Campo Gravítico da Terra

5. Campo Gravítico Anómalo

- A relação entre o potencial gravítico e o potencial normal é dada por:

$$W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z)$$

- O *campo gravítico anómalo* ou *perturbador* é então definido pela diferença residual do campo gravítico terrestre com o *campo gravítico normal* do elipsóide de referência;
- Esta aproximação constitui a *chamada linearização do problema de fronteira da geodesia física;*
- O facto da diferença de potenciais ser uma quantidade pequena e residual, permite aproximações lineares da função potencial $T(r,\theta,\lambda)$.

Campo Gravítico da Terra

5.1 Potencial perturbador

- O potencial perturbador T descreve as irregularidades regionais e locais do potencial gravítico W em relação ao potencial U;
- Devido à definição do campo gravítico normal, o potencial perturbador T satisfaz a equação de Laplace no exterior da Terra;

$$T(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A) - \left[\overline{V}(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A)\right] = V(\vec{r}_A) - \overline{V}(\vec{r}_A)$$

- Como Δ é um operador linear, desprezando a atmosfera, o potencial perturbador é uma função harmónica em todo o espaço exterior à Terra :

$$\Delta T(\vec{r}_A) = 0$$

Campo Gravítico da Terra

5.1 Potencial perturbador

- Baseando-nos no desenvolvimento em harmónicas esféricas dos potenciais gravitacional terrestre e normal, obtemos a representação em harmónicas esféricas da função potencial T:

$$T(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\Delta C_{nm}\cos m\lambda+\Delta S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\cos\theta)$$

- Muitas vezes representada por:

$$T(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(r,\theta,\lambda)$$

Campo Gravítico da Terra

5.1 Potencial perturbador

- Atendendo a que os termos de ordem 0 e 1 correspondem, respectivamente, à diferença de massas e diferença das coordenadas dos centros de massa

$$T_0=\frac{GM_T}{r}-\frac{GM_E}{r}=\frac{G}{r}\delta M \qquad T_1=\frac{GM}{r}\left[\Delta x P_{10}(t)+\left(\Delta y\cos\lambda+\Delta z\sin\lambda\right)P_{11}(t)\right]$$

- Considerando-se o elipsóide com massa $M_E=M_T$ e com seu centro coincidente ao centro de massa da Terra, os termos T_0 e T_1 são nulos, resultando:

$$T(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=2}^{\infty}T_n(r,\theta,\lambda)$$

Campo Gravítico da Terra

5.2 Vector perturbador da gravidade

- Tal como acontece com os potenciais gravítico e normal, ao potencial perturbador também está associada uma aceleração de gravidade;
- Como $\vec{g} = gradW \qquad \vec{\gamma} = gradU$

  o vector perturbador da gravidade resulta por

$$\vec{\delta}g = grad(W - U) = gradT \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

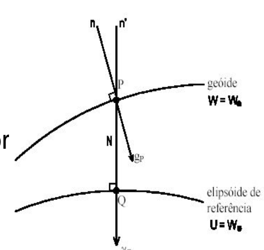
- O ***vector perturbador*** é então, em cada ponto, definido pela diferença

$$\vec{\delta}g(P) = \vec{g}(P) - \vec{\gamma}(P) = gradW - gradU$$

Campo Gravítico da Terra

5.3 Anomalia da gravidade

- Comparemos a superfície do geóide definida por $W(x,y,z) = W_0$ com a superfície do elipsóide definida por $U(x,y,z) = U_0$
- Assumindo o mesmo valor de potencial W_0=U_0, um ponto P sobre o geóide é projectado no ponto Q sobre o elipsóide através da sua normal;
- e considerando, respectivamente, o vector gravidade g em P e o vector gravidade normal γ em Q: o ***vector anomalia da gravidade*** é definido pela sua diferença:



$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q \qquad \left(\neq \vec{\delta}g = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P\right)$$

Campo Gravítico da Terra

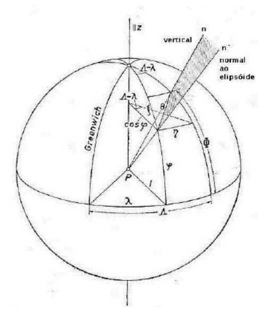
5.3 Anomalia da gravidade

- Este vector tem uma magnitude, designada por *<u>anomalia da gravidade</u>*

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

- E uma direcção dada pelo <u>desvio da vertical</u>, cujas componentes são dadas por

$$\xi = \Phi - \varphi$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi$$



- A anomalia da gravidade resulta de **<u>observações gravimétricas</u>** e do cálculo de γ pela F.I.G., enquanto que, os desvios da vertical resultam de **<u>observações astronómicas e geodésicas</u>**

