,Z’).

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = R. \begin{bmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{bmatrix}$$

Constatando da figura anterior que

$$X' - X'_0 = m(x - x_0)$$
$$Y' - Y'_0 = m(y - y_0)$$
$$Z' - Z'_0 = -(Z'_0 - Z') = -mc$$

vem

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = mR \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix}$$

sendo *m* um factor de escala entre as coordenadas foto (x,y,z) e as coordenadas intermédias (X',Y',Z'). Teremos então:

$$\begin{cases} X - X_0 = m(r11(x - x_0) + r12(y - y_0) - r13.c) \\ Y - Y_0 = m(r21(x - x_0) + r22(y - y_0) - r23.c) \\ Z - Z_0 = m(r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c) \end{cases}$$

Da terceira equação é possível determinar o m:

$$m = \frac{Z - Z_0}{(r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c)}$$

verificando-se que m é uma função das coordenadas foto e da cota do ponto, pelo que varia de ponto para ponto na foto (facto já conhecido). Substituindo m pela expressão anterior, as outras duas equações podem-se exprimir em função das coordenadas foto independentemente da escala existente entre os sistemas de coordenadas:

$$\boxed{\begin{cases} X = X_0 + (Z - Z_0)\dfrac{r11(x - x_0) + r12(y - y_0) - r13.c}{r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c} \\ Y = Y_0 + (Z - Z_0)\dfrac{r21(x - x_0) + r22(y - y_0) - r23.c}{r31(x - x_0) + r32(y - y_0) - r33.c} \end{cases}}$$

Estas são as equações de colinearidade expressas em ordem às coordenadas objecto ou em função das coordenadas foto.

Se compararmos os dois conjuntos de equações de colinearidade deduzidos, vemos que o primeiro conjunto nos indica que **a cada ponto objecto** de coordenadas (X,Y,Z) **corresponde** nesta projecção (central ou perspectiva central), **um e um só ponto imagem** de coordenadas (x,y,0).

O segundo conjunto de equações, por outro lado, mostra-nos que as coordenadas objecto X,Y de um ponto cuja imagem é (x,y,0)) são dependentes da coordenada Z objecto do próprio ponto, sendo esta indeterminada naquele sistema de 2 equações. Isto é, **a cada ponto imagem** de coordenadas (x,y,0) **correspondem** nesta projecção, **infinitos pontos objecto**, que são todos aqueles que se encontram sobre a recta (raio projectivo) que passa pelo centro de projecção e pelo ponto imagem (x,y,0). Por esta razão, para determinarmos as coordenadas objecto X,Y,Z de um ponto **necessitamos de mais do que uma fotografia onde apareça esse ponto.** Se tivermos, por exemplo, duas fotografias obtidas de pontos de vista diferentes (caso da estereorrestituição, por exemplo), teremos coordenadas foto diferentes para o mesmo ponto objecto em cada uma das fotos. Poderemos formular então um sistema de 4 equações, duas para cada terceto de coordenadas foto. Neste sistema de equações apenas surgem 3 incógnitas que são as coordenadas X, Y e Z objecto desse ponto, desde que os restantes parâmetros sejam conhecidos. O sistema passa assim de indeterminado a redundante (tinha 2 equações a 3 incógnitas e passa a ter 4 eq. a 3 inc.). Se tivermos mais fotografias diferentes onde o mesmo ponto apareça, maior será a redundância do sistema (caso da restituição múltipla).

Os parâmetros das equações de colinearidade são os seguintes:

xo,yo,c - parâmetros da orientação interna da fotografia: coordenadas foto tridimensionais do centro de projecção da fotografia

Xo,Yo,Zo – 3 parâmetros da orientação externa da fotografia : coordenadas objecto do centro de projecção no momento da exposição

$r_{i,j}$ - elementos da matriz de rotação espacial entre os sistemas de coordenadas foto e objecto, função de três parâmetros

Os elementos r_{ij} , como foi deduzido, são os da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas X',Y',Z' e o sistema de coordenadas X,Y,Z, que é igual à matriz de rotação existente entre o sistema de coordenadas foto x,y,z e o sistema de coordenadas objecto X,Y,Z, visto X',Y',Z' e x,y,z serem paralelos por definição.

Estes elementos da matriz representam os cosenos dos ângulos existentes entre os eixos dos dois sistemas, foto e objecto (terreno), ou seja, são funções dos ângulos ω,φ,κ que a fotografia (os seus eixos coordenados) apresentava em relação ao sistema de coordenadas objecto (terreno) no exacto momento da exposição.

