# Campo Gravítico da Terra

## **3.8** Equação fundamental do Potencial

- O problema da determinação do campo gravítico da terra pode ser dividido em dois: a determinação do campo gravitacional e a determinação do campo centrífugo

$$\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi$$

- Como o potencial centrífugo é uma simples função de posição, em que a velocidade angular é constante e conhecida com grande precisão, o problema resume-se à determinação do potencial gravitacional no espaço exterior, ou seja, à resolução da ***Equação de Laplace***:

$$\Delta V = 0$$

1

# Campo Gravítico da Terra

## **3.9** Camada de Green e Teorema de Stokes

- Teorema de Stokes: "*sendo S uma superfície equipotencial de um campo Newtoniano, contendo no seu interior todas as massas atraentes, se se modificar a distribuição das massas sem se alterar a sua totalidade, por forma que S continue a ser uma superfície equipotencial exterior às massas atraentes, então o potencial V num ponto exterior a S permanece inalterável*".

- A *Camada de Green* é uma camada sólida esférica (esfera oca) com uma densidade $\sigma = -\frac{1}{4\pi G}\frac{\partial V}{\partial n}$

  capaz de gerar um potencial igual ao potencial gravítico no seu exterior $G\iiint_v \frac{\rho}{l} dv = G\oiint_s \frac{\sigma}{l} ds$



2

# Campo Gravítico da Terra

## **3.9** Camada de Green e Teorema de Stokes

- O potencial exterior de uma esfera homogéneo, $V=GM/l$, é um exemplo da validade do *Teorema de Stokes*;
- Todas as esferas homogéneas concêntricas com a mesma massa total M, independentemente da sua dimensão, geram o mesmo potencial no seu exterior;
- Juntamente com a camada de Green, são exemplos particulares do *Teorema de Stokes*, ***uma função harmónica no exterior de S é unicamente determinada pelos seus valores em S***;
- Existem infinitas distribuições de massa que geram o mesmo potencial no exterior da sua superfíce;



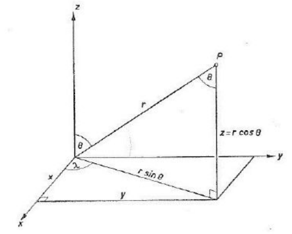
# Campo Gravítico da Terra

## **3.9** Camada de Green e Teorema de Stokes

- Por estas razão é impossível a determinação da distribuição das massas a partir do seu potencial no exterior;
- Este define-se como o ***problema inverso*** da teoria do potencial e não tem solução única;
- Este problema surge na prospecção geofísica: *as massas invisíveis para serem inferidas a partir das anomalias gravimétricas*, necessitam de dados sísmicos e informação geológica adicional;
- Na geodesia, o resultado do Teorema de Stokes é aplicado na *determinação do geóide*, como um problema de fronteira: *determinar a função harmónica V no exterior de S (geóide) a partir de valores definidos sobre S.*

# Campo Gravítico da Terra

## 3.10 Coordenadas esféricas




$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\lambda \\ y = r\sin\theta\sin\lambda \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \lambda = tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

com θ=90º- β, co-latitude reduzida



# Campo Gravítico da Terra

## 3.10 Coordenadas esféricas

- Elemento linear ***ds*** em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \lambda}d\lambda$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\lambda^2$$

Nota: as coordenadas esféricas são ortogonais, logo não há produtos cruzados

# Campo Gravítico da Terra

## 3.11 Equação de Laplace

- Laplaceano em coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Laplaceano em coordenadas ortogonais arbitrárias ($q_1$, $q_2$, $q_3$)

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\right]$$

Cujo o elemento linear ***ds*** é dado por:

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$$



# Campo Gravítico da Terra

## 3.11 Equação de Laplace

- Coordenadas esféricas $q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\lambda$;

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\lambda^2$$

- Coeficientes da expressão de elemento linear das coordenadas ortogonais arbitrárias: $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=r.\sin\theta$
- Substituindo na forma anterior do Laplaciano e diferenciando, obtemos a *Equação de Laplace* em coordenadas esféricas:

$$\underbrace{r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r}} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}} = 0$$

# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

• Considerando a função do Potencial Gravitacional definida por

$$V(r,\theta,\lambda) = f(r)Y(\theta,\lambda)$$

É possível separar a *Equação de Laplace* na forma anterior em duas equações diferenciais

$$r^2 f''(r) + 2rf'(r) - n(n+1)f(r) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}} + \underbrace{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y} = 0$$



# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

• As soluções da 1ª equação diferencial ordinária são do tipo:

$$f(r) = r^n \quad \text{ou} \quad f(r) = r^{-(n+1)}$$

• Tomando $Y_n(\theta,\lambda)$ como solução da 2ª equação diferencial às derivadas parciais, a *Equação de Laplace*, $\Delta V=0$, tem as solução:

$$V = r^n Y_n(\theta,\lambda) \quad \text{e} \quad V = \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}$$

• Estas funções são designadas por *harmónicas esféricas sólidas*, enquanto que as funções $Y_n(\theta,\lambda)$ são designadas por *harmónicas esféricas de superfície*

# Campo Gravítico da Terra

## 3.12 Harmónicas esféricas

• Se as seguintes funções são solução da *Equação de Laplace*:

$$V = r^n Y_n(\theta,\lambda) \quad \text{e} \quad V = \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}$$

então qualquer combinação linear destas soluções

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta,\lambda) \quad \text{e} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}$$

é também uma solução da *Equação de Laplace*, pois $\Delta$ é um operador linear (a equação diferencial é linear)



# Campo Gravítico da Terra

## 3.12 Harmónicas esféricas

• Considerando a função harmónica esférica de superfície decomposta pelo seguinte produto

$$Y(\theta,\lambda) = g(\theta)h(\lambda)$$

É possível separar a 2ª equação diferencial, novamente, em duas equações diferenciais ordinárias

$$\sin\theta \cdot g''(\theta) + \cos\theta \cdot g'(\theta) + \left[ n(n+1)\sin\theta - \frac{m^2}{\sin\theta} \right] g(\theta) = 0$$

$$h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) = 0$$

# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

- Da resolução destas equações diferenciais ordinárias resultam as funções harmónicas esféricas de superfície, soluções da 2ª equação diferencial anterior

$$Y_n(\theta,\lambda) = Pnm(\cos\theta)\cos m\lambda$$

$$Y_n(\theta,\lambda) = Pnm(\cos\theta)\sin m\lambda$$

- Se estas funções são solução de um equação diferencial linear, também o é qualquer combinação linear destas funções

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\right]$$



# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

- Inserindo estas funções na combinação linear das harmónicas esféricas sólidas, obtém-se *o desenvolvimento em harmónicas esféricas do Potencial Gravitacional*, como solução da *Equação de Laplace* para o espaço exterior

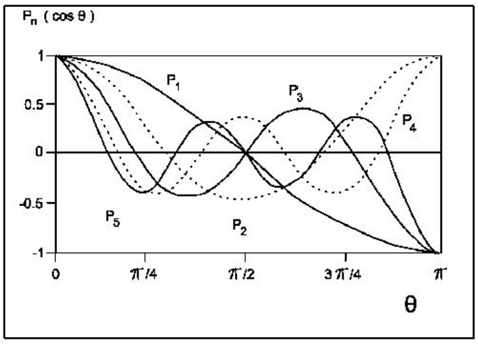
$$V_e(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\left[a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\right]$$

- Nesta expressão:
  - $a_{nm}$ e $b_{nm}$ são constantes arbitrárias, chamadas *coeficientes harmónicos* (calculadas com os valores de gravidade por integração);
  - $P_{nm}(t)$ são *funções associadas de Legendre*;
  - $n$ representa o grau e $m$ a ordem do desenvolvimento da série.

# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

- Exemplos de Polinómios de Legendre (c/ ordem $m$=0)




$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n$$

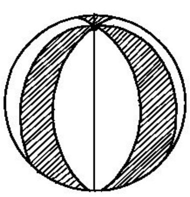
$$P_1(t) = \cos\theta;\ P_2(t) = \frac{3}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4};\ P_3(t) = \frac{5}{8}\cos 3\theta + \frac{3}{8}\cos\theta;\ P_4(t) = \frac{35}{64}\cos 4\theta + \frac{5}{16}\cos 2\theta + \frac{9}{64};\ etc.$$

