Posicionamento

1.1 Definição: determinação da posição de um qualquer ponto num qualquer sistema de referência, onde as respectivas coordenadas são obtidas por um dado método (matemático), recorrendo a uma determinada técnica de observação (instrumental).

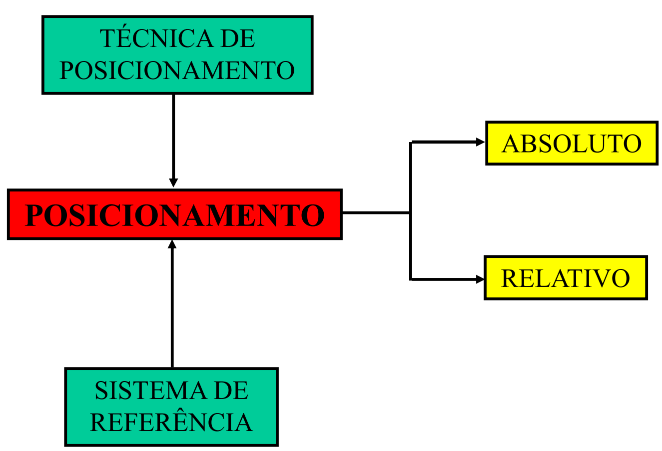
- A posição deve ser independente da técnica utilizada, ao passo que a respectiva precisão de posicionamento é dependente do método e técnica utilizados.

1.2 Tipos de Posicionamento: Absoluto e Relativo.

1.3 O Posicionamento é exemplo do <u>Problema Directo</u> da geodesia: determinar as coordenadas a partir das observações nas estações, ou entre os pontos de referência e as estações.

1

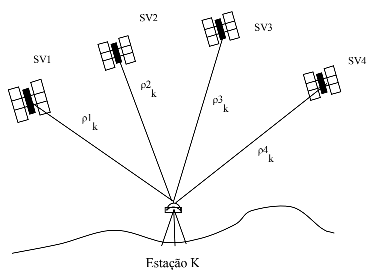
Posicionamento



2

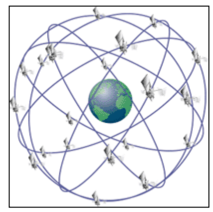
Posicionamento Absoluto

2.1 Exemplo GPS: determinação directa das coordenadas geodésicas de um ponto com um único receptor.



(X_k, Y_k, Z_k, dt_k)

Absoluto (1 estação)



$$\begin{cases} P_k^1 = \sqrt{(X^1 - X_k)^2 + (Y^1 - Y_k)^2 + (Z^1 - Z_k)^2} + Cdt_k \\ P_k^2 = \sqrt{(X^2 - X_k)^2 + (Y^2 - Y_k)^2 + (Z^2 - Z_k)^2} + Cdt_k \\ P_k^3 = \sqrt{(X^3 - X_k)^2 + (Y^3 - Y_k)^2 + (Z^3 - Z_k)^2} + Cdt_k \\ P_k^4 = \sqrt{(X^4 - X_k)^2 + (Y^4 - Y_k)^2 + (Z^4 - Z_k)^2} + Cdt_k \end{cases}$$

3

Posicionamento Absoluto

2.2 Exemplo Astronomia Geodésica: determinação directa das coordenadas astronómicas (Φ, Λ) de uma estação por observação de estrelas nas sua passagem meridiana ou no cruzamento do almucântara Z=30º.

Dados1: posições médias aparentes das estrelas (α, δ) das Efemérides FK5;
Dados2: TsidMG, Xp, Yp, ΔTUC
Observações: distâncias zenitais (Z) e TUC

Método da Latitude: Pares de Estrela em passagens superiores opostas (Talcot);

Método da Longitude: Registos TU em posições simétricas na culminação superior;

Métodos combinado: Cruzamento com o almucântara Z=30º.

