

Geodesia e Aplicações – 2020/21

1. Objectivos.

2. Programa

- a) Posicionamento e Sistemas de Referência Geodésica
- b) Ajustamento Redes Geodésicas
- c) Modelação numérica do Geóide

3. Trabalhos Práticos.

- a) 3 trabalhos: transformação de coordenadas; compensação de redes geodésicas; e modelação do geóide;
- b) Trabalhos individuais com Relatório Final

4. Avaliação

- a) Exame escrito (50%) + Trabalho Prático (50%)

Geodesia e Aplicações – 2021/22

5. Bibliografia

- Pagarete, J. (2004). Geodesia Geométrica. Apontamentos da Licenciatura de Engenharia Geográfica da FCUL.
- Vanícek, P. and E.J. Krakiwsky (1986). Geodesy: The concepts. North-Holland editors, Amsterdam, Holland, 2nd ed., pp. 697.
- Mendes, V. (2013). Observações em Ciências Geográficas: Métodos de Ajustamento e Análise. Apontamentos de TAD, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Wolf, P. and C. Ghilani. (1997) Adjustment computations - Statistics and Least Squares in Surveying and GIS. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc.
- Catalão, J. (2000). Geodesia Física. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Heiskanen W.A. and H. Moritz, (1967). Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company, San Francisco

6. Aulas Práticas

- O Portal Moodle da FCUL <http://moodle.fc.ul.pt/> contém material de aulas e informação para os trabalhos práticos;

7. Horário de apoio

- Segundas às 16:30 ou quintas-feiras às 14:00

Geodesia e Aplicações – 2021/22

8. Material de apoio

- Material das aulas teóricas, aulas práticas e alguns textos encontra-se disponível no Portal Moodle

9. Contactos

- cmantunes@fc.ul.pt
- Através do Moodle em “News Forum”

Geodesia e Aplicações – Apresentação

FCUL-EG

3

Geodesia e Aplicações – 2021/22

The screenshot shows the Moodle course interface for 'Geodesia e Aplicações'. At the top, there's a blue header bar with the Ciências ULisboa logo, the word 'moodle', and a 'TURN EDITING OFF' button. Below the header, the course title 'GEODESIA E APlicações' is displayed above a globe icon. The left sidebar contains navigation menus for 'Dashboard', 'Site pages', 'Current course' (which is expanded to show 'Geodesia e Aplicações (471181)' with sub-options like 'Participants', 'Badges', 'General', 'AULAS TEÓRICAS', 'EXERCÍCIOS NUMÉRICOS', and 'TRABALHOS DE PROJETO'), and 'My courses'. The main content area is titled 'AULAS TEÓRICAS' and contains a large image of a globe with various geographical features and labels. There are also sections for 'EXERCÍCIOS NUMÉRICOS' and 'AULAS PRÁTICAS'. On the right side, there are buttons for 'Add an activity or resource' and 'Edit'.

Geodesia e Aplicações – Apresentação

FCUL-EG

4

2

Posicionamento

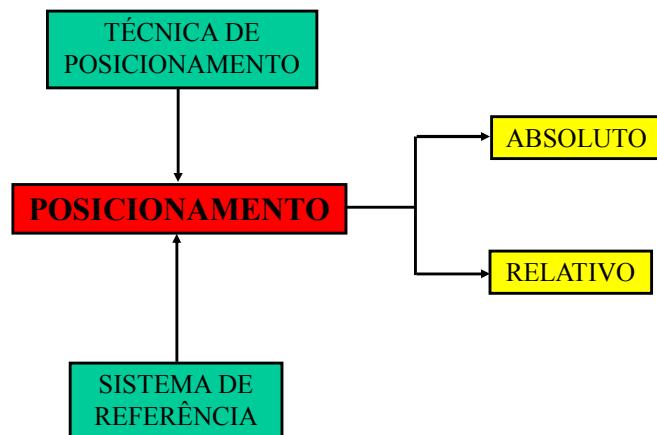
1.1 Definição: determinação da posição de um qualquer ponto num qualquer sistema de referência, onde as respectivas coordenadas são obtidas por um dado método (matemático), recorrendo a uma determinada técnica de observação (instrumental).

- A posição deve ser independente da técnica utilizada, ao passo que a respectiva precisão de posicionamento é dependente do método e técnica utilizados.

1.2 Tipos de Posicionamento: Absoluto e Relativo.

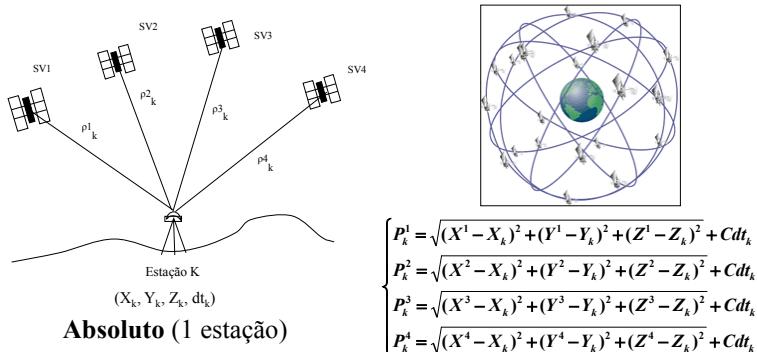
1.3 O Posicionamento é exemplo do Problema Directo da geodesia: determinar as coordenadas a partir das observações nas estações, ou entre os pontos de referência e as estações.

Posicionamento



Posicionamento Absoluto

2.1 Exemplo GPS: determinação directa das coordenadas geodésicas de um ponto com um único receptor.



Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

3

Posicionamento Absoluto

2.2 Exemplo Astronomia Geodésica: determinação directa das coordenadas astronómicas (Φ, Λ) de uma estação por observação de estrelas nas sua passagem meridiana ou no cruzamento do almucântara $Z=30^\circ$.

Dados1: posições médias aparentes das estrelas (α, δ) das Efemérides FK5;
Dados2: TsidMG, Xp, Yp, Δ TUC
Observações: distâncias zenitais (Z) e TUC

Método da Latitude: Pares de Estrela em passagens superiores opostas (Talbot);

Método da Longitude: Registos TU em posições simétricas na culminação superior;

Métodos combinado: Cruzamento com o almucântara $Z=30^\circ$.

Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

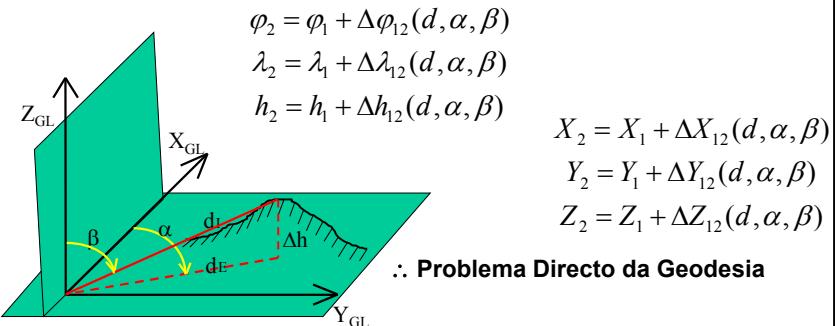
4

2

Posicionamento relativo

3. Método Terrestre

a) Este posicionamento resulta da observação por métodos directos e/ou indirectos da distância, azimute e distância zenithal (coordenadas polares no sistema de referência geodésico local) de uma estação para outra:



Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

5

Posicionamento relativo

3. Método Terrestre



Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

6

3

Posicionamento relativo

3. Método Terrestre

Campanha
Geodésica dos
Açores (Filomena
Aguiar, Faial
1987)



Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

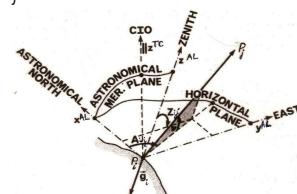
7

Posicionamento relativo

3.1 Terrestre Tridimensional – com (Φ, Λ)

a) Vector topocêntrico (inter-estação) de P_i para P_j :

$$\Delta r_{ij}^{AL} = \Delta r_{ij} \vec{u}_{ij}^{AL} = d_{ij} \begin{bmatrix} \sin Z_{ij} \cos A_{ij} \\ \sin Z_{ij} \sin A_{ij} \\ \cos Z_{ij} \end{bmatrix}$$



b) transformação para o sistema TC

$$\Delta \vec{r}_{ij}^{TC} = R_3(\pi - \Lambda_i) \cdot R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_i\right) \cdot P_2 \cdot \Delta \vec{r}_{ij}^{AL}$$

$$\Delta r_{ij}^{TC} = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}$$

c) Vector posição P_j no sistema TC

$$\vec{r}_j^{TC} = \vec{r}_i^{TC} + \Delta \vec{r}_{ij}^{TC}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

8

Posicionamento relativo

3.2 Terrestre Tridimensional – com (φ, λ) e (η, ξ)

a) Transformar o vector topocêntrico (inter-estação) para sistema GL:

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{GL} = R_3(A_{ij} - \alpha_{ij}) \cdot R_2(-\xi_i) \cdot R_1(\eta_i) \cdot \Delta\vec{r}_{ij}^{AL}$$

b) transformação para o sistema geodésico G

$$\Delta\vec{r}_{ij}^G = R_3(\pi - \lambda_i) \cdot R_2\left(\frac{\pi}{2} - \phi_i\right) \cdot P_2 \cdot \Delta\vec{r}_{ij}^{GL}$$

c) Vector posição P_j no sistema G

$$\vec{r}_j^G = \vec{r}_i^G + \Delta\vec{r}_{ij}^G$$

d) Transformação para TC

$$\vec{r}_j^{TC} = \vec{r}_0^{TC} + \mu \cdot R_1(\varepsilon_x) \cdot R_2(\varepsilon_y) \cdot R_3(\varepsilon_z) \cdot \vec{r}_j^G$$

Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

9

Posicionamento relativo

4. Métodos Extraterrestres (<http://www.iers.org/>)

a) Neste métodos de posicionamento, a partir de 2 ou mais pontos, são efectuadas medições em simultâneo para um ou mais objectos espaciais:

b) Dependendo do método utilizado, pode-se obter apenas a direcção do vector (co-senos directores) que une as estações, as distâncias ou, então, o vector completo (componentes);

c) A generalidade dos métodos:

- 1 – Sistema de posicionamento de Interferometria de base longa – VLBI;
- 2 – Sistemas de posicionamento relativo com laser – LLR e SLR;
- 3 – Sistema de Posicionamento - DORIS (*Détermination d'Orbit et Radiopositionnement Intégrés par Satellite*);
- 4 – Sistemas de Posicionamento via Satélite - GPS, Glonass e Galileo;
- 5 – Sistemas de posicionamento através da observação de direcções para os satélites (só dão os co-senos directores do vector inter-estação);

d) Ver descrição dos métodos em Vanícek and Krakiwski (1981, §16.1) & Torgue (2003)

Geodesia e Aplicações – Aula 1

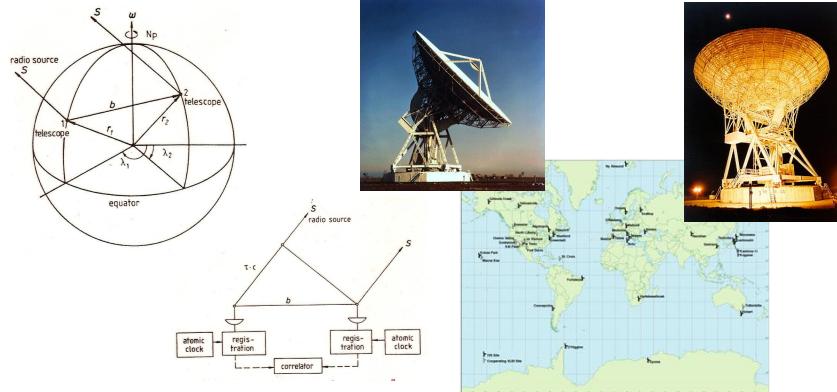
FCUL-EG

10

Posicionamento relativo

4.1 VLBI (<http://ivscc.gsfc.nasa.gov/>)

a) Princípio do método de Rádio-Interferometria de base longa



11

Posicionamento relativo

4.2 SLR - rede do ILRS

a) Uma estação envia cerca de 10^{15} fotões/impulso e regressam apenas 2-3 fotões/impulso, suficiente para medir a distância estação-satélite.
(<http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>)



12

Posicionamento relativo

4.3 DORIS (<http://ids.cls.fr/>)

- a) O sistema baseia-se no efeito Doppler - a frequência do sinal recebido no satélite difere da frequência de transmissão na estação;
- b) É utilizado para: determinação de órbitas; estudos do campo gravítico e da rotação da Terra; posicionamento de precisão e navegação de satélite.