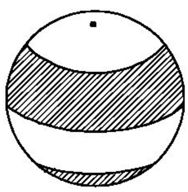


# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

- Ilustração do zonamento de algumas harmónicas esféricas de superfície (*zonal, sectorial e tesseral*), positiva na zona tracejada e negativa na zona a branco





$P_3(\cos\theta)$


$P_{0,5}(\cos\theta)\cos 5\lambda$

$$P_{nm}(t) = \left(1 - t^2\right)^{m/2}\frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$$

$P_{12,5}(\cos\theta)\sin 5\lambda$

# Campo Gravítico da Terra

## **3.12** Harmónicas esféricas

- O desenvolvimento em harmónicas esféricas representa uma *decomposição espectral em estruturas de campo de comprimento de onda 360º/n* (resolução 180º/n);
- Os polinómio de Legendre ($P_{n0}$) representam um campo rotacional simétrico dividindo a esfera em zonas de latitude, onde o grau ***n*** estabelece a simetria em relação ao equador;
- O termo de grau zero corresponde ao potencial de uma Terra esférica e homogénea;
- As harmónicas esféricas são funções ortogonais na superfície esférica S, para qualquer ponto ($\theta$,$\lambda$).



# Campo Gravítico da Terra

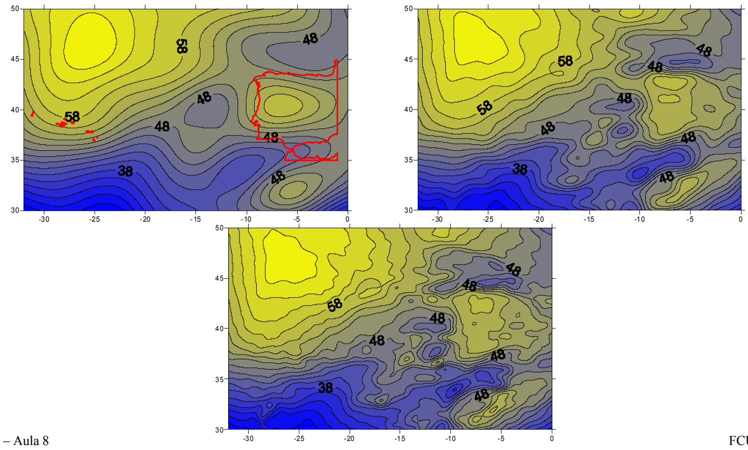
## **3.12** Harmónicas esféricas

- As harmónicas esféricas são um tipo de solução da *Equação de Laplace*, $\Delta$V=0;
- Como solução da *Eq. Laplace* elas permitem exprimir o potencial gravitacional em séries de desenvolvimento de harmónicas esféricas;
- Os modelos globais do campo gravítico, e implicitamente do geóide, são soluções deste tipo, representadas pelos respectivos coeficientes de harmónicas esféricas;
- EGM96 é um modelo geopotencial utilizado, e é representado pelos coeficientes harmónicos até ao grau 360;

# Campo Gravítico da Terra

## 3.13 Ondulação do modelo EGM96

• Região Atlântico Norte / Ibérica (de grau 60, 180 e 360)






# Campo Gravítico da Terra

## 3.13 Modelos de Globais de Geóide


**Global Gravity Field Models**

**We kindly ask the authors of the models to check the links to the original websites of the models from time to time.
Please let us know if something has changed.**

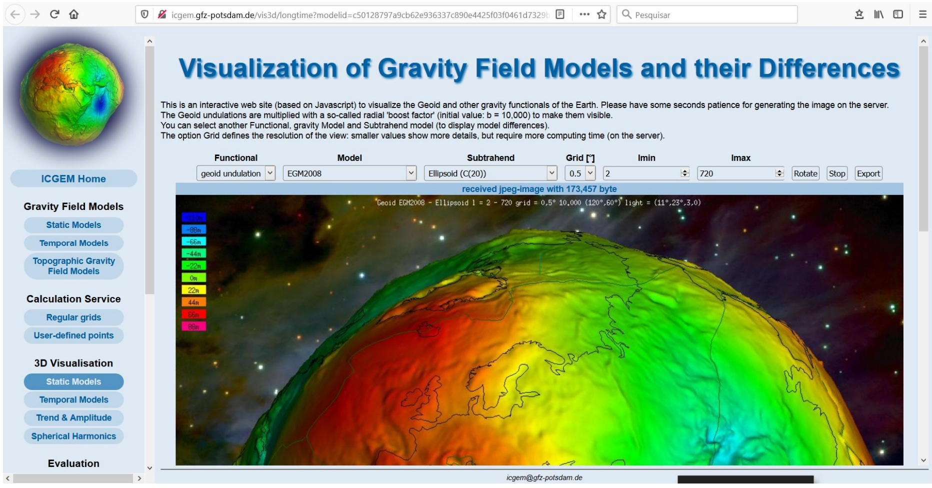
The table can be interactively re-sorted by clicking on the column header fields (Nr, Model, Year, Degree, Data, Reference).
In the data column, the datasets used in the development of the models are summarized, where **A** is for altimetry, **S** is for satellite (e.g., GRACE, GOCE, LAGEOS), **G** for ground data (e.g., terrestrial, shipborne and airborne measurements) and **T** is for topography.