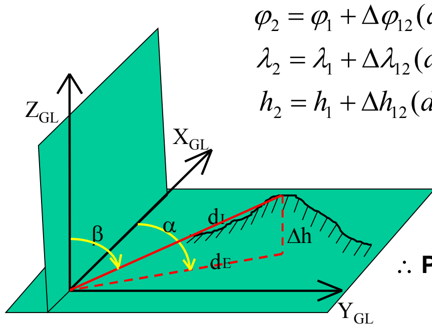
4

Posicionamento relativo

3. Método Terrestre

a) Este posicionamento resulta da observação por métodos directos e/ou indirectos da distância, azimute e distância zenital (coordenadas polares no sistema de referência geodésico local) de uma estação para outra:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{12}(d, \alpha, \beta)$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}(d, \alpha, \beta)$$
$$h_2 = h_1 + \Delta h_{12}(d, \alpha, \beta)$$



$$X_2 = X_1 + \Delta X_{12}(d, \alpha, \beta)$$
$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y_{12}(d, \alpha, \beta)$$
$$Z_2 = Z_1 + \Delta Z_{12}(d, \alpha, \beta)$$

$\therefore$ **Problema Directo da Geodesia**

Posicionamento relativo

3. Método Terrestre

Posicionamento relativo

3. Método Terrestre

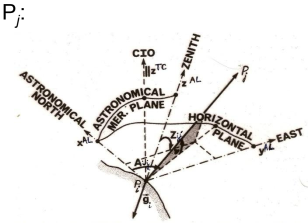
Campanha Geodésica dos Açores (Filomena Aguiar, Faial 1987)

Posicionamento relativo

3.1 Terrestre Tridimensional – com (Φ, Λ)

a) Vector topocêntrico (inter-estação) de P_i para P_j:

$$\Delta r_{ij}^{AL} = \Delta r_{ij}\vec{u}_{ij}^{AL} = d_{ij}\begin{bmatrix} senZ_{ij}\cos A_{ij} \\ senZ_{ij}senA_{ij} \\ \cos Z_{ij} \end{bmatrix}$$



b) transformação para o sistema TC

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{TC} = R_3(\pi - \Lambda_i)\cdot R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_i\right)\cdot P_2.\Delta\vec{r}_{ij}^{AL}$$

$$\Delta r_{ij}^{TC} = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}$$

c) Vector posição P_j no sistema TC

$$\vec{r}_j^{TC} = \vec{r}_i^{TC} + \Delta\vec{r}_{ij}^{TC}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posicionamento relativo

3.2 Terrestre Tridimensional – com (φ, λ) e (η, ξ)

a) Transformar o vector topocêntrico (inter-estação) para sistema GL:

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{\,GL} = R_3\left(A_{ij} - \alpha_{ij}\right) \cdot R_2\left(-\xi_i\right) \cdot R_1\left(\eta_i\right) . \Delta\vec{r}_{ij}^{\,AL}$$

b) transformação para o sistema geodésico G

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{\,G} = R_3\left(\pi - \lambda_i\right) \cdot R_2\left(\frac{\pi}{2} - \phi_i\right) \cdot P_2 . \Delta\vec{r}_{ij}^{\,GL}$$

c) Vector posição P_j no sistema G

$$\vec{r}_j^{\,G} = \vec{r}_i^{\,G} + \Delta\vec{r}_{ij}^{\,G}$$

d) Transformação para TC

$$\vec{r}_j^{\,TC} = \vec{r}_0^{\,TC} + \mu \cdot R_1(\varepsilon_x) \cdot R_2(\varepsilon_y) \cdot R_2(\varepsilon_z) \cdot \vec{r}_j^{\,G}$$

Posicionamento relativo

4. Métodos Extraterrestres (http://www.iers.org/)

a) Neste métodos de posicionamento, a partir de 2 ou mais pontos, são efectuadas medições em simultâneo para um ou mais objectos espaciais:

b) Dependendo do método utilizado, pode-se obter apenas a direcção do vector (co-senos directores) que une as estações, as distâncias ou, então, o vector completo (componentes);

c) A generalidade dos métodos:

