# Ajustamento de Redes

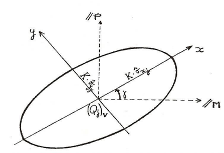
**5.9**.7 Elipses de confiança

a) A elipse de confiança define uma área ampliada, resultante da multiplicação dos semieixos da elipse de erro por um factor probabilístico k;

b) Seja ***xoy*** um sistema de eixos centrado no ponto verdadeiro fazendo um ângulo $\gamma$ com os eixos do sistema de coordenadas da rede;

c) Pretende-se calcular a probabilidade de uma estimativa aleatória de um ponto $\hat{Q}_j$ cair dentro da elipse figurada, ou seja,

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{x^2}{(k\hat{\sigma}_x)^2} + \frac{y^2}{(k\hat{\sigma}_y)^2} < 1 \right\} = \mathrm{P}_k$$





# Ajustamento de Redes

**5.**9.7 Elipses de confiança

d) Aplicando uma rotação do valor de $\gamma$, através da respectiva matriz $R_\gamma$, passamos do sistema (M,P) para o sistema (x,y);

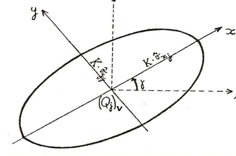
e) Tomando a matriz das variâncias-covariâncias das coordenadas do ponto $\hat{Q}_j$ , obtém-se a matriz das variâncias-covariâncias definida no sistema (x, y)

$$\hat{C}_{xy_{\hat{Q}j}} = R_\gamma \cdot \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{M_j} & \hat{\sigma}_{M_jP_j} \\ \hat{\sigma}_{M_jP_j} & \hat{\sigma}^2_{P_j} \end{bmatrix} \cdot R^T_\gamma$$

$$\hat{\sigma}^2_{x_j} = cos^2\gamma\hat{\sigma}^2_{M_j} + sen^2\gamma\hat{\sigma}^2_{P_j} + sen(2\gamma)\hat{\sigma}_{M_jP_j}$$

$$\hat{\sigma}^2_{y_j} = sen^2\gamma\hat{\sigma}^2_{M_j} + cos^2\hat{\sigma}^2_{P_j} - sen(2\gamma)\hat{\sigma}_{M_jP_j}$$

$$\hat{\sigma}_{x_jy_j} = \frac{sen(2\gamma)}{2}\left(\hat{\sigma}^2_{P_j} - \hat{\sigma}^2_{M_j}\right) + cos(2\gamma)\hat{\sigma}_{M_jP_j}$$



# Ajustamento de Redes

## 5.9.7 Elipses de confiança

f) O termo não-diagonal (covariância) é nulo quando $\gamma=\theta$

g) Como se tem

$$\hat{\sigma}^2_{x_j} = c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2 ; \quad \hat{\sigma}^2_{y_j} = c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2 ; \quad \hat{\sigma}_{x_j y_j} = 0$$

onde $c_x$ e $c_y$ são constantes calculadas por um produto matricial, a condição de probabilidade pode-se escrever da forma

$$P\left\{ \frac{x^2}{c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} + \frac{y^2}{c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} < k^2 \right\} = P_k$$



# Ajustamento de Redes

## 5.9.7 Elipses de confiança

h) Fazendo algumas modificações legítimas temos

$$P\left\{ \frac{\dfrac{(x-\mu_X)^2}{c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} + \dfrac{(y-\mu_Y)^2}{c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2}}{\dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}} < k^2 \right\} = P_k$$

i) Na expressão de desigualdade tem-se no numerador uma v.a. de $\chi^2$ de 2 g.l. (soma dos quadrados de duas v.a. normais reduzidas) e no denominador uma v.a. de $\chi^2$ de (n-q) g.l.

$$P\left\{ \frac{\chi_2^2 / 2}{\chi_{n-q}^2 /(n-q)} < \frac{k^2}{2} \right\} = P\left\{ F(2, n-q) < \frac{k^2}{2} \right\} = P_k$$

# Ajustamento de Redes

## 5.9.7 Elipses de confiança

j) A relação anterior fornece-nos a probabilidade de o ponto $\hat{Q}_j$ se encontrar dentro da elipse ampliada do factor k e centrada no ponto verdadeiro, $(Q_j)_v$ ;

k) Estas relações permite-nos resolver dois tipos de problema:

1 – **Fixando a probabilidade $P_k$**, qual deverá ser o factor de ampliação k, para que o ponto aleatório caia dentro da elipse?