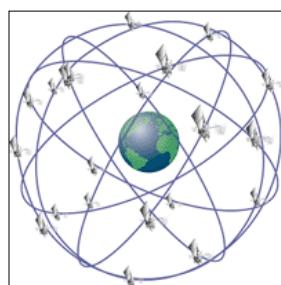
Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

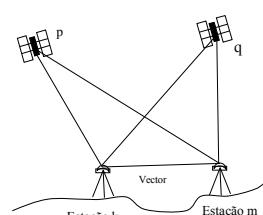
13

Posicionamento relativo

4.4 GNSS



Relativo/diferencial
(2 ou mais receptores)



$$(X_m, Y_m, Z_m) = (X_k, Y_k, Z_k) + (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$$

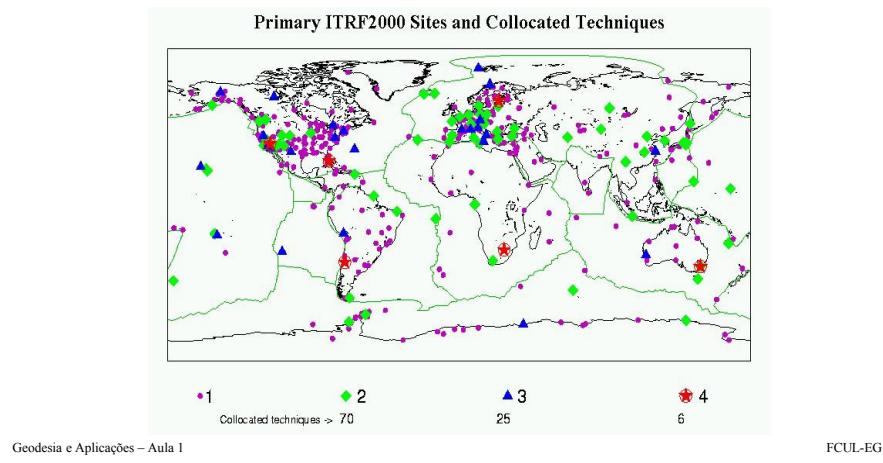
Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

14

Posicionamento relativo

4.5 Rede de Estações Permanentes do IGS



15

Problema Inverso da Geodesia

5. Definição: dadas as coordenadas de dois pontos P_i e P_j no sistema geodésico G, calcular a distância espacial, o azimute e a distância zenithal (coordenadas polares no sistema geodésico local GL).

5.1 Posicionamento relativo tridimensional geodésico

$$\Delta\vec{r}_{ij}^{GL} = P_2 \cdot R_2 \left(\phi_i - \frac{\pi}{2} \right) \cdot R_3 (\lambda_i - \pi) \cdot \Delta\vec{r}_{ij}^G$$

com $\Delta\vec{r}_{ij}^G = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}_G$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de inversão de y

Geodesia e Aplicações – Aula 1

FCUL-EG

16

Problema Inverso da Geodesia

5.1 Posicionamento relativo tridimensional geodésico

Resolvendo a seguinte relação em ordem às observações

$$\Delta r_{ij}^{GL} = \Delta r_{ij} \bar{r}_{ij}^{GL} = \Delta r_{ij} \begin{bmatrix} \sin Z_{ij} \cos \alpha_{ij} \\ \sin Z_{ij} \sin \alpha_{ij} \\ \cos Z_{ij} \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\begin{cases} \Delta r_{ij}^{GL} = \|\Delta \bar{r}_{ij}\| = \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 + \Delta z_{ij}^2} \\ \alpha_{ij}^{GL} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij} + \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2}} \\ Z_{ij}^{GL} = \operatorname{arcsen}(\Delta z_{ij} / \Delta r_{ij}) - \pi/2 \end{cases}$$

Estas fórmulas servem, por exemplo, para converter o vector de observação GPS em observações “clássicas”.

Problema Inverso da Geodesia

5.2 Posicionamento relativo tridimensional astronómico

$$\text{ou } \Delta \bar{r}_{ij}^{AL} = P_2 \cdot R_2 \left(\Phi_i - \frac{\pi}{2} \right) \cdot R_3 (\Lambda_i - \pi) \cdot \Delta \bar{r}_{ij}^{TC}$$

$$\Delta \bar{r}_{ij}^{AL} = R_1 (-\eta_i) \cdot R_2 (\xi) \cdot R_3 (-\delta \alpha_{ij}) \cdot \Delta \bar{r}_{ij}^{GL}$$

resultando

$$\begin{cases} A_{ij}^{AL} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij} + \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2}} \\ Z_{ij}^{AL} = \operatorname{arcsen}(\Delta z_{ij} / \Delta r_{ij}) - \pi/2 \end{cases}$$

Posicionamento Vertical Relativo

6. Nivelamento trigonométrico

- a) Este tipo de posicionamento relaciona-se com a determinação da posição vertical (altitude) de um ponto em relação a outro – diferença de altitude ou nívelamento;
- b) A determinação de desniveis com base no nivelamento trigonométrico requer a observação das distâncias zenitais e observação ou cálculo (prob. inverso) da distância elipsoidal;
- c) A refracção vertical provoca erros nos valores observados das distâncias zenitais (os valores angulares sofrem um desvio colocando a direcção aparente da visada mais elevada do que a direcção verdadeira);
- d) As zenitais recíprocas e simultâneas eliminam este efeito;

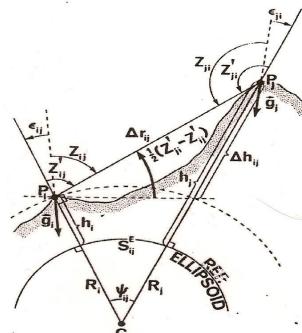
Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

- a) Observações: Z_{ij} e Z_{ji}
- b) Cálculos: S_{ij}^E e α_{ij} , desvios ε_{ij} e ε_{ji}
- c) As distâncias zenitais verdadeiras Z_{ij} e Z_{ji} devem ser corrigidas dos desvios da vertical para serem convertidos em distâncias zenitais geodésicas Z'_{ij} e Z'_{ji} :

$$\varepsilon_{ij} = \xi_i \cos(\alpha_{ij}) + \eta_i \sin(\alpha_{ij})$$

$$\varepsilon_{ji} = \xi_j \cos(\alpha_{ji}) + \eta_j \sin(\alpha_{ji})$$



Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

d) Os azimutes geodésicos como não são observados (via azimute astronómico) em todos os vértices (somente 1 a 3 azimutes), eles têm que ser deduzidos das coordenadas geodésicas dos pontos através do problema inverso;

e) Zenitais reduzidas: $Z'_{ij} = Z_{ij} + \xi_i \cos(\alpha_{ij}) + \eta_i \sin(\alpha_{ij})$
 $Z'_{ji} = Z_{ji} + \xi_j \cos(\alpha_{ji}) + \eta_j \sin(\alpha_{ji})$

f) As distâncias geodésicas não são observadas entre todos os vértices (somente 1 a 3 distâncias), por isso, têm que ser deduzidas das coordenadas geodésicas dos pontos através do problema inverso;

Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

g) Para linhas curtas (< 10 Km) é suficiente considerar a distância geodésica "s" entre os ponto P_i e P_j igual ao arco esférico de raio $R=(a+b)/2$ (solução esférica do problema inverso);

h) Após a redução das zenitais e do cálculo da distância geodésica é possível determinar o desnível geodésico, e

$$h_j = h_i + \Delta h_{ij} = h_i + s_{ij} \left(1 + \frac{h_m}{R} + \frac{s_{ij}^2}{12R^2} \right) \lg \left(\frac{Z'_{ji} - Z'_{ij}}{2} \right)$$

i) Onde h_m é a altitude média ($h=(h_1+h_2)/2$). Esta depende de h_{ij} , por isso o cálculo é feito em duas iterações, no entanto, como os desníveis são pequenos é suficiente considerar a altitude média igual à altitude de i.

Posicionamento Vertical Relativo

6.1 Nivelamento trigonométrico

- g) Em condições óptimas, este processo, permite precisões da ordem de $\sigma_z = 1''$ e $\sigma_{\Delta h} = 10$ cm, para comprimentos de 10 Km. Na prática a precisão é relativamente inferior;
- h) Por esta razão, e devido ao aparecimento do sistema GPS associado aos mais recentes modelos de geóide, este método de nivelamento trigonométrico na geodesia está em desuso;
- i) A altimetria de toda a rede geodésica, desde a 1^a à 3^a ordem, foi calculada com base no nívelamento trigonométrico, por vezes sem observação de zenitais recíprocas;
- j) Com o GPS e um simples método de geóide consegue-se avaliar a imprecisão da rede altimétrica.

Conversão de coordenadas

7. Coordenadas geodésicas

- a) Com frequência na geodesia é necessário recorrer às posições no elipsóide associado a um sistema de referência, para isso torna-se necessário fazer a conversão de coordenadas entre geodésicas elipsoidais e rectangulares;

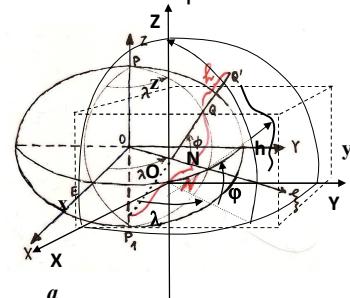
b) Conversão directa

$$(\varphi, \lambda, h) \rightarrow (x, y, z)$$

$$x_p = (N + h_p) \cos \varphi_p \cos \lambda_p$$

$$y_p = (N + h_p) \cos \varphi_p \sin \lambda_p$$

$$z_p = [N(1 - e^2) + h_p] \sin \varphi_p$$



Conversão de coordenadas

7. Coordenadas geodésicas

c) Conversão inversa $(x,y,z) \rightarrow (\varphi, \lambda, h)$

1- Cálculo da longitude λ

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{Y_\varrho}{X_\varrho} \Rightarrow \lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{Y_\varrho}{X_\varrho} \right)$$

2- Cálculo da latitude φ (Método iterativo de H&M)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z_\varrho}{\sqrt{X_\varrho^2 + Y_\varrho^2}} \left\{ 1 + \frac{e^2 N \operatorname{sen} \varphi}{Z_\varrho} \right\}$$

com valor inicial dado por: $\operatorname{tg} \varphi^{(0)} = \frac{Z_\varrho}{\sqrt{X_\varrho^2 + Y_\varrho^2}} \left\{ \frac{1}{1 - e^2} \right\}$

Conversão de coordenadas

7. Coordenadas geodésicas

c) Conversão inversa $(x,y,z) \rightarrow (\varphi, \lambda, h)$

3- Cálculo da altitude h

$$h = \frac{\sqrt{X_\varrho^2 + Y_\varrho^2}}{\cos \varphi} - N$$

ou

$$h = \frac{Z_\varrho^2}{\operatorname{sen} \varphi} - N + e^2 N$$

Transformação de Coordenadas

5. Transformação tridimensional de Helmert entre STC

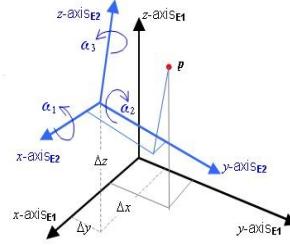
a) A transformação entre dois sistemas tridimensionais cartesianos é realizada, normalmente, através de uma Transformação de Helmert a 7 parâmetros (3 translações, 3 rotações e um factor de escala).:

$$\vec{X}_T = \vec{c} + \mu R \vec{X}$$

onde

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & d\alpha_3 & -d\alpha_2 \\ -d\alpha_3 & 1 & d\alpha_1 \\ d\alpha_2 & -d\alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na sua forma matricial, para transformações com pequenas rotações, designa de **Método de Transformação Bürsa-Wolf**.



Rotações no sentido anti-horário, de acordo com o método “Coordinate Frame Rotation Transformation” (sentido horário: método “Position Vector Transformation”)

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

- b) Este tipo de transformação tem a vantagem de não ser necessário o conhecimento de informação *a priori* do sistema geodésico (parâmetros do elipsóide), é função apenas das coordenadas dos dois sistemas;
- c) Basta unicamente o conhecimento de 3 pontos no espaço com coordenadas conhecidas nos dois sistemas para se determinar o conjunto de parâmetros;
- d) Para a determinação de 7 parâmetros são necessárias 7 equações no mínimo;
- e) Cada ponto contribui com 3 equações de relação, uma por cada coordenada;
- f) Se ambos os sistemas têm os seus eixos paralelos, então são necessários apenas 4 parâmetros, as 3 translações e o factor de escala;
- g) O factor de escala teoricamente não existe (escala unitária), mas devido à imprecisão das observações e à utilização de escalas de comprimento diferentes (metro padrão, velocidade da luz vezes unidade de tempo, etc.), resulta sempre um pequeno factor de escala próximo da unidade, $\mu = 1 + d\mu$.

