Ajustamento de Redes

1. Ajustamento de Redes bidimensionais

a) Fases de cálculo da Rede Geodésica sobre o elipsóide

1- Encadeamento Geodésico - Cálculo prévio das coordenadas dos vértices da rede através do transporte de coordenadas, por intermédio do problema directo da geodesia e, usando apenas um dos possíveis caminhos;

2- Ajustamento da Rede – Dada a redundância das observações efectuadas (conduzem a múltiplas soluções), as coordenadas da rede devem resultar de uma solução de ajustamento de observações por mínimos quadrados (solução única e precisa).

Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

a) Cálculo de coordenadas aproximadas

- O transporte de coordenadas para todos os pontos da rede é feito a partir de um ponto inicial – *ponto origem do datum* – (onde, em termos clássicos, foram efectuadas observações astronómicas, observações azimutais e vários comprimento);

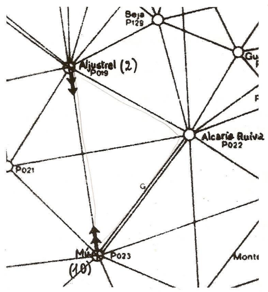
- Resolvendo-se sucessivamente os triângulos da rede e aplicando as fórmulas do problema directo da geodesia às observações, obtêm-se as coordenadas iniciais;

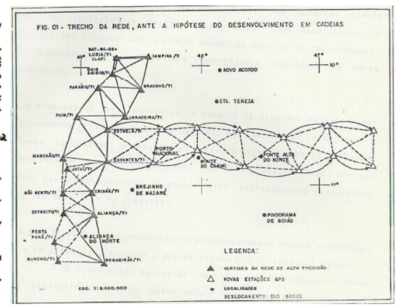
- Dos múltiplos percursos para o transporte de coordenadas, basta escolher um qualquer caminho para se transportarem as coordenadas a todos os pontos da rede.

Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

b) Observação da rede



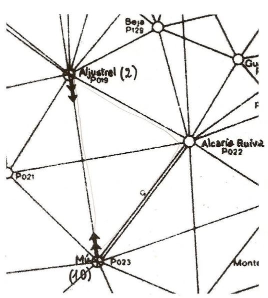


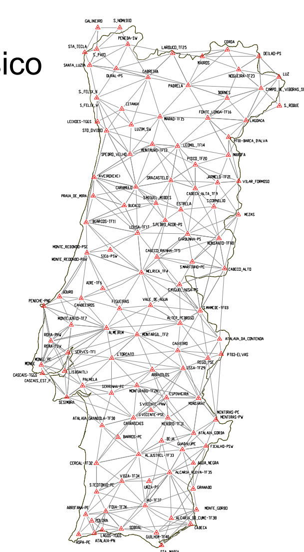
- Todas as observações devem ser corrigidas dos erros respectivos e reduzidas ao elipsóide de referência através das correcções de redução

Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

b) Observação da rede





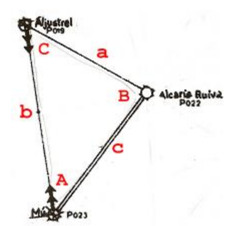
Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

b) Exemplo numérico do exercício prático

1- Determinam-se o lado ***b*** por;

$$b = arcsen\left(\frac{senB \cdot senc}{senC}\right) \cdot R_{\alpha}$$



2- Calcula-se o azimute *Mú-Alcaria* a partir do azimute e do ângulo medido em *Mú*;

3- Aplica-se o problema directo a partir de *Mú* para *Alcaria* e Aljustrel;

4- Determina-se o lado ***a*** e resolve-se o triângulo adjacente;

5- Procede-se de igual forma e repete-se o processo.

