Campo Gravítico da Terra

3.4 Potencial Gravítico

- Como já vimos anteriormente o vector do campo gravítico, g, pode ser representado, de forma única e completa, por um campo escalar, o *potencial gravítico W*;
- Conhecido o potencial W na zona de interesse, podem-se determinar todos os outros parâmetros que caracterizam o campo gravítico;
- Diz-se que a função de potencial gravítico contém em si toda a estrutura do campo gravítico;
- Por essa razão, o estudo do campo gravítico da Terra passa pelo conhecimento e determinação dessa função, W;

Campo Gravítico da Terra

3.4 Potencial Gravítico

- Tomemos a expressão do potencial

$$W(x,y,z) = G\iiint_T \frac{1}{l}\rho(Q)dv + \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right)$$

- Como o vector gravidade é o gradiente do potencial W, então

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -G\iiint_T \rho\frac{x-\xi}{l^3}dv + \omega^2 x$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -G\iiint_T \rho\frac{y-\eta}{l^3}dv + \omega^2 y$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -G\iiint_T \rho\frac{z-\zeta}{l^3}dv$$

de onde se pode tirar a magnitude e a direcção do vector g

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

$$(\Phi, \Lambda) = \left(arctg\left(\frac{g_z}{g}\right), arctg\left(\frac{g_y}{g_x}\right)\right)$$

Campo Gravítico da Terra

3.4 Potencial Gravítico

- Estas relações anteriores permitem, **em teoria**, fazer determinações nos dois sentidos:
  - A) Sabendo a função de potencial gravítico W, determinar, à superfície da Terra ou no seu exterior, os valores da gravidade (g), e a direcção da vertical de lugar (Φ, Λ);
  - B) Medindo, à superfície da Terra, os valores da gravidade (por gravimetria), e as coordenadas astronómicas (por observação astro-geodésica) determinar a função de potencial gravítico da Terra, W.
- Contudo esse tipo de abordagem é o mais difícil e complicado, por se tratar da *formulação não-linear do problema*.

Campo Gravítico da Terra

3.5 Gradiente do potencial

- Que direcção tomará o gradiente do potencial?
- Por diferenciação do potencial obtém-se $dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$

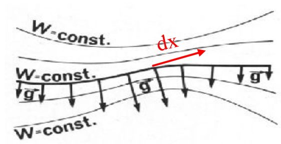
  podendo-se escrever na forma $dW = \nabla W \cdot d\vec{X} = \vec{g} \cdot d\vec{X}$
- Se $d\vec{X}$ for um vector definido ao longo de uma superfície equipotencial (tangente), onde $dW = 0$ obtemos:

$$\vec{g}.d\vec{X} = 0 \qquad \text{ou seja} \qquad \vec{g} \perp d\vec{X}$$

Campo Gravítico da Terra

3.5 Gradiente do potencial

- O vector gravidade num ponto é normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto;



- Como as superfícies de nível são "horizontais" em todo o lado, elas possuem um forte significado físico, e possuem a mesma importância geodésica da linha de prumo, são normais a essa linha (vertical do lugar);

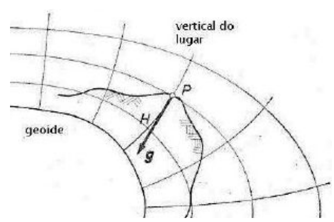
5

Campo Gravítico da Terra

3.5 Gradiente do potencial

- *Medindo-se* o valor da *gravidade num ponto*, juntamente com as *coordenadas astronómicas locais*, podemos definir as *componentes do vector gravidade*, normal à superfície equipotencial,

$$g_x = -g \cos\Phi \cos\Lambda$$
$$g_y = -g \cos\Phi \sin\Lambda$$
$$g_z = -g \sin\Phi$$



- Onde, como já vimos, $g_x = \dfrac{\partial W}{\partial x};\ g_y = \dfrac{\partial W}{\partial y};\ g_z = \dfrac{\partial W}{\partial z}$

6

Campo Gravítico da Terra

3.5 Gradiente do potencial

- *Calculando-se* o valor da *aceleração centrífuga (g_c)*, e removendo-a do valor da gravidade medida com o gravímetro, podemos definir as *componentes do vector da aceleração gravitacional (g_g=g-g_c)*,

$$\bar{g}_x = -g_g \cos\Phi \cos\Lambda$$
$$\bar{g}_y = -g_g \cos\Phi \sin\Lambda$$
$$\bar{g}_z = -g_g \sin\Phi$$