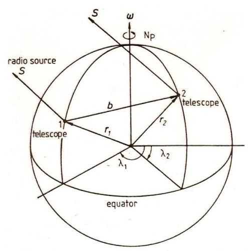
1 – Sistema de posicionamento de Interferometria de base longa – VLBI;
2 – Sistemas de posicionamento relativo com *laser* – LLR e SLR;
3 – Sistema de Posicionamento - DORIS (*Détermination d'Orbit e Radiopositionnement Integrés par Satellite*);
4 – Sistemas de Posicionamento via Satélite - GPS, Glonass e Galileo;
5 – Sistemas de posicionamento através da observação de direcções para os satélites (só dão os co-senos directores do vector inter-estação);

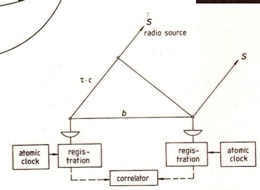
d) Ver descrição dos métodos em Vanícek and Krakiwski (1981, §16.1) & Torgue (2003)

Posicionamento relativo

4.1 VLBI (http://ivscc.gsfc.nasa.gov/)

a) Princípio do método de Rádio-Interferometria de base longa





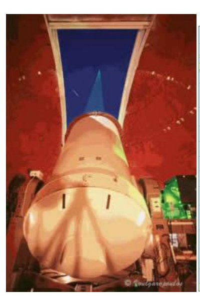
Geodesia e Aplicações – Aula 1 FCUL-EG

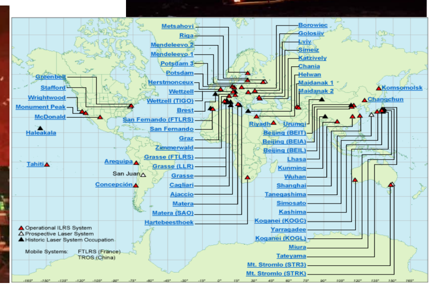
11

Posicionamento relativo

4.2 SLR - rede do ILRS

a) Uma estação envia cerca de 10^{15} fotões/impulso e regressam apenas 2-3 fotões/impulso, suficiente para medir a distância estação-satélite. (http://ilrs.gsfc.nasa.gov/)





Geodesia e Aplicações – Aula 1 FCUL-EG

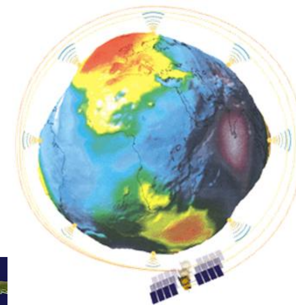
12

Posicionamento relativo

4.3 DORIS (http://ids.cls.fr/)

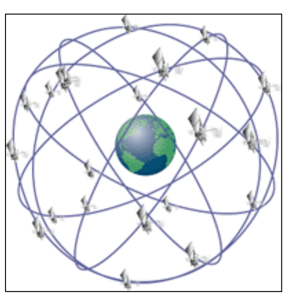
a) O sistema baseia-se no efeito Doppler - a frequência do sinal recebido no satélite difere da frequência de transmissão na estação;

b) É utilizado para: determinação de órbitas; estudos do campo gravítico e da rotação da Terra; posicionamento de precisão e navegação de satélite.

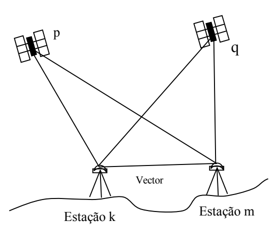


Posicionamento relativo

4.4 GNSS



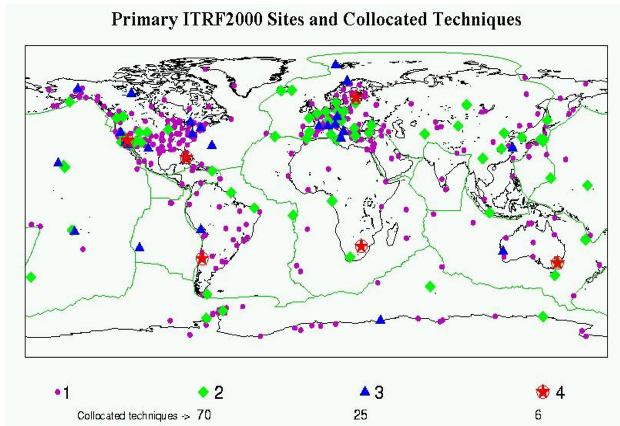
Relativo/diferencial
(2 ou mais receptores)



$$(X_m, Y_m, Z_m) = (X_k, Y_k, Z_k) + (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$$