2 – **Fixando o valor de k**, qual a probabilidade de esse ponto se situar dentro da elipse;

l) Exemplos numérico:

1- $F_{tab}(2,14,0.95) = 3.74 \Rightarrow k^2/2 = 3.74 \Rightarrow k = \sqrt{7.18} = 2.74$

2 - $k=1 \Rightarrow k^2/2 = 0.5 \Rightarrow F_{tab}(2,\infty, P_k) = 0.5 \Rightarrow P_k = 39\%$

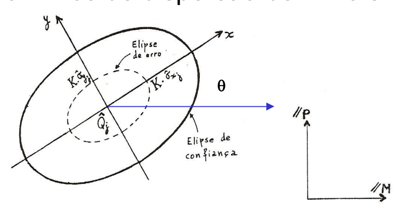


# Ajustamento de Redes

## 5.9.7 Elipses de confiança

m) Conclui-se que a elipse de erro (k=1) corresponde a uma elipse de confiança entre os 35% (n-q=3) e os 39% (n-q= $\infty$) de probabilidade, constituindo um domínio de dispersão não dilatado;

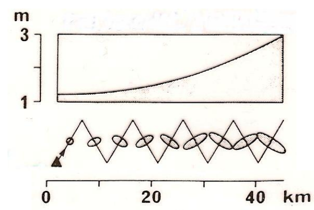
n) Para probabilidades superiores (90, 95 ou 99%), correspondendo a maior confiança no valor estimado, obtêm-se domínios de dispersão bem mais dilatados.

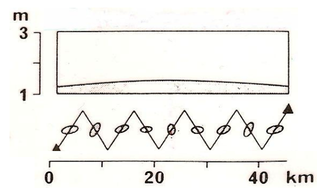


# Ajustamento de Redes

**5.**9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

a) Poligonal aberta e poligonal fechada (amarrada)



