Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

a) Designa-se por ***nivelamento*** toda e qualquer técnica de geodesia que determina as altitudes referidas a um sistema de referência (datum altimétrico);

b) Chama-se ***altitude ortométrica*** (H) de um ponto A à distância vertical medida ao longo da linha de força do campo gravítico terrestre, entre o ponto e a superfície do geóide (referência);

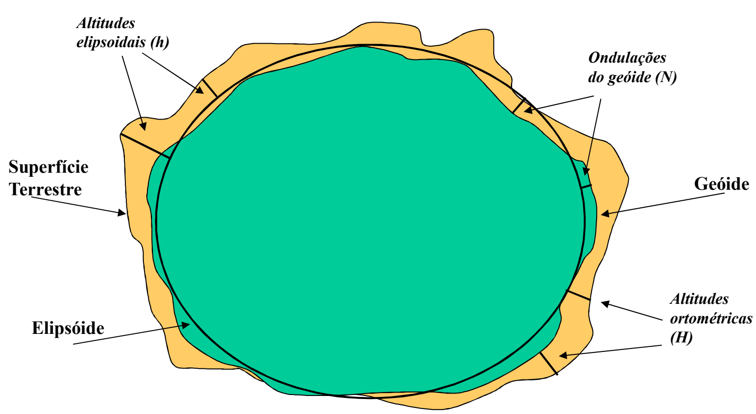
c) Chama-se ***altitude elipsoidal*** ou ***elipsóidica*** (h) de um ponto A à à distância medida ao longo da normal ao elipsóide, entre o ponto e a superfície do elipsóide de referência;

$$h = H + N$$

d) A menos de um erro de obliquidade, a diferença entre as duas altitudes geodésica, designa-se por ***ondulação do geóide*** (N) ou altura do geóide (afastamento entre o elipsóide e o geóide);

Nivelamento

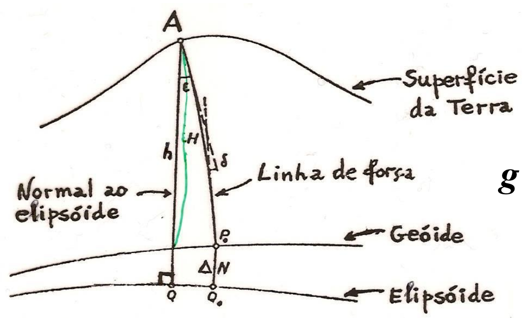
6. Generalidades. Métodos



Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

e) Enquanto que a altitude ***elipsoidal*** é puramente geométrica, já a altitude ***ortométrica*** é uma grandeza física (gravítica), mede o afastamento ente superfícies equipotenciais;



$$g = -\frac{dW}{dH}$$

Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

f) M***étodos de nivelamento*** por nível decrescente de precisão:

- Nivelamento geodésico (geométrico ou directo);
- Nivelamento hidrostático;
- Nivelamento trigonométrico (ou indirecto);
- Nivelamento barométrico.

g) Salvo raras excepções, os métodos *usados na geodesia são o geométrico e o trigonométrico*, contudo só o nivelamento geodésico directo permite obter a precisão geodésica de 1 ppm (1 mm/km);

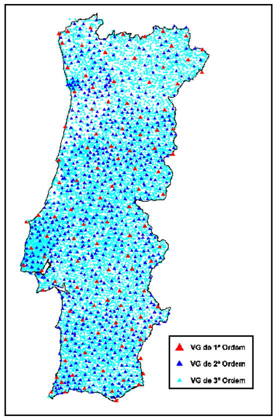
h) O nivelamento trigonométrico (5-10 cm/km) é importante por ser o único que permite alcançar os vértices geodésicos;

