Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

a) As ***observações têm precisões diferentes*** e isso obriga a que as equações das observação de maior precisão devam ter maior peso, por forma a resultar uma estimativa mais precisa e estatisticamente consistente;

b) Por outro lado, o ***sistema de equações é heterogéneo***, são utilizadas observações de diferentes unidades de medida;

c) Estas duas razões obrigam a multiplicar o sistema por uma ***matriz de pesos***, de forma a homogeneizar o sistema de equações e a pesar as equações de acordo com um critério adequado de atribuição de pesos.

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

d) Definindo a atribuição de pesos através de uma ***constante de proporcionalidade*** (σ_0^2 - arbitrária) entre o peso e a variância da respectiva observação:

$$p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \cdots = p_n \cdot \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

- resulta a definição de peso: $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$

e) Sendo a constante de proporcionalidade (σ_0^2) adimensional (sem unidades), a raiz quadrada do peso de uma observação tem como unidade o inverso da unidade da observação;

f) Logo, se o sistema for multiplicado pela raiz quadrada do peso das observações, as equações resultam todas adimensionais (homogéneas) e com a mesma precisão σ_0.

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

g) Na prática, como não se trabalha directamente sobre o sistema de equações lineares mas sim com o sistema de equações normais, não se multiplica pela raiz quadrada dos pesos, mas pelo próprio peso $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$

- Sistema Linear Pesado: $\sqrt{P} \cdot A \cdot \hat{\delta} = -\sqrt{P} \cdot W$

- Sistema Normal Pesado:

$$\left(\sqrt{P} \cdot A\right)^T \cdot \sqrt{P} \cdot A \cdot \hat{\delta} = -\left(\sqrt{P} \cdot A\right)^T \cdot \sqrt{P} \cdot W$$

$$\Leftrightarrow A^T \cdot P \cdot A \cdot \hat{\delta} = -A^T \cdot P \cdot W$$

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

h) O problema que se coloca agora é: ***que pesos atribuir às direcções azimutais, aos comprimentos e aos azimutes observados***?

i) Se soubermos *a priori*, estimar as variâncias (σ_i^2) para cada tipo de observação e definir a constante de proporcionalidade (σ_0^2), teremos o problema resolvido pela relação:

$$p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \cdots = p_n \cdot \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

j) Para os comprimentos usa-se a respectiva ***fórmula de variâncias*** e para os azimutes o ***e.m.q. das observações***. Enquanto que, para as direcções existem os métodos de "***ajustamento livre***" e a "***Formula de Ferrero***";

Ajustamento de Redes

5.7.1 Fórmula de Ferrero

a) A fórmula de Ferrero dá-nos uma estimativa da precisão das direcções azimutais com base no erro de fecho de um triângulo geodésico;

b) Seja o ***excesso esférico*** de um triângulo geodésico, correspondente à diferença da soma dos ângulos para 180º, dado por

$$\varepsilon_{rad} = \frac{Área - do - triângulo - geodésico - projectado - no - plano}{\rho_m \cdot N_m}$$

c) S=A+B+C, a soma dos ângulos internos medidos, cujo valor verdadeiro é V=180º+ε. A respectiva diferença corresponde ao erro verdadeiro de S

$$\Delta = S - V = A + B + C - (180^o + \varepsilon)$$

Ajustamento de Redes

5.7.1 Fórmula de Ferrero

d) Da estatística temos, por definição, a variância de uma dada grandeza é definida por

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i^2}{n} = \frac{E^T E}{n}$$

onde E=V-O_i é o erro verdadeiro de cada valor da amostra. Tomando n=1, a variância é dada pelo quadrado do erro $\sigma^2 = E^2$

e) Sabendo que a soma dos ângulos de um triângulo é

$$S = (d_2 - d_1) + (d_4 - d_3) + (d_6 - d_5)$$

e admitindo que as direcções foram observadas com a mesma precisão, pela lei geral de propagação dos erros vem:

$$\sigma_S^2 = 6\sigma_{dir}^2 \Leftrightarrow \sigma_{dir}^2 = \frac{\sigma_S^2}{6} = \frac{\Delta^2}{6}$$

