3.Fundamentos matemáticos da Fotogrametria

3.1.Rotação no plano

Sejam dadas as coordenadas de um ponto P num sistema de coordenadas plano x,y. Pretende-se saber como obter as coordenadas desse ponto P noutro sistema de coordenadas X,Y que tem a mesma origem que o primeiro sistema mas está rodado em relação a ele de um determinado ângulo α.

Sendo i,j os vectores unitários do sistema x,y e I,J os vectores unitários do sistema X,Y, exprimindo os vectores unitários de um sistema em função dos vectores unitários do outro sistema, obteremos as componentes de P no segundo sistema de coordenadas, como pretendíamos.

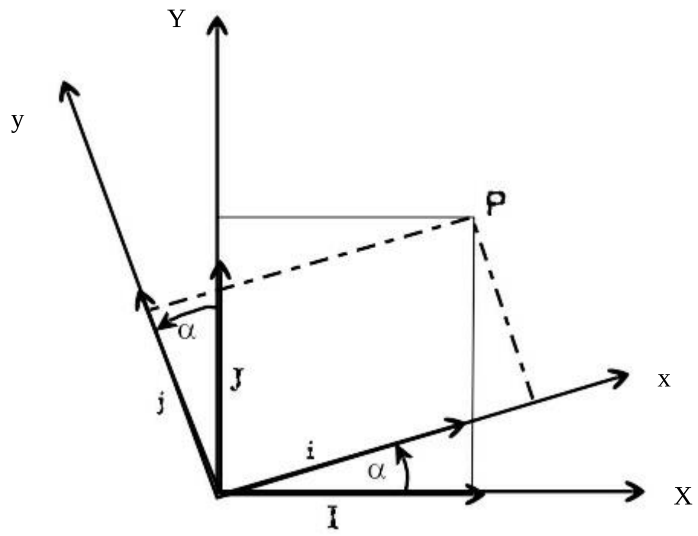


Figura 3.1.1: Rotação no plano

$$O\vec{P} = X.\vec{I} + Y.\vec{J}$$
$$X = x.\cos\alpha - y.sen\alpha$$
$$Y = x.sen\alpha + y.\cos\alpha$$

ou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tendo em consideração que $-sin \propto = \cos(\propto +90^0)$ e $sin \propto = \cos(\propto -90^0)$

vem:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha+90) \\ \cos(\alpha-90) & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

representando (xX) o ângulo entre o eixo x e o eixo X dos dois sistemas de coordenadas , sendo análogo para os restantes eixos dos dois sistemas.

3.2.Matriz de rotação e suas propriedades

Reduzindo a forma de escrever o sistema anterior teremos:

$$\vec{X} = R.\vec{x}$$

$$onde$$

$$R = \begin{bmatrix} r11 & r12 \\ r21 & r22 \end{bmatrix}$$

R é a matriz de rotação entre os dois sistemas de coordenadas planos e os seus elementos são os cosenos dos ângulos existentes entre os eixos de coordenadas do primeiro e do segundo sistema ou os produtos internos dos vectores unitários dos dois sistemas pela mesma ordem.

A matriz de rotação é quadrada mas não simétrica. Além disso, a matriz de rotação tem que ser ortonormada. Isso significa que o produto interno de cada coluna por si própria é igual a 1 (normalidade) e o produto interno de colunas diferentes é igual a 0 (ortogonalidade). Obedecendo a estas condições, a matriz de rotação no plano depende apenas de um parâmetro. Tem apenas um grau de liberdade que é neste caso o ângulo α.

O determinante de uma matriz de rotação é igual a 1. A inversa da matriz de rotação é a sua transposta, pois:

$$R^{-1}.R = I$$

$$Como..na..matriz..de..rota\c{c}\hat{a}o$$

$$R^{T}.R = I$$

$$vem$$

$$R^{-1} = R^{T}$$

o que representa uma propriedade muito útil. Por exemplo, se quisermos passar do sistema X,Y para o sistema x,y teremos a transformação inversa, ou seja:

$$\vec{X} = R\vec{x}$$
$$R^{-1}\vec{X} = R^{-1}R\vec{x}$$
$$R^{-1}\vec{X} = I.\vec{x}$$
$$R^{T}\vec{X} = \vec{x} = \begin{bmatrix} r11 & r21 \\ r12 & r22 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

pelo que só precisamos de calcular os elementos da matriz de rotação entre dois sistemas uma vez para podermos facilmente transformar coordenadas num sentido e no sentido inverso.