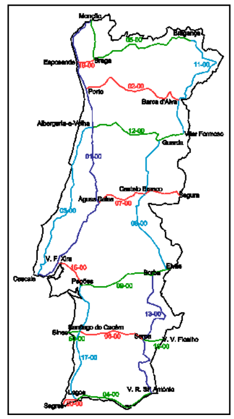
i) O nivelamento geométrico é limitado a pequenos desníveis, limita-se a percorrer as vias rodoviárias;

Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

j) Rede geodésica e rede de nivelamento geométrico





Nivelamento

6.1 Nivelamento barométrico

a) Como o nome indica, baseia-se na medição da pressão atmosférica num dado ponto com a qual se deduz o valor da altitude;

b) O peso de uma coluna de ar desde a altura H até aos limites atmosféricos, resulta da relação integral

$$p \cong \int_{H}^{40\,km} \rho_a \bar{g}\, dH$$

c) Assumindo a lei dos gases perfeitos pode-se escrever o desnível entre dois pontos por

$$H_2 - H_1 = \int_{H_1}^{H_2} dH = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_s T}{g_s \rho_s T_s p} dp = \frac{H_s T}{T_s} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

resultando

$$\boldsymbol{\Delta H = \frac{H_s T}{T_s}(ln\, p_1 - ln\, p_2)}$$

em que "***s***" se refere às condições atmosféricas padrão.

Nivelamento

6.1 Nivelamento barométrico

d) Este modelo, conhecido por Equação de Lapalce, é válida apenas sob a hipótese isotérmica da coluna de ar;

e) Os pontos devem supostamente estar na mesma linha de prumo, caso contrário, é necessário que as superfícies isobáricas sejam paralelas (só em curtas distâncias);

f) Devido à variação da densidade, as isobáricas variam com o tempo;

g) A pressão tradicionalmente mede-se em ***bars***:

$$\textit{1 bar} = 10^{-5}\ N\ cm^{-2} = 100\ kPa$$

e é equivalente à pressão exercida por 750,06 mm de mercúrio;

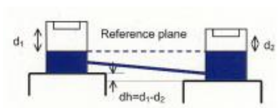
h) A pressão normal à superfície da Terra é

1 atmosfera = 1013,25 mbar = 760 mm Hg = 1013,25 hPa

Nivelamento

6.2 Nivelamento hidrostático

a) O nivelamento hidrostático baseia-se no princípio dos vasos comunicantes:



b) É uma técnica muito específica que dá grandes precisões mas só é aplicado em condições muito particulares, ligação de pontos muito próximos (controlo de movimentos verticais do terreno ou estruturas); é muito utilizado na indústria, e em centros de pesquisa, como CERN;

c) A grande escala, temos o exemplo da ligação das redes de nivelamento da Suécia e Dinamarca: foi utilizado um tubo de 19 km e as medidas foram feitas com a precisão de 0.1 mm/Km;

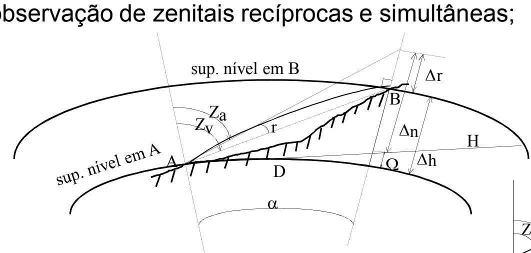
Nivelamento

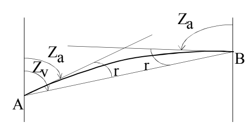
6.3 Nivelamento trigonométrico

a) O nivelamento geodésico indirecto é realizado com as medições de distância zenital e distância inclinada (pode ser deduzida);

b) Permite medir grandes desníveis e com grandes alcances, e por isso foi utilizado nas redes geodésicas;

c) Apresenta o grande inconveniente da refracção, atenuado com a observação de zenitais recíprocas e simultâneas;