Posicionamento relativo

4.5 Rede de Estações Permanentes do IGS



Geodesia e Aplicações – Aula 1 FCUL-EG

15

Problema Inverso da Geodesia

5. Definição: dadas as coordenadas de dois pontos P_i e P_j no sistema geodésico G, calcular a distância espacial, o azimute e a distância zenital (coordenadas polares no sistema geodésico local GL).

5.1 Posicionamento relativo tridimensional geodésico

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{\,GL} = P_2 \cdot R_2\left(\phi_i - \frac{\pi}{2}\right) \cdot R_3(\lambda_i - \pi) \cdot \Delta\vec{r}_{ij}^{\,G}$$

com $\Delta r_{ij}^{G} = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}_G$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de inversão de y

Geodesia e Aplicações – Aula 1 FCUL-EG

16

Problema Inverso da Geodesia

5.1 Posicionamento relativo tridimensional geodésico

Resolvendo a seguinte relação em ordem às observações

$$\Delta r_{ij}^{GL} = \Delta r_{ij}\vec{u}_{ij}^{GL} = \Delta r_{ij}\begin{bmatrix} senZ_{ij}\cos\alpha_{ij} \\ senZ_{ij}sen\alpha_{ij} \\ \cos Z_{ij} \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\begin{cases} \Delta r_{ij}^{GL} = \left\|\Delta\vec{r}_{ij}\right\| = \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 + \Delta z_{ij}^2} \\ \alpha_{ij}^{GL} = 2arctg\dfrac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij} + \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2}} \\ Z_{ij}^{GL} = arcsen\left(\Delta z_{ij}/\Delta r_{ij}\right) - \pi/2 \end{cases}$$

Estas fórmulas servem, por exemplo, para converter o vector de observação GPS em observações "clássicas".

Problema Inverso da Geodesia

5.2 Posicionamento relativo tridimensional astronómico

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{AL} = P_2 \cdot R_2\left(\Phi_i - \frac{\pi}{2}\right)\cdot R_3\left(\Lambda_i - \pi\right)\cdot \Delta\vec{r}_{ij}^{TC}$$

ou

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{AL} = R_1(-\eta_i)\cdot R_2(\xi)\cdot R_3\left(-\delta\alpha_{ij}\right)\cdot \Delta\vec{r}_{ij}^{GL}$$

resultando

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{ij}^{AL} = \mathbf{2arctg}\dfrac{\Delta \mathbf{y}_{ij}}{\Delta \mathbf{x}_{ij} + \sqrt{\Delta \mathbf{x}_{ij}^2 + \Delta \mathbf{y}_{ij}^2}} \\ \mathbf{Z}_{ij}^{AL} = \mathbf{arcsen}\left(\Delta \mathbf{z}_{ij}/\Delta \mathbf{r}_{ij}\right) - \pi/\mathbf{2} \end{cases}$$

Posicionamento Vertical Relativo

6. Nivelamento trigonométrico

a) Este tipo de posicionamento relaciona-se com a determinação da posição vertical (altitude) de um ponto em relação a outro – diferença de altitude ou nivelamento;

b) A determinação de desníveis com base no nivelamento trigonométrico requer a observação das distâncias zenitais e observação ou cálculo (prob. inverso) da distância elipsoidal;

c) A refracção vertical provoca erros nos valores observados das distâncias zenitais (os valores angulares sofrem um desvio colocando a direcção aparente da visada mais elevada do que a direcção verdadeira);

d) As zenitais recíprocas e simultâneas eliminam este efeito;