3.3. Rotação no espaço

Pretende-se agora exprimir as coordenadas de um ponto P, X,Y,Z, num determinado sistema em função das coordenadas x,y,z do mesmo ponto noutro sistema, sabendo que os dois sistemas têm a mesma origem e os eixos do segundo,(X,Y,Z), estão rodados de determinados ângulos em relação aos eixos do primeiro, (x,y,z). Analogamente à rotação no plano, teremos agora:

P(x,y,z) → P(X,Y,Z)

$$\vec{X} = R.\vec{x}$$

em que R é a matriz de rotação espacial cujos elementos são os cosenos dos ângulos existentes entre os eixos do primeiro e do segundo sistema de coordenadas (ou os produtos internos dos vectores unitários dos dois sistemas)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Pelos condicionalismos de uma matriz de rotação, vistos no capítulo anterior, a matriz de rotação no espaço tem três graus de liberdade, ou seja , é função de três parâmetros independentes.

3.4.Matriz de rotação RΩΦΚ

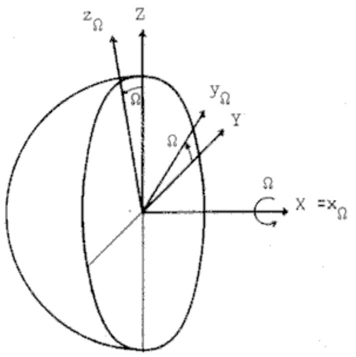
Na Fotogrametria consideram-se normalmente como parâmetros independentes da matriz de rotação espacial os ângulos omega, fi e kapa em torno dos eixos coordenados (omega = rotação em torno do eixo x, fi em torno do eixo y, kapa em torno do eixo z).

A rotação espacial pode ser obtida como uma sucessão de 3 rotações planas, por exemplo:

- a primeira rotação de magnitude omega, em torno do eixo x no plano yz.
- a segunda de magnitude fi, em torno do eixo y_Ω (eixo y rodado de Ω), no plano x_Ω, z_Ω.
- a terceira de magnitude kapa, em torno do eixo $z_{\Omega\Phi}$, no plano $x_{\Omega\Phi}, y_{\Omega\Phi}$.

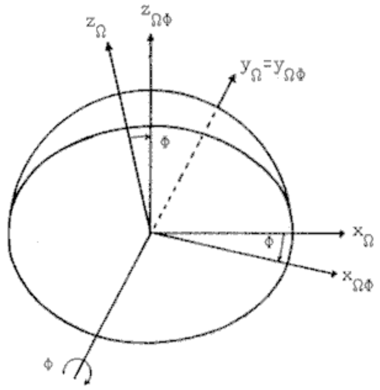
Os ângulos consideram-se positivos quando crescem no sentido anti-horário, observando o sistema de coordenadas do lado positivo de cada eixo de rotação em direcção à origem do sistema.

As figuras que se seguem ilustram as rotações explicitadas atrás e as matrizes de rotação que as traduzem.



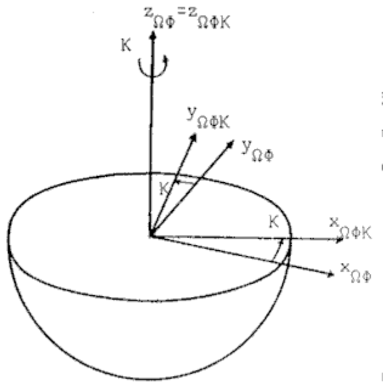
$$R_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega & -sen\Omega \\ 0 & sen\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix}$$

$\alpha = \Omega$ Figura 3.4.1: rotação Omega



$$R_\Phi = \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & sen\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix}$$

$\alpha = -\Phi$ Figura 3.4.2: Rotação Fi



$$R_K = \begin{bmatrix} \cos K & -senK & 0 \\ senK & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = \mathrm{K}$ Figura 3.4.3: Rotação Kapa