7

Campo Gravítico da Terra

5.4 Fórmula Bruns

- Desenvolvendo em série de Taylor a função de potencial normal em torno do ponto Q sobre o elipsóide, tem-se

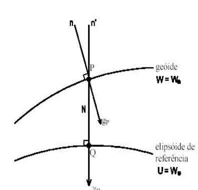
$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q dn + \cdots \qquad = U_Q - \gamma_Q N + \cdots$$

- Substituindo na expressão do potencial gravítico em P a parte linear destes desenvolvimento, e tomando dn=N, tem-se

$$W_P = U_P + T_P = U_Q - \gamma N + T_P$$

- Impondo-se a condição $W_P = U_Q = W_0$

obtém-se $-\gamma N + T_P = 0$



8

Campo Gravítico da Terra

5.4 Fórmula Bruns

- Resultando então a chamada *Fórmula de Bruns*:

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

- Esta fórmula relaciona directamente a ondulação do geóide com o valor do potencial perturbador, onde γ, a gravidade normal sobre o elipsóide, pode ser considerada constante.
- Esta fórmula constitui um resultado importante para a resolução do problema da determinação do geóide (problema de fronteira);
- Ao resolver o problema de fronteira determina-se o potencial perturbado T, e com esta fórmula sai directamente a ondulação do geóide.

Campo Gravítico da Terra

5.5 Equação fundamental da geodesia física

- Desenvolvendo em série de Taylor a função de gravidade normal em torno do ponto Q sobre o elipsóide, tem-se

$$\gamma_P = \gamma_Q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)_Q dn + \cdots$$

- Tomando a sua parte linear e tomando a sua diferença com o valor da gravidade g no ponto P (perturbação da gravidade)

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \vec{\delta g}(P) = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N$$

Campo Gravítico da Terra

5.5 Equação fundamental da geodesia física

- Substituindo a expressão da anomalia da gravidade

$$-\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{h}} = \Delta \boldsymbol{g}_P - \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{N}$$

- Obtém-se assim, usando a fórmula de Bruns, a ***Equação Fundamental da Geodesia Física***

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g_P = 0$$

- Esta é a equação que define a condição de fronteira na determinação do potencial gravítico da Terra no espaço exterior, e consequentemente, a determinação do geóide

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{h}} \boldsymbol{T} - \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{h}} = \Delta \boldsymbol{g}_P$$

Campo Gravítico da Terra

5.6 3º Problema de Fronteira

- O 3º problema de fronteira é o ***problema geodésico de fronteira***, que se resume na determinação da superfície do geóide (datum altimétrico), é então redefinido por:
- *Determinar a função potencial T que seja harmónica no espaço exterior à Terra e que verifique, sobre o geóide, a equação fundamental da geodesia*

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{T} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{z}^2} = \boldsymbol{0} \\ -\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{h}} + \dfrac{\boldsymbol{1}}{\gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{h}} \boldsymbol{T} = \Delta \boldsymbol{g}_P \end{cases}$$

- A solução, que através da Fórmula de Bruns nos dá a ondulação do geóide, é uma solução da equação de Laplace que verifica a condição de fronteira dada pela E.F.G.F.

Campo Gravítico da Terra

5.7 Expansão em harmónicas esféricas

- A equação fundamental pode ser escrita em aproximação esférica;
- Seja $\gamma = \frac{GM}{r^2}$, então $\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2\gamma}{r}$ $\qquad \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h}T - \frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g_P$
- Como d/dh=d/dr, tomando-se r = R, vem a equação definida em aproximação esférica

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R}T + \Delta g_P = 0$$

Campo Gravítico da Terra

5.7 Expansão em harmónicas esféricas

- Demonstra-se que para uma dada função $F(x)$ harmónica ($\Delta F = 0$), a sua derivada $dF(x)/_{dx}$ é também uma função harmónica
- Logo se T é função harmónica sobre a fronteira e no espaço exterior, também a sua derivada $\frac{\partial T}{\partial r}$ é harmónica no espaço exterior e sobre a fronteira
- De onde se conclui que a anomalia da gravidade $\Delta g_P = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T$ é uma função harmónica no espaço exterior