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

h) Como os eixos normalmente são quase paralelos, as rotações resultam muito pequenas, e sendo os ângulos muito pequenos as funções co-seno e seno simplificam-se ($\cos d\alpha = 1$, $\sin d\alpha = d\alpha$) dando origem a uma matriz de rotação (produto de 3 matrizes de rotação) muito simplificada:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & d\alpha_3 & -d\alpha_2 \\ -d\alpha_3 & 1 & d\alpha_1 \\ d\alpha_2 & -d\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = I + dR$$

i) O sistema de equações deve ser escrito na forma de modelo linearizado, e com redundância de dados (mais de 3 pontos) o sistema é resolvido pelo **método de ajustamento de mínimos quadrados**:

$$\begin{aligned} A_i \cdot d\bar{p} &= \bar{L} \\ d\bar{p} &= (A_i^T \cdot A_i)^{-1} \cdot A_i^T \cdot \bar{L} \end{aligned}$$

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

j) Na relação inicial do sistema de equações deve-se considerar o seguinte:

$$\vec{c} = (\vec{c}) + d\vec{c}; \quad \mu = 1 + d\mu; \quad R = I + dR$$

resultando: $\vec{X}_{T_i} - \vec{X}_i - (\vec{c}) = d\vec{c} + d\mu\vec{X} + dR\vec{X}$

k) Obtém-se então o sistema na forma linearizada: $A_i \cdot d\bar{p} = \bar{L}_i$

onde:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_i & 0 & -z_i & y_i \\ 0 & 1 & 0 & y_i & z_i & 0 & -x_i \\ 0 & 0 & 1 & z_i & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{L}_i = \begin{bmatrix} x_{T_i} - x_i - c_1 \\ y_{T_i} - y_i - c_2 \\ z_{T_i} - z_i - c_3 \end{bmatrix}$$

com $\bar{L}_i = \vec{0}$

$$d\bar{p} = [dc_1 \ dc_2 \ dc_3 \ d\mu \ d\alpha_1 \ d\alpha_2 \ d\alpha_3]^T$$

Transformação de Coordenadas

5.1 Transformação tridimensional de Helmert

∴ Em resumo: - escolhe-se um conjunto de pontos (>2) nos quais são conhecidas as coordenadas em ambos os sistemas;
- determinam-se os parâmetros por mínimos quadrados;
- aplicam-se os parâmetros pela relação inicial aos restantes pontos dos quais só se conhecem as coordenadas num dos sistemas.

∴ A transformação inversa é simétrica, i.e., basta aplicar os parâmetros com sinal contrário

Transformação de Coordenadas

5.2 Parâmetros Nacionais da Transformação de Helmert

a) (sentido das rotações: horário, “Position Vector Transformation”)

ETRS89 para:	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	R_x (°)	R_y (°)	R_z (°)	Escala (ppm)
Datum Lx	+283.088	+70.693	-117.445	+1.157	-0.059	+0.652	+4.058
Datum 73	+230.994	-102.591	-25.199	-0.633	+0.239	-0.900	-1.950

b) (sentido das rotações: horário, “Position Vector Transformation”)

Datum 73 para:	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	R_x (°)	R_y (°)	R_z (°)	Escala (ppm)
Datum Lx	+49.137	+179.924	-95.757	-2.00	+0.33	-1.42	+6.80
ED50	-170.885	+223.069	+141.98	-0.79	-0.22	-0.65	+5.63

Nota: O IGP (DGT) aplica as rotações de acordo com “Position Vector Transformation”

Transformação de Coordenadas

5.2 Parâmetros Nacionais da Transformação de Bürsa-Wolf

c) Aplicação dos Parâmetros na Transformação de Coordenadas

DX (m)	DY (m)	DZ (m)	Esc (ppm)	Rot. X (")	Rot. Y (")	Rot. Z (")
-231,03	102,62	26,84	1,786	-0,615	0,198	1,786

1,00000179 -2,9816E-06 9,5993E-07 8,6588E-06

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ETR89} = \begin{bmatrix} DX + \mu \alpha_1 X & +\mu \alpha_2 Y & -\mu \alpha_3 Z \\ DY - \mu \alpha_1 X & +\mu Y & +\mu \alpha_3 Z \\ DZ + \mu \alpha_1 X & -\mu \alpha_2 Y & +\mu Z \end{bmatrix}_{D73}$$

X= 4936172,422m
Y= -615880,0092m
Z= 3979409,019m

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{X=} & -231,030 & 4936181,238 & -5,333 & -3,820 & = & \mathbf{4935941,056m} \\ \mathbf{Y=} & 102,620 & & -42,741 & -615881,109 & = & \mathbf{-615833,095m} \\ \mathbf{Z=} & 26,840 & & 4,738 & -1,836 & 3979416,127 & = & \mathbf{3979445,869m} \end{array}$$

Redes Geodésicas

1. Redes geodésicas

a) Fases de realização de uma Rede Geodésica

1- Observação Geodésica – Observações de ângulos, distâncias, desniveis, vectores entre os vértices geodésicos da rede, coordenadas, desvios da vertical e gravimetria, com a aplicação das respectivas correcções e reduções;

2- Encadeamento Geodésico - Cálculo prévio das coordenadas dos vértices da rede através do transporte de coordenadas (problema directo da geodesia usando apenas um dos possíveis caminhos), no elipsóide ou plano cartog.;

3- Ajustamento da Rede – Com observações redundantes, as coordenadas da rede devem resultar de um ajustamento de observações pelo MMQ (única e precisa).

Redes Geodésicas

1. Redes geodésicas

b) Actualmente, as redes geodésicas são concebidas para dar resposta a diferentes problemas;

c) A Geodesia já não se limita unicamente à concepção de redes de apoio à cartografia e à topografia para a elaboração de mapas e cartas;

d) Hoje em dia constroem-se:

- redes de apoio (cartog., obras, etc.);
- redes permanentes de apoio (GPS RTK);
- redes de monitorização de estruturas;
- redes de monitorização geodinâmica;
- redes dinâmicas globais.

Redes Geodésicas

1.1 Encadeamento geodésico

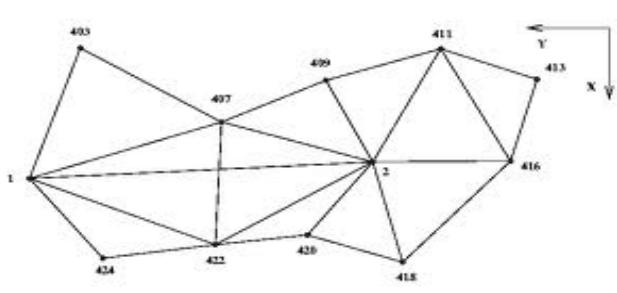
a) Cálculo de coordenadas aproximadas

- O transporte de coordenadas para todos os pontos da rede é feito a partir de um ponto inicial – *ponto origem do datum* – (onde, em termos clássicos, foram efectuadas observações astronómicas, observações azimutais e vários comprimento), ou um conjunto de pontos fiduciais – *referencial primordial*;
- Resolvendo-se sucessivamente os triângulos da rede e aplicando as fórmulas do problema directo da geodesia às observações, obtém-se as coordenadas iniciais;
- Dos múltiplos percursos para o transporte de coordenadas, basta escolher um qualquer caminho para se transportarem as coordenadas a todos os pontos da rede.

Redes Geodésicas

1.1 Encadeamento geodésico

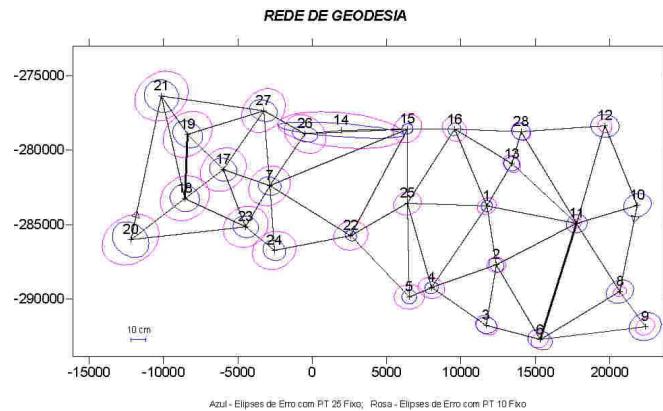
b) Observação da rede



- Todas as observações devem ser corrigidas dos erros respectivos e reduzidas ao elipsóide de referência através das correcções de redução

Redes Geodésicas

c) Exemplo: rede clássica do TP I

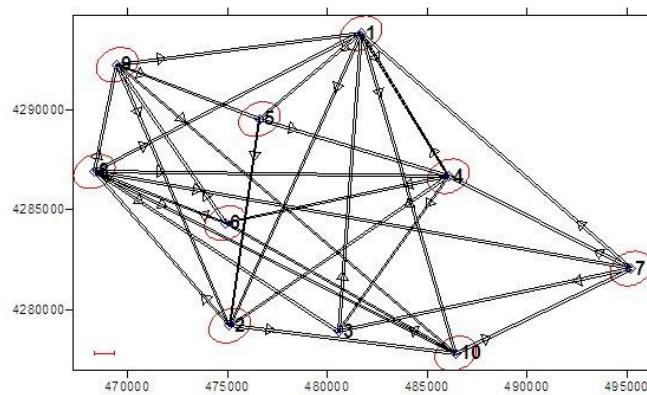


Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

Redes Geodésicas

c) Exemplo: rede GPS do TP I



Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

Redes Geodésicas

1.1 Encadeamento geodésico

b) Exemplo numérico do exercício prático

1- Determinam-se o lado **b** por;

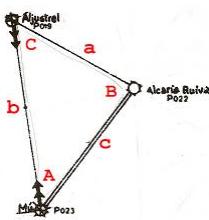
$$b = \arcsen\left(\frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}\right) \cdot R_a$$

2- Calcula-se o azimute *Mú-Alcaria* a partir do azimute e do ângulo medido em *Mú*;

3- Aplica-se o problema directo a partir de *Mú* para *Alcaria* e *Aljustrel*;

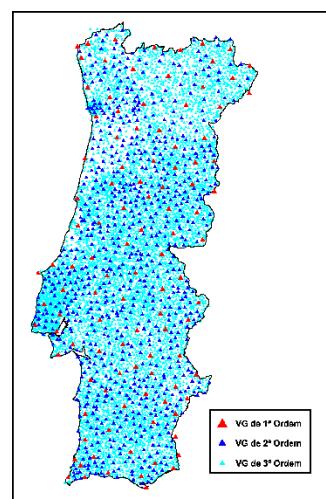
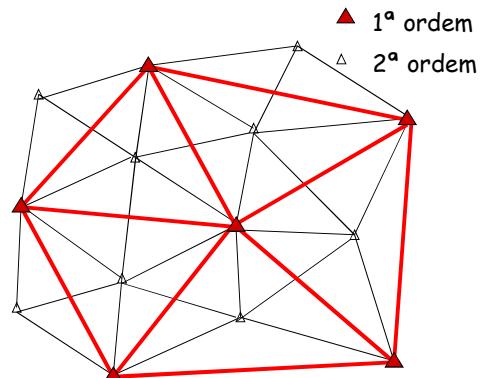
4- Determina-se o lado **a** e resolvem-se os triângulos adjacentes;

5- Procede-se de igual forma e repete-se o processo.



Redes Geodésicas

Rede geodésica nacional



Redes Geodésicas

1.2 Ajustamento de redes

- a) O modelo matemático de um ajustamento é constituído por um modelo funcional e por um modelo estocástico;
- b) O **modelo funcional** estabelece a relação matemática entre observações e coordenadas (os parâmetros do sistema) e é dado na sua forma geral por;

$$f(\vec{x}_t, \vec{l}_t) = \vec{0}$$

- c) O **modelo estocástico** define e caracteriza a estatística e a correlação das observações e coordenadas e é constituído pelo conjunto de variâncias e covariâncias do sistema $\Sigma_{x,l} = [\Sigma_{xx}, \Sigma_{xl}, \Sigma_{lx}, \Sigma_{ll}]$

Observações Clássicas

1.3 Observações geodésicas clássicas

- a) São as grandezas necessárias à determinação de coordenadas dos vértices de uma rede geodésica:
 - 1 – Azimutes Astronómicos
 - 2 – Ângulos (direcções) azimutais
 - 3 – Comprimentos
 - 4 – Distâncias Zenitais (reduções na geodesia bidimensional)
 - 5 – Desníveis (nivelamento geométrico)
- b) Sendo obtidas num sistema AL, estas devem ser sujeitas às típicas correcções instrumentais e atmosféricos, e às correcções de redução ao elipsóide (AL → GL → G).

Observações Clássicas

2.1 Tipo de Erros

- a) Quanto à sua natureza
 - Aleatórios
 - Sistemáticos
 - Periódicos
 - Grosseiros

- b) Quanto à sua fonte
 - Instrumentais (aleatórios, sistemáticos e periódicos)
 - Operação (aleatórios, sistemáticos e grosseiros)
 - Atmosféricos (aleatórios, sistemáticos e periódicos)

Observações Clássicas

2.2 Conceitos

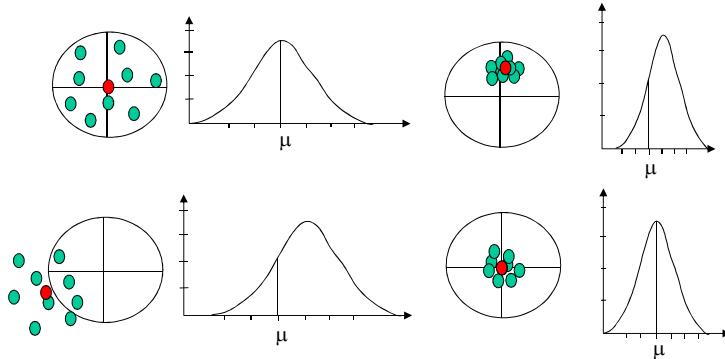
Precisão (ou incerteza padrão): traduz o grau de conformidade ou a dispersão das medidas de uma mesma quantidade. Se a dispersão dos valores for pequena (σ pequeno), então as medidas dizem-se precisas.

