Campo Gravítico da Terra

3. Potencial Gravítico

- O campo gravítico é um campo vectorial (grandeza com 3 componentes)
- Por isso, será mais fácil trabalhar com uma grandeza escalar, que assume apenas um valor em cada ponto
- <u>É possível representar um campo vectorial por uma função escalar?</u>

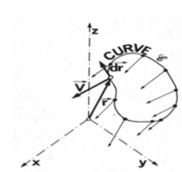
- SIM, pelo menos para alguns campos vectoriais, onde se pode incluir o campo gravítico da Terra

Campo Gravítico da Terra

3.1 Campo irrotacional

- Seja ***<u>C</u>*** uma curva espacial, fechada e arbitrária, no interior de um campo vectorial ***v***
- Se se verificar a equação

$$\oint_C \vec{v}\left(\vec{r}\right) d\vec{r} = 0$$



ao longo da curva ***<u>C</u>***, onde ***<u>dr</u>*** é o vector elementar tangente à curva, então o campo ***<u>v</u>*** diz-se ***<u>irrotacional</u>***

- Se um campo é irrotacional então existe uma função escalar ***<u>K</u>*** tal que

$$\nabla K(\vec{r}) = grad\ K(r) = \left(\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, \frac{\partial K}{\partial z}\right) = \vec{v}(\vec{r})$$

Campo Gravítico da Terra

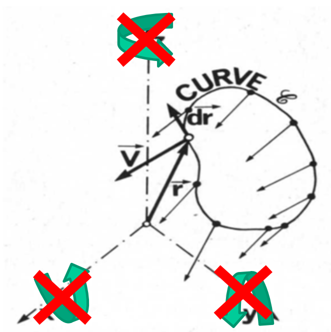
3.1 Campo irrotacional

- Esta função escalar ***K*** é designada a energia potencial da grandeza vectorial ***v***
- Se a condição anterior se verificar, então o campo vectorial ***v*** diz-se ***conservativo***, ou seja, é independente do tempo
- Do ponto de vista físico, ***K*** representa a quantidade de trabalho para vencer a força ***v***
- As suas unidades físicas são g.m^2.s^{-2}

Campo Gravítico da Terra

3.1 Campo irrotacional

- Se o campo rodar em relação ao Sist. Ref., a equação integral não se satisfaz e não existe o escalar ***K*** do campo vectorial ***v***
- ***Daí a importância de se estabelecer um Sistema de Referência rigidamente fixo ao corpo***



Campo Gravítico da Terra

3.2 Potencial gravítico

- Como o campo de acelerações gravitacional (g) difere do campo de forças apenas por um factor de escala, a massa ***m***, o campo gravitacional terrestre pode ser expresso por:

$$\vec{F} = m\vec{g} = \nabla K = m\nabla V$$

- Ou seja, existe um campo escalar V, tal que

$$\vec{g} = \nabla V$$

- Este campo escalar é conhecido por *Potencial Gravitacional*, cuja unidade é $m^2.s^{-2}$
- K e V apresentam a mesma geometria do campo vectorial

Campo Gravítico da Terra

3.2 Potencial gravítico

- A *aceleração gravítica* é expressa pela soma da *aceleração gravitacional*, definida pelo integral triplo, com o termo da *aceleração centrífuga*
- Como o *gradiente é um operador diferencial linear*, o **Potencial Gravítico** será também dado pela soma do potencial gravitacional com o potencial centrífugo

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{f} = \nabla V + \nabla \Phi = \nabla W$$

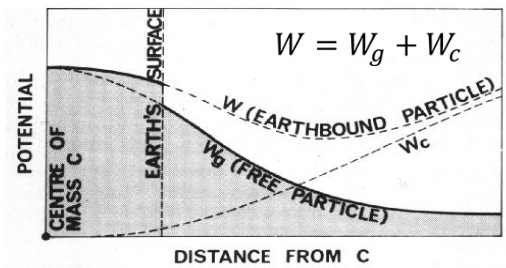
$$W(P) = W(x,y,z) = G\iiint_T \frac{1}{l}\rho(Q)dv + \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) = V(P) + \Phi(P)$$

Campo Gravítico da Terra

3.2 Potencial gravítico

$$W(P) = V(P) + \Phi(P) = G \iiint_T \frac{1}{l} \rho(Q) dv + \frac{1}{2}\omega^2 p^2$$

- Analisando a fórmula, verifica-se que V diminui com a distância às massas atraentes, enquanto que Φ aumenta com o quadrado da distância ao eixo de rotação

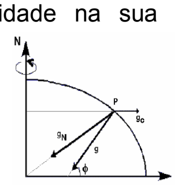


Campo Gravítico da Terra

3.2 Potencial gravítico

- Tomando a expressão da aceleração da gravidade na sua aproximação esférica

$$\vec{g} = \left[\frac{GM_T}{R^2} - \omega^2 R \cos^2 \varphi \right] \vec{e}_r$$



E assumindo que $\vec{g} = \nabla W$

Obtém-se uma expressão idêntica para a aproximação esférica do potencial gravítico

$$W = \frac{GM_T}{R} - \frac{\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi}{2}$$

Uma expressão um pouco mais rigorosa é obtida considerando o factor de achatamento dinâmico J_2

$$W = \frac{GM_T}{R} - \frac{\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi}{2} + \frac{GM_T J_2}{2R}\left(3\sin^2 \varphi - 1\right)$$

