Ajustamento tridimensional

7. Redes geodésicas tridimensionais

a) O domínio das redes geodésicas está definido no espaço tridimensional, logo, por definição, a ***Geodesia é tridimensional***;

b) Contudo, dada a fraca, ou quase ausente, relação matemática entre as componentes altimétrica e planimétrica, ***tem sido habitual separar a geodesia em bidimensional*** (planimetria) ***e unidimensional*** (altimetria ou nivelamento);

c) Do ponto de vista matemático ***esta separação é resultante da independência*** entre as duas componentes

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{n.q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{m.q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\varphi\lambda} \\ \boldsymbol{\delta}_{h} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{\varphi\lambda} \\ \boldsymbol{w}_{h} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A}_{n.q} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\varphi\lambda} = -\boldsymbol{w}_{\varphi\lambda} \\ \boldsymbol{B}_{m.q} \cdot \boldsymbol{\delta}_{h} = -\boldsymbol{w}_{h} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\varphi,\lambda,h} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\varphi\lambda} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{h} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\varphi\lambda} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{h} \end{bmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7. Redes geodésicas tridimensionais

d) Por esta razão, as duas componentes do posicionamento geodésico eram tratadas separadamente em termos de ajustamento, tal como foi abordada nesta disciplina;

e) Podem-se encontrar outras razões pela qual, na geodesia clássica, se separa a planimetria da altimetria: instrumentais, redução de observações, computacionais, objectivos e tipo de cálculo, etc.;

f) As observações clássicas (direcção azimutal, distância zenital e comprimento) definem uma relação de posicionamento tridimensional em coordenadas polares – vector posição 3D;

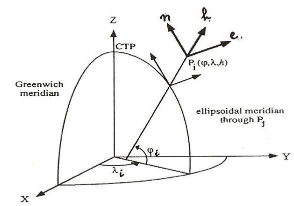
g) Por esta razão, é lógico que o modelo matemático de ajustamento de redes geodésicas deva ser tridimensional;

h) Com o advento da era espacial, tornou-se ainda mais evidente o objectivo de ajustar todos os dados geodésicos em conjunto – surge a ***geodesia tridimensional*** (espacial);

Ajustamento tridimensional

7.1 Sistemas de coordenadas e suas relações

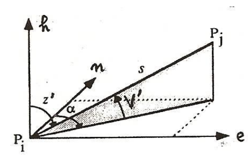
a) Sistema geodésico e cartesiano global



$$x_p = (N + h_p)\cos\varphi_p \cos\lambda_p$$
$$y_p = (N + h_p)\cos\varphi_p \sin\lambda_p$$
$$z_p = \left[N(1 - e^2) + h_p\right]\sin\varphi_p$$

b) Sistema geodésico local

$$n = s \cdot \cos V' \cos\alpha$$
$$e = s \cdot \cos V' \sin\alpha$$
$$h = s \cdot \sin V'$$



Ajustamento tridimensional

7.1 Sistemas de coordenadas e suas relações

c) Tendo em conta as relações dadas no capítulo de sistemas de referência podemos escrever as relações entre o sistema cartesiano global e o sistema geodésico local

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{\,TC} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen\varphi_i \cos\lambda_i & -sen\lambda_i & -\cos\varphi_i \cos\lambda_i \\ -sen\varphi_i sen\lambda_i & \cos\lambda_i & \cos\varphi_i sen\lambda_i \\ \cos\varphi_i & 0 & sen\varphi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ e \\ h \end{pmatrix}$$

e a relação inversa, que pelo facto da matriz rotação ser ortogonal, é dada pela sua transposta

$$\begin{pmatrix} n \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen\varphi_i \cos\lambda_i & -sen\varphi_i sen\lambda_i & \cos\varphi_i \\ -sen\lambda_i & \cos\lambda_i & 0 \\ -\cos\varphi_i \cos\lambda_i & \cos\varphi_i sen\lambda_i & sen\varphi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.2 Modelo geodésico tridimensional

a) Resolvendo estes sistemas em ordem às observações, obtém-se

$$\begin{cases} \alpha_i = arctg\left(\dfrac{-sen\lambda_i \cdot \Delta X + cos\,\lambda_i \cdot \Delta Y}{-sen\varphi_i \cdot cos\,\lambda_i \cdot \Delta X - sen\varphi_i \cdot sen\lambda_i \cdot \Delta Y + cos\,\varphi_i \cdot \Delta Z} \right) \\ V'_i = arcsen\left(\dfrac{cos\,\varphi_i \cdot cos\,\lambda_i \cdot \Delta X + cos\,\varphi_i \cdot sen\lambda_i \cdot \Delta Y + sen\varphi_i \cdot \Delta Z}{s} \right) \\ s = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \end{cases}$$

b) Estas relações estabelecem o modelo funcional de equações do tipo paramétrico (não linear) $F(X,Y,Z) = l$ com o qual se pode realizar o ajustamento das redes geodésicas tridimensionais;