Ajustamento de Redes

5.7.1 Fórmula de Ferrero

f) A expressão anterior dá a variância de uma direcção azimutal observada, calculada a partir do fecho de um único triângulo (um grau de liberdade);

g) Tendo ***n*** triângulos observados pode-se obter uma melhor estimativa para esta variância

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(f_j \cdot \sigma_j^2\right)}{\sum_{j=1}^{N} f_j}$$

h) Atendendo a que f_j=1 e $\sigma^2_S=\Delta.\Delta$, obtém-se a Fórmula de Ferrero

$$\hat{\sigma}^2_{dir} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \Delta^2}{6N}$$

Ajustamento de Redes

5.7.2 Ajustamento Livre

a) O ajustamento livre consiste num ajustamento por mínimos quadrados onde só entram direcções azimutais, servindo como método de determinação de uma estimativa de precisão das direcções observadas;

b) Garantindo-se que as direcções são observações independentes e de igual precisão (pelo método de observação), então nesse ajustamento a matriz peso é a identidade (P=I) e a variância de unidade de peso à posterior corresponderá à variância das observações de direcção

$$\sigma^2_{dir} = \hat{\sigma}^2_0 = \frac{v^T \cdot v}{n-q} = \frac{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}{n-q}$$

Ajustamento de Redes

5.7.2 Ajustamento Livre

c) O ajustamento livre só com direcções será um problema indeterminado se não se definirem os 4 graus de liberdade da rede - 2 translações, 1 escala e 1 orientação;

d) Este problema é resolvido de duas formas:
1- fixar 1 ponto, 1 comprimento e 1 azimute;
2- fixar 2 pontos;

e) Qualquer das formas ***não impõem constrangimentos*** às observações de direcção e, portanto, não condicionam a variância de referência à posteriori;

f) As duas formas ***são equivalentes*** porque os resíduos das direcções não são alterados e os resíduos do comprimento e azimute no 1º caso resultam nulos;

Ajustamento de Redes

5.7.3 Exemplos numéricos

a) A soma do quadrado dos erros de fecho dos 109 triângulos da rede geodésica nacional de 1ª ordem é 44,6483" (Cad. Téc. IGC, nº. 21); aplicando a Fórmula de Ferrero obtém-se:

$$\sigma^2_{dir} = \frac{44,6483('')^2}{6 * 109} = 0,0683('')^2 \Rightarrow \sigma_{dir} = 0,26''$$

b) O valor da precisão de uma direcção da rede de 1ª ordem dada pela compensação livre é de σ_{dir}=*0,64"*

c) O método do ajustamento livre é assim mais realista.

d) Caso sejam observados diferentes blocos com diferentes métodos e/ou instrumentos, devem-se estimar precisões (diferentes pesos) para cada um desses blocos.

Ajustamento de Redes

5.7.4 Pesos dos comprimentos

a) A fórmula da variância de comprimentos por métodos electromagnéticos é dada por

$$\sigma^2_{comp} = p^2 + q^2 D^2$$

onde os parâmetros ***p*** e ***q*** dependem de cada instrumento;

b) Exemplos dos aparelhos utilizados na rede geodésica nacional:

- Ranger Master III → p=0,005 m e q=1 ppm (10^{-6})
- Tulerómetro MRA2 → p=0,008 m e q=3 ppm ($3x10^{-6}$)

c) O peso de um comprimento, de acordo com o critério de pesos, será dado por

$$p_{comp} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{comp}}$$

Ajustamento de Redes

5.7.5 Pesos de observação de Azimute

a) Uma primeira abordagem é considerar um azimute como uma observação de direcção e atribuir-lhe igual peso;

b) A observação de azimutes astronómicos segue um processo estatístico de estimação (*m.m.q.*) do qual resulta uma estimativa de precisão a posteriori, esse valor deve ser utilizado para a definição do peso a atribuir;