Exactidão (ou precisão absoluta): traduz a proximidade do conjunto das medidas, ou da sua média, relativamente ao valor médio (μ). Ou ainda, traduz um enviezamento entre o valor observado e o valor verdadeiro, provocado por um erro sistemático.

Observações Clássicas

Precisão \Leftrightarrow valor de σ

Exactidão \Leftrightarrow valor de $(\mu-x)$



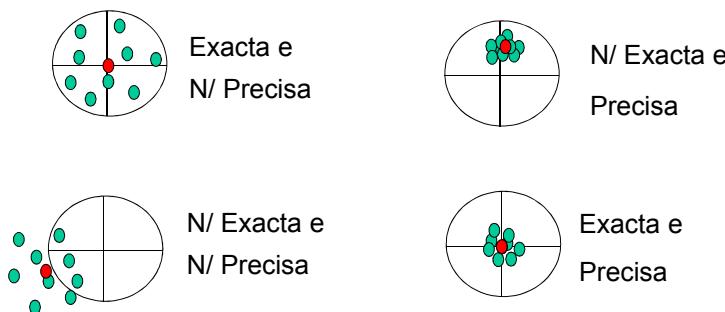
Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

Precisão \Leftrightarrow valor de σ

Exactidão \Leftrightarrow valor de $(\mu-x)$



Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

2.3 Teoria e análise de erros de observação

a) Numa medição de qualquer tipo intervêm várias causas de erro;

b) O erro total ε , proveniente dos erros devidos às diferentes causas (x, y, z, \dots) é dado por

$$\varepsilon = f(x, y, z, \dots)$$

a qual pode ser expressa num desenvolvimento em série de Mac-Laurin

$$\varepsilon = f(0,0,0,\dots) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \cdot x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \cdot y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_0 \cdot z + \dots$$

c) Admitindo que os erros (x, y, z, \dots) são muito pequenos, a série pode ser truncada na 1ª ordem e, consequentemente, **os erros podem ser considerados independentes** e ser estudados em separado.

Observações Clássicas

2.4 Erros instrumentais e atmosféricos

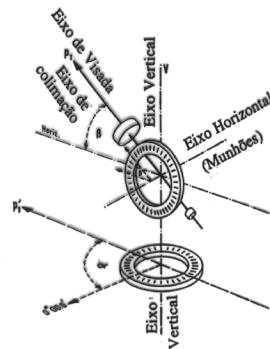
Erros	Azimutais	Zenitais	Comprimentos
Instrumentais	1- Falta de verticalidade do Eixo Principal; 2 – Falta de horizontalidade do eixo secundário; 3- Colimação; 4- Má graduação do limbo; 5- Excentricidades; 6- Inclinação do limbo; 7- Torção	1- Erro de índice ou colimação vertical	1- Excentricidade (Constante aditiva); 2- Catenária (Invar)
Atmosféricos	1- Refração lateral; 2- Tremelina	1- Refração vertical	1- Refração; 2- Variação de frequência;

Observações Clássicas

2.5 Erros do Teodolito

a) Condições geométricas de construção do Teodolito

- 1- Os seus eixos devem ser perpendiculares entre si;
- 2- O limbo deve ser perpendicular ao eixo principal;
- 3- O eixo principal deve passar pelo centro do limbo;
- 4- A graduação do limbo deve ser uniforme;



Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

2.5 Erros do Teodolito

b) A não satisfação destas condições origina erros instrumentais;

c) Estas condições advêm do facto do sistema de referência instrumental dever, em condições ideais de observação, ser coincidente ao sistema de referência astronómico local (AL);

d) O eixo principal deve coincidir com a vertical de lugar; o plano do limbo deve ficar na horizontal e o plano de pontaria deve ser vertical e conter a vertical de lugar da estação;

e) A não satisfação da 1ª condição origina os erros ditos axiais; a não satisfação da última condição origina erros de má graduação;

f) É importante referir que estes erros estão de igual modo presentes nos teodolitos electrónicos.

Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

2.5 Erros do Teodolito

Modo de operação para colmatar os erros:

- 1 – **Observações Conjugadas** – elimina os erros de colimação, falta de horizontalidade do eixo secundário, excentricidades da linha de pontaria e do limbo;
- 2 – **Reiteração do limbo** – minimizam erros de má graduação do limbo e da sua inclinação e melhora a estatística dos ângulos relativamente a erros de pontaria e refracção;
- 3 – **Rotação progressiva e regressiva da alidade** – elimina erros de folgas e de torção.

Observações encruzadas = conjugadas + rotações contrárias

Observações Clássicas

3.1 Observações de ângulos azimutais

- a) A observação de ângulos azimutais exige um grande cuidado, quer por via dos erros, quer por via do seu tratamento matemático;
- b) Por via dos erros, o método de observação deve ser completo e colmatar todos os erros instrumentais que influenciam nas medições;
- c) Por via do tratamento matemático, as observações angulares devem corresponder a um conjunto de medidas homogéneas (de igual precisão) e o mais independente possível (sem correlação);
- d) Até ao aparecimento dos EDM's modernos eram as medidas mais precisas, desde que efectuadas com o equipamento adequado e usando os métodos mais elaborados;

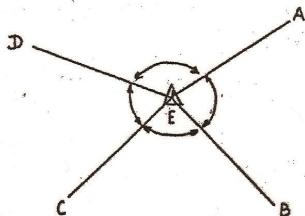
Observações Clássicas

3.1 Métodos de observações angular

a) Método de ângulos justapostos

Apresenta inconvenientes:

- Os ângulos deduzidos ($A\hat{E}C$, $B\hat{E}D$, etc.) têm precisões diferentes das dos ângulos medidos directamente;
- As direcções são dependentes umas das outras



Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

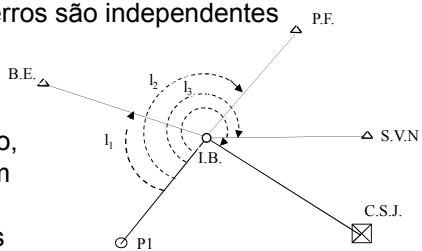
Observações Clássicas

3.1 Métodos de observações angular

b) Método dos giros do horizonte - Mais simples e com mais vantagens:

- Todos os ângulos deduzidos têm a mesma precisão teórica;
- As direcções e os seus erros são independentes

∴ A luz do Sol, a refracção, a névoa e neblina, podem dificultar a visibilidade simultânea das direcções



Geodesia e Aplicações- Aula 2

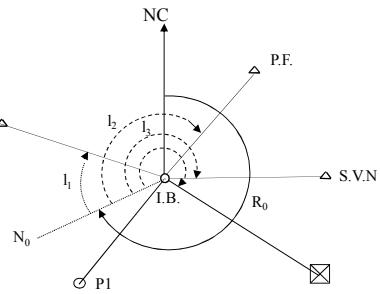
FCUL-EG

Observações Clássicas

3.1 Métodos de observações angular

c) Método dos giros do horizonte com referência externa
(método das direcções)

∴ Este método mantém
as características do
método anterior e resolve
o problema da impossibi-
lidade de observar todos
ao mesmo tempo

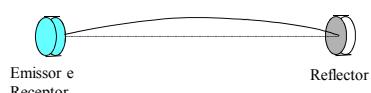


Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

- a) Método directo – Medição com fios de Invar
b) Métodos indirectos – Medição electrónica de distâncias

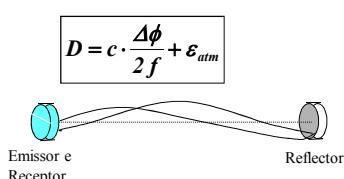
◆ Por tempo de percurso de um impulso



$$D = c \cdot \frac{t}{2} + \varepsilon_{atm}$$
$$\sigma_t = 1\text{ns} \Rightarrow \sigma_D = 15\text{cm}$$

◆ Por diferença de fase

$$\Delta\phi = \phi_c - \phi_0$$



$$D = c \cdot \frac{\Delta\phi}{2f} + \varepsilon_{atm}$$

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

- c) Todos os principais aparelhos electrónicos de medição de distâncias baseiam-se neste princípio;
- d) O tipo de radiação utilizado nas suas ondas de transporte pode ser: radiação luminosa (verde ou azul), radiação infravermelha ou micro-ondas;
- e) No caso da *radiação luminosa* (distanciómetros electro-ópticos) e o *infravermelho*, o sinal de medida é modelado no emissor sobre uma onda portadora, é transmitido para o reflector e devolvido para o receptor que se encontra junto do emissor;
- f) No receptor são comparadas as fases das ondas, emitidas e recebidas, e é deduzida a distância entre emissor-reflector;

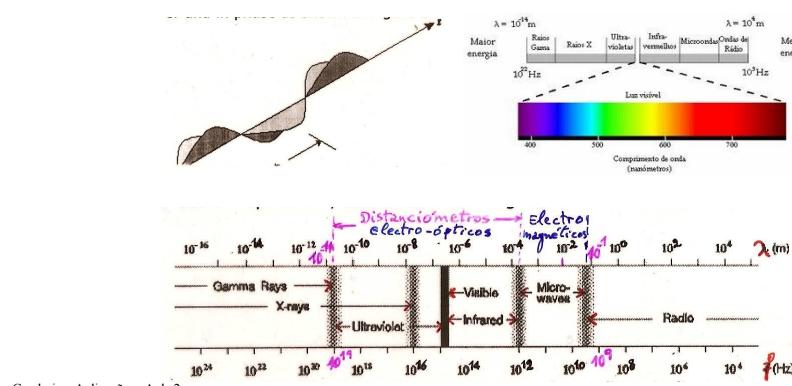
Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

- g) Natureza das ondas electromagnéticas



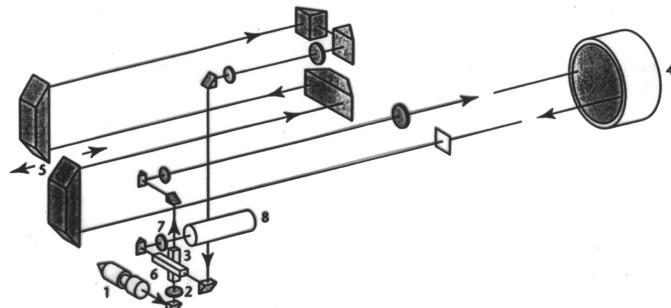
Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

h) Princípio óptico de um distanciómetro (EDM)



Geodesia e Aplicações- Aula 2

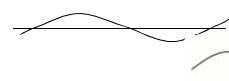
FCUL-EG

Observações Clássicas

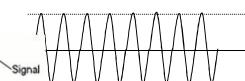
3.2 Métodos de observações de Distâncias

i) Tipos de modulação do sinal do EDM

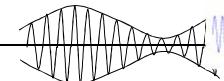
1- Sinal



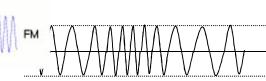
2- Onda portadora



3- Modulação da ampl



AM modulação de frequência



Geodesia e Aplicações- Aula 2

FCUL-EG

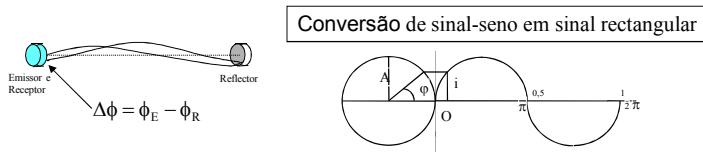
Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

j) Natureza do sinal emitido e recebido

Emissão - $y_E = A \sin(\omega t) = A \sin \phi$

Recepção - $y_R = A \sin[\omega(t + \Delta t)] = A \sin(\phi + \Delta\phi)$



Sendo o sinal contínuo, os valores do sinal emitido y_E e do sinal recebido y_R mudarão com o tempo, mas a diferença de fase $\Delta\phi$ permanecerá constante

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

I) Cálculo da distância

- tempo de percurso

$$T = [N(\text{ciclos completos}) + \Delta N(\text{fracção de ciclo})] \cdot \tau$$

- período da radiação $\tau = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}$

- fracção de tempo

$$\Delta t = \Delta N \cdot \tau = \Delta N \cdot \frac{\lambda}{c} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{c}$$

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

m) Cálculo da distância

- Distância em função de N comprimentos de onda e da diferença de fase

$$D = \frac{c}{2}(N + \Delta N) \cdot \tau = \frac{c}{2}(N \cdot \tau + \Delta t)$$

ou

$$D = \frac{c}{2} \left(N \cdot \frac{\lambda}{c} + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{c} \right) = \left(N + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \right) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

onde $U = \frac{\lambda}{2}$ é chamada a unidade de comprimento do distanciómetro

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

n) Cálculo da distância

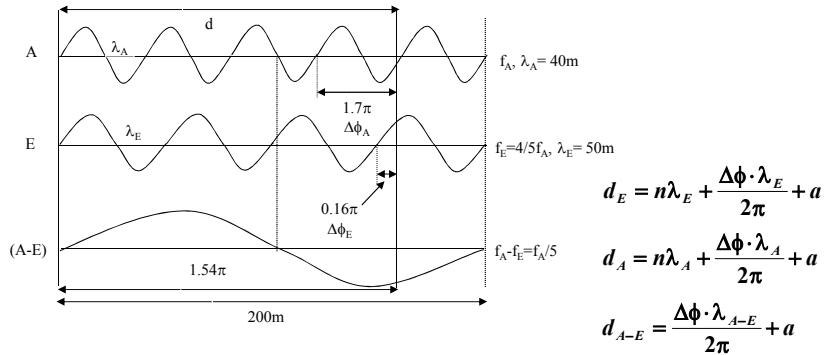
$$D = N \cdot U + L$$

- N é o número inteiro de comprimentos de onda, e é a ambiguidade desta relação de observação, onde apenas o termo da fração de onda é conhecido;
- Esta ambiguidade não é determinada mas resolvida indirectamente através da introdução de mais uma unidade de comprimento (uma segunda onda);
- A mais pequena das unidades é a **unidade fundamental** do distanciómetro e é utilizada para obter a medida fina do valor da distância.