Ajustamento de Redes

1.2 Modelo Matemático de ajustamento

a) O modelo matemático de um ajustamento é constituído por um modelo funcional e por um modelo estocástico;

b) O ***modelo funcional*** estabelece a relação analítica entre os parâmetros do sistema (observações e coordenadas) e é dado na sua forma geral por;

$$F\left(\vec{x}_t, \vec{l}_t\right) = \vec{0}$$

c) O ***modelo estocástico*** define a correlação e a estatística dos parâmetros do modelo e é constituído pelo conjunto de variâncias e covariâncias do sistema

$$\Sigma_{x,l} = \left[\Sigma_{xx}, \Sigma_{xl}, \Sigma_{lx}, \Sigma_{ll}\right]$$

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

a) Normalmente, é usado o ***método paramétrico***, também designado por método da ***variação dos parâmetros com equações de observação***: $\vec{l}_t = f(\vec{x}_t)$

- l_t : vector dos valores verdadeiros (desconhecidos) das ***grandezas observadas***;

- x_t : vector dos valores teóricos dos ***parâmetros*** (incógnitas)

- ***f*** é a ***aplicação matemática*** que transforma o espaço dos parâmetros (coordenadas), de dimensão ***q***, no espaço das observações de dimensão ***n***.

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

b) Usando um qualquer ***estimador*** (ex.: m.m.q.) temos um ***modelo funcional de estimativa***: $\hat{\vec{l}}_t = f(\hat{\vec{x}}_t)$

- $\hat{\vec{l}}_t$: estimativa do vector dos valores verdadeiros das grandezas observadas;

- $\hat{\vec{x}}_t$: estimativa do vector dos parâmetros (coordenadas ajustadas)

- Da diferença entre os valores estimados e o valores teóricos resultam os erros da estimativa, $\vec{l}_t = \hat{\vec{l}}_t - E_l;\quad \vec{x}_t = \hat{\vec{x}}_t - E_x$

- A função *f(x)* é a mesma, poderá sofrer uma linearização.

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

c) O método dos mínimos quadrados (m.m.q.) é aplicável somente a sistemas lineares;

d) Dado que a função ***f*(*x*)** do modelo (em geodesia), normalmente, ***é não linear*** (relações de ângulos e distâncias), deve proceder-se à respectiva linearização para se poder aplicar o m.m.q.;

e) A ***linearização*** é feita através do desenvolvimento em série de Taylor, ***em torno de um valor aproximado*** ($\boldsymbol{x_0}$), tomando-se apenas a sua parte linear;

f) Da aplicação do m.m.q. a esse modelo linear resulta uma ***correcção aos valores iniciais*** dos parâmetros ($\delta=x_t-x_0$), com a qual se obtém uma estimativa mais precisa;

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

g) Os ***valores iniciais*** (x_0), com os quais se faz o desenvolvimento em série e permite o cálculos dos coeficientes do sistema linear para a aplicação do m.m.q., são os valores das ***coordenadas aproximadas*** calculadas com as observações, por aplicação do ***problema directo*** da geodesia, no ***encadeamento geodésico***;

h) Admitindo que o estimador (método de ajustamento) nos fornece valores ajustados de observações (l), através de uma estimativa dos seus erros (E_l), é necessário, de igual modo, tomar valores iniciais também para o vector de observações;

i) Os valores iniciais das observáveis (l_0) serão as próprias observações eivadas de erros aleatórios;

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

j) Esta abordagem é legitimada pelo facto de ambos os parâmetros (*x,l*) serem considerados variáveis aleatórias;

k) Tomemos então, o modelo funcional na seguinte forma

$$F(\hat{x},\hat{l}) = f(\hat{x}) - \hat{l} = 0$$

e desenvolvemos a função em torno do ponto (x_0,l_0)

$$F(\hat{x},\hat{l}) = 0 = F(x_0,l_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0} \cdot (\hat{x} - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_{l=l_0} \cdot (\hat{l} - l_0) + \cdots$$

Tomando a definição da função F podemos reescrever o desenvolvimento na sua forma linear

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} \cdot (\hat{x} - x_0) + f(x_0) - l_0 = (\hat{l} - l_0)$$

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

l) Introduzindo a seguinte notação matricial:

- A : matriz jacobiana (coeficientes dos parâmetros)
- δ : vector dos parâmetros (correcção às coordenadas iniciais)
- W: vector fecho (valores calculados menos os observados)
- ν : vector dos resíduos (estimativa dos erros das observações)

Temos a forma matricial: $A \cdot \delta + W = \nu$

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

$$\boxed{A \cdot \delta + W = \nu}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{bmatrix} \qquad \delta = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - x_{10} \\ \hat{x}_2 - x_{20} \\ \cdots \\ \hat{x}_q - x_{q0} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} f_1(x_0) - l_{10} \\ f_2(x_0) - l_{20} \\ \cdots \\ f_n(x_0) - l_{n0} \end{bmatrix} \qquad \nu = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 - l_{10} \\ \hat{l}_2 - l_{20} \\ \cdots \\ \hat{l}_n - l_{n0} \end{bmatrix}$$