As matrizes de rotação $R_{\omega\varphi\kappa}$ ou $R_{\varphi\omega\kappa}$ são as mais aplicadas em fotogrametria e são formalmente iguais às matrizes $R_{\Omega\Phi K}$ ou $R_{\Phi\Omega K}$ já deduzidas anteriormente para um caso geral. Os seus parâmetros são, neste caso concreto, os ângulos da orientação externa da câmara (fotografia) no momento da exposição. Em fotogrametria aérea é comum referir estes ângulos como os da atitude do avião no momento da exposição. Tal poderá não ser válido, caso a câmara se mova relativamente ao avião (por ex. quando está montada com suspensão inercial na fuselagem do avião).

4.1. Linearização das equações de colinearidade. Determinação dos parâmetros.

As equações de colinearidade não são lineares. Para determinar os seus parâmetros quando não são conhecidos, há que obter redundância de observações (medir coordenadas foto de pontos), formular um sistema de equações de observação redundante e estimar os parâmetros que se pretendem pelo método dos mínimos quadrados. Para isso é necessário primeiro determinar valores aproximados dos parâmetros e depois linearizar as equações. Os parâmetros em causa são c,xo,yo, ω,φ,κ,Xo,Yo,Zo.

Exprimindo as equações de colinearidade originais (coordenadas foto em função das coordenadas objecto) de uma forma simplificada em que Nx representa o numerador da equação em x , Ny o numerador da equação em y e D o denominador das equações (igual nas duas), virá:

$$\begin{cases} x = x_0 - c\dfrac{N_x}{D} \\ y = y_0 - c\dfrac{N_y}{D} \end{cases}$$

Cada ponto medido numa foto dá origem a duas equações de observação (de correcção ou de erro) por cada fotografia onde aparece. Essas equações têm a seguinte forma:

$$v_x = dx_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^0 dc + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^0 d\omega + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^0 d\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \kappa}\right)^0 d\kappa + \left(\frac{\partial x}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 +$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial Z_0}\right)^0 dZ_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^0 dX + \left(\frac{\partial x}{dY}\right)^0 dY + \left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)^0 dZ + \left(x^0 - \bar{x}\right)$$

$$v_y = dy_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^0 dc + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^0 d\omega + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^0 d\varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial \kappa}\right)^0 d\kappa + \left(\frac{\partial y}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 +$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial Z_0}\right)^0 dZ_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^0 dX + \left(\frac{\partial y}{dY}\right)^0 dY + \left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)^0 dZ + \left(y^0 - \bar{y}\right)$$

onde:

$(\partial x/\partial ...)^o$ representam as derivadas parciais da equação em x em ordem a cada uma das variáveis, $(\partial y/\partial ...)^o$ representam as derivadas parciais da equação em y em ordem a cada uma das variáveis, calculadas para os valores aproximados dos parâmetros;

x^o e y^o são coordenadas foto calculadas pelas equações de colinearidade originais a partir de valores aproximados dos parâmetros;

$\bar{x}, \bar{y}$ são as coordenadas foto medidas.

Estas equações são lineares e denominam-se equações linearizadas das equações de colinearidade.

Após a formulação das equações de observação para todos os pontos medidos em todas as fotos (duas por ponto por foto onde o ponto aparece), obteremos um sistema de equações de observação cujas incógnitas serão as correcções aos valores aproximados dos parâmetros, ou seja, dc,dxo,dyo,dω,dφ,dκ,dXo,dYo,dZo,dX,dY e dZ. Do ajustamento pelos mínimos quadrados, que se pode aplicar porque as equações são lineares, resultarão estimativas para estas incógnitas. Após serem somadas aos valores iniciais, resultam em valores aproximados dos parâmetros para a segunda iteração. Com estes, formulam-se novas equações de observação. E assim sucessivamente até se obterem valores não significativos de correcções aos parâmetros.