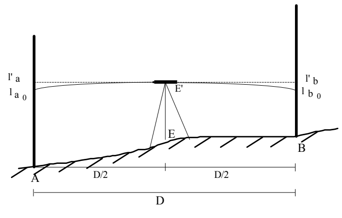


Nivelamento

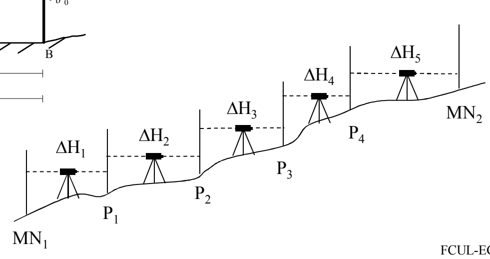
6.4 Nivelamento geométrico

a) A medição directa é feita em lanços de 80-100 m, perfazendo troços de 1 km, os quais constituem sub-secções de nivelamento;

b) As medições são feitas com níveis de alta precisão, as miras são de invar, com dupla graduação e regularmente calibradas;



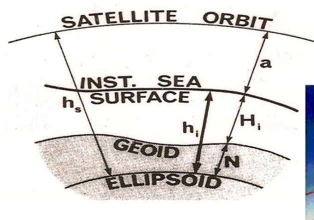
$$\Delta\mathbf{H}_{\mathbf{AB}} = \mathbf{l}_{\mathbf{a}0} - \mathbf{l}_{\mathbf{b}0}$$

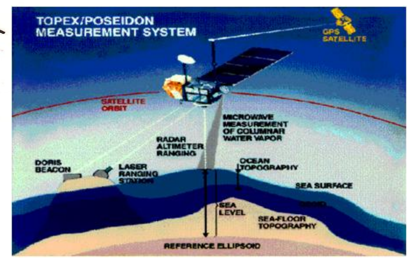


Nivelamento

6.5 Técnicas espaciais e remotas

a) ***Altimetria de satélite***, baseia-se no conhecimento rigoroso da órbita do satélite e na medição indirecta da superfície dos oceanos ou de gelo

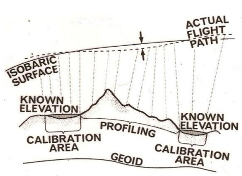


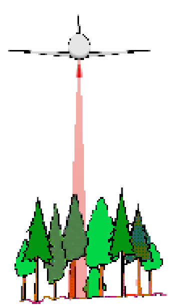


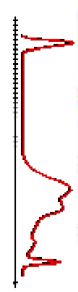
Nivelamento

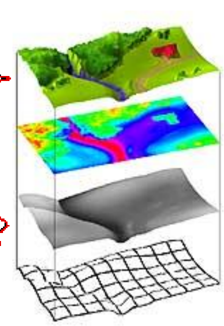
6.5 Técnicas espaciais e remotas

b) ***Altimetria laser (LiDAR Aéreo)***, através de aeronaves (aviões ou helicópteros), cuja altitude é conhecida quer por GNSS quer por barometria, é medida a distância vertical da superfície terrestre e daí deduzida a altimetria:









Nivelamento

6.6 Relações entre parâmetros altimétricos

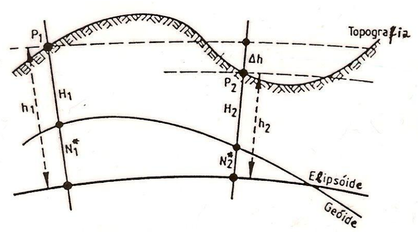
a) As altitudes usadas em redes geodésicas, e agora comummente observadas com o sistema GNSS, são puramente geométricas;

b) Contudo, as altitudes que mais interessam à geodesia e às suas aplicações (ortométricas ou normais) estão relacionadas com o campo gravítico;

$$h_1 = H_1 + N_1^*$$

$$h_2 = H_2 + N_2^*$$

$$\Delta h = \Delta H + \Delta N^*$$



Nivelamento

6.6 Relações entre parâmetros altimétricos

c) Desta relação podemos formular vários tipos de problemas:

- Medindo desníveis elipsoidais (por GNSS) e tendo um modelo de geóide, podem-se transportar altitudes ortométricas:

$$H_2 = H_1 + \Delta H = H_1 + \Delta h - \Delta N^*$$

- Tendo-se simultaneamente nivelamento geométrico e altitudes elipsoidais (GNSS), pode-se determinar directamente a ondulação:

$$N_1^* = h_1 - H_1$$

- Sem contar com as actuais técnicas espaciais (GNSS), as altitudes elipsoidais necessárias no sistema geodésico são determinadas com nivelamento e modelo de geóide $h_1 = H_1 + N_1^*$

- Havendo deslocamentos verticais ao longo do tempo, as variações podem ser feitas quer por nivelamento quer por GNSS

$$\Delta h_{t_i, t_{i+1}} = \Delta H_{t_i, t_{i+1}}$$

Nivelamento

6.7 Nivelamento Trigonométrico ortométrico

a) É considerado aqui apenas o método de observação, cálculo e ajustamento de nivelamento trigonométrico ortométrico, já que ***a passagem para o nivelamento elipsoidal exige o conhecimento dos desvios da vertical*** (modelo de geóide);

b) Embora ***limitado pelas incertezas*** do modelo de ***refracção atmosférica***, ***serve amplamente para as aplicações*** topográficas (ou cartográficas) da geodesia e permite uma cobertura global da rede;

c) Dado o fraco rigor, é legítimo adoptar um modelo matemático simplificado;

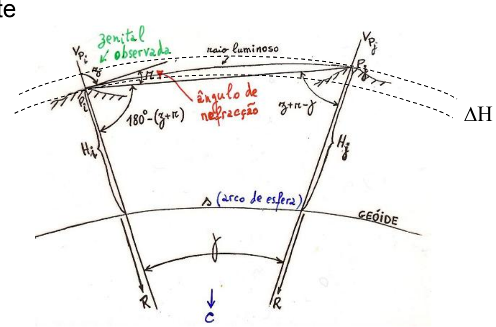
d) Vamos supor que para distâncias relativamente pequenas (<20km) as superfícies equipotenciais são esféricas e concêntricas;

e) Como o método é relativo, para se obter a altitude do ponto visado é necessário conhecer a altitude do ponto-estação, o transporte é então feito através de poligonais trigonométricas, ou através de redes, desde um marégrafo (datum altimétrico);

Nivelamento

6.7.1 Desnível trigonométrico

a) A distância zenital observada (aparente) é afectada pelo efeito de refracção, o respectivo ângulo é a diferença ente a zenital verdadeira e a aparente



b) Desnível entre P_i e P_j $\Delta H = H_j - H_i = \left(2R + H_i + H_j\right) \cdot tg\frac{\gamma}{2} \cdot \cot g\left(z + r - \frac{\gamma}{2}\right)$

Nivelamento

6.7.2 Coeficiente de refracção

a) Hipótese para o modelo de refracção: "*Se a distância zenital for observada às horas de maior calor, o ângulo de refracção obedece à relação*

$$r = k \cdot \frac{\gamma}{2}$$

em que o coeficiente k é, aproximadamente, constante para cada região e época do ano.", [Biot];

b) Para Portugal continental o coeficiente de refracção k é, em média, igual a 0.14 (é comum o coeficiente se apresentado por k/2=0.07, é o caso da Topografia);

c) Tal como o índice de refracção (μ), esta é uma grandeza física que depende também da temperatura e pressão do ar, [Bomford, 1983]

$$k = \frac{16.25R}{206265} \cdot \frac{P_{1/3}}{T_{1/3}} \cdot \left\{ 0.0342 + \left(\frac{dT}{dH}_{1/3} \right) \right\}$$

Nivelamento

6.7.3 Expressões de desnível

a) Feitos os desenvolvimentos e as substituições, e desprezando termos muito pequenos, a expressão do desnível trigonométrico geodésico resulta na expressão:

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_i}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta H}{2 \cdot R}\right) \cdot \left(1 + \frac{s^2}{12.R^2}\right) \cdot s \cdot \cot g\left(z - (1-k) \cdot \frac{s}{2 \cdot R}\right)$$

b) Nas ***linhas muito longas*** (>30 km) o cálculo é iterativo, iniciando-se com os primeiros factores igual à unidade;

c) Não é necessário conhecer ***s*** e ***R*** com grande rigor, *R* pode assumir o valor do raio médio e *s* é calculado com coordenadas aproximadas das estações (problema inverso da geodesia);

d) Nas ***linhas curtas*** a fórmula pode sofrer grandes simplificações, aproximando-se da fórmula simplificada usada na Topografia;

Nivelamento

6.7.3 Expressões de desnível

e) Atendendo a que $\frac{H_i}{R} \approx 0; \quad \frac{\Delta H}{2 \cdot R} \approx 0; \quad \frac{s^2}{12 \cdot R^2} \approx 0$

e fazendo o desenvolvimento em série de Taylor, tomando $\delta = (1-k) \cdot \frac{s}{2 \cdot R}$ como acréscimo de z, obtém-se

$$\Delta H = s \cdot \cot z + (1-k) \cdot \frac{s^2}{2 \cdot R} \cdot \cos ec^2 z$$

Como na geodesia se tem z ≈ 90º, ***cosec z*** **= 1**, resulta nesta condição a fórmula simplificada ou ***fórmula topográfica***

$$\Delta H = s \cdot \cot z + \frac{s^2}{2 \cdot R} - \frac{k}{2 \cdot R} \cdot s^2 = s \cdot \cot z + q \cdot s^2$$

f) Na Topografia temos a expressão de desnível definida com o co-seno pelo facto de aí serem medidas directamente as distâncias inclinadas da visada

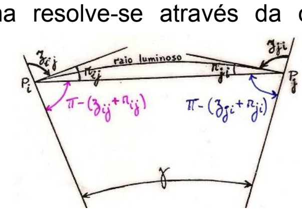
$$\Delta H = D_i \cdot \cos z + \Omega - \Delta r = D_i \cdot \cos z + 6{,}8E^{-8} D^2$$

Nivelamento

6.7.4 Nivelamento com zenitais recíprocas

a) O nivelamento trigonométrico com zenitais simples (expressão anterior) apresenta o problema do erro associado ao coeficiente de refracção k;

b) Este problema resolve-se através da observação de zenitais recíprocas;



c) Sejam ***z****ij* e ***z****ji* as zenitais observadas, respectivamente, de P_i para P_j e P_j para P_i, com as quais se obtêm os respectivos desníveis recíprocos

$$H_j - H_i = s \cdot \cot z_{ij} + q \cdot s^2$$
$$H_i - H_j = s \cdot \cot z_{ji} + q \cdot s^2$$

Nivelamento

6.7.4 Nivelamento com zenitais recíprocas

d) Fazendo a subtracção ordenada de ambos os membros das igualdades, e assumindo que o valor do coeficiente de refracção é comum às duas estações P_i e P_j, o termo de q é cancelado, resultando

$$\Delta H_{ij} = -\Delta H_{ji} = H_j - H_i = \frac{s}{2} \cdot \left(\cot z_{ij} - \cot z_{ji} \right)$$

e) A observação de zenitais recíprocas atenua o efeito da refracção sobre os desníveis trigonométricos, tornando as medidas mais exactas (efeito de refracção atenuado ou eliminado);

f) Dado que as condições atmosféricas variam no tempo e de lugar para lugar, este tipo de observações devem ser feitas em simultâneo, para que esse efeito seja ainda menor;

g) O valor de coeficiente de refracção assumido verifica-se nos momentos de máximo gradiente vertical da temperatura, pelo que, e ao contrário das observações azimutais, estas observações devem ser feitas na hora de maior calor (excepto para curtas distâncias, < 1 km);