Campo Gravítico da Terra

5.7 Expansão em harmónicas esféricas

- Tomemos a expressão do potencial perturbado em harmónicas esféricas sobre o geóide

$$T(R,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(\theta,\lambda)$$

- Derivado esta expressão em ordem a *r*, tem-se;

$$\delta g=-\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)T_n(\theta,\lambda)$$

15

Campo Gravítico da Terra

5.7 Expansão em harmónicas esféricas

- Substituindo agora os dois desenvolvimentos na expressão modificada da equação fundamental

$$\Delta g_P=-\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2}{R}T$$

- Obtém-se o desenvolvimento da anomalia da gravidade sobre o geóide em harmónicas esféricas

$$\Delta g=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)T_n(\theta,\lambda)$$

16

Campo Gravítico da Terra

5.8 Fórmula de Stokes

- Stokes formulou em 1849, pela primeira vez de forma rigorosa, o problema da determinação da ondulação do geóide;
- Resolvendo a equação diferencial de fronteira definida sobre o geóide

$$-\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2}{R}T=\Delta g_P$$

obteve a solução
$$T=\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g S(\psi)d\sigma$$

- Onde S(ψ) é a chamada função de Stokes definida por

$$S(\psi)=\frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos(\psi)-3\cos(\psi)\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

Campo Gravítico da Terra

5.8 Fórmula de Stokes

- Aplicando a Fómuçla de Bruns N=T/G, onde G é o valor da gravidade sobre o elipsóide (γ_Q), obtém-se a chamada *Fórmula* ou *Integral de Stokes*

$$N=\frac{R}{4\pi G}\iint_\sigma \Delta g S(\psi)d\sigma$$

- Esta é *a fórmula mais importante da geodesia física*, pois permite determinar directamente a *ondulação do geóide* a partir das *anomalias da gravidade* definidas sobre o geóide;
- Esta fórmula não é de fácil aplicação, já que a superfície terrestre não coincide com o geóide, e as anomalias da gravidade observadas não são definidos sobre o geóide;
- Isto implica que os *valores de gravidade observados* à superfície tenham de ser *reduzidos ao nível geóide*.

Campo Gravítico da Terra

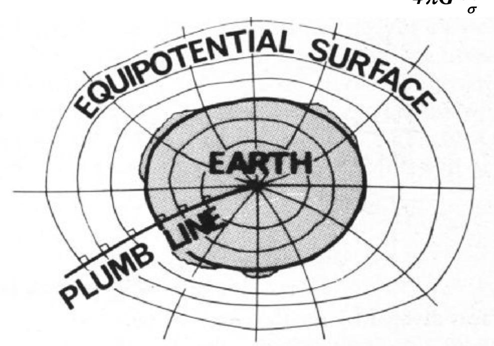
5.8 Fórmula de Stokes

- Porque a solução de Stokes resulta da condição de $\Delta T = 0$, as anomalias de gravidade da Fórmula Integral de Stokes são harmónicas e devem corresponder a valores de fronteira;
- Isto significa que a determinação da ondulação do Geóide (N), por esta via, corresponde a uma fronteira, onde não existem massas no seu exterior;
- Como o Geóide, por convenção, é uma superfície equipotencial que está contida parcialmente dentro das massas atraentes do campo gravítico, o problema é teoricamente impossível;
- Para resolvê-lo tem de se remover as massas em excesso, convertendo essa superfície equipotencial numa outra superfície que corresponda a uma fronteira (separa o espaço interior do espaço exterior às massas)

Campo Gravítico da Terra

5.8 Fórmula de Stokes

$$N = \frac{R}{4\pi G}\iint_{\sigma} \Delta g S(\psi)\, d\sigma$$



- *<u>As anomalias da gravidade</u>*, porque são funções harmónicas, tem de corresponder a valores de fronteira

Campo Gravítico da Terra

5.9 Fórmulas de Vening Meinesz

- A *fórmula integral de Stokes* permite o cálculo da ondulação do geóide a partir das anomalias da gravidade*;*
- Fórmulas semelhantes para a determinação e cálculo das componentes do desvio da vertical (ξ, η) foram desenvolvidas por Vening Meinsz (1928);

$$\xi = \frac{1}{4\pi G}\iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos\alpha d\sigma$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi G}\iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \operatorname{sen}\alpha d\sigma$$

- Estas fórmula implicam, de igual forma, que os *valores de gravidade observados* à superfície estejam *reduzidos ao geóide*.
- Elas constituem uma alternativa às observações astronómicas.