c) A observação de azimutes astronómicos está dividida em dois método de precisão, os métodos de 1ª ordem (0.2 a 0.4”) e os métodos de 2ª ordem (0.5 a 1.5”);

d) Contudo há a considerar a imprecisão da correcção da Equação de Laplace, proveniente da imprecisão da longitude astronómica

$$\alpha = A - (\Lambda - \lambda) \cdot sen\varphi$$

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangido

a) Após se determinarem numérica e correctamente os pesos de todas as observações, procede-se ao ajustamento final, designado "constrangido", por se tratar de um constrangimento entre observações e aos *g.l.* da rede;

b) Os diferentes comprimentos e azimutes introduzidos vão "constrangir" as direcções (na forma, escala e orientação da rede), jogando todas as observações em "contrapeso" e condicionando a estatística e solução do ajustamento;

c) Enquanto que o ajustamento livre é realizado apenas para estimar a precisão das direcções, neste ajustamento o objectivo é ajustar a rede e obter as coordenadas ajustadas juntamente com as suas precisões;

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangido

d) A variância de referência *a priori* foi tomada como arbitrária e com ela se definiu a relação de pesos das observações. No final do ajustamento obtêm-se a sua estimativa *a posteriori* que reflecte a coerência das observações e da respectiva relação de pesos;

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\nu^T P_l \nu}{n-q}$$

e) Da estatística sabe-se que a relação $\frac{\nu^T P_l \nu}{\sigma_0^2} = \frac{(n-q)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$

é uma variável Qui-quadrado de ***n-q*** graus de liberdade, caso as observações e respectivos resíduos tenham uma distribuição normal;

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangida

f) Esta condição possibilita a realização de um teste de hipótese por forma a validar os pressupostos do modelo e, consequentemente, aceitar ou rejeitar os resultados do ajustamento;

g) Testa-se a conformidade entre os valores *a priori* e *a posteriori* da variância de referência, se o resultado for positivo então os dois valores de variância são estatisticamente iguais;

h) Teste unilateral

- Hipótese H_0 (nula): $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ vs. Hipótese H_1 (alternativa): $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$

- Rejeita-se H_0, ao nível de confiança 1-α, se o valor da variável for superior ao valor tabelado

$$\frac{(n-q)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha,n-q}$$

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangida

i) Se o teste rejeitar a igualdade dos valores de variância, as hipóteses em que assenta o modelo matemático estão erradas e, consequentemente, deve-se rever o processo;

j) O erro pode provir tanto do modelo funcional (dados), como do modelo estocástico (pesos);

k) Relativamente ao modelo funcional, há que rever os dados, coordenadas e observações, nomeadamente se foram feitas as devidas correcções;

l) Relativamente ao modelo estocástico há que rever as precisões das observações e respectivos pesos;

m) Este teste pode servir também para verificar se os dados estão ou não viciados (manipulados).

Ajustamento de Redes

5.9 Precisão dos resultados do ajustamento

a) Após se ter testado e aceite o modelo matemático de ajustamento da rede geodésica, pode-se analisar as componentes *a posteriori* do modelo estocástico – as precisões de todos os parâmetros, coordenadas e observações;

b) Do modelo extraem-se as matrizes de variância e covariância estimadas das coordenadas dos pontos e das observações efectuadas, com as quais se obtêm elipses e intervalos de erro e de confiança;

c) Dessas covariâncias também se podem deduzir covariâncias de observações não realizadas, ou seja, de observações deduzidas (comprimentos, direcções azimutais e azimutes);

Ajustamento de Redes

5.9.1 Precisão das coordenadas

a) A base para todo este cálculo é a matriz de variância e covariância *a posteriori* dos parâmetros, que resulta da matriz normal ou de configuração de 2ª ordem:

$$\hat{C}_{\hat{x}_t} = \hat{C}_{\hat{\delta}_t} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \left(A^T P_l A\right)^{-1}$$

b) Desta matriz podem-se extrair as precisões das coordenadas compensadas de todos os vértices da rede;

c) Para um ponto na posição (i) do vector de coordenadas, a respectiva sub-matriz de covariâncias é

$$\hat{C}_{\hat{x}_t}\begin{pmatrix} 2i-1,2i-1 & 2i-1,2i \\ 2i,2i-1 & 2i,2i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{M_i}^2 & \sigma_{M_i P_i} \\ \sigma_{M_i P_i} & \sigma_{P_i}^2 \end{bmatrix}$$