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

a) A estocástica do sistema é definida pelo conjunto de variâncias e covariâncias dos parâmetros do sistema, ou de uma outra forma, é definida pela correlação entre os parâmetros e pela respectiva precisão;

b) Este modelo contém elementos definidos *a priori* - conjunto de precisões das observáveis e sua correlação (dependência), e elementos que resultam *a posteriori* – conjunto das precisões das coordenadas e respectiva correlação;

c) A definição das condições *a priori* deve respeitar a metodologia de observação da rede geodésica; ou, dito ao contrário, a metodologia deve estar de acordo com estas condições *a priori*;

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

d) Se um conjunto de observações for estocasticamente dependente, então a sua interacção estatística é representada pela chamada matriz de variâncias e covariâncias:

$$\Sigma_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

e) A sua determinação rigorosa é de difícil tarefa

f) Devem-se sempre procurar um conjunto de observações que seja o mais independente possível e das quais se consiga conhecer com rigor o nível de precisão;

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

g) Se as observações forem consideradas estocasticamente independente, então a matriz das covariâncias é diagonal:

$$\Sigma_{l} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

h) Estas condições *a priori* são introduzidas no sistema de ajustamento pelo m.m.q. através de uma matriz peso, que define o peso de cada observação no resultado do ajustamento;

i) A definição dos pesos das observações é feita mediante um dado critério, que deverá estar de acordo com as precisões obtidas;

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

j) O critério normalmente utilizado para a definição de pesos das observações independentes é dado pela relação: $p_j = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_j^2}$

- sendo σ_0^2 a variância de referência *a priori* que corresponde à variância de unidade de peso (observação de peso unitário) e, σ_j^2 a variância *a priori* da observação genérica j;

k) Tratando-se de n observações não correlacionas, temos

$$P_l = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \Sigma_{ll}^{-1}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

a) ***O sistema de equações*** de observação a priori é um ***sistema impossível***, com n equações e q incógnitas (**n>q**);

b) Ao considerar-se o conjunto de variáveis (x,l) do sistema como variáveis estocásticas, permite introduzir um ***novo conjunto de incógnitas*** no sistema – ***os n resíduos*** (ν_i), estimativas dos erros das observações;

c) Nestas condições temos um sistemas linear de ***n equações e n+q incógnitas*** – um ***sistema possível e indeterminado***;

d) A indeterminação deste sistema pode ser levantada por duas vias:

1- introduz-se um conjunto de q equações de condição ao sistema; ou,
2- impõe-se uma condição a um conjunto de incógnitas (aos resíduos);

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

e) Para diferentes estimadores (métodos), podemos obter diferentes estimativas (soluções);

f) O estimador "método dos mínimos quadrados" é o mais preciso, estimador de variância mínima, porque resulta da minimização da soma pesada do quadrado dos resíduos, o numerador da variância de referência (σ_0^2);

$$\phi = p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots p_n\nu_n^2 = V^T P_l V = min$$

g) A minimização da função do quadrado dos resíduos resulta na seguinte condição

$$\frac{\partial \phi}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta}\left(V^T P_l V\right) = 0$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

h) As q equações de derivadas parciais da função ϕ=V^TPV constituem o chamado sistema de equações normais (q x q), e corresponde à normalização do sistema de equações pesadas:

$$\left(A^T \cdot P_l \cdot A\right)\cdot \hat{\delta} = -\left(A^T \cdot P_l\right)\cdot W$$

$$\Leftrightarrow \; N \cdot \hat{\delta} = -U$$

i) Cuja resolução nos dá a solução da estimativa de m.m.q. para o conjunto de parâmetros que definem as correcções às coordenadas iniciais

$$\hat{\delta} = -N^{-1} \cdot U$$

$$\hat{X}_t = X_0 + \hat{\delta}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

j) A substituição desta solução no sistema de equações lineares devolve a solução do vector de resíduos, suprimidos na imposição da condição de mínimos quadrados

