Geóide

1. Determinação do geóide

- O geóide adquiriu na última década uma importância acrescida, pelo aparecimento das técnicas de posicionamento por satélite;
- Hoje é possível realizar nivelamento de alta precisão recorrendo aos sistemas GNSS e a um modelo preciso de geóide;
- Os modelos podem ser globais, regionais ou locais, sendo os modelos globais menos precisos e representados por harmónicas esféricas, como é o caso dos EGM96 e EGM2008

- Em termos clássicos o *Sistema de Referência Vertical* era definido pela rede de nivelamento geodésico (niv. geométrico de precisão), materializada num ponto de referência - *Datum Vertical*
- A sua altitude era definida em relação ao Nível Médio do Mar, dada pela média de uma série de observação maregráfica.

Geóide

1. Determinação do geóide

- O Geóide é a solução de um problema matemático de fronteira – 3º Problema de Fronteira (problema de fronteira da GF)
- Existem vários métodos de determinação do geóide:
  - Método Fórmula Integral de **Stokes** (anomalias da gravidade reduzidas);
  - Método **Astro-geodésico** (desvios da vertical);
  - **Colocação** por Mínimos Quadrados (combinação de dados);
  - **Molodensky** (anomalias da gravidade à superfície);
  - Coeficientes das **Harmónicas Esféricas** (anomalias da gravidade);
  - Abordagem do **Espaço Gravidade** (valores de gravidade e desvios da vertical);
- Abordaremos apenas os dois primeiros

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- A relação entre o potencial gravítico da Terra e o potencial normal do elipsóide de referência é dada por:

$$W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z)$$

- O *campo gravítico anómalo* ou *perturbador* (***T***) é definido pela diferença do campo gravítico terrestre com o *campo gravítico normal* do elipsóide de referência;
- Esta aproximação constitui a *chamada linearização do problema de fronteira da geodesia física;*
- O facto da diferença de potenciais ser uma quantidade pequena, permite aproximações lineares da função potencial T(r,θ,λ).

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- O potencial perturbador T descreve as irregularidades regionais e locais do potencial gravítico W em relação ao potencial U;
- Devido à definição do campo gravítico normal, o potencial perturbador T satisfaz a equação de Laplace no exterior da Terra;

$$T(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A) - \left[\overline{V}(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A)\right] = V(\vec{r}_A) - \overline{V}(\vec{r}_A)$$

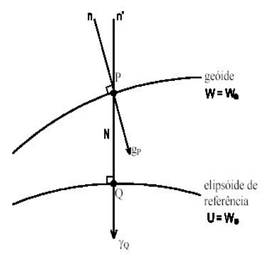
- Como Δ é um operador é linear, desprezando a atmosfera, o potencial perturbador é uma função harmónica em todo o espaço exterior à Terra :

$$\Delta T(\vec{r}_A) = 0$$

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Comparemos a superfície do geóide definida por $W(x, y, z) = W_0$ com a superfície do elipsóide definida por $U(x, y, z) = U_0$
- Assumindo o mesmo valor de potencial $W_0 = U_0$, um ponto P sobre o geóide corresponde ao ponto Q projectado sobre o elipsoide através da sua normal;
- E considerando, respectivamente, o vector gravidade g sobre P e o vector gravidade normal γ sobre Q: o *vector anomalia da gravidade* é definido pela sua diferença:



$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q$$

Geóide

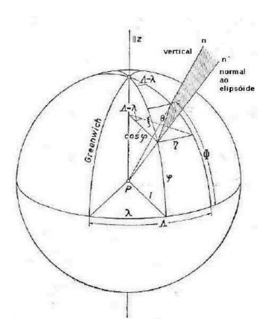
1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Este vector tem uma magnitude, designada por *anomalia da gravidade*

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

- E uma direcção dada pelo desvio da vertical, cujas componentes são dadas por

$$\xi = \Phi - \varphi$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi$$



- A anomalia da gravidade resulta de **observações gravimétricas** e do cálculo de γ pela F.I.G., enquanto que, os desvios da vertical resultam de **observações astronómicas e geodésicas**

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- *Fórmula de Bruns*: $$N = \frac{T}{\gamma}$$
- Esta fórmula relaciona directamente a ondulação do geóide com o valor do potencial perturbador, onde γ, a gravidade normal sobre o elipsóide, é uma mera constante.
- Esta fórmula constitui um resultado importante para a resolução do problema da determinação do geóide (problema de fronteira);
- Ao resolver o problema de fronteira determina-se o potencial perturbado T, e com esta fórmula resulta directamente a ondulação do geóide.