As expressões das derivadas parciais que entram nas equações linearizadas têm a seguinte forma:

$$\frac{\partial x}{\partial c} = -\frac{N_x}{D}$$

$$\frac{\partial y}{\partial c} = -\frac{N_y}{D}$$

$$\frac{\partial x}{\partial X_0} = -\frac{c}{D^2}(r13.N_x - r11.D)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_0} = -\frac{c}{D^2}(r13.N_y - r12.D)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y_0} = -\frac{c}{D^2}(r23.N_x - r21.D)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_0} = -\frac{c}{D^2}(r23.N_y - r22.D)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z_0} = -\frac{c}{D^2}(r33.N_x - r31.D)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z_0} = -\frac{c}{D^2}(r33.N_y - r32.D)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{c}{D}\left\{(Y - Y_0)r33 - (Z - Z_0)r23\frac{N_x}{D} - (Y - Y_0)r31 + (Z - Z_0)r21\right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{c}{D}\left\{(Y - Y_0)r33 - (Z - Z_0)r23\frac{N_y}{D} - (Y - Y_0)r32 + (Z - Z_0)r22\right\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{c}{D}\left\{(N_x \cos k - N_y senk)\frac{N_x}{D} + D\cos k\right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{c}{D}\left\{(N_x \cos k - N_y senk)\frac{N_y}{D} - Dsenk\right\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial k} = -\frac{c}{D} N_y$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{c}{D} N_x$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = -\frac{c}{D^2}(D.r11 - N_x r13)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{c}{D^2}(D.r21 - N_x r23)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = -\frac{c}{D^2}(D.r31 - N_x r33)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{c}{D^2}(D.r12 - N_y r13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{c}{D^2}(D.r22 - N_y r23)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z} = -\frac{c}{D^2}(D.r32 - N_y r33)$$

4.1.1. Casos particulares

Resumindo o que foi dito, cada ponto medido numa foto dá origem a duas equações linearizadas com 12 parâmetros relativos a essa foto. Estas equações são utilizadas na resolução de vários problemas específicos, como veremos em capítulos seguintes.

As equações linearizadas apresentadas estão formuladas para um ponto genérico de coordenadas (x,y,0) de uma fotografia genérica. São, portanto, de aplicação geral.

No entanto, se a fotografia em causa for um fotograma, ou seja, obtida por uma câmara métrica da qual são conhecidos rigorosamente os elementos de orientação interna, desaparecem nas equações de vx e de vy de todos os pontos medidos nessa foto, os termos em dxo, dyo e dc, pois esses factores são considerados nulos, visto xo,yo e c serem constantes (derivada de uma constante é igual a zero).

Se o ponto de coordenadas foto (x,y,0) for a imagem de um ponto fotogramétrico de coordenadas terreno (X,Y,Z) conhecidas e de confiança, desaparecem nas equações de observação respectivas os termos em dX,dY,dZ por serem considerados nulos.

Pelo facto de todos os pontos de uma fotografia terem a coordenada foto z igual a zero, é usual considerar apenas as coordenadas foto x e y de um ponto. No texto que se segue será adoptada a designação de (x,y) como coordenadas foto de um ponto, significando isso, de facto (x,y,0) no sistema de coordenadas foto tridimensional.

4.2. Quaterniões e colinearidade

O facto de se exprimir a rotação entre os sistemas de coordenadas foto e objecto utilizando quaterniões não vai alterar formalmente as equações de colinearidade, mas sim os parâmetros de que elas dependem:

$$\begin{cases} x = x_0 - c\dfrac{a_1(X - X_0) + b_1(Y - Y_0) + c_1(Z - Z_0)}{a_3(X - X_0) + b_3(Y - Y_0) + c_3(Z - Z_0)} \\ y = y_0 - c\dfrac{a_2(X - X_0) + b_2(Y - Y_0) + c_2(Z - Z_0)}{a_3(X - X_0) + b_3(Y - Y_0) + c_3(Z - Z_0)} \end{cases}$$

onde (ai,bi,ci) corresponde à coluna i da matriz de rotação R que neste caso depende dos parâmetros q0,q1,q2,q3.