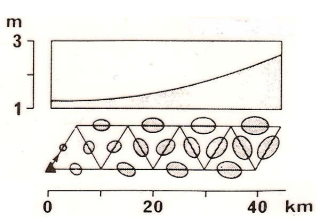



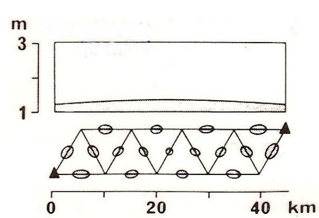



# Ajustamento de Redes

**5.**9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

b) Triangulação em cadeia com 1 e 2 pontos fixos

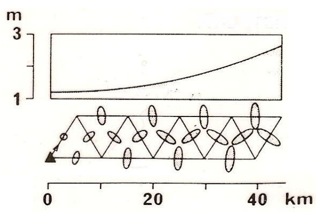


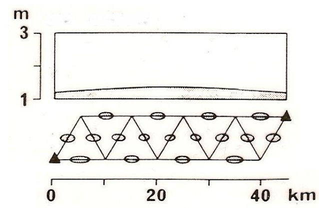



# Ajustamento de Redes

**5.**9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

c) Trilateração em cadeia com 1 e 2 pontos fixos



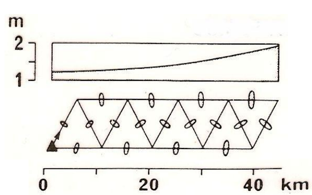



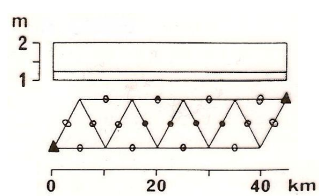



# Ajustamento de Redes

**5.**9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

d) Combinação em cadeia com 1 e 2 pontos fixos

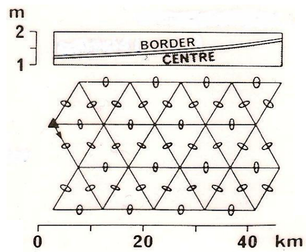


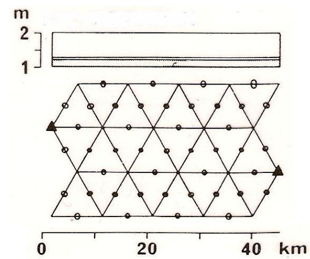



# Ajustamento de Redes

**5.**9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

e) Rede com 1 e 2 pontos fixos

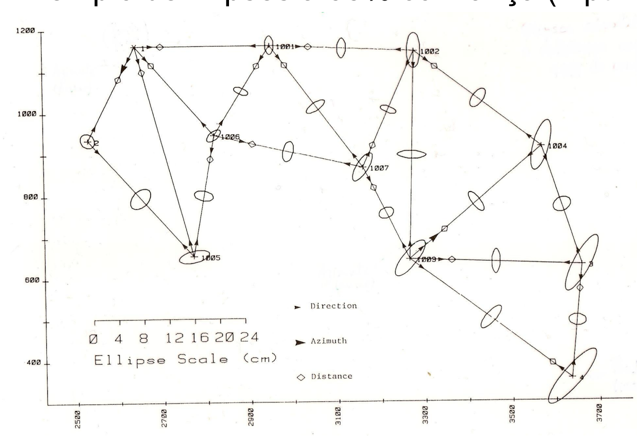




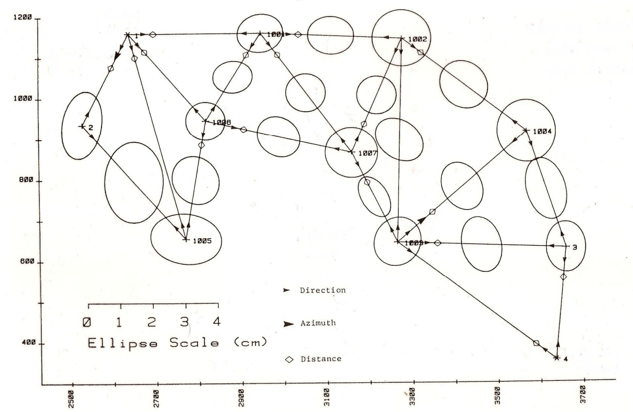

# Ajustamento de Redes

**5.**9.9 Exemplo de Elipses a 95% confiança (1 pt fixo)



# Ajustamento de Redes

**5.**9.9 Exemplo de Elipses a 95% confiança (2 pts fixos)






# Ajustamento de Redes

**5.**9.10 Elipse de erro – outro modo de determinação

a) Da álgebra matricial, sabe-se que os valores e vectores próprios de uma matriz quadrada, de dimensão q, determinam-se pela resolução do sistema linear:

$$B \cdot x = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \quad (B - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$$

além da sua solução trivial, tem as soluções dadas pela ***equação característica da matriz B***:

$$|\boldsymbol{B} - \lambda \cdot \boldsymbol{I}| = \mathbf{0}$$

b) Esta igualdade representa um polinómio real de grau ***q*** em $\lambda$, com q raízes, que definem os valores próprios da matriz;

c) A cada valor próprio $\lambda_i$ corresponde um vector próprio $\boldsymbol{x_i}$, que se obtém por substituição no sistema linear de ***x;***

# Ajustamento de Redes

**5.9**.10 Elipse de erro – outro modo de determinação

d) O cálculo de valores e vectores próprios da matriz de covariância dos parâmetros, $C_\delta$, permite determinar também os elementos de uma elipse de erro dos vértices da rede;

e) A aplicação da equação característica ao caso bidimensional, conduz ao polinómio:

$$(-\lambda)^2 + Tr(B)\cdot(-\lambda) + |B| = 0$$

substituindo na equação o traço e o determinante da sub-matriz de covariâncias obtemos um polinómio de 2ºgrau em $\lambda$

$$\lambda^2 - \left(\hat{\sigma}^2_{\Delta M_j} + \hat{\sigma}^2_{\Delta P_j}\right)\cdot\lambda + \left(\hat{\sigma}^2_{\Delta M_j}\cdot\hat{\sigma}^2_{\Delta P_j} - \hat{\sigma}^2_{\Delta M_j \Delta P_j}\right) = 0$$



# Ajustamento de Redes

**5.9**.10 Elipse de erro – outro modo de determinação

d) Resolvendo este polinómio anterior, obtém-se como solução, os valores próprios $\lambda_1$ e $\lambda_2$,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2_{\Delta M_j} + \sigma^2_{\Delta P_j} + \sqrt{\left(\sigma^2_{\Delta M_j} - \sigma^2_{\Delta P_j}\right)^2 + 4\sigma^2_{\Delta M_j \Delta P_j}}\right\}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2_{\Delta M_j} + \sigma^2_{\Delta P_j} - \sqrt{\left(\sigma^2_{\Delta M_j} - \sigma^2_{\Delta P_j}\right)^2 + 4\sigma^2_{\Delta M_j \Delta P_j}}\right\}$$

e) Estes valores correspondem às variâncias máxima e mínima, da sub-matriz de covariâncias;

g) Como por definição, os semieixos das elipses correspondem aos valores máximo e mínimo do desvio-padrão, cada semieixo é determinado pela raiz quadrada dos valores próprios;

g) As suas direcções são dadas pelos vectores próprios.