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

o) Frequência portadora não modulada e sua diferença



Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações Clássicas

3.2 Métodos de observações de Distâncias

p) A precisão de um distanciómetro depende, basicamente, da escolha da sua unidade fundamental, em virtude da limitação da medição de diferença de fase ($\approx 1\% \lambda$);

q) Em Geodesia, existem dois tipos fundamentais de distanciómetros de longo alcance: **electro-ópticos** (geodímetros) e os **electromagnéticos** (telurómetros);

r) Os electro-ópticos usam ondas da banda do visível ou do infravermelho; os electromagnéticos usam ondas portadoras da banda das micro-ondas, não exigem inter-visibilidade e permitem alcances até 150 km (usados na Hidrografia);

s) Os modernos distanciómetros electro-ópticos possuem uma portadora “laser” (Light Amplification by Stimulated Emission Radiation).

Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações GNSS

4.1 Métodos de observações

Modos de observação: {
- estático
- cinemático}

Modo estático: {
- estático (fase ou código)
- rápido-estático (fases L1 e L2 + código)}

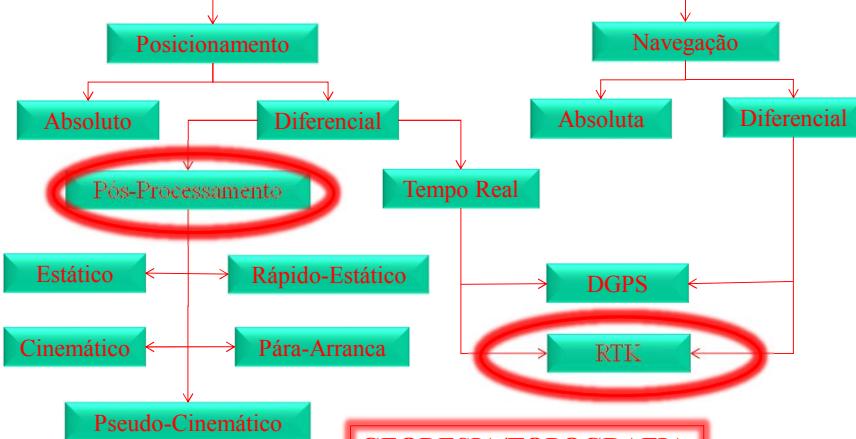
Modo cinemático: {
- Diferencial (código - DGPS)
- RTK (fases L1 e L2 + código - PDGPS)}

Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações GNSS

Métodos de observação



Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações GNSS

4.2 Posicionamento Preciso - PDGNSS

$$\text{Fase observada} \quad \varphi_k^p(t) = \varphi_i^p(t) - \frac{f_p^p(t)}{C} - \varphi_k(t) + N_k^p(t)$$

Diferenças simples da fase observada

$$\Delta_{km}^p = \varphi_k^p(t) - \varphi_m^p(t) = -\frac{f}{C} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - [\varphi_k(t) - \varphi_m(t)] + N_{km}^p$$

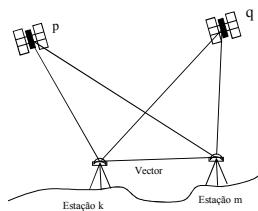
Diferenças duplas da fase observada

$$\Delta_{km}^{pq} = \Delta_{km}^p - \Delta_{km}^q = -\frac{f}{C} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - [\rho_k^q(t) - \rho_m^q(t)] + N_{km}^{pq}$$

$$\text{Com } \rho_m^p = \sqrt{(X^p - X_m)^2 + (Y^p - Y_m)^2 + (Z^p - Z_m)^2}$$

Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG



Observações GNSS

4.2 Posicionamento Preciso - PDGNSS

a) Com observações de 1 hora a 15 segundos de intervalo, observando-se em simultâneo 6 satélites pelas estações k e m, forma-se um sistema de:

$$4 \text{ obs/min} \times 60 \text{ min} \times (6 \text{ sat} - 1) = 1200 \text{ equações}$$

b) Sistema de n observações de diferenças duplas de fase permitem determinar o vector:

$$\Delta X_{km} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)_{km}$$

c) O sistema de equações resolve-se pelo MMQ, resultando a solução e a respectiva matriz de variâncias-covariâncias:

$$\Delta X_{km}; \Sigma_{\Delta X} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{zx}^2 & \sigma_{zy}^2 & \sigma_{zz}^2 \end{bmatrix}$$

Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações GNSS

4.2 Posicionamento Preciso - PDGNSS

d) É possível converter o vector espacial ΔX em observações clássicas (azimute, dist. Zenital e distância linear), sabendo-se as coordenadas geodésicas (φ, λ, h) do ponto estação k, por:

$$\begin{cases} \alpha_{km} = \arctg \left(\frac{-\sin \lambda_k \cdot \Delta X + \cos \lambda_k \cdot \Delta Y}{-\sin \varphi_k \cdot \cos \lambda_k \cdot \Delta X - \sin \varphi_k \cdot \sin \lambda_k \cdot \Delta Y + \cos \varphi_k \cdot \Delta Z} \right) \\ Z'_{km} = \arcsen \left(\frac{\cos \varphi_k \cdot \cos \lambda_k \cdot \Delta X + \cos \varphi_k \cdot \sin \lambda_k \cdot \Delta Y + \sin \varphi_k \cdot \Delta Z}{s} \right) \\ s_{km} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \end{cases}$$

c) E com a relação diferencial entre este dois tipos de vector pode-se obter a respectiva matriz de variâncias-covariâncias, por aplicação da LGPVC:

$$(\alpha, Z, s)_{km}; \Sigma_{\Delta X} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha Z}^2 & \sigma_{\alpha s}^2 \\ \sigma_{Z\alpha}^2 & \sigma_Z^2 & \sigma_{Zs}^2 \\ \sigma_{s\alpha}^2 & \sigma_{sZ}^2 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Observações combinadas

5. Observações geodésicas combinadas

a) É possível combinar todo o tipo de observações clássicas, de triangulação, nivelamento e GNSS, num só sistema de equações de ajustamento tridimensional de uma rede geodésica;

b) Para redes planimétricas, podem-se combinar as observações clássicas de azimutes geodésicos, de direcção azimutal, de distâncias geodésicas e azimutes e distâncias provenientes da conversão de vectores GNSS;

c) Dado que a altitude geodésica (h) é uma grandeza geométrica, para se obter a altitude ortométrica (H) deve-se ainda aplicar um modelo numérico de geóide de forma a resultar

$$H_m = h_m - N_m \quad \text{ou} \quad H_m = h_k + \Delta h_{km} - N_m$$

Geodesia e Aplicações– Aula 2

FCUL-EG

Problemas da Geodesia

1. Considerações:

- a) Uma das finalidades da Geodesia é a determinação das coordenadas de pontos à superfície terrestre num dado sistema de referência, por exemplo, o geodésico elipsoidal (φ, λ, h);
- b) Com as posições determinadas é possível calcular vectores de posição (distância e azimute) entre quaisquer dois pontos não ligados por medições directas;
- c) Em espaços bidimensionais (elipsóide e plano cartográfico) as “observações” transformadas para valores à superfície da Terra, devem ser sujeitas não só a correcções (por ex. a refracção) mas também a correcções de redução inversa;

Problemas da Geodesia

2. Problemas da Geodesia sobre o elipsóide:

∴ **Problema Directo** – com as observações de distância elipsoidal e azimute geodésico ou ângulo azimutal (relação de posição entre pontos) determinar posições (posicionamento relativo, ou transporte de coordenadas);

∴ **Problema Inverso** – com as posições (coordenadas geodésicas) determinar as “observações” de distância elipsoidal e azimute geodésico (relação de posição entre pontos).

Problemas da Geodesia

2. Problemas da Geodesia sobre o elipsóide:

.. **Problema Directo** –
$$\begin{cases} \phi_2 = f_1(\phi_1, \lambda_1, \alpha_{12}, s) \\ \lambda_2 = f_2(\phi_1, \lambda_1, \alpha_{12}, s) \\ \alpha_{21} = f_3(\phi_1, \lambda_1, \alpha_{12}, s) \end{cases}$$

.. **Problema Inverso** –
$$\begin{cases} s = f_4(\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2) \\ \alpha_{12} = f_5(\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2) \\ \alpha_{21} = f_6(\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2) \end{cases}$$

Problemas da Geodesia

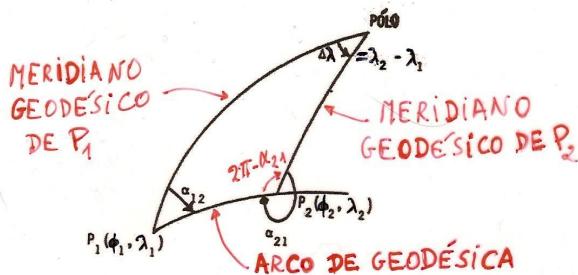
3.1 Problema Directo sobre o elipsóide:

- Determinar as coordenadas (ϕ, λ) de um ponto P_2 e do azimute inverso (α_{21}) , a partir das coordenadas de um ponto P_1 , da sua distância geodésica ao ponto P_2 e do azimute directo (α_{12}) ;
- Conhecidas as coordenadas de um ponto P_1 e as relações de posição entre os pontos P_1 e P_2 , determinar a posição do ponto P_2 ;
- Também designado por *problema de transporte de coordenadas*;
- Existem várias soluções para este problema;
- As soluções do problema podem dividir-se em **três famílias**, de acordo com a curva que utilizam: **geodésica**, **secção normal do elipsóide**, ou **secção normal da esfera** local osculadora ao elipsóide;

Problemas da Geodesia

3.1 Problema Directo sobre o elipsóide:

- f) A base de todas as soluções é o triângulo polar elipsoidal, composto por geodésicas que unem: o Pólo, o ponto P_1 e o ponto P_2 ;



Geodesia e Aplicações- Aula 3

FCUL-EG

Problemas de Geodesia

3.2 Soluções do Problema Directo

- As soluções mais precisa são as designadas por *fórmulas para as grandes geodésica*, que recorrem à resolução de um integral elíptico;
- De entre vários, destacam-se os métodos de **Bessel** (Jordan and Eggert, 1962), **Rainsford** (1955) e **Sodano** (1965) ;
- Entre os métodos de **Bessel** e **Rainsford**, a única diferença é o factor de cálculo que usam, o primeiro usa o quadrado da excentricidade (e^2) e o segundo o achatamento (f);
- O método de **Sodano** tem a vantagem de ambos os problemas (directo e inverso) serem resolvidos de forma directa, não iterativa;

Geodesia e Aplicações- Aula 3

FCUL-EG

Problemas de Geodesia

3.2 Soluções do Problema Directo

- e) As restantes famílias de soluções usam fórmulas aproximadas e, por essa razão, não devem ser usadas para linhas longas (apenas para curtas distâncias <100 Km);
- f) As que usam a esfera local aproximada ao elipsóide são conhecidas por fórmulas para linhas curtas (Bomford, 1983);
- g) A mais conhecida destas é a **fórmula de Puissant** que dá uma exactidão de 1 ppm para linhas de 100 Km (40ppm para 250Km);

Problemas de Geodesia

3.3 Resumo

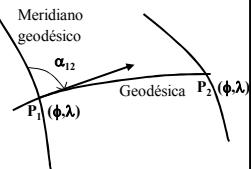
- ∴ Grandes geodésica ($\geq 150\text{Km}$): cálculo integral elíptico
 - 1- Métodos de Bessel (e^2) e de Rainsford (f) – Iterativos
 - 2- Método de Sodano – Directo (ambos os problemas)
- ∴ Médias e pequenas geodésica ($\leq 150\text{Km}$): fórmulas aproximadas
 - 1- Método de Robins: secção normal sobre o elipsóide
 - 2- Método de Puissant: esfera local
- Método de **Legendre-Delambre**: usa o desenvolvimento em série de potências de “ s ” sobre a superfície do elipsóide, usando arcos de geodésicas.