Ajustamento de Redes

5.9.2 Precisão das observações medidas

a) Pela aplicação da Lei Propagação das Variâncias e Covariâncias (LPVC) ao sistema de equações lineares, na forma

$$\hat{l} = \bar{l} - \nu = A \cdot \hat{\delta} + f(x_0)$$

obtém-se a matriz das variâncias-covariâncias das observações compensadas:

$$\hat{C}_{\hat{l}} = A\hat{C}_{\hat{\delta}}A^T = \hat{\sigma}_0^2 \cdot AN^{-1}A^T = \hat{\sigma}_0^2 \cdot A\left(A^T P_l A\right)^{-1} A^T$$

da qual se pode extrair as respectivas precisões.

Ajustamento de Redes

5.9.3 Precisão das observações deduzidas

a) A precisão de uma qualquer observação deduzida *a posteriori* resulta da sua expressão algébrica em função das coordenadas dos vértices;

b) Tomemos, como exemplo, a distâncias entre dois vértices (i,j) da rede, cuja expressão genérica é dada por

$$\hat{S}_{i,j} = \sqrt{\left(\hat{M}_j - \hat{M}_i\right)^2 + \left(\hat{P}_j - \hat{P}_i\right)^2}$$

c) Diferenciando a expressão de distância

$$d\hat{S}_{ij} = -sen\hat{R}_{ij}d\hat{M}_i - cos\,\hat{R}_{ij}d\hat{P}_i + sen\hat{R}_{ij}d\hat{M}_j + cos\,\hat{R}_{ij}d\hat{P}_j$$

e aplicando a LPVC obtém-se a variância *a posteriori* da distância $\hat{\sigma}^2_{\hat{S}_{ij}} = J \cdot \hat{C}_{\hat{x}_{ij}} \cdot J^T$ com $J = \left[-sen\hat{R}_{ij} \quad -cos\,\hat{R}_{ij} \quad sen\hat{R}_{ij} \quad cos\,\hat{R}_{ij}\right]$

Ajustamento de Redes

5.9.3 Precisão das Observações deduzidas

d) Este tipo de cálculo pode ser aplicado a qualquer outro tipo de observação de relação de posição (azimute ou direcção);

e) Esta determinação não obriga a um cálculo completo da inversa da matriz normal (N), basta calcular as colunas da sub-matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas dos respectivos pontos;

f) Este tipo de atalho é realizado por algoritmos mais rápidos, que são muito vantajosos em redes de grande dimensão;

g) Este aspecto é muito importante nas redes globais ou mesmo regionais, onde os sistemas podem alcançar os milhares de linhas e colunas, ocupando grandes quantidades de memória;

h) Normalmente, como a matriz normal é simétrica, é apenas armazenada a sua matriz triangular inferior.

Ajustamento de Redes

5.9.4 Intervalos de confiança de observações ajustadas

a) A determinação das variâncias das observações ajustadas tem como objectivo a determinação do intervalo de confiança dessa estimativa;

b) Sendo ***l*** uma observação aleatória de distribuição normal, cujas estimativas da esperança matemática $\mu\{l\}$ e variância teórica σ_l^2 são dadas pela sua média e variância *a posteriori*, a variável

$$\frac{\bar{\boldsymbol{l}} - \mu\{\boldsymbol{l}\}}{\hat{\sigma}_{\bar{l}}}$$

, na ausência de erros sistemáticos, tem uma distribuição ***t-Student*** com n-1 graus de liberdade;