Posicionamento Vertical Relativo

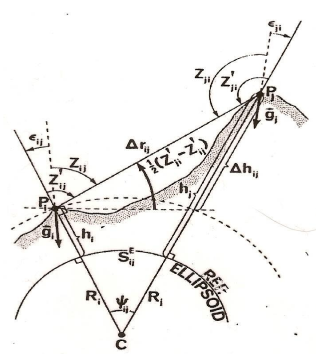
6.1 Nivelamento trigonométrico

a) Observações: Z_{ij} e Z_{ji}

b) Cálculos: S^E_{ij} e α_{ij}, desvios ε_{ij} e ε_{ji}

c) As distâncias zenitais verdadeiras Z_{ij} e Z_{ji} devem ser corrigidas dos desvios da vertical para serem convertidos em distâncias zenitais geodésicas Z'_{ij} e Z'_{ji};

$$\varepsilon_{ij} = \xi_i \cos(\alpha_{ij}) + \eta_i sen(\alpha_{ij})$$
$$\varepsilon_{ji} = \xi_j \cos(\alpha_{ji}) + \eta_j sen(\alpha_{ji})$$



Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

d) Os azimutes geodésicos como não são observados (via azimute astronómico) em todos os vértices (somente 1 a 3 azimutes), eles têm que ser deduzidos das coordenadas geodésicas dos pontos através do problema inverso;

e) Zenitais reduzidas: $Z'_{ij} = Z_{ij} + \xi_i \cos(\alpha_{ij}) + \eta_i sen(\alpha_{ij})$

$$Z'_{ji} = Z_{ji} + \xi_j \cos(\alpha_{ji}) + \eta_j sen(\alpha_{ji})$$

f) As distâncias geodésicas não são observadas entre todos os vértices (somente 1 a 3 distâncias), por isso, têm que ser deduzidas das coordenadas geodésicas dos pontos através do problema inverso;

Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

g) Para linhas curtas (< 10 Km) é suficiente considerar a distância geodésica "s" entre os ponto P_i e P_j igual ao arco esférico de raio R=(a+b)/2 (solução esférica do problema inverso);

h) Após a redução das zenitais e do cálculo da distância geodésica é possível determinar o desnível geodésico, e

$$h_j = h_i + \Delta h_{ij} = h_i + s_{ij}\left(1 + \frac{h_m}{R} + \frac{s_{ij}^2}{12R^2}\right) tg\left(\frac{Z'_{ji} - Z'_{ij}}{2}\right)$$

i) Onde h_m é a altitude média ($h=(h_1+h_2)/2$). Esta depende de h_j, por isso o cálculo é feito em duas iterações, no entanto, como os desníveis são pequenos é suficiente considerar a altitude média igual à altitude de i.

Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

g) Em condições óptimas, este processo, permite precisões da ordem de σ_Z = 1" e $\sigma_{\Delta h}$= 10 cm, para comprimentos de 10 Km. Na prática a precisão é relativamente inferior;

h) Por esta razão, e devido ao aparecimento do sistema GPS associado aos mais recentes modelos de geóide, este método de nivelamento trigonométrico na geodesia está em desuso;

i) A altimetria de toda a rede geodésica, desde a 1ª à 3ª ordem, foi calculada com base no nivelamento trigonométrico, por vezes sem observação de zenitais recíprocas;

j) Com o GPS e um simples método de geóide consegue-se avaliar a imprecisão da rede altimétrica.

Conversão de coordenadas

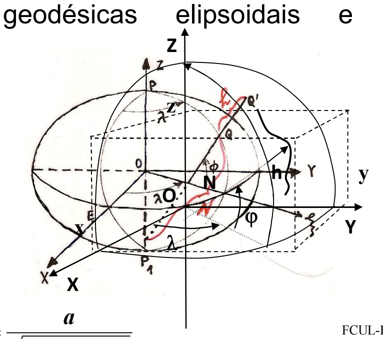
7. Coordenadas geodésicas

a) Com frequência na geodesia é necessário recorrer às posições no elipsóide associado a um sistema de referência, para isso torna-se necessário fazer a conversão de coordenadas entre geodésicas elipsoidais e rectangulares;

b) <u>Conversão directa</u>

(φ,λ,h) → (x,y,z)

$$x_p = (N + h_p) \cos\varphi_p \cos\lambda_p$$
$$y_p = (N + h_p) \cos\varphi_p \sin\lambda_p$$
$$z_p = \left[N(1 - e^2) + h_p\right] \sin\varphi_p$$