The links calculate and show in the last columns of the table directly invoke the *Calculation Service* and *Visualization page* for the selected model.
For models with a registered **doi** ("digital object identifier") the last column contains the symbol ✓, which directly opens the page on "http://dx.doi.org/".
If you click on the reference, the complete list of references can be seen.

| Nr | Model | Year | Degree | Data | References | Download | Calculate | Show | DOI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 176 | XGM2019e_2159 | 2019 | **2190**<br>5540<br>760 | A, G, S(GOCO06s), T | **Zingerle, P. et al, 2019** | gfc zip<br>gfc zip<br>gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 175 | GO_CONS_GCF_2_TIM_R6e | 2019 | 300 | G (Polar), S(Goce) | **Zingerle, P. et al, 2019** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 174 | ITSG-Grace2018s | 2019 | 200 | S(Grace) | **Mayer-Gürr, T. et al, 2018** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 173 | EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD | 2019 | 300 | S | **Lemoine et al, 2019** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 172 | GOCO06s | 2019 | 300 | S | **Kvas et al., 2019** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 171 | GO_CONS_GCF_2_TIM_R6 | 2019 | 300 | S(Goce) | **Brockmann, J. M. et al, 2014** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 170 | GO_CONS_GCF_2_DIR_R6 | 2019 | 300 | S | **Bruinsma, S. L. et al, 2014** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |
| 169 | IGGT_R1C | 2018 | 240 | G, S(Goce), S(Grace) | **Lu, B. et al., 2019** | gfc zip | Calculate | Show | ✓ |

# Campo Gravítico da Terra

## **3.13** Modelos de Globais de Geóide






# Campo Gravítico da Terra

## **3.13** Problemas de fronteira

- Problema de *Dirichlet* (*1º problema de valor-livre de fronteira*)

  - Determinar uma função V que seja harmónica ($\Delta V=0$ ) no exterior ou interior de uma superfície S, e que assuma valores dados sobre essa fronteira;

  valores de fronteira: $\bar{V}(R,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda)$

  solução: $$V(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\lambda)$$

- Problema de *Neumann* (2*º problema de valor-livre de fronteira*)

  - Determinar uma função V que seja harmónica ($\Delta V=0$ ) no exterior ou interior de uma superfície S, e que verifique valores da sua derivada normal, $\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{r=R}$ dados sobre essa fronteira;

# Campo Gravítico da Terra

## **3.13** Problemas de fronteira

- Problema de fronteira da Geodesia Física (*3º problema de valor-livre de fronteira*)

  - Determinar uma função V que seja harmónica ($\Delta V=0$ ) no exterior de uma superfície S, e que assuma como valores de fronteira <u>uma combinação linear de V e da sua derivada normal</u>:

$$\left[ hV + k\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda)$$

solução: $$V_e(r,\theta,\lambda) = R\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{n-1}$$

  - A fórmula integral mais comum que corresponde à solução do problema de fronteira da geodesia física é o conhecido <u>*Integral de Stokes*</u>.



# Campo Gravítico da Terra

## **3.13** Problemas de fronteira

- Solução do problema de Dirichlet (*1º problema de fronteira*)

  - Uma outra solução explicita do problema de Dirichlet para o espaço exterior da esfera, é dada pelo ***Integral de Poisson***:

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\theta'=0}^{\pi}\frac{V(R,\theta',\lambda')}{l^3}\sin\theta'\, d\theta' d\lambda'$$

com $$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\psi}$$