$$R = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, as equações linearizadas apresentarão termos relativos a estes novos parâmetros :

$$\begin{aligned} v_x = dx_0 + k_{10}dc + k_{11}dX_0 + k_{12}dY_0 + k_{13}dZ_0 + k_{14}dq_0 + k_{15}dq_1 + k_{16}dq_2 + k_{17}dq_3 \\ - k_{11}dX - k_{12}dY - k_{13}dZ - (\bar{x} - x^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y = dy_0 + k_{20}dc + k_{21}dX_0 + k_{22}dY_0 + k_{23}dZ_0 + k_{24}dq_0 + k_{25}dq_1 + k_{26}dq_2 + k_{27}dq_3 \\ - k_{21}dX - k_{22}dY - k_{23}dZ - (\bar{y} - y^0) \end{aligned}$$

onde:

$$k_{10} = -\frac{N_x}{D}\ ;\ k_{20} = -\frac{N_y}{D}$$

$$k_{11} = \frac{1}{D}(a_1c + a_3x);\quad k_{12} = \frac{1}{D}(b_1c + b_3x);\quad k_{13} = \frac{1}{D}(c_1c + c_3x)$$

$$k_{21} = \frac{1}{D}(a_2c + a_3y);\quad k_{22} = \frac{1}{D}(b_2c + b_3y);\quad k_{23} = \frac{1}{D}(c_2c + c_3y)$$

$$k_{14} = 2\left[-\frac{xy}{c}q_1 + \left(c + \frac{x^2}{c}\right)q_2 + yq_3\right]$$

$$k_{15} = 2\left[\frac{xy}{c}q_0 + yq_2 - \left(c + \frac{x^2}{c}\right)q_3\right]$$

$$k_{16} = 2\left[-\left(c + \frac{x^2}{c}\right)q_0 - yq_1 - \frac{xy}{c}q_3\right]$$

$$k_{17} = 2\left[-yq_0 + \left(c + \frac{x^2}{c}\right)q_1 + \frac{xy}{c}q_2\right]$$

$$k_{24} = 2\left[-\left(c + \frac{y^2}{c}\right)q_1 + \frac{xy}{c}q_2 - xq_3\right]$$

$$k_{25} = 2\left[\left(c + \frac{y^2}{c}\right)q_0 - xq_2 - \frac{xy}{c}q_3\right]$$

$$k_{26} = 2\left[-\frac{xy}{c}q_0 + xq_1 - \left(c + \frac{y^2}{c}\right)q_3\right]$$

$$k_{27} = 2\left[xq_0 + \frac{xy}{c}q_1 + \left(c + \frac{y^2}{c}\right)q_2\right]$$

Pelo facto de a matriz de rotação com funções algébricas não apresentar singularidades, os cálculos convergem mesmo para pequenas variações de atitude, como acontece no cálculo de orientações externas de linhas vizinhas em imagens da câmara digital ADS40 da Leica.

4.3 Aplicações das equações linearizadas

4.3.1. Determinação da orientação externa de uma foto (intersecção inversa espacial)

Esta operação pode ser efectuada a partir de, no mínimo, 3 Pfs cujas imagens apareçam numa fotografia.

Formam-se as equações de observação vx e vy para cada um dos pontos (após terem sido medidas as respectivas coordenadas foto) e resolve-se o sistema assim obtido de 6 equações a 6 incógnitas, sendo estas as correcções aos parâmetros da orientação externa da foto, ou seja, dXo, dYo, dZo, $d\omega$,$d\varphi$,$d\kappa$.

Os valores iniciais aproximados destes parâmetros, necessários para calcular as derivadas parciais podem ser obtidos do plano de voo (ou do plano de missão fotogramétrica) ou calculados a partir dos PFs.

4.3.2. Determinação das orientações externa e interna de uma foto

Caso a orientação interna da foto também não seja conhecida, o problema pode ser resolvido com 5 Pfs, aumentando o sistema descrito na alínea anterior de mais três incógnitas (dc,dxo,dyo) e de mais 4 equações (10 eq a 9 incog.).

4.3.3. Determinação das orientações externas de um par de fotografias

Este método consiste em determinar simultaneamente os parâmetros de orientação externa de um par de fotografias (6 parâmetros por foto) e os respectivos parâmetros de orientação interna, a partir de pontos fotogramétricos e de pontos novos, dos quais não se conhecem as coordenadas terreno e que são medidos apenas nas duas fotografias.

As incógnitas deste problema são 12 parâmetros de orientação externa e de zero até 6 parâmetros de orientação interna consoante:

1- a(s) câmara(s) utilizada(s) estejam calibradas -> 0 parâmetros
2- tenha sido usada a mesma câmara para as duas fotos-> 3 parâmetros: (c,x_0,y_0)
3- tenham sido usadas duas câmaras diferentes -> 6 parâmetros: $(c,x_0,y_0)_1$ e $(c,x_0,y_0)_2$.