$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi}}$$

Conversão de coordenadas

7. Coordenadas geodésicas

c) Conversão inversa (x,y,z) → (φ,λ,h)

1- Cálculo da longitude λ

$$tg\lambda = \frac{Y_Q}{X_Q} \Rightarrow \lambda = arctg\left(\frac{Y_Q}{X_Q}\right)$$

2- Cálculo da latitude φ (Método iterativo de H&M)

$$tg\varphi = \frac{Z_Q}{\sqrt{X_Q^2 + Y_Q^2}}\left\{1 + \frac{e^2 N sen\varphi}{Z_Q}\right\}$$

com valor inicial dado por: $tg\varphi^{(0)} = \frac{Z_Q}{\sqrt{X_Q^2 + Y_Q^2}}\left\{\frac{1}{1-e^2}\right\}$

Conversão de coordenadas

7. Coordenadas geodésicas

c) Conversão inversa (x,y,z) → (φ,λ,h)

3- Cálculo da altitude h

$$h = \frac{\sqrt{X_Q^2 + Y_Q^2}}{cos\varphi} - N$$

ou

$$h = \frac{Z_Q^2}{sen\varphi} - N + e^2 N$$

Transformação de Coordenadas

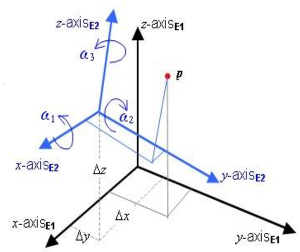
5. Transformação tridimensional de Helmert entre STC

a) A transformação entre dois sistemas tridimensionais cartesianos é realizada, normalmente, através de uma Transformação de Helmert a 7 parâmetros (**3 translações**, **3 rotações** e **um factor** de escala),:

$$\vec{X}_T = \vec{c} + \mu R \vec{X}$$

onde

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & d\alpha_3 & -d\alpha_2 \\ -d\alpha_3 & 1 & d\alpha_1 \\ d\alpha_2 & -d\alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$$



Na sua forma matricial, para transformações com pequenas rotações, designa de **Método de Transformação Bürsa-Wolf**.

Rotações no sentido anti-horário, de acordo com o método "**Coordinate Frame Rotation Transformation**" (sentido horário: método "Position Vector Transformation")

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

b) Este tipo de transformação tem a vantagem de não ser necessário o conhecimento de informação *a priori* do sistema geodésico (parâmetros do elipsóide), é função apenas das coordenadas dos dois sistemas;

c) Basta unicamente o conhecimento de 3 pontos no espaço com coordenadas conhecidas nos dois sistemas para se determinar o conjunto de parâmetros;

d) Para a determinação de 7 parâmetros são necessárias 7 equações no mínimo;

e) Cada ponto contribui com 3 equações de relação, uma por cada coordenada;

f) Se ambos os sistemas têm os seus eixos paralelos, então são necessários apenas 4 parâmetros, as 3 translações e o factor de escala;

g) O factor de escala teoricamente não existe (escala unitária), mas devido à imprecisão das observações e à utilização de escalas de comprimento diferentes (metro padrão, velocidade da luz vezes unidade de tempo, etc.), resulta sempre um pequeno factor de escala próximo da unidade, $\mu = 1 + d\mu$.