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Desenvolvendo em série de Taylor a função de gravidade normal em torno do ponto Q sobre o elipsóide, tem-se

$$\gamma_P = \gamma_Q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)_Q dn + \cdots$$

- Tomando a sua parte linear e fazendo a diferença com o valor da gravidade g no ponto P

$$g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N = -\frac{\partial T}{\partial h}$$

$$\Delta g_P = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T$$

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- O 3º problema de fronteira é o ***problema geodésico de fronteira***, que na sua essência, é o problema da determinação da superfície do geóide – datum altimétrico;
- *Determinar a função potencial T que seja harmónica no espaço exterior à Terra e que verifique, sobre o geóide, a equação fundamental da geodesia*

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ -\dfrac{\partial T}{\partial h} + \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g_P \end{cases}$$

- A solução, que através da F. de Bruns nos dá a ondulação do geóide, é uma solução da equação de Laplace que verifica a condição de fronteira dada pela E.F.G.F.

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Stokes formulou em 1849, pela primeira vez de forma rigorosa, o problema da determinação da ondulação do geóide;
- Resolvendo a equação diferencial de fronteira definida sobre o geóide

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T = \Delta g_P$$

obteve a solução

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma \Delta g S(\psi) d\sigma$$

- Onde S(ψ) é a chamada função de Stokes e é definida por

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos(\psi) - 3\cos(\psi)\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Aplicando o teorema de Bruns N=T/γ, onde γ é o valor da gravidade sobre o elipsóide (γ_Q), obtém-se a chamada *fórmula* ou *integral de Stokes*

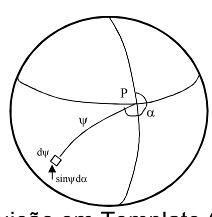
$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

- Esta é *a fórmula mais importante da geodesia física*, pois permite determinar directamente a *ondulação do geóide* a partir das *anomalias da gravidade* definidas sobre o geóide;
- Esta fórmula não é de fácil aplicação, já que a superfície terrestre não coincide com o geóide, e as anomalias da gravidade observadas não são definidos sobre o geóide;
- Isto implica que os *valores de gravidade observados* à superfície tenham de ser *reduzidos ao nível geóide*.

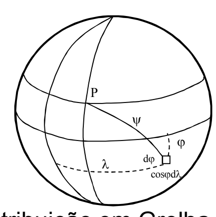
Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- A solução da ondulação do geóide mais comum é a solução dada pela Formula Integral de Stokes;
- Existem duas formas explicitas do integral de Stokes, uma usa *coordenadas polares esféricas* (ψ,α), a outra usa as *coordenadas geodésicas* (λ,φ);



Distribuição em Template (ψ,α)



Distribuição em Grelha (λ,φ)

Geóide

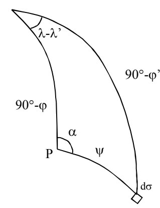
1.2 Solução pelo Integral Stokes

- *<u>Em coordenadas polares esféricas</u> (método de template)*:

$$N_P(\varphi,\lambda)=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta g(\psi,\alpha)S(\psi)\sin\psi d\psi d\alpha$$

- *<u>Em coordenadas geodésicas</u> (método de grelha)*:

$$N_P(\varphi,\lambda)=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Delta g(\varphi',\lambda')S(\psi)\cos\varphi' d\varphi' d\lambda'$$



Com $$S(\psi)=\frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos(\psi)-3\cos(\psi)\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

Onde $$\psi=\cos^{-1}\left(\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda'-\lambda)\right)$$

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Na prática o cálculo da ondulação do geóide pela fórmula de Stokes, resume-se a um <u>duplo somatório do produto da anomalia da gravidade de cada ponto da grelha pelo valor da função de distância de Stokes</u>;
- Para o caso mais comum de dados em grelha, de dimensão nxm e espaçamento $\Delta\varphi$ x $\Delta\lambda$, o valor de N em cada ponto é dado por:

$$N(\varphi_l,\lambda_k)=N_i(\varphi_l,\lambda_k)+N_e(\varphi_l,\lambda_k)$$

Com $$N_i(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{S_0}{\gamma}\Delta g(\varphi_l,\lambda_k)$$ onde S_0 é o raio da zona mais próxima do ponto

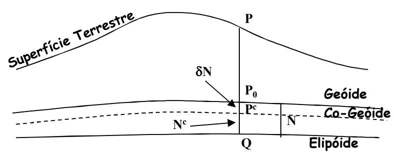
e $$N_e(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{M-1}\Delta g(\varphi_j,\lambda_i)\cos\varphi_j S(\varphi_l,\lambda_k,\varphi_j,\lambda_i)\Delta\varphi\Delta\lambda$$

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Para que o resultado seja válido, as anomalias da gravidade usadas na Fórmula de Stokes devem corresponder a valores reduzidos à superfície do geóide regularizado;
- Logo, o resultado do cálculo da fórmula de Stokes, com as anomalias reduzidas, conduz-nos, não ao geóide, mas a uma superfície designada por co-geóide, N^C;
- O valor final da ondulação do geóide é dado por $N = N^c + \delta N$

  onde δN representa o efeito indirecto dado por $\delta N = \frac{\delta W}{\gamma} = \frac{\pi G \rho_0 H_P^2}{\gamma}$