# Ajustamento de Redes

**5.**9.11 Hiperelipsóide de erro

a) O hiper-elipsóide de erro é ***o domínio de erro de toda a rede geodésica***, com n-q graus de liberdade;

b) Os seus semieixos são os valores próprios de uma dada matriz de covariância de uma nova variável, e dão-nos uma ***medida de precisão global da rede***;

c) A análise anterior de domínios locais de erro (elipses relativas e absolutas) é limitada, pois refere-se a cada vértice isolado da rede, com desprezo pelas covariâncias entre as coordenadas desses vértices e as coordenadas dos restantes vértices;

d) As ***elipses de erro*** correspondem a secções planas do hiper-elipsóide de erro da rede geodésica, e ***são uma solução aproximada*** do problema: "***Qual é a precisão da Rede?***";



# Ajustamento de Redes

**5.9.**11 Hiperelipsóide de erro

e) É sempre possível transformar um conjunto de v.a. correlacionadas num outro de v.a. não-correlacionadas;

f) A matriz de transformação não é única, uma das soluções é dada pela matriz cujas colunas são os vectores próprios normalizados da matriz de covariâncias das v.a. originais;

g) Esta operação é equivalente a diagonalizar a matriz de covariâncias original;

h) Para qualquer matriz **B**, existe sempre uma matriz rotação **S** (ortogonal) tal que $\mathbf{D} = \mathbf{S}^T.\mathbf{B}.\mathbf{S}$ é diagonal (constituída com os valores próprios de B);

# Ajustamento de Redes

### **5.9**.11 Hiperelipsóide de erro

i) Se a matriz B for simétrica e definida positiva, então:
- os seus valores próprios são reais e todos positivos;
- os seus vectores próprios são todos mutuamente ortogonais;

j) Se designarmos por ***S a matriz ortogonal*** cujas colunas são os ***vectores próprios*** normalizados de $N^{-1}$, e definirmos a seguinte mudança de variável: $\hat{U} = S^T \cdot \hat{\delta}$

obtemos uma nova matriz de covariâncias da v.a. não-correlacionada U

$$\hat{C}_{\hat{U}} = S^T \cdot \left(\hat{\sigma}_0^2 N^{-1}\right) \cdot S = \hat{\sigma}_0^2 \cdot D$$

k) O ***domínio de erro*** respeitante a estas variáveis não correlacionas é o ***hiper-elipsóide*** de erro cujos semieixos são as raízes quadradas dos seus valores próprios.



# Ajustamento de Redes

### **5.9**.12 Conclusões

a) A análise da qualidade de uma rede através do modelo estocástico de ajustamento é de grande importância;

b) Não só se pode avaliar *a posteriori* a qualidade do ajustamento, como também se pode garantir *a priori* essa qualidade pretendida;

c) Dado que o modelo estocástico depende substancialmente da geometria e da qualidade (precisão) das observações, e não tanto das coordenadas dos pontos, ele pode ser determinado *a priori* com suficiente rigor para efeitos de fiabilidade e optimização da rede;

d) A análise *a priori* do modelo estocástico, nomeadamente através do hiper-elipsóide de erro, é muito utilizado na Microgeodesia;

# Ajustamento de Redes

**5.**9.12 Conclusões

e) Quando se pretende garantir um determinado nível de precisão (a melhor matriz $C_x$) devem ser feitos estudos prévios ao nível do geometria da rede (modelo funcional) e da qualidade das observações (precisões *a priori*);

f) Porque na Microgeodesia (exemplo das barragens) se tem mais liberdade de escolha, é fundamental escolher a melhor opção ao nível das observações, da localização dos vértices e dos instrumentos usados, antes mesmo de implantar a rede, para que os resultados correspondam ao esperado (ex.: detecção de deslocamentos milimétricos)



# Ajustamento de Redes

**5.**10 Cálculo numérico de redes

a) Neste capítulo abordamos os problemas de: 1- "***defeito do datum***"; 2- ***redes livres***;

b) A escolha de pontos de referência, devido à sua instabilidade no caso de redes de apoio de infraestruturas, pode requerer diferentes estratégias de ajustamento;

c) A precisão final da rede pode justificar uma escolha adequada e criteriosa do *datum* da rede.