Cada PF dá origem a duas equações de observação para cada foto onde aparece, o mesmo acontecendo a cada ponto novo. Os pontos novos são sempre medidos nas duas fotos. A diferença que existe entre as equações dos Pfs e as dos pontos novos é que estas últimas incluem mais três incógnitas por ponto novo, dX, dY e dZ, aumentando o número total de incógnitas do problema.

Portanto, é necessário ponderar o número de pontos necessário, Pfs e novos, para conseguir determinar o total de parâmetros que se pretende.
Apresentam-se a seguir algumas soluções:

Caso 1: orientação interna conhecida

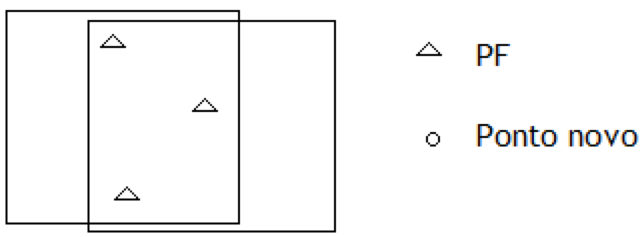

Figura 4.3.3.1. Determinação da orientação externa de um par. (Caso 1)

Solução mínima:
3 Pfs medidos nas duas fotos: 3 x 2 + 3 x 2 = 12 eq. de observação
6 parâmetros de or. externa a determinar: 12 incógnitas
Sistema solúvel mas não controlável.

Se se medir mais um ponto novo passaremos a ter 16 eq. de observação (mais duas por cada foto onde o ponto é medido) e 15 incógnitas (mais três para as coordenadas objecto do ponto novo). O sistema é sobredeterminado com 1 grau de liberdade (16-15 =1), ou seja, pouco controlável. Cada ponto novo que se meça adicionalmente nas duas fotos, vai trazer mais 4 equações e 3 incógnitas ao sistema, aumentando a redundância.

Caso 2: três parâmetros de orientação interna a determinar

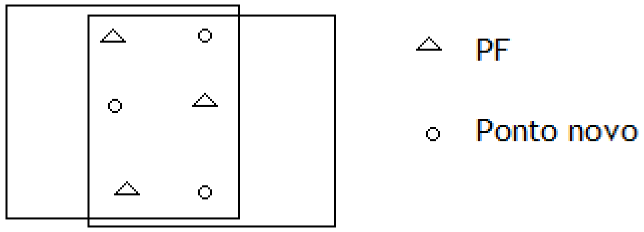

Figura 4.3.3.2. Determinação da orientação externa de um par. (Caso 2)

Solução mínima:
3 Pfs medidos nas duas fotos: 3 x 2 + 3 x 2
3 Pontos novos nas duas fotos: 3 x 2 + 3 x 2
= 24 eq. de observação
6 parâmetros de or. externa por foto: 6 x 2
3 parâmetros de or. interna a determinar : 3
3 coord. objecto por ponto novo : 3 x 3
= 24 incógnitas
Sistema solúvel mas não controlável.

Caso 3: seis parâmetros de orientação Interna a determinar

3 Pfs medidos nas duas fotos: 3 x 2 + 3 x 2
3 Pontos novos nas duas fotos: 3 x 2 + 3 x 2
= 24 eq. de observação
6 parâmetros de or. externa por foto: 6 x 2
3 parâmetros de or. interna por foto : 3 x 2
3 coord. objecto por ponto novo : 3 x 3
= 27 incógnitas
Sistema subdeterminado (insolúvel). Para se chegar a uma solução é necessário medir mais PFs ou mais pontos novos em ambas as fotos.
Mais 1 PF -> 28 eq. a 27 inc. -> solúvel
Mais 1 Pn -> 28 eq. a 30 inc. -> insolúvel
Mais 2 Pn -> 32 eq. a 33 inc. -> insolúvel
Mais 3 Pn -> 36 eq. a 36 inc. -> solúvel não controlável

Como se vê, este método necessita em média de menos Pfs por foto do que o anterior para determinar os parâmetros de orientação externa das fotografias. É sempre mais económico optar pela medição de pontos novos nas fotografias do que pela utilização de pontos fotogramétricos cuja coordenação obriga deslocações ao campo.

Deve-se evitar escolher os pontos todos no mesmo plano objecto, pois isso poderá causar singularidades na matriz das equações normais.