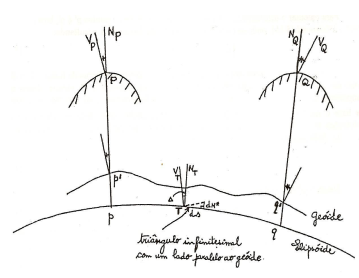
Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

a) Este método de determinação baseia-se na utilização simultânea de observações astronómicas (latitude e longitude) e das respectivas coordenadas geodésicas – observações astro-geodésicas;

b) Sendo os pontos de observação P e Q projectados sobre o elipsóide, a diferença de ondulação do geóide resulta da integração do desvio total da vertical ao longo do arco de elipsóide definido pelas projecções ortogonais p e q;

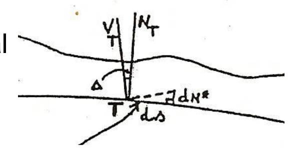
c) Esta determinação parte do pressuposto de que o desvio total Δ varia linearmente entre p e q;



Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

d) Tomemos os desvio total da vertical num ponto genérico ***t*** sobre o arco ***pq***, no qual se define o triângulo infinitesimal de comprimento ***ds***;



$$\Delta = \xi \cdot \cos\alpha_{PQ} + \eta \cdot sen\alpha_{PQ}$$

$$\Delta = (\Phi_T - \varphi_T) \cdot \cos\alpha_{PQ} + (\Lambda_T - \lambda_T) \cdot \cos\varphi_T \cdot sen\alpha_{PQ}$$

e) A variação de ondulação de geóide ***dN**** medida nesse triângulo infinitesimal de vértice t será dada por

$$dN^* = -tg\Delta \cdot ds \approx -\Delta \cdot ds$$

f) Integrando esta expressão diferencial ao longo do arco elipsoidal, resulta a diferença de ondulação do geóide entre P e Q

$$\Delta N_{PQ} = N^*_{q'} - N^*_{p'} = -\int_{pq} \Delta \cdot ds$$

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

g) O cálculo do integral anterior só pode ser feito com o conhecimento da função $\Delta = \Delta(s)$, como ela não é conhecida admite-se que assume uma variação linear e pode ser estimada pela média dos valores $\Delta \approx \frac{\Delta_p + \Delta_q}{2}$

h) Nessa hipótese podemos então escrever $\Delta N_{p'q'} = -\frac{\Delta_{p'} + \Delta_{q'}}{2} \cdot s_{p'q'}$

ou

$$\Delta N_{p'q'} = -\frac{(\xi''_{p'} + \xi''_{q'}) \cdot \cos\alpha_{PQ} + (\eta''_{p'} + \eta''_{q'}) \cdot sen\alpha_{PQ}}{2 \cdot 206265''} \cdot s_{p'q'}$$

onde os valores de desvio da vertical devem ser reduzidos ao geóide, e admitindo-se que esses valores são iguais sobre o elipsóide;

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

i) A correcção de redução dos desvios da vertical ao geóide passa pela seguinte redução das coordenadas astronómicas

$$\Phi_{geoid} = \Phi_{superf} - 0.17'' \cdot H_{km} \cdot sen2\Phi$$
$$\Lambda_{geoid} = \Lambda_{superf}$$

j) A precisão obtida para ΔN* vai depender, principalmente de dois factores:

1 – Da precisão das observações astronómicas;

2 – Da distância entre as estações astronómicas, quanto mais próximas menor o erro introduzido pela aproximação da fórmula de cálculo;

Perfil Este-Oeste: $\sigma = 2 \cdot \sqrt{\frac{s_{(km)}}{1000}}(m)$ Perfil Norte-Sul: $\sigma = 1{,}5 \cdot \sqrt{\frac{s_{(km)}}{1000}}(m)$

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

k) Sendo observados os desvios da vertical em todos os vértices geodésico, o cálculo de ondulação de geóide passa pelo ajustamento das diferenças, à semelhança do que é feito no nivelamento:

$$f(x_o) + A \cdot \delta = l_0 + \nu$$
$$\Delta N_{calc} + correcção = \Delta N_{obs} + \nu_{\Delta N}$$

l) Esta equação de observação de diferenças de ondulação de geóide pode escrever-se na forma

$$dN_j - dN_i = \Delta N_{obs} - \left(\overline{N}_j - \overline{N}_i\right) + \nu_{ij}$$

m) Resultando para o caso de uma rede com ***n*** diferenças observadas em ***q*** estações, o sistema de equações lineares

$$A \cdot d\widehat{N} = -w + \nu \qquad \hat{N} = \overline{N} + d\hat{N}$$

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

- Desvios da vertical sobre modelo gravimétrio do geóide na Bacia do Tejo