Ajustamento tridimensional

7.2 Modelo geodésico tridimensional

c) A correcção diferencial destas funções (termo das equações lineares) pode-se exprimir da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & : & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & : & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & : & g_{34} & g_{35} & g_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i & : & G_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_i \\ dU_j \end{pmatrix}$$

onde os elementos da matriz de coeficientes g_{ij}, são as derivadas parciais das funções observação (α, V', s) em relação às coordenadas cartesianas (X,Y,Z) dos pontos ***i*** e ***j*** (estação e ponto visado);

Ajustamento tridimensional

7.3 Modelo matemático sobre o elipsóide

a) Tomando as relações entre as coordenadas cartesianas (X,Y,Z) e geodésica (φ,λ,h), pode-se estabelecer o modelo de equações paramétricas sobre o elipsóide

$$F(\varphi,\lambda,h)=l$$

b) Por diferenciação da relação referida, obtém-se a respectiva relação diferencial

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\rho+h)sen\varphi\cos\lambda & -(N+h)\cos\varphi\, sen\lambda & -\cos\varphi\cos\lambda \\ -(\rho+h)sen\varphi\, sen\lambda & (N+h)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\, sen\lambda \\ (\rho+h)\cos\varphi & 0 & sen\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J(\varphi,\lambda,h)\cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.3 Modelo matemático sobre o elipsóide

c) Aplicando o operador matricial J ao diferencial (*d*α*, dV',ds*), obtemos o respectivo diferencial definido em relação às coordenadas geodésicas

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \end{pmatrix} = \left(G_i J_i \quad : \quad G_j J_j\right)\cdot \begin{pmatrix} d\varphi_i \\ d\lambda_i \\ dh_i \\ d\varphi_j \\ d\lambda_j \\ dh_j \end{pmatrix}$$

d) Com esta correcção diferencial pode-se definir as equações lineares a partir da forma geral

$$F(\varphi_0,\lambda_0,h_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi},\frac{\partial F}{\partial\lambda},\frac{\partial F}{\partial h}\right)_0\cdot\left(d\varphi,d\lambda,dh\right)^T = l+\nu$$

Ajustamento tridimensional

7.3 Modelo matemático sobre o elipsóide

e) Resultam então, as equações de observação de azimute astronómico, de direcção azimutal, de direcção zenital e de comprimento

$$d\alpha = -(\alpha_{calc} - \alpha_{obs}) + \nu_A$$
$$d\alpha - d\alpha_0 = -((\alpha_{calc} - \alpha_0) + da_{obs}) + \nu_A$$
$$dV = -(V_{calc} - (V_{obs} - k' s \cos V)) + \nu_V$$
$$ds = -(s_{calc} - s_{obs}) + \nu_s$$

f) A estas equações podem ser acrescentadas equações de observação provenientes de bases GPS processadas, ou de qualquer outra técnica espacial

$$\Delta X_{ij} = (X_j - X_i)$$
$$\Delta Y_{ij} = (Y_j - Y_i)$$
$$\Delta Z_{ij} = (Z_j - Z_i)$$

Ajustamento tridimensional

7.4 Modelo matemático de bases

a) O modelo matemático de ajustamento de bases GPS é relativamente simples, dado o facto de se tratar de modelos lineares:

$$dX_{ij} = \Delta X_{obs} - \Delta X_{calc} + \nu_X$$
$$dY_{ij} = \Delta Y_{obs} - \Delta Y_{calc} + \nu_Y$$
$$dZ_{ij} = \Delta Z_{obs} - \Delta Z_{calc} + \nu_Z$$

onde

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & : & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_i \\ dU_j \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.5 Modelo matemático combinado

a) Embora cada vez menos comum, por vezes é necessário combinar dados clássicos com observações de técnicas espaciais;

b) É pois possível combinar observações geodésicas clássicas com observações de bases geodésicas tridimensionais, através da combinação dos respectivos modelos matemáticos:

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \\ dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & : & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & : & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & : & g_{34} & g_{35} & g_{36} \\ -1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i & : & G_j \\ -I & : & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_i \\ dU_j \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.5 Modelo matemático combinado

c) Se se pretender expressar o modelo matemático em termos de coordenadas geodésicas para se efectuar o ajustamento sobre o elipsóide, então basta a relação diferencial entre os sistemas cartesiano e geodésico

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J(\varphi, \lambda, h) \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$$

resultando a correcção diferencial do modelo sobre o elipsóide

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \\ dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i & : & G_j \\ -I & : & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_i \\ J_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi_i \\ d\lambda_i \\ dh_i \\ d\varphi_j \\ d\lambda_j \\ dh_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i J_i & : & G_j J_j \\ -J_i & : & J_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi_i \\ d\lambda_i \\ dh_i \\ d\varphi_j \\ d\lambda_j \\ dh_j \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

a) As parametrizações do tipo (φ,λ,h) ou (n,e,h) são particularmente úteis, nomeadamente, para a melhor percepção da precisão final;

b) Tomando as relações

$$\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = J^{-1}(\varphi,\lambda,h)\cdot\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} dn \\ de \\ dh \end{pmatrix} = H(\varphi,h)\cdot\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$$

com

$$H(\varphi,h)=\begin{pmatrix} \rho+h & 0 & 0 \\ 0 & (N+h)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J^{-1}(\varphi,\lambda,h)=\begin{pmatrix} -\frac{sen\varphi\cos\lambda}{\rho+h} & -\frac{sen\varphi sen\lambda}{\rho+h} & -\frac{\cos\varphi}{\rho+h} \\ -\frac{sen\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi sen\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

Obtém-se

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J(\varphi,\lambda,h)\cdot H^{-1}(\varphi,h)\begin{pmatrix} dn \\ de \\ dh \end{pmatrix}$$

c) Usando a lei de propagação das variância-covariâncias, obtém-se a transformação de covariâncias (de dimensão 3x3)

para (***n,e,h***) $$C_{n,e,h} = \left(HJ^{-1}\right)C_{X,Y,Z}\left(HJ^{-1}\right)^T$$

onde o produto de matrizes (***HJ***$^{-1}$) é a matriz R de passagem do sistema (***X,Y,Z***) para o sistema (***n,e,h***)

e para (***φ,λ,h***) $$C_{\varphi,\lambda,h} = \left(J^{-1}\right)C_{X,Y,Z}\left(J^{-1}\right)^T$$

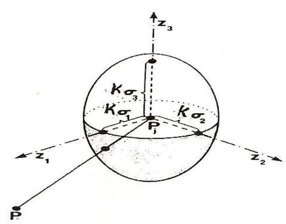
Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

d) As regiões de erro dadas pela informação contida nas matrizes de covariâncias é agora de dimensão 3, o que significa que os elipsóides tomam o lugar das elipses de erro e de confiança consideradas na geodesia bidimensional;

e) O domínio de confiança é definido pelo interior do elipsóide dado pela equação:

$$\frac{x^2}{(k \cdot \hat{\sigma}_x)^2} + \frac{y^2}{(k \cdot \hat{\sigma}_y)^2} + \frac{z^2}{(k \cdot \hat{\sigma}_z)^2} = 1$$



Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

e) A generalização para três dimensões da teoria sobre a precisão dos resultados desenvolvida anteriormente conduz a uma relação equivalente

$$P\left\{ \frac{\dfrac{(x-\mu_X)^2}{c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} + \dfrac{(y-\mu_Y)^2}{c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} + \dfrac{(z-\mu_z)^2}{c_z^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2}}{\dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}} < k^2 \right\} = P_k$$

onde através de uma variável F-Fisher se define a região de probabilidade de ocorrência dos valores verdadeiros – elipsóide de confiança:

$$P\left\{ \frac{\chi_3^2 / 3}{\chi_{n-q}^2 /(n-q)} < \frac{k^2}{3} \right\} = P\left\{ F(3, n-q) < \frac{k^2}{3} \right\} = P_k$$