Problema Directo

4. Fórmulas de Legendre-Delambre

a) Se uma geodésica se definir apenas em função da distância "s", as suas equações paramétricas são dadas:

$$\begin{cases} \phi = \phi(s) \\ \lambda = \lambda(s) \\ \alpha = \alpha(s) \end{cases}$$



b) Os desenvolvimentos em série de Legendre-Delambre permitem expressar ϕ , λ e α em funções de potências crescentes de "s":

$$\phi_2 = \phi_1 + d\phi = \phi_1 + \left(\frac{d\phi}{ds} \right)_1 \cdot s + \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right)_1 \cdot \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda = \lambda_1 + \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)_1 \cdot s + \left(\frac{d^2\lambda}{ds^2} \right)_1 \cdot \frac{s^2}{2} + \dots$$

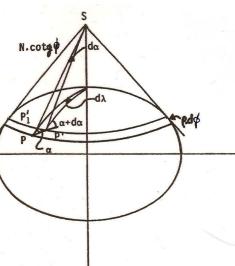
Geodesia e Aplicações- Aula 3

FCUL-EG

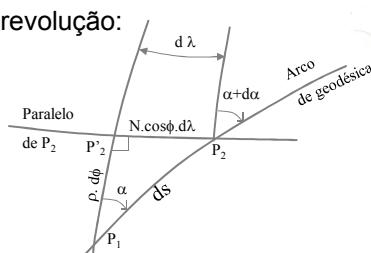
Problema Directo

4. Fórmulas de Legendre-Delambre

c) A resolução destas fórmulas passa pela utilização dos dados ϕ_1 , λ_1 , α_{12} e s_{12} e pela resolução das derivadas do desenvolvimento em série;



d) Triângulo infinitesimal sobre o elipsóide de revolução:



Geodesia e Aplicações- Aula 3

FCUL-EG

Problema Directo

4.1 Primeiras derivadas

d) Do triângulo infinitesimal sobre o elipsóide de revolução extraí-se as relações que dão origem às duas primeiras derivadas:

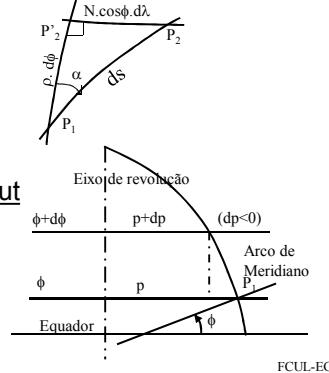
$$ds \cdot \cos \alpha = \rho \cdot d\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\rho}$$

$$ds \cdot \operatorname{sen} \alpha = N \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \Rightarrow \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{N \cos \phi}$$

e) Da derivação da equação de Clairaut

($p \cdot \operatorname{sen} \alpha = K$) e do triângulo infinitesimal sobre o meridiano de P_1 , sai a outra

derivada $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi}{N}$



Geodesia e Aplicações- Aula 3

FCUL-EG

Problema Directo

4.2 Segundas derivadas

d) Diferenciando as primeiras derivadas na forma:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cdot \cos \alpha; \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{V \cdot \operatorname{sen} \alpha}{c \cdot \cos \phi}; \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi$$

em que $\rho = \frac{c}{V^3}$ e $N = \frac{c}{V}$ com $V = \sqrt{1 + e^{12} \cdot \cos^2 \phi}$ e $c = \frac{a^2}{b}$
obtém-se, após algum cálculo, as expressões das 2^{as} derivadas:

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} = \frac{-V^4}{c^2} \cdot (\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi + 3 \cos^2 \alpha \cdot \eta^2 \cdot \operatorname{tg} \phi)$$

$$\frac{d^2 \lambda}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2 \cos \phi} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi \quad \text{com } \eta^2 = e^{12} \cdot \cos^2 \phi$$

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = \frac{V^2}{c^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \phi + \eta^2)$$

Geodesia e Aplicações- Aula 3

FCUL-EG

Problema Directo

4.3 Fórmula de Legendre-Delambre até à ordem 2

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \phi_1 + d\phi = \phi_1 + \frac{V^3}{c} \cdot \cos \alpha \cdot s + \frac{-V^4}{c^2} \cdot (\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi + 3 \cos^2 \alpha \cdot \eta^2 \cdot \operatorname{tg} \phi) \cdot \frac{s^2}{2} + \dots \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + d\lambda = \lambda_1 + \frac{V \cdot \operatorname{sen} \alpha}{c \cdot \cos \phi} \cdot s + \frac{2V^2}{c^2 \cos \phi} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{s^2}{2} + \dots \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12} + 180^\circ + \frac{V}{c} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot s + \frac{V^2}{c^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \phi + \eta^2) \cdot \frac{s^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

- a) Desenvolvimentos de ordens superiores podem ser obtidos com derivações sucessivas, encontram-se até à 5^a ordem em Rapp (1984);
- b) Este desenvolvimento de segunda ordem é suficiente para curtas e médias geodésicas;

Problema Directo

4.4 Considerações finais sobre o problema directo

- a) É um problema importante da Geodesia, é ele que permite o transporte de coordenadas geodésicas ao longo de uma rede, com início no ponto origem do Datum;
- b) No ajustamento de uma rede, são necessários valores iniciais das coordenadas dos vértices, com os quais se calculam os coeficientes das equações de observação de comprimentos, de ângulos e de azimutes sobre o elipsóide;
- c) O cálculo das coordenadas iniciais (brutas ou não ajustadas) dos vértices da rede, pela aplicação destas fórmulas, é a primeira etapa do cálculo de uma rede geodésica – **encadeamento geodésico**;
- d) Tal como numa poligonal em Topografia, antes de se compensar tem que se “transportar” as coordenadas com as quais se determinam os erros de fecho.

Problemas Inverso

5.1 Problema Inverso sobre o Elipsóide

a) A solução deste problema através de desenvolvimentos em série de potências de "s" (Legendre-Delambre) é do tipo iterativo;

b) Disponho as fórmulas da solução do problema directo sob a forma:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{V_1^3}{c} \cdot \cos \alpha_{12} \cdot s + \Delta_1$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{V_1}{c} \cdot \frac{\sin \alpha_{12}}{\cos \phi_1} \cdot s + \Delta_2$$

c) As grandezas Δ_1 e Δ_2 representam os restantes termos da série e são as variáveis que permitem a iteração iniciando-se com valor igual a zero.

Problemas Inverso

5.1 Problema Inverso sobre o Elipsóide

d) Modificando as expressões anteriores para:

$$\frac{V_1^3}{c} \cdot \cos \alpha_{12} \cdot s = \Delta\phi - \Delta_1$$

$$\frac{V_1}{c} \cdot \frac{\sin \alpha_{12}}{\cos \phi_1} \cdot s = \Delta\lambda - \Delta_2$$

e) Dividindo agora as equações membro a membro e alterando a segunda expressão, obtém-se:

$$\tan \alpha_{12} = V_1^2 \cdot \cos \phi_1 \cdot \left(\frac{\Delta\lambda - \Delta_2}{\Delta\phi - \Delta_1} \right)$$

$$s = \frac{c \cdot (\Delta\phi - \Delta_1)}{V_1^3 \cdot \cos \alpha_{12}}$$

Problemas Inverso

6.2 Processo iterativo

a) Valores iniciais (com Δ_1 e $\Delta_2 = 0$):

$$(\alpha_{12})_i = \arctg \left[V_i^2 \cdot \cos \phi_i \cdot \left(\frac{\Delta \lambda}{\Delta \phi} \right) \right]; \quad (s)_i = \frac{c \cdot (\Delta \phi)}{V_i^3 \cdot \cos \alpha_{12}}$$

b) Valores iterados de $(\Delta_1)_i$ e $(\Delta_2)_i$:

$$(\Delta_1)_i = \frac{-V^4}{c^2} \cdot (\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi + 3 \cos^2 \alpha \cdot \eta^2 \cdot \operatorname{tg} \phi) \cdot \frac{s^2}{2};$$

$$(\Delta_2)_i = \frac{2V^2}{c^2 \cos \phi} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{s^2}{2}$$

c) Valores iterados de $(\alpha_{12})_i$ e $(s)_i$:

$$(\alpha_{12})_2 = \arctg \left[V_i^2 \cdot \cos \phi_i \cdot \left(\frac{\Delta \lambda - \Delta_{1i}}{\Delta \phi - \Delta_{2i}} \right) \right]; \quad (s)_2 = \frac{c \cdot (\Delta \phi - \Delta_{1i})}{V_i^3 \cdot (\cos \alpha_{12})_{i-1}}$$

Geodesia e Aplicações– Aula 3

FCUL-EG

Problemas Inverso

6.3 Aplicações

a) As distâncias elipsoidais e azimutes geodésicos são necessários no ajustamento bidimensional das redes geodésicas – cálculo dos coeficientes do sistema de equações.

- Nesse processo só são observados alguns comprimentos (bases geodésicas) e azimutes, todos os restantes valores necessários são calculados pelo problema inverso ou através da resolução de triângulos;

Geodesia e Aplicações– Aula 3

FCUL-EG

Problemas Inverso

6.3 Aplicações

b) Os valores de distâncias elipsoidais e azimutes geodésicos calculados pelo problema inverso da geodesia são necessários no posicionamento vertical – nívelamento trigonométrico.

- Nesse processo só são observadas distâncias zenitais, todos os restantes valores, comprimentos, azimutes e desvios da vertical, são calculados;

Problemas Inverso

6.3 Aplicações

c) A transformação de coordenadas geodésicas (φ, λ) pode ser feito com o recurso aos problemas inverso e directo da geodesia.

- É determinada a média das diferenças em azimute e em escala (distâncias) entre os dois sistemas de coordenadas, em torno do ponto a transformar, estas diferenças são adicionadas aos valores do primeiro sistema para se proceder a um simples transporte de coordenadas no segundo sistema com o problema directo.

Ajustamento de Redes

1. Ajustamento de Redes bidimensionais

a) Fases de cálculo da Rede Geodésica sobre o elipsóide

1- Encadeamento Geodésico - Cálculo prévio das coordenadas dos vértices da rede através do transporte de coordenadas, por intermédio do problema directo da geodesia e, usando apenas um dos possíveis caminhos;

2- Ajustamento da Rede – Dada a redundância das observações efectuadas (conduzem a múltiplas soluções), as coordenadas da rede devem resultar de uma solução de ajustamento de observações por mínimos quadrados (solução única e precisa).

Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

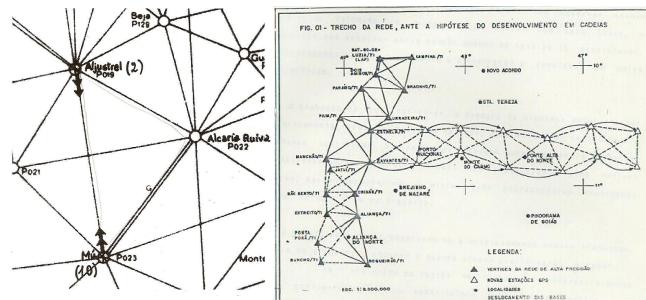
a) Cálculo de coordenadas aproximadas

- O transporte de coordenadas para todos os pontos da rede é feito a partir de um ponto inicial – *ponto origem do datum* – (onde, em termos clássicos, foram efectuadas observações astronómicas, observações azimutais e vários comprimento);
- Resolvendo-se sucessivamente os triângulos da rede e aplicando as fórmulas do problema directo da geodesia às observações, obtém-se as coordenadas iniciais;
- Dos múltiplos percursos para o transporte de coordenadas, basta escolher um qualquer caminho para se transportarem as coordenadas a todos os pontos da rede.

Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

b) Observação da rede

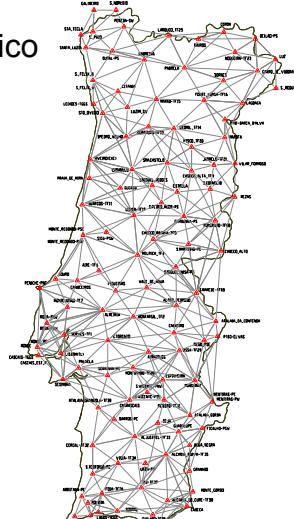
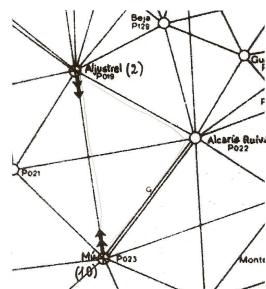


- Todas as observações devem ser corrigidas dos erros respectivos e reduzidas ao elipsóide de referência através das correções de redução

Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

b) Observação da rede



Ajustamento de Redes

1.1 Encadeamento geodésico

b) Exemplo numérico do exercício prático

1- Determinam-se o lado b por;

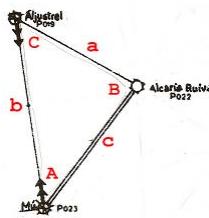
$$b = \arcsen\left(\frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}\right) \cdot R_a$$

2- Calcula-se o azimute *Mú-Alcaria* a partir do azimute e do ângulo medido em *Mú*;

3- Aplica-se o problema directo a partir de *Mú* para *Alcaria* e *Aljustrel*;

4- Determina-se o lado a e resolve-se o triângulo adjacente;

5- Procede-se de igual forma e repete-se o processo.