4.3.4. Determinação das coordenadas objecto de um ponto novo. Intersecção directa espacial.

Este método consiste em determinar as coordenadas objecto X,Y,Z de um ponto cujas coordenadas foto são medidas em duas fotos de um par, (x1,y1),(x2,y2), sendo conhecidos os parâmetros de orientação interna e externa das duas fotos.

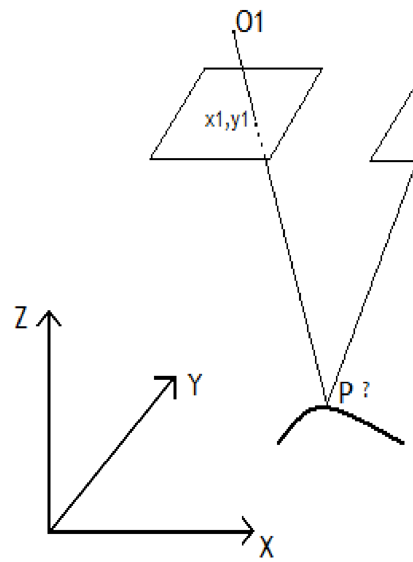

Figura 4.3.4.1. Intersecção directa espacial

Em primeira aproximação, as coordenadas objecto podem ser calculadas a partir das seguintes equações, deduzidas a partir das equações de colinearidade expressas em ordem às coordenadas objecto:

$$\begin{cases} X = X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1} \\ Y = Y_{01} + (Z - Z_{01})K_{y1} \\ X = X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2} \\ Y = Y_{02} + (Z - Z_{02})K_{y2} \end{cases}$$

As duas primeiras equações dizem respeito à foto 1 e as duas últimas à foto 2. Os termos K são calculados a partir dos elementos conhecidos da orientação interna e externa das fotos de acordo com a fórmula das equações de colinearidade atrás referidas.

Como Xo_1, Yo_1, Zo_1 e Xo_2, Yo_2, Zo_2 são também conhecidos (elem. da or. ext.), temos neste sistema quatro equações lineares com três incógnitas, X, Y e Z, que são as coordenadas objecto do ponto em questão.
Da primeira e da terceira equação vem:

$$Z = \frac{X_{02} - Z_{02}K_{x2} + Z_{01}K_{x1} - X_{01}}{K_{x1} - K_{x2}}$$

Da primeira ou da terceira equação pode-se extrair um valor para X. O valor de Y calcula-se da segunda e da quarta equação. Normalmente obtém-se dois valores diferentes, tomando-se a média aritmética como valor para Y. Os valores assim calculados para X,Y e Z entram apenas como valores iniciais para uma determinação mais rigorosa por meio de uma compensação pelo método dos mínimos quadrados, pois encontramo-nos perante o caso de observações redundantes (4 equações a 3 incógnitas). As equações de observação serão as de vx e vy descritas anteriormente, apenas com os termos em dX, dY e dZ.

Um ponto novo dará então origem a 4 equações de observação, uma para x e uma para y em cada foto onde foi medido, a 3 incógnitas dX,dY,dZ. O sistema de equações de observação deverá ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados

Equações de observação:

$$vxi = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^{(0)} dX + \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^{(0)} dY + \left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)^{(0)} dZ + (xi^{(0)} - \bar{x}i)$$

$$vyi = \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^{(0)} dX + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^{(0)} dY + \left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)^{(0)} dZ + (yi^{(0)} - \bar{y}i)$$

i=1,2 número da foto em que o ponto foi medido

As equações de colinearidade a que se referem as derivadas parciais aqui consideradas são as expressas em ordem às coordenadas foto (coordenadas foto como função das coordenadas objecto e dos parâmetros de orientação).

$$\frac{\partial x}{\partial X} = -\frac{c}{D^2}(D.r11 - Nx.r13)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{c}{D^2}(D.r21 - Nx.r23)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = -\frac{c}{D^2}(D.r31 - Nx.r33)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{c}{D^2}(D.r12 - Ny.r13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{c}{D^2}(D.r22 - Ny.r23)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z} = -\frac{c}{D^2}(D.r32 - Ny.r33)$$

D- denominador das equações de colinearidade
Nx – numerador da equação de x
Ny – numerador da equação de y
Os valores de dX,dY,dZ obtidos do ajustamento (MMQ) serão somados aos valores iniciais para obter novos valores aproximados das incógnitas para calcular as

equações de observação para a segunda iteração. O processo termina quando os valores das correcções deixarem de ser significativos.