Ajustamento de Redes

5.9.4 Intervalos de confiança de observações ajustadas

c) O intervalo de confiança [k_1,k_2] da média de uma observação directa, por exemplo para uma probabilidade a 95% de confiança, é dado pela relação

$$P\left(\frac{\bar{l}-k_1}{\hat{\sigma}_{\bar{l}}} \geq t \geq \frac{\bar{l}+k_2}{\hat{\sigma}_{\bar{l}}}\right) = 1-\alpha = 0.95$$

cujos limites do intervalo são: $k_1 = \bar{l} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{l}}\ ;\ k_2 = \bar{l} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{l}}$

d) Para as **observações ajustadas** (ou calculadas a partir das coordenadas ajustadas), os limites são determinados por uma variável ***t-Student*** com ***n-q*** graus de liberdade em vez de n-1: $k_1 = \hat{l} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-q} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{l}}\ ;\ k_2 = \hat{l} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-q} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{l}}$

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

a) À semelhança das observações, também se pode definir ***domínios de erro e de confiança das posições dos vértices*** da rede compensadas;

b) Usando a informação de variâncias-covariâncias das coordenadas dos vértices, determinam-se as ***elipses de erro*** (região de incerteza das coordenadas) e ***elipses de confiança*** (região provável de localização do valor verdadeiro para um dado nível confiança);

c) As ***elipses deduzidas directamente*** dos valores da matriz de variância-covariância das coordenadas são designadas de ***absolutas***, por reportarem a uma zona de erro em relação à origem do sistema de coordenadas;

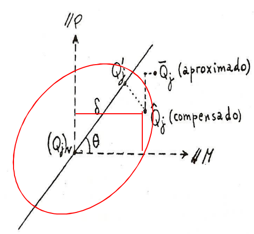
Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

d) Seja $\hat{M}_j = \overline{M}_j + \Delta M_j;\ \ \hat{P}_j = \overline{P}_j + \Delta P_j$ e $\hat{M}_j = (M_j)_v + (\Delta M_j)_v;\ \ \hat{P}_j = (P_j)_v + (\Delta P_j)_v$

donde resulta $(\Delta M_j)_v = \Delta M_j + C_M;\ \ (\Delta P_j)_v = \Delta P_j + C_P$

e) Se considerarmos que a estimativa da posição $\hat{Q}_j$ é uma v.a. cuja infinidade de soluções oscilam em torno da posição exacta $(Q_j)_v$, as variações das coordenadas (ΔM,ΔP) têm uma distribuição normal não enviesada



$$\mu\left\{\left(\Delta M_j\right)_v\right\} = \mu\left\{\left(\Delta P_j\right)_v\right\} = 0$$

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

d) Projectando a posição $\hat{Q}_j$ sobre uma recta de ângulo θ com origem em $(Q_j)_v$, obtemos a posição Q'_j à distância da origem de

$$\delta = \cos\theta\left(\Delta M_j\right)_v + sen\,\theta\left(\Delta P_j\right)_v$$

cuja variância, por aplicação da LPVC, será

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \cos^2\theta\cdot\hat{\sigma}^2_{\Delta M_j} + 2\cos\theta\cdot sen\,\theta\,\hat{\sigma}_{\Delta M_j,\Delta P_j} + sen^2\theta\cdot\hat{\sigma}^2_{\Delta P_j}$$

e) Derivando a variância e igualando a zero, determinamos o valor de θ_1 para o seu máximo

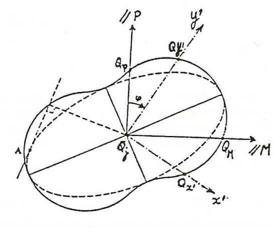
$$\theta_1 = \frac{1}{2}\cdot arctg\left[\frac{2\hat{\sigma}_{\Delta M_j,\Delta P_j}}{\hat{\sigma}^2_{\Delta M_j} - \hat{\sigma}^2_{\Delta P_j}}\right]$$

verificando-se o seu mínimo na direcção perpendicular $\theta_2 = \theta_1 + 90º$