Ajustamento de Redes

1.2 Modelo Matemático de ajustamento

a) O modelo matemático de um ajustamento é constituído por um modelo funcional e por um modelo estocástico;

b) O **modelo funcional** estabelece a relação analítica entre os parâmetros do sistema (observações e coordenadas) e é dado na sua forma geral por;

$$F(\vec{x}_t, \vec{l}_t) = \vec{0}$$

c) O **modelo estocástico** define a correlação e a estatística dos parâmetros do modelo e é constituído pelo conjunto de variâncias e covariâncias do sistema

$$\Sigma_{x,l} = [\Sigma_{xx}, \Sigma_{xl}, \Sigma_{lx}, \Sigma_{ll}]$$

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

a) Normalmente, é usado o **método paramétrico**, também designado por método da **variação dos parâmetros com equações de observação**:

$$\vec{l}_t = f(\vec{x}_t)$$

- \vec{l}_t : vector dos valores verdadeiros (desconhecidos) das **grandezas observadas**;

- \vec{x}_t : vector dos valores teóricos dos **parâmetros** (incógnitas)

- f é a **aplicação matemática** que transforma o espaço dos parâmetros (coordenadas), de dimensão q , no espaço das observações de dimensão n .

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

b) Usando um qualquer **estimador** (ex.: m.m.q.) temos um **modelo funcional de estimativa**:

$$\hat{\vec{l}}_t = f(\hat{\vec{x}}_t)$$

- $\hat{\vec{l}}_t$: estimativa do vector dos valores verdadeiros das grandezas observadas;

- $\hat{\vec{x}}_t$: estimativa do vector dos parâmetros (coordenadas ajustadas)

- Da diferença entre os valores estimados e o valores teóricos resultam os erros da estimativa, $\vec{l}_t = \hat{\vec{l}}_t - E_t$; $\vec{x}_t = \hat{\vec{x}}_t - E_x$

- A função $f(x)$ é a mesma, poderá sofrer uma linearização.

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

- c) O método dos mínimos quadrados (m.m.q.) é aplicável somente a sistemas lineares;
- d) Dado que a função $f(x)$ do modelo (em geodesia), normalmente, é **não linear** (relações de ângulos e distâncias), deve proceder-se à respectiva linearização para se poder aplicar o m.m.q.;
- e) A **linearização** é feita através do desenvolvimento em série de Taylor, **em torno de um valor aproximado** (x_0), tomando-se apenas a sua parte linear;
- f) Da aplicação do m.m.q. a esse modelo linear resulta uma **correcção aos valores iniciais** dos parâmetros ($\delta = x_t - x_0$), com a qual se obtém uma estimativa mais precisa;

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

- g) Os **valores iniciais** (x_0), com os quais se faz o desenvolvimento em série e permite o cálculos dos coeficientes do sistema linear para a aplicação do m.m.q., são os valores das **coordenadas aproximadas** calculadas com as observações, por aplicação do **problema directo** da geodesia, no **encadeamento geodésico**;
- h) Admitindo que o estimador (método de ajustamento) nos fornece valores ajustados de observações (l), através de uma estimativa dos seus erros (E_l), é necessário, de igual modo, tomar valores iniciais também para o vector de observações;
- i) Os valores iniciais das observáveis (l_0) serão as próprias observações eivadas de erros aleatórios;

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

j) Esta abordagem é legitimada pelo facto de ambos os parâmetros (x, l) serem considerados variáveis aleatórias;

k) Tomemos então, o modelo funcional na seguinte forma

$$F(\hat{x}, \hat{l}) = f(\hat{x}) - \hat{l} = 0$$

e desenvolvemos a função em torno do ponto (x_0, l_0)

$$F(\hat{x}, \hat{l}) = 0 = F(x_0, l_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_0} \cdot (\hat{x} - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial l} \right)_{l=l_0} \cdot (\hat{l} - l_0) + \dots$$

Tomando a definição da função F podemos reescrever o desenvolvimento na sua forma linear

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0} \cdot (\hat{x} - x_0) + f(x_0) - l_0 = (\hat{l} - l_0)$$

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

l) Introduzindo a seguinte notação matricial:

- A : matriz jacobiana (coeficientes dos parâmetros)
- δ : vector dos parâmetros (correcção às coordenadas iniciais)
- W : vector fecho (valores calculados menos os observados)
- v : vector dos resíduos (estimativa dos erros das observações)

Temos a forma matricial: $A \cdot \delta + W = v$

Ajustamento de Redes

1.2.1 Modelo funcional de ajustamento

$$A \cdot \delta + W = v$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots \end{bmatrix}$$
$$\delta = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - x_{10} \\ \hat{x}_2 - x_{20} \\ \dots \\ \hat{x}_q - x_{q0} \end{bmatrix}$$
$$W = \begin{bmatrix} f_1(x_0) - l_{10} \\ f_2(x_0) - l_{20} \\ \dots \\ f_n(x_0) - l_{n0} \end{bmatrix}$$
$$v = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 - l_{10} \\ \hat{l}_2 - l_{20} \\ \dots \\ \hat{l}_n - l_{n0} \end{bmatrix}$$

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

- A estocástica do sistema é definida pelo conjunto de variâncias e covariâncias dos parâmetros do sistema, ou de uma outra forma, é definida pela correlação entre os parâmetros e pela respectiva precisão;
- Este modelo contém elementos definidos *a priori* – conjunto de precisões das observáveis e sua correlação (dependência), e elementos que resultam *a posteriori* – conjunto das precisões das coordenadas e respectiva correlação;
- A definição das condições *a priori* deve respeitar a metodologia de observação da rede geodésica; ou, dito ao contrário, a metodologia deve estar de acordo com estas condições *a priori*;

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

d) Se um conjunto de observações for estocasticamente dependente, então a sua interacção estatística é representada pela chamada matriz de variâncias e covariâncias:

$$\Sigma_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

e) A sua determinação rigorosa é de difícil tarefa

f) Devem-se sempre procurar um conjunto de observações que seja o mais independente possível e das quais se consiga conhecer com rigor o nível de precisão;

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

g) Se as observações forem consideradas estocasticamente independentes, então a matriz das covariâncias é diagonal:

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

h) Estas condições *a priori* são introduzidas no sistema de ajustamento pelo m.m.q. através de uma matriz peso, que define o peso de cada observação no resultado do ajustamento;

i) A definição dos pesos das observações é feita mediante um dado critério, que deverá estar de acordo com as precisões obtidas;

Ajustamento de Redes

1.2.2 Modelo Estocástico de ajustamento

j) O critério normalmente utilizado para a definição de pesos das observações independentes é dado pela relação: $p_j = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_j^2}$

- sendo σ_0^2 a variância de referência *a priori* que corresponde à variância de unidade de peso (observação de peso unitário) e, σ_j^2 a variância *a priori* da observação genérica j;

k) Tratando-se de n observações não correlacionadas, temos

$$P_l = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \Sigma_u^{-1}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

a) **O sistema de equações** de observação *a priori* é um **sistema impossível**, com n equações e q incógnitas ($n>q$);

b) Ao considerar-se o conjunto de variáveis (x_i) do sistema como variáveis estocásticas, permite introduzir um **novo conjunto de incógnitas** no sistema – **os n resíduos** (v_i), estimativas dos erros das observações;

c) Nestas condições temos um sistema linear de **n equações e $n+q$ incógnitas** – um **sistema possível e indeterminado**;

d) A indeterminação deste sistema pode ser levantada por duas vias:

- 1- introduz-se um conjunto de q equações de condição ao sistema; ou,
- 2- impõe-se uma condição a um conjunto de incógnitas (aos resíduos);

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

e) Para diferentes estimadores (métodos), podemos obter diferentes estimativas (soluções);

f) O estimador “método dos mínimos quadrados” é o mais preciso, estimador de variância mínima, porque resulta da minimização da soma pesada do quadrado dos resíduos, o numerador da variância de referência (σ_0^2):

$$\phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots p_n v_n^2 = V^T P_l V = \min$$

g) A minimização da função do quadrado dos resíduos resulta na seguinte condição

$$\frac{\partial \phi}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta} (V^T P_l V) = 0$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

h) As q equações de derivadas parciais da função $\phi = V^T P_l V$ constituem o chamado sistema de equações normais ($q \times q$), e corresponde à normalização do sistema de equações pesadas:

$$(A^T \cdot P_l \cdot A) \cdot \hat{\delta} = -(A^T \cdot P_l) \cdot W \\ \Leftrightarrow N \cdot \hat{\delta} = -U$$

i) Cuja resolução nos dá a solução da estimativa de m.m.q. para o conjunto de parâmetros que definem as correcções às coordenadas iniciais

$$\hat{\delta} = -N^{-1} \cdot U$$

$$\hat{X}_t = X_0 + \hat{\delta}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

j) A substituição desta solução no sistema de equações lineares devolve a solução do vector de resíduos, suprimidos na imposição da condição de mínimos quadrados

$$\hat{V} = A \cdot \hat{\delta} + W$$

k) Aplicando esta estimativa dos erros das observações obtém-se o vector das observações ajustadas

$$\hat{l} = l_0 + \hat{V}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

l) A matriz de covariância dos dados (observações) juntamente com a variância de referência a priori constituem as condições a priori do modelo estocástico do sistema e relacionam-se com as matrizes peso e cofator da seguinte forma:

$$\Sigma_u = \sigma_0^2 \cdot P_l^{-1}$$

$$Q_l = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_u = P_l^{-1}$$

m) A variância de referência é, *a priori*, uma constante arbitrária definida por

$$\sigma_0^2 = p_i \cdot \sigma_i^2|_{i=1,n}$$

e que corresponde ao valor estimado *a posteriori*

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^\top P \hat{V}}{n - q}$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

- n) A matriz das variâncias e covariâncias das coordenadas finais ajustadas, é a respectiva matriz do próprio vector das correcções $\hat{\delta}$ às coordenadas, já que os valores iniciais x_0 são considerados constantes;
- o) Por aplicação da **Lei Geral de Propagação das Variâncias e Covariâncias** sobre a solução do sistema de equações lineares

$$\hat{\delta} = -(A^T P_l A)^{-1} \cdot A^T P_l \cdot W = S \cdot W$$

obtém-se a matriz das covariâncias dos parâmetros

$$\Sigma_{\hat{\delta}} = S \cdot \Sigma_l \cdot S^T = S \cdot (\hat{\sigma}_\theta^2 \cdot P_l^{-1}) \cdot S^T$$

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

- p) Após substituição da matriz S e após algum cálculo matricial, obtém- a **matriz das variâncias e covariâncias dos parâmetros**

$$\Sigma_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_\theta^2 \cdot (A^T \cdot P_l \cdot A)^{-1}$$

- q) Porque $\hat{X}_l = X_0 + \hat{\delta}$ a matriz da covariâncias das coordenadas **a posteriori** é dada por

$$\Sigma_{\hat{X}} = \Sigma_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_\theta^2 \cdot (A^T \cdot P_l \cdot A)^{-1} = \hat{\sigma}_\theta^2 \cdot N^{-1}$$

onde $\hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{V^T P V}{n-q}$ e $n-q$ é o número de graus de liberdade do sistema ou, também chamada redundância;

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

- r) A validação da solução do ajustamento é feita com recurso a um teste estatístico - **Teste da razão das variâncias**, que pode ser realizado quer pelo teste do Qui-Quadrado quer pelo teste de Fisher;
- s) Os modelos funcional e estocástico relacionam-se através da matriz de pesos das observações, que contém informação sobre a suas precisões e define a relação de peso através da constante de proporcionalidade $\sigma_0^2 = p_i \cdot \sigma_i^2$
- t) O modelo estocástico devolve uma estimativa *a posteriori* da variância de unidade de peso, a solução só será aceitável se estes valores forem estatisticamente iguais, isto é, o parâmetro não é estatisticamente alterado pela estimativa;

Ajustamento de Redes

1.3 Ajustamento por Mínimos Quadrados

u) Teste estatístico unilateral da razão das variâncias:

1- Teste do χ^2 (qui-quadrado): $\chi_{1-\alpha, n-q}^2 = \frac{(n-q) \cdot \hat{\sigma}_\theta^2}{\sigma_\theta^2}$

$$H_0: \hat{\sigma}_\theta^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1: \hat{\sigma}_\theta^2 > \sigma_0^2$$

\therefore Rejeitar H_0 para uma confiança $1-\alpha$ se $\frac{(n-q) \cdot \hat{\sigma}_\theta^2}{\sigma_\theta^2} > \chi_{1-\alpha, n-q}^2$

2- Teste de Fisher $F_{1-\alpha, n-q, \infty} = \frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\sigma_\theta^2}$

$$H_0: \hat{\sigma}_\theta^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1: \hat{\sigma}_\theta^2 > \sigma_0^2$$