- Onde, resulta o gradiente, $\bar{g}_x = \dfrac{\partial V}{\partial x};\ \bar{g}_y = \dfrac{\partial V}{\partial y};\ \bar{g}_z = \dfrac{\partial V}{\partial z}$

Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- De entre as superfícies equipotenciais, W=const., existe uma superfície em particular, ***o geóide***, que corresponde ao valor de potencial determinado W_0=62 636 856.0 m^2/s^2;
- A determinação desta superfície é a razão mais importante pelo qual a Geodesia se interessa pelo estudo do campo gravítico;
- É uma superfície muito próxima da superfície média do mar, a diferença pode atingir pouco mais de 1 metro, a qual se deve à variação da densidades da massa oceânica;
- Foi ***Listing*** (1872) que pela 1ª vez introduziu o termo "geoid" para definir esta superfície particular, que era designada desde Gauss por "superfície matemática da Terra".

Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- **1828**: C.F. Gauss descreve pela primeira vez a "mathematical figure of the Earth"
- **1849**: G.G. Stokes deriva a fórmula de cálculo da "surface of the Earth's original fluidity" a partir de valores da gravidade observados, a qual se tornou vulgarmente conhecida por “Integral de Stokes"
- **1873**: J.F. Listing introduz pela 1ª vez o termo "geoid" para descrever esta superfície matemática
- **1880**: F.R. Helmert apresenta o primeiro tratado de “Geodesia Física", incluindo o problema de determinação da forma do geóide.

Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

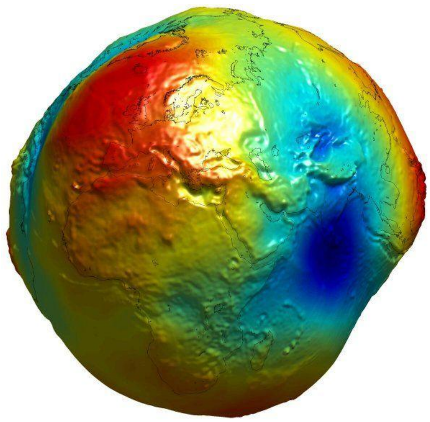
- **Gauss**, C.F. (1828). Bestimmung des Breitenunterscchiedes zwischen den Sternwarten von Gottingen und Altona, Gottingen.
- **Stokes**, G.G. (1849). On the variation of gravity at the surface of the Earth, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, V. 8, p. 672.
- **Listing**, J.B. (1873) Uber unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grosse der Erde, Nachr. d. Kgl., Gesellsch. d. Wiss. und der Georg-August-Univ., 33-98, Gottingen.
- **Helmert**, F.R. (1880). Die mathematischen und physicalischen Theorien der hoheren Geodasie, Teubner, Leipzip, Frankfurt.
- **Heiskanen**, W.A. and H. **Moritz** (1967). Physical Geodesy, W.H. Freeman, San Francisco, 364 pp.

Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- <u>Zona mais elevada</u>
  Oceano Atlântico
  70 m acima do elipsóide

- <u>Zona mais baixa</u>
  Oceano Índico
  100 m abaixo do elipsóide



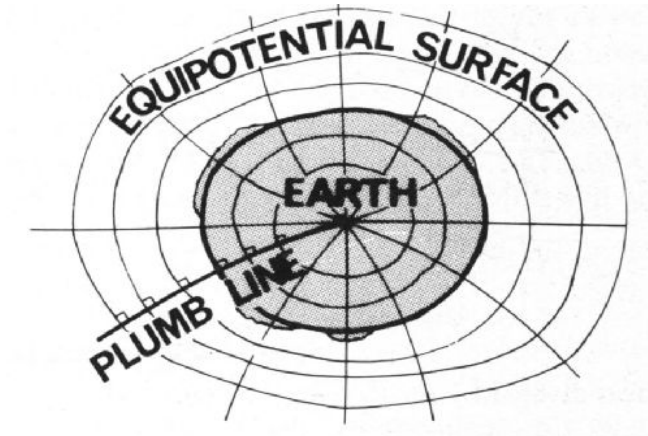
Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- As superfícies equipotenciais W(x,y,z) = const. são representadas por equações de alguma complexidade matemática;
- Porque W é uma função analítica no exterior da Terra, as superfícies completamente exteriores são superfícies analíticas, embora não possuam uma expressão analítica simples;
- O mesmo já não acontece com as superfícies que se situam, total ou parcialmente, no interior da Terra, como é o caso do geóide, apesar de serem contínuas e suaves;
- A razão é a desconhecida função densidade das massas $\rho(r)$;
- A determinação do geóide é então, um problema de difícil solução, pelo facto de ser uma superfície ***não-analítica***.