A multiplicação sucessiva das três matrizes de rotação resulta na matriz $R_{\Omega\Phi K}$ que tem a seguinte forma, se a sequência for a indicada (omega após fi após kapa):

$$\begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\mathrm{K} & -\cos\Phi sen\mathrm{K} & sen\Phi \\ \cos\Omega sen\mathrm{K} + sen\Omega sen\Phi\cos\mathrm{K} & \cos\Omega\cos\mathrm{K} - sen\Omega sen\Phi sen\mathrm{K} & -sen\Omega\cos\Phi \\ sen\Omega sen\mathrm{K} - \cos\Omega sen\Phi\cos\mathrm{K} & sen\Omega\cos\mathrm{K} + \cos\Omega sen\Phi sen\mathrm{K} & \cos\Omega\cos\Phi \end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes não é comutativa pelo que há que ter atenção à ordem pela qual é executada a rotação. O resultado é uma matriz de rotação com todas as respectivas propriedades.

3.5. Matriz de rotação com funções algébricas

A matriz de rotação espacial pode ser parametrizada de várias formas. A utilização dos 3 ângulos de Euler (ωφκ) é uma dessas formas. Outra passa pela definição de um angulo θ de rotação em torno de um só eixo espacial definido pelos seus 3 cosenos directores αβλ. Uma terceira parametrização da matriz de rotação espacial surge no contexto da teoria dos quaterniões. Com esta parametrização, desaparecem da matriz as funções trigonométricas passando a ser substituídas por funções algébricas que não apresentam valores críticos para a singularidade da matriz. Esta é a grande vantagem desta forma de apresentar a matriz de rotação espacial.
Um quaternião é composto por um escalar e um vector em 3D com três componentes complexas:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

Em forma vectorial:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 i \\ q_2 j \\ q_3 k \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \end{aligned}$$

$$q_i \left(i = 0,1,2,3\right) \in \Re$$

Um quaternião unitário é aquele para o qual a soma dos quadrados das componentes é igual a 1. O inverso de um quaternião $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ é o quaternião $q^{-1} = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$. O produto de q por q^{-1} é igual a 1.

A multiplicação entre dois quaterniões q e r segue a regra:

$$q.r = Q(q).r$$
$$r.q = \overline{Q}(q).r$$

onde Q e $\overline{Q}$ são matrizes ortogonais da forma:

$$Q(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad \overline{Q}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

Entre estas matrizes a primeira linha e coluna são iguais e as restantes submatrizes são transpostas uma da outra. Os seus elementos são todos números reais.

Qualquer ponto P de coordenadas X, Y, Z pode ser descrito como um quaternião z:

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ Xi \\ Yj \\ Zk \end{bmatrix}$$

Considerando agora dois pontos A e B no espaço 3D e um quaternião unitário q , o quaternião de A pode ser transformado no quaternião de B por multiplicação com q e com o seu inverso.:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} q^{-1} = \overline{Q}(q)^T Q(q) \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

$$B = M(q)A$$

onde:

$$M(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$m = q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2 = 1$$

M é uma matriz 3x3 ortonormada, pelo que pode representar a rotação espacial de A para B.
Nesta matriz, como é evidente, não há funções trigonométricas nem ângulos a definir a rotação. Apenas funções algébricas de números reais. A matriz em si depende de quatro parâmetros, q0,q1,q2,q3 que não são independentes. A condição de *m* ser igual a 1 tem, por isso, de ser incluída no cálculo dos parâmetros de rotação quando é utilizada esta forma da matriz de rotação espacial. Embora a interpretação geométrica dos parâmetros não seja possível, uma comparação de elementos com os da matriz de rotação RΩΦΚ permite-nos relacionar os *qi* com os parâmetros de orientação externa da fotografia:

$$\begin{aligned} &\cos\varphi.\sin\kappa = -2(q_0q_1 - q_2q_3) \\ &\cos\varphi.\cos\kappa = q_3{}^2 + q_0{}^2 - q_1{}^2 - q_2{}^2 \\ &\cos\varphi.\sin\omega = 2(q_0q_3 - q_1q_2) \\ &\cos\varphi.\cos\omega = q_3{}^2 - q_0{}^2 - q_1{}^2 - q_2{}^2 \\ &\sin\varphi = 2(q_0q_2 + q_1q_3) \end{aligned}$$