# Ajustamento de Redes

## **5.**10.1 Defeito do ***Datum***

a) A indeterminação da localização, da orientação e da escala da rede origina o que se chama "defeito do *datum*";

b) A existência dos 4 graus de liberdade numa rede bidimensional obriga à fixação dos respectivos parâmetros (localização, escala e orientação) para que o sistema resulte possível e determinado;

c) Como estes parâmetros constituem uma indeterminação, e as observações não permitem a sua determinação exacta e precisa, tem de se impor certos **constrangimentos**;

d) Para cada opção tomada tem-se uma solução diferente de referencial, *daí o seu defeito*;



# Ajustamento de Redes

## **5.**10.1 Defeito do ***Datum***

e) Em termos de localização, o ajustamento clássico obriga a que seja fixado pelo menos um ponto, considerando-se os restantes como pontos livres (v.a.);

f) Para fixar um dado ponto da rede existem duas formas, ou se acrescentam equações de condição relativas aos parâmetros desse ponto:

$$\left(dM_k = 0;\ dP_k = 0\right) \quad ou \quad \left(d\varphi_k = 0;\ d\lambda_k = 0\right)$$

ou, não se consideram (não entram) esses parâmetros como variáveis do sistema;

g) Num caso ou noutro o número de graus de liberdade é o mesmo;

h) A segunda opção é a mais utilizada;

# Ajustamento de Redes

## **5.**10.2 Redes livres

a) Uma alternativa às redes fixas, muito utilizada actualmente, e que resolve em parte o problema do "*defeito do datum*", é o conceito de *rede livre*;

b) Ao invés de se considerar um ponto fixo, todos são pontos livres (v.a.), e *considera-se um ou mais pontos com coordenadas constrangidas* a uma variância limitada;

c) São *acrescentadas equações de condição das suas coordenadas*, às quais fica associada uma dada variância (xx mm$^2$), e consequentemente, um dado peso;

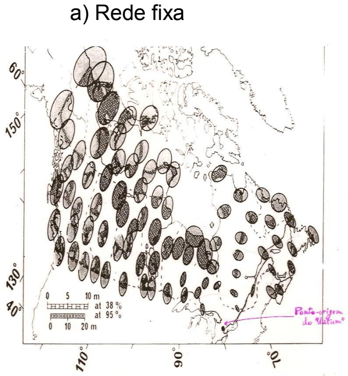
$$\begin{cases} dM_k = \left(M_k^0 - \overline{M}_k\right)_{n+1} - \nu_{n+1} \\ dP_k = \left(P_k^0 - \overline{P}_k\right)_{n+2} - \nu_{n+2} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} d\varphi_k = \left(\varphi_k^0 - \overline{\varphi}_k\right)_{n+1} - \nu_{n+1} \\ d\lambda_k = \left(\lambda_k^0 - \overline{\lambda}_k\right)_{n+2} - \nu_{n+2} \end{cases}$$



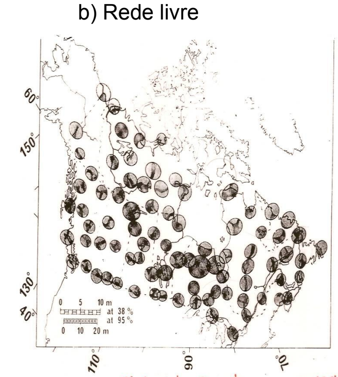
# Ajustamento de Redes

## **5.**10.2 Redes livres

a) Rede fixa




b) Rede livre



# Ajustamento de Redes

**5.**10.3 Conceitos

a) Compensação livre – ajustamento de observações homogéneas (direcções) livre de constrangimento às observações, método de estimativa da variância das direcções azimutais;

b) Ajust. de constrangimento máximo - ajustamento de uma rede com o máximo de constrangimento (localização, escala e orientação), por exemplo, com 2 pontos fixos (equivalente à compensação livre).

c) Ajustamento constrangido – ajustamento de uma rede com constrangimento aos seus graus de liberdade de localização (escala e orientação livre) ;

d) Ajust. de constrangimento mínimo - ajustamento de uma rede com o mínimo de constrangimento aos seus graus de liberdade (localização, escala e orientação), sem pontos fixos,– rede livre (com pts de controlo);