$$\hat{V} = A \cdot \hat{\delta} + W$$

k) Aplicando esta estimativa dos erros das observações obtém-se o vector das observações ajustadas

$$\hat{l} = l_0 + \hat{V}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

l) A matriz de covariância dos dados (observações) juntamente com a variância de referência a priori constituem as condições a priori do modelo estocástico do sistema e relacionam-se com as matrizes peso e cofactor da seguinte forma:

$$\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 \cdot P_l^{-1}$$

$$Q_l = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{ll} = P_l^{-1}$$

m) A variância de referência é, *a priori*, uma constante arbitrária definida por

$$\sigma_0^2 = p_i \cdot \sigma_i^2 \Big|_{i=1,n}$$

e que corresponde ao valor estimado *a posteriori*

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{n-q}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

n) A matriz das variâncias e covariâncias das coordenadas finais ajustadas, é a respectiva matriz do próprio vector das correcções δ às coordenadas, já que os valores iniciais x_0 são considerados constantes;

o) Por aplicação da ***Lei Geral de Propagação das Variâncias e Covariâncias*** sobre a solução do sistema de equações lineares

$$\hat{\delta} = -\left(A^T P_l A\right)^{-1} \cdot A^T P_l \cdot W = S \cdot W$$

obtém-se a matriz das covariâncias dos parâmetros

$$\Sigma_{\hat{\delta}} = S \cdot \Sigma_l \cdot S^T = S \cdot \left(\hat{\sigma}_0^2 \cdot P_l^{-1}\right) \cdot S^T$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

p) Após substituição da matriz S e após algum cálculo matricial, obtém- a ***matriz das variâncias e covariâncias dos parâmetros***

$$\Sigma_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \left(A^T \cdot P_l \cdot A\right)^{-1}$$

q) Porque $\hat{X}_t = X_0 + \hat{\delta}$ a matriz da covariâncias das coordenadas ***a posteriori*** é dada por

$$\Sigma_{\hat{X}} = \Sigma_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \left(A^T \cdot P_l \cdot A\right)^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1}$$

onde $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-q}$ e ***n-q*** é o número de graus de liberdade do sistema ou, também chamada redundância;

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

r) A validação da solução do ajustamento é feita com recurso a um teste estatístico - ***Teste da razão das variâncias***, que pode ser realizado quer pelo teste do Qui-Quadrado quer pelo teste de Fisher;

s) Os modelos funcional e estocástico relacionam-se através da matriz de pesos das observações, que contém informação sobre a suas precisões e define a relação de peso através da constante de proporcionalidade $\sigma_0^2 = p_i . \sigma_i^2$

t) O modelo estocástico devolve uma estimativa *a posteriori* da variância de unidade de peso, a solução só será aceitável se estes valores forem estatisticamente iguais, isto é, o parâmetro não é estatisticamente alterado pela estimativa;

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

u) Teste estatístico unilateral da razão das variâncias:

1- Teste do χ^2 (qui-quadrado): $\chi^2_{1-\alpha,n-q} = \dfrac{(n-q)\cdot\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$

H$_0$: $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ vs H$_1$: $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$

$\therefore$ Rejeitar H$_0$ para uma confiança 1-α se $\dfrac{(n-q)\cdot\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha,n-q}$

2- Teste de Fisher $F_{1-\alpha,n-q,\infty} = \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$

H$_0$: $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ vs H$_1$: $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$

$\therefore$ Rejeitar H$_0$ para uma confiança 1-α se $\dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > F_{1-\alpha,n-q,\infty}$

Ajustamento de Redes

1.4 Formulação e cálculo do ajustamento

a) O ajustamento duma rede geodésica pode ser feito sobre diferentes sistemas de referência sem perda de rigor;

b) Pode ser realizado sobre o elipsóide (φ,λ), sobre o plano cartográfico (M,P) ou sobre o espaço (x,y,z);

c) Pode ser feito em separado, separando-se a "planimetria" da "altimetria", geodesia bi- e uni-dimensional;

d) Em cada sistema de referência as equações de observação (azimutes, direcções e distâncias), exprimem a respectiva geometria, e correspondem aos respectivos valores reduzidos das observações;

e) As respectivas precisões têm também de ser reduzidas de modo a corresponderem a valores de imprecisão nas respectivas unidades e sistema de referência;