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

h) Como os eixos normalmente são quase paralelos, as rotações resultam muito pequenas, e sendo os ângulos muito pequenos as funções co-seno e seno simplificam-se (cos dα= 1, sen dα= dα) dando origem a uma matriz de rotação (produto de 3 matrizes de rotação) muito simplificada:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & d\alpha_3 & -d\alpha_2 \\ -d\alpha_3 & 1 & d\alpha_1 \\ d\alpha_2 & -d\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = I + dR$$

i) O sistema de equações deve ser escrito na forma de modelo linearizado, e com redundância de dados (mais de 3 pontos) o sistema é resolvido pelo **método de ajustamento de mínimos quadrados:**

$$A_i \cdot d\vec{p} = \vec{L}$$

$$d\vec{p} = \left(A_i^T \cdot A_i\right)^{-1} \cdot A_i^T \cdot \vec{L}$$

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

j) Na relação inicial do sistema de equações deve-se considerar o seguinte:

$$\vec{c} = (\vec{c}) + d\vec{c}; \quad \mu = 1 + \mathrm{d}\mu; \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{dR}$$

resultando: $$\vec{X}_{T_i} - \vec{X}_i - (\vec{c}\,) = d\vec{c} + d\mu\vec{X} + dR\vec{X}$$

k) Obtém-se então o sistema na forma linearizada: $A_i \cdot d\vec{p} = \vec{L}_i$

onde:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_i & 0 & -z_i & y_i \\ 0 & 1 & 0 & y_i & z_i & 0 & -x_i \\ 0 & 0 & 1 & z_i & -y_1 & x_i & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{L}_i = \begin{bmatrix} x_{T_i} - x_i - c_1 \\ y_{T_i} - y_i - c_2 \\ z_{T_i} - z_i - c_3 \end{bmatrix}$$

$$com\ \vec{L}_1 = \vec{0}$$

$$d\vec{p} = \begin{bmatrix} dc_1 & dc_2 & dc_3 & d\mu & d\alpha_1 & d\alpha_2 & d\alpha_3 \end{bmatrix}^T$$

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

∴Em resumo: - escolhe-se um conjunto de pontos (>2) nos quais são conhecidas as coordenadas em ambos os sistemas;

- determinam-se os parâmetros por mínimos quadrados;
- aplicam-se os parâmetros pela relação inicial aos restantes pontos dos quais só se conhecem as coordenadas num dos sistemas.

∴A transformação inversa é simétrica, i.é., basta aplicar os parâmetros com sinal contrário

Transformação de Coordenadas

5.2 Parâmetros Nacionais da Transformação de Helmert

a) (sentido das rotações: horário, "Position Vector Transformation")

ETRS89 para:	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Rx (")	Ry (")	Rz (")	Escala (ppm)
Datum Lx	+283.088	+70.693	-117.445	+1.157	-0.059	+0.652	+4.058
Datum 73	+230.994	-102.591	-25.199	-0.633	+0.239	-0.900	-1.950

b) (sentido das rotações: horário, "Position Vector Transformation")

Datum 73 para:	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Rx (")	Ry (")	Rz (")	Escala (ppm)
Datum Lx	+49.137	+179.924	-95.757	-2.00	+0.33	-1.42	+6.80
ED50	-170.885	+223.069	+141.98	-0.79	-0.22	-0.65	+5.63

Nota: O IGP (DGT) aplica as rotações de acordo com "Position Vector Transformation"

Transformação de Coordenadas

5.2 Parâmetros Nacionais da Transformação de Bürsa-Wolf

c) Aplicação dos Parâmetros na Transformação de Coordenadas

DX (m)	DY (m)	DZ (m)	Esc (ppm)	Rot. X (“)	Rot. Y (“)	Rot. Z (“)
-231,03	102,62	26,84	1,786	-0,615	0,198	1,786

1,00000179 -2,9816E-06 9,5993E-07 8,6588E-06

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ETR89} = \begin{bmatrix} DX + \mu X & +\mu\alpha_3 Y & -\mu\alpha_2 Z \\ DY - \mu\alpha_3 X & +\mu Y & +\mu\alpha_1 Z \\ DZ + \mu\alpha_2 X & -\mu\alpha_1 Y & +\mu Z \end{bmatrix}_{D73}$$

X= 4936172,422m
Y= -615880,0092m
Z= 3979409,019m

X=	-231,030	4936181,238	-5,333	-3,820	=	**4935941,056**m
Y=	102,620	-42,741	-615881,109	-11,865	=	**-615833,095**m
Z=	26,840	4,738	-1,836	3979416,127	=	**3979445,869**m