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

d) A substituição das duas soluções de θ_1 e $\theta_2 = \theta_1 + 90º$ na expressão da variância da distância dá-nos os seus valores máximo e mínimo



$$\hat{\sigma}^2_{dmáx} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2_{M_j} + \sigma^2_{P_j} + \sqrt{\left(\sigma^2_{M_j} - \sigma^2_{P_j}\right)^2 + \left(2\sigma_{M_jP_j}\right)^2}\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2_{d\,min} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2_{M_j} + \sigma^2_{P_j} - \sqrt{\left(\sigma^2_{M_j} - \sigma^2_{P_j}\right)^2 + \left(2\sigma_{M_jP_j}\right)^2}\right\}$$

- quadrados dos ***eixos da elipse de erro*** com orientações θ_1 e θ_2, respectivamente;

e) Se fizermos variar o ângulo θ de 0 a 360º, e com esses valores calcularmos σ_d , este descreve uma figura designada por ***curva-padrão do erro***;

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

f) Este tipo de elipses, apesar de definirem a incerteza da posição relativamente ao sistema de referência, apresentam algumas limitações:

1 – O tamanho das elipses é variável, é zero na origem do referencial e aumenta à medida que se afasta;

2 – As elipses não são invariantes com respeito à mudança (arbitrária) da localização da origem; uma origem central produzirá elipses menores do que outra localizada na periferia;

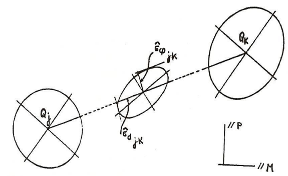
3 – Um par de pontos adjacente pode ter grandes elipses de erro, mas apresentarem um erro relativo muito pequeno;

g) Por estas razões se utiliza também outro tipo de elipses de erro – as ***elipses relativas***.

Ajustamento de Redes

5.9.6 Elipse de erro relativa

a) A elipse de erro relativa define a incerteza estatística da posição de um ponto relativamente a outro;



b) A sua geometria é determinada a partir da relação de posição entre os pontos e as respectivas covariâncias

$$\Delta M_{j,k} = M_k - M_j; \quad \Delta P_{j,k} = P_k - P_j$$

c) Aplicando a LPVC a estas relações, obtemos a respectiva matriz de covariâncias

$$\hat{C}_{j,k} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{\Delta M_{jk}} & \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}\Delta P_{jk}} \\ \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}\Delta P_{jk}} & \hat{\sigma}^2_{\Delta P_{jk}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\Delta M_{jk}} = \hat{\sigma}^2_{M_j} + \hat{\sigma}^2_{M_k} - 2\hat{\sigma}_{M_j M_k}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\Delta P_{jk}} = \hat{\sigma}^2_{P_j} + \hat{\sigma}^2_{P_k} - 2\hat{\sigma}_{P_j P_k}$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}\Delta P_{jk}} = \hat{\sigma}_{M_j P_j} - \hat{\sigma}_{M_j P_k} - \hat{\sigma}_{P_j M_k} + \hat{\sigma}_{M_K P_k}$$

Ajustamento de Redes

5.9.6 Elipse de erro relativa

d) De igual modo, retirando os elementos da matriz de covariância do vector de posição relativa, obtêm-se os quadrados dos semieixos da elipse e a respectiva orientação

$$\hat{\sigma}^2_{max} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2_{\Delta M_{j,k}} + \sigma^2_{\Delta P_{j,k}} + \sqrt{\left(\sigma^2_{\Delta M_{j,k}} - \sigma^2_{\Delta P_{j,k}}\right)^2 + 4\sigma^2_{\Delta M_{j,k}\Delta P_{j,k}}}\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2_{min} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2_{\Delta M_{j,k}} + \sigma^2_{\Delta P_{j,k}} - \sqrt{\left(\sigma^2_{\Delta M_{j,k}} - \sigma^2_{\Delta P_{j,k}}\right)^2 + 4\sigma^2_{\Delta M_{j,k}\Delta P_{j,k}}}\right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot arctg\left[\frac{2\hat{\sigma}_{\Delta M_{j,k}\Delta P_{j,k}}}{\hat{\sigma}^2_{\Delta M_{j,k}} - \hat{\sigma}^2_{\Delta P_{j,k}}}\right]$$