Campo Gravítico da Terra

3.2 Potencial gravítico

- O potencial combinado (gravítico) actua somente sobre massas que rodam fixas com a Terra
- Quando um corpo é lançado ao espaço, deixa de rodar com a Terra e o potencial centrífugo Φ deixa de actuar, passando apenas a ser afectado pelo potencial gravitacional V (é apenas atraído sem efeito centrífugo)
- O potencial gravítico W deve representar a estrutura do campo (para um W suavizado temos um campo suavizado, para um W irregular temos um campo irregular)

- Como é que W pode ser usado para descrever as irregularidades de campo?
- Através das superfícies equipotenciais (W=const.) ou através das suas linhas de força (grad W)

Campo Gravítico da Terra

3.3 Superfícies equipotenciais (W=const.)

- ***Propriedades importantes*** das superfícies equipotenciais:
  - a) São superfícies fechadas, concêntricas e nunca se intersectam;
  - b) Cada superfície encontra-se totalmente contida dentro de uma qualquer superfície exterior (de < potencial W);
  - c) São superfícies contínuas, sem hiatos e sem descontinuidades
  - d) Os seus raios de curvatura variam suavemente, convergindo todos para o centro de massa;
  - e) São superfícies convexas (curvatura virada para o exterior);

- Um deslocamento sobre as superfícies equipotenciais não envolve qualquer trabalho (em sentido estático), pois sobre a mesma superfície não há variação de potencial W;

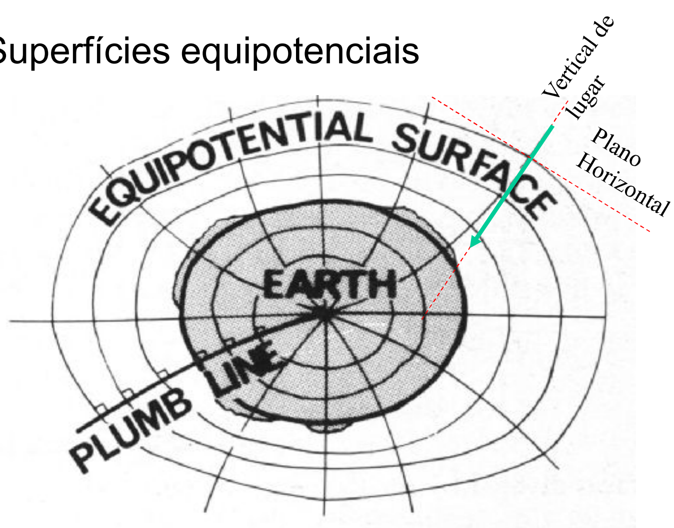
Campo Gravítico da Terra

3.3 Superfícies equipotenciais (W=const.)

- As ***linhas de força*** são perpendiculares às superfícies equipotenciais, elas resultam do gradiente vertical do potencial;
- A direcção das linhas de força define a ***direcção da vertical***, e do mesmo modo, o plano tangente à superfície equipotencial define o ***plano horizontal*** de um ponto;
- Pela razão anterior, as superfícies equipotenciais são também designadas por ***superfícies de nível*** (de igual altitude);
- As linhas de força não são rectas, são linhas curvas e torças que convergem para o CM da Terra (concavidade voltada para o equador);
- O *fio de prumo* dá-nos a tangente às linhas de força e por isso define, pontualmente, a direcção da *vertical de lugar*.

Campo Gravítico da Terra

3.3 Superfícies equipotenciais



Campo Gravítico da Terra

3.3 Superfícies equipotenciais (W=const.)

- Qual é a relação entre as superfícies equipotenciais e a magnitude da gravidade?

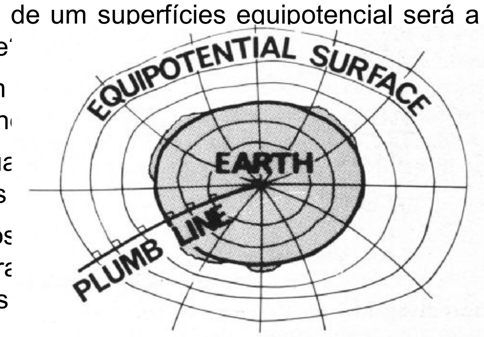
- O espaçamento entre as superfícies está relacionado com a magnitude da gravidade: curvas + próximas $\Rightarrow$ > gravidade, curvas + afastadas $\Rightarrow$ < gravidade;
- g é a diferença dos valores de potencial a dividir pelo seu afastamento

$$g = |\nabla W| \doteq -\frac{\partial W}{\partial h}$$

Campo Gravítico da Terra

3.3 Superfícies equipotenciais (W=const.)

- Ao longo de um superfícies equipotencial será a gravidade (g) constante'
- NÃO, em ... da superfície equipoten
- Numa qua ... , a gravidade nos pólos ... lor;
- Nos pólos ... ais próximas (maior gra ... s estão mais afastadas ... $5.3\times 10^{-3} g_E$



- Uma convergência de 0.53% $H_E = \frac{g_P}{g_E} H_P = 1.0053 H_P$

Campo Gravítico da Terra

3.3 Superfícies equipotenciais (W=const.)

- *Porque é que a Terra tem forma achatada*?
- A superfície de um qualquer líquido homogéneo, em equilíbrio, tende a coincidir com uma superfície equipotencial;
- Como a gravidade é superior nos pólos devido à aceleração de potencial centrífugo, as superfícies resultam achatadas;
- A forma da Terra, devido à sua viscosidade e à sua rotação, foi ao longo do tempo adquirindo esta forma achatada

∴ **Conclusão**: A forma achatada da Terra deve-se ao seu movimento de rotação e à sua não rigidez