Nivelamento

6.7.5 Determinação do coeficiente de refracção

a) A observação de distâncias zenitas recíprocas e simultâneas permite a determinação do valor do coeficiente da refracção;

b) Tomemos o triângulo formado pelos dois pontos e pelo centro da Terra, somando os seus ângulos internos obtemos

$$\left[\pi - (z_{ij} + r_{ij})\right] + \left[\pi - (z_{ji} + r_{ji})\right] + \gamma = \pi$$

assumindo a hipótese de Biot, os ângulos de refracção são iguais e assumem a expressão

$$r_{ij} = r_{ji} = r = k \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{k}{2 \cdot R}$$

fazendo a respectiva substituição e resolvendo em ordem a k, obtemos

$$k = 1 + \left[\pi - (z_{ij} + z_{jj})\right] \cdot \frac{R}{s}$$

Nivelamento

6.7.6 Compensação de redes trigonométricas

a) A compensação de redes de nivelamento é feito com a mesma ferramenta usada na compensação de redes geodésicas bidimensionais, a diferença está nas equações de observação, neste caso muito mais simples

$$f(x_o) + A \cdot \delta = l_0 + \nu$$

$$\Delta H_{calc} + correcção = \Delta H_{obs} + \nu_{\Delta H}$$

b) Esta equação de observação de desníveis pode ainda escrever-se na forma

$$dH_j - dH_i = \Delta H_{obs} - \left(\overline{H}_j - \overline{H}_i\right) + \nu_{ij}$$

c) Resultando para caso de uma rede com ***n*** desníveis observados em ***q*** estações, o sistema de equações lineares

$$A \cdot dH = -w + \nu$$

Nivelamento

6.7.6 Compensação de redes trigonométricas

d) O ***primeiro passo*** para a compensação da rede é o ***cálculo das altitudes ortométricas aproximadas*** a partir do transporte altimétrico seguindo um dado encadeamento;

e) Em seguida faz-se um ajustamento das equações de observação pelo m.m.q., do qual sai as correcções às altitudes aproximadas

$$\hat{H} = \overline{H} + d\hat{H}$$

f) O modelo de ajustamento deve contemplar a precisão das observações (desníveis) e seguir a resolução do sistema de equações normais do tipo $\left(A^T P A\right) \cdot dH = -\left(A^T P\right) w$

g) A matriz peso é, de igual modo, uma matriz diagonal calculada com o inverso das variâncias dos desníveis, que

para zenitais recíprocas: $\sigma^2_{\Delta H} \approx \frac{s^2}{2} \cdot \sigma^2_z$ e para zenitais simples: $\sigma^2_{\Delta H} \approx s^2 \cdot \sigma^2_z$

Nivelamento

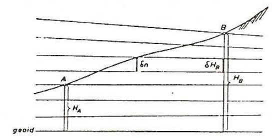
6.8 Nivelamento Geométrico

a) As altitudes ortométricas são consideradas quantidades derivadas da diferença de potencial gravítico;

b) Se se observar o nivelamento geométrico segundo um circuito fechado, a soma algébricas dos desníveis não é, em geral, igual a zero, mesmo que não se cometa qualquer erro de observacão:

$$\delta n \neq \delta H_B$$

$$\sum_A^B \delta n \neq H_B - H_A$$



c) A razão vem do facto das superfícies equipotenciais não serem paralelas;

d) Tomemos a diferença de potencial correspondente a δn, então

$$-\delta W = g \cdot \delta n = g' \cdot \delta H_B \quad \Rightarrow \quad \delta H_B = \frac{g}{g'} \cdot \delta n \neq \delta n$$

Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

e) Não existe nenhuma relação directa entre o valor medido de nivelamento geométrico e o desnível ortométrico;

$$\boldsymbol{desnível\_geométrico \neq desnível\_ortométrico}$$

f) Se, juntamente com o nivelamento geométrico, se medirem valores da gravidade, obtêm-se diferenças de potencial, e o resultado é independente do percurso seguido

$$\Delta W_{AB} = W_B - W_A = -\sum_A^B g \cdot \delta n = -\int_A^B g\,dn$$

g) Se se fizer um percurso fechado então $\Delta W = -\oint_A g\,dn = W_A - W_A = 0$

mas, o mesmo não se passa com o desnível geométrico $\Delta n = -\oint_A dn \neq 0$

Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

h) O desnível ortométrico obtém-se então, a partir dos desníveis geométricos corrigidos dos valores da gravidade medidos nas estações de nivelamento

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + OC_{AB}$$

onde OC_{AB} é uma correcção gravimétrica dada por

$$OC_{AB} = \sum_{A}^{B} \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A + \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B$$

$\bar{g}_A$ e $\bar{g}_B$ são os valores da gravidade média da vertical de A e B, respectivamente, que podem ser obtidos de forma aproximada por

$$\bar{g} = g + 0.0424 \cdot H$$

i) A compensação de redes de nivelamento geométrico é feita nos mesmos moldes que no nivelamento trigonométrico. Depois de corrigidas as observações, são aplicadas as mesmas equações com os devidos pesos.

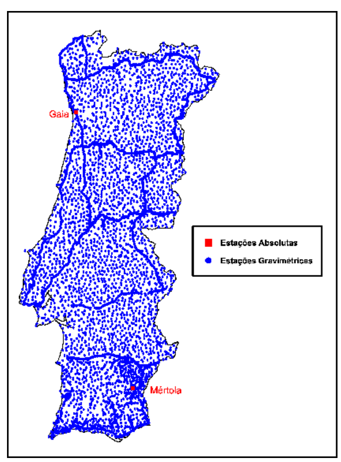
Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

- A densa rede de estações de gravimetria relativa percorre as linhas de nivelamento e a rede de vértices geodésicos, e é apoiada em 2 estações de gravimetria absoluta.

$$g = g_{abs} + \delta g_{rel}$$

- Esta rede permite a interpolação de g para cada ponto de nivelamento geométrico



Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

j) A compensação de redes de nivelamento geométrico tem a particularidade de cada equação de observação se referir ao desnível de troços e não de simples lanços

$$\boldsymbol{f(x_o)} + \boldsymbol{A} \cdot \delta = \boldsymbol{l_0} + \nu$$

$$\Delta \boldsymbol{H_{calc}} + \boldsymbol{correcção} = \Delta \boldsymbol{H_{obs}} + \nu_{\Delta H}$$

k) A equação de observação de desníveis escreve-se na forma

$$\boldsymbol{dH_j} - \boldsymbol{dH_i} = \Delta \boldsymbol{H_{obs}} - \left(\overline{\boldsymbol{H}}_j - \overline{\boldsymbol{H}}_i\right) + \nu_{ij}$$

m) Para o caso de uma rede com ***n*** troços observados entre ***q*** estações de nivelamento principal (NP), a resolução do sistema de equações lineares

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dH} = -\boldsymbol{w} + \nu$$

devolve as correcções às cotas iniciais das MN, com o qual se obtêm as coordenadas compensadas;

Nivelamento

6.9 Diferentes altitudes ortométricas

a) Considere-se a seguinte grandeza, C, designada por números geopotenciais:

$$C = W_0 - W = \int_0^A g\,dn$$

b) Obtém-se a altitude ortométrica, explicitamente definida por:

$$H = -\int_{W_0}^{W} \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g} = \frac{C}{\bar{g}}$$

c) Assim, podem-se definir outros tipos de altitude, em função da grandeza de gravidade utilizada:

- Altitude normal:

$$H^* = -\int_{W_0}^{W} \frac{dW}{\gamma} = \frac{C}{\bar{\gamma}}$$

- Altitude dinâmica:

$$H^{dyn} = -\int_{W_0}^{W} \frac{dW}{\gamma_0} = \frac{C}{\gamma_0}$$