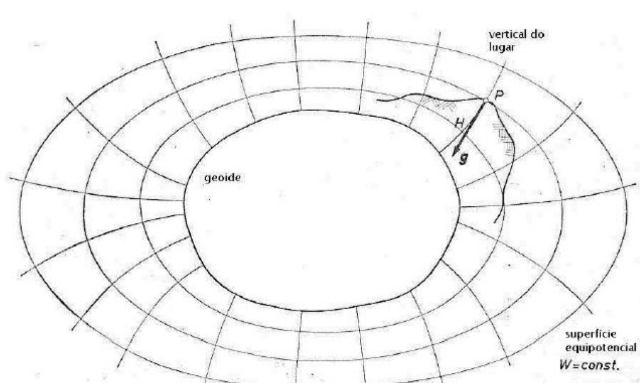
Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide



Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide



Campo Gravítico da Terra

3.7 Altitude ortométrica

- Define-se altitude ortométrica, como a altitude H de um ponto, medida ao longo da vertical de lugar (linha encurvada), a partir da superfície do geóide (nível médio do mar);
- Se tomarmos o vector $d\vec{X}$ definido ao longo da linha de prumo, na direcção de crescimento das altitudes, então:

$$\left| d\vec{X} \right| = dH$$

- Assumindo o seu sentido oposto ao sentido de g, que aponta para o centro da Terra, temos que:

$$\vec{g} \cdot d\vec{X} = g \cdot dH \cos(\vec{g}, d\vec{X}) = g \cdot dH \cos 180^{\circ} = -g \cdot dH$$

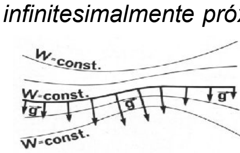
15

Campo Gravítico da Terra

3.7 Altitude ortométrica

- Como $\vec{g} \cdot d\vec{X} = dW$ logo $dW = -g \cdot dH$
- Esta simples equação mostra a relação que existe entre a altitude ortométrica e o potencial W, e será essencial na teoria de determinação das altitudes (ex: obs. grav. no nivelamento);
- Mostra claramente a – ***inter-relação entre o conceito geométrico (H) e o conceito físico (W)*** que caracteriza a geodesia da forma da Terra;
- Resulta também numa definição de g: *a razão entre a diferença de potencial de duas superfícies de nível infinitesimalmente próximas e a distância entre elas*

$$g = -\frac{dW}{dH}$$



16

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- A equação fundamental do potencial gravítico W, é uma equação diferencial às derivadas parciais;
- A solução desta equação é a função que caracteriza o potencial gravítico no exterior da Terra e sobre a sua fronteira;
- Com a qual se determinam as superfícies equipotenciais, nomeadamente, a superfície do geóide;
- A determinação da sua solução passa pela resolução de um problema matemático, designado *Problema de Fronteira* do campo gravítico terrestre.

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- Usando o Teorema de Gauss, que nos diz: "*o fluxo de um campo Newtoniano através de uma superfície fechada só depende das massas interiores (M_i) a essa superfície, e o seu valor é -4πGM_i (-4$\pi G\rho\upsilon_A$)*", chegamos à equação

$$div\vec{g} = -4\pi G\rho$$

como

$$div\vec{g} = \frac{\partial\vec{g}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{g}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{g}}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$$

Obtém-se a chamada equação de Poisson

$$\Delta V = -4\pi G\rho$$

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- Sendo ρ(r) = 0 no exterior da Terra, a equação de Poisson resulta na chamada equação de Laplace

$$\Delta V = 0$$

- Isto significa que o potencial gravitacional é uma função harmónica no exterior da Terra;
- Sabendo que $W = V + \Phi$ temos $\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi$

onde finalmente: $\Delta W = 2\omega^2$ *, no exterior da Terra*

$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$ *, no interior da Terra*

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- O problema da determinação do campo gravítico da terra pode ser dividido em dois: a determinação do campo gravitacional e a determinação do campo centrífugo

$$\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi$$

- Como o potencial centrífugo é uma simples função de posição, em que a velocidade angular é constante e conhecida com grande precisão, o problema resume-se à determinação do potencial gravitacional no espaço exterior, ou seja, à resolução da ***Equação de Laplace***:

$$\Delta V = 0$$