\therefore Rejeitar H_0 para uma confiança $1-\alpha$ se $\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\sigma_\theta^2} > F_{1-\alpha, n-q, \infty}$

Ajustamento de Redes

1.4 Formulação e cálculo do ajustamento

- a) O ajustamento duma rede geodésica pode ser feito sobre diferentes sistemas de referência sem perda de rigor;
- b) Pode ser realizado sobre o elipsóide (φ, λ), sobre o plano cartográfico (M,P) ou sobre o espaço (x,y,z);
- c) Pode ser feito em separado, separando-se a “planimetria” da “altimetria”, geodesia bi- e uni-dimensional;
- d) Em cada sistema de referência as equações de observação (azimutes, direcções e distâncias), exprimem a respectiva geometria, e correspondem aos respectivos valores reduzidos das observações;
- e) As respectivas precisões têm também de ser reduzidas de modo a corresponderem a valores de imprecisão nas respectivas unidades e sistema de referência;

Ajustamento de Redes

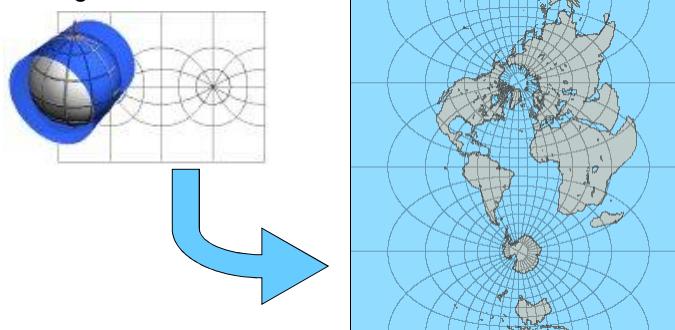
5.1 Equações de observação sobre o Plano Cartográfico

- a) O ajustamento sobre o plano cartográfico é aplicado a observações definidas no respectivo sistema de referência;
- b) São aplicadas correcções de redução às observações, previamente, reduzidas ao elipsóide;
- c) Sobre as direcções azimutais temos: correcção **tangente-corda**;
- d) Sobre os azimutes temos: correcção **tangente-corda e convergência de meridianos**;
- e) Sobre as distâncias temos: redução do **fator de escala**;
- f) A vantagem de se recorrer ao plano cartográfico decorre da simplicidade da geometria e do seu formalismo matemático.

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

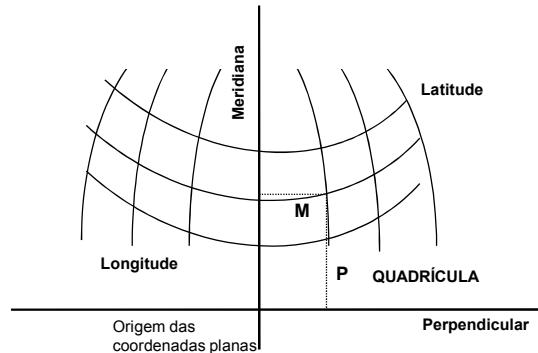
- a) Projecção de Mercator Transversa, Gauss ou Gauss-Krüger



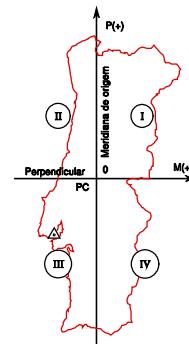
Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

b) Sistema de coordenadas cartográficas



Geodesia & Aplicações – Aula 5



FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

c) Sistemas de Projecção Cartográfica Nacionais

Hayford-Gauss

Datum geodésico Hayford-Lisboa = Datum Lisboa

Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central ($\varphi=39^{\circ} 40'$; $\lambda=-8^{\circ} 7'$ 54.862'')

Origem das coordenadas planas: Ponto Central ($\Delta M= 0$; $\Delta P= 0$)

Hayford-Gauss Militar

Datum geodésico Hayford-Lisboa = Datum Lisboa

Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central ($\varphi=39^{\circ} 40'$; $\lambda=8^{\circ} 7'$ 54.862'')

Origem das coordenadas planas: 'Ponto Fictício' resultante da translacção de 200 km E-W e 300 km N-S (para as coordenadas serem sempre positivas)

Geodesia & Aplicações – Aula 5

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

c) Sistemas de Projecção Cartográfica Nacionais

Sistema UTM – Continente - Fuso 29

Datum Hayford-Postdam = ED50

Projecção Mercator Transversa Universal (com origem no meridiano central do Fuso 29)

Origem do referencial plano: intersecção do meridiano central (9° WGr) com o Equador;

Origem (fictícia) das coordenadas planas: resulta de uma translação E-W de 500 Km.

Sistema UTM – Açores e Madeira - Fusos 25, 26, 28

Data locais (Porto Santo, Ocidental, Central e Oriental),

Projecção Mercator Transversa Universal (com origem no meridiano central do respectivo Fuso)

Origem do referencial plano: intersecção do meridiano central (33° ; 27° ; 15° WGr) com o Equador;

Origem (fictícia) das coordenadas planas: resulta de uma translação E-W de 500 Km.

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

c) Sistemas de Projecção Cartográfica Nacionais

Hayford-Gauss

Datum geodésico Hayford-Melriça = Datum 73

Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator

Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central ($\varphi=39^{\circ} 40'$; $\lambda=-8^{\circ} 7'$
 $54.862''$)

Origem das coordenadas planas: Ponto Central ($\Delta M= 180.598m$; $\Delta P= -86.99m$)

PT-TM06

Datum geodésico = ETRS89

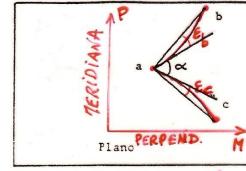
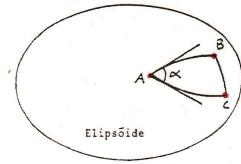
Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central ($\varphi=39^{\circ} 40' 5.73''$; $\lambda=-8^{\circ} 7' 59.19''$)

Origem das coordenadas planas: Ponto Central ($\Delta M= 0$; $\Delta P= 0$)

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

a) Correcção tangente-corda – Projecção de Gauss



$$\epsilon_{rad} = \frac{1}{6R_m^2} (2M_e + M_v)(P_e - P_v) \left\{ 1 - \frac{(2M_e + M_v)^2}{27R_m^2} \right\}$$

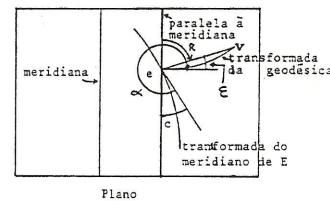
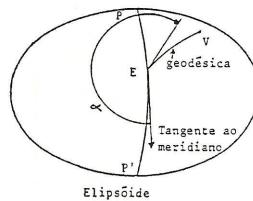
com $R_m^2 = k_0^2 N_m \rho_m$ calculado na latitude média $\phi_m = \frac{1}{2}(\phi_e + \phi_v)$

$$\text{Fórmula aproximada } \epsilon'' = 84606 \cdot 10^{-14} (2M_e + M_v)(P_e - P_v)$$

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

b) Convergência de meridianos – Projecção de Gauss



$$c = (\lambda_e - \lambda_0) \cdot \operatorname{sen} \phi_e$$

- correcção aos azimutes: $R_{ev} = \alpha_{ev} - c + \epsilon (\pm 180^\circ)$

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

c) Factor de escala – Projecção de Gauss

$$k = \frac{\text{comprimento - no - plano - cartográfico}}{\text{comprimento - no - elipsóide}}$$

$$k = k_0 \left\{ 1 + \frac{M_\mu^2}{6R_m^2} \left(1 + \frac{M_\mu^2}{36R_m^2} \right) \right\}$$

onde $M_\mu^2 = M_e^2 + M_e M_\nu + M_\nu^2$

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

c) Factor de escala – Projecção de Gauss

- correcção aos comprimentos: $c_k = k \cdot D_E - D_E = (k-1) \cdot D_E$

- Para uma projecção tangente ($k_0=1$) e latitude do ponto central

$\varphi=39^\circ 40'$, tem-se uma correcção aproximada de

$$c_a = \frac{M_\mu^2}{6R_m^2} \cdot D_E = 41018 \cdot 10^{-19} \cdot (M_e^2 + M_e M_\nu + M_\nu^2) \cdot D_E$$

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

a) As equações de observação (do sistema linear) no processo de ajustamento resultarão de fórmulas diferenciais no plano cartográfico das relações

- de rumo: $R_{ev} = \operatorname{arctg} \frac{M_v - M_e}{P_v - P_e}$

- e de comprimento $D_{ev} = \sqrt{(M_v - M_e)^2 + (P_v - P_e)^2}$

b) A sua simples geometria permite trabalhar com fórmula mais simples, quando comparada com a geometria do elipsóide

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

c) Para definir a relação de equação linear de observação

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \cdot \delta + f(x_0) - l_0 = v$$

que se pode escrever na forma

$$A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + v$$

`corr.dif.linear = observ.-"observ.calc."+resíduo`

necessitamos de determinar a correção diferencial linear ($df=A \cdot \delta$) para cada relação de observação (direcção azimutal, rumo e distância);

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

d) Assim, temos para o rumo:

$$dR_{ev} = -\frac{\cos R_{ev}^0}{D_{ev}^0} dM_e + \frac{\sin R_{ev}^0}{D_{ev}^0} dP_e - \frac{\cos R_{ve}^0}{D_{ev}^0} dM_v + \frac{\sin R_{ve}^0}{D_{ev}^0} dP_v$$

e para as distâncias

$$dD_{ev} = -\sin R_{ev}^0 dM_e - \cos R_{ev}^0 dP_e - \sin R_{ve}^0 dM_v + \cos R_{ve}^0 dP_v$$

onde $R_{ev}^0 = \arctg \left(\frac{M_v^0 - M_e^0}{P_v^0 - P_e^0} \right)$ e $D_{ev}^0 = \sqrt{(M_v - M_e)^2 + (P_v - P_e)^2}$

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

`corr.dif.linear = observ.-"observ.calc."+resíduo`

e) Equação de rumo

$$-\frac{\cos R_{ev}^0}{D_{ev}^0} dM_e + \frac{\sin R_{ev}^0}{D_{ev}^0} dP_e - \frac{\cos R_{ve}^0}{D_{ev}^0} dM_v + \frac{\sin R_{ve}^0}{D_{ev}^0} dP_v = R_{obs} - R_{ev}^0 + v_R$$

f) Equação de direcção azimutal

$$-\frac{\cos R_{ev}^0}{D_{ev}^0} dM_e + \frac{\sin R_{ev}^0}{D_{ev}^0} dP_e - \frac{\cos R_{ve}^0}{D_{ev}^0} dM_v + \frac{\sin R_{ve}^0}{D_{ev}^0} dP_v - dR_\theta|_e = dAz_{obs} - (R_{ev}^0 - (R_\theta)_E^0) + v_{dz}$$

g) Equação de distância

$$-\sin R_{ev}^0 dM_e - \cos R_{ev}^0 dP_e - \sin R_{ve}^0 dM_v + \cos R_{ve}^0 dP_v = D_{obs} - D_{ev}^0 + v_D$$

Ajustamento de Redes

5.2 Ajustamento sobre o Elipsóide

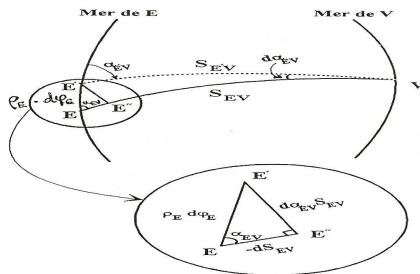
- a) Para estabelecer o processo de **ajustamento sobre o elipsóide** de referência vamos assumir **três tipos de observações, azimute, direcção azimutal e comprimento devidamente reduzidos**;
- b) Comparando com as observações do ajustamento sobre o plano cartográfico, só não são aplicadas as correcções de redução cartográfica (tangente-corda, convergência de meridianos e factor de escala), todas as restantes correcções são aplicadas;
- c) Como parâmetros principais temos as correcções às latitudes ($d\phi_i$) e às longitudes ($d\lambda_i$) dos pontos considerados livres, definidas no sistema linear;

$$df = A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + \nu$$

Ajustamento de Redes

5.2 Ajustamento sobre o Elipsóide

- d) As fórmulas diferenciais das três equações de observação derivam da determinação de pequenas variações sobre o meridiano ($d\phi$) e sobre o paralelo ($d\lambda$) no extremo do arco da geodésica;



Ajustamento de Redes

5.2.1 Equações sobre o Elipsóide

a) Equação de observação de Azimute

$$\begin{aligned} A \cdot \delta &= l_\theta - f(x_\theta) + v \\ d\alpha &= \alpha_{obs} - \alpha_{calc} + v_\alpha \\ &\downarrow \\ \frac{\rho_E \operatorname{sen} \alpha_{EV}}{S_{EV}} d\varphi_E - \frac{N_E \cos \varphi_E \cos \alpha_{EV}}{S_{EV}} d\lambda_E + \frac{\rho_V \operatorname{sen} \alpha_{VE}}{S_{EV}} d\varphi_V - \frac{N_V \cos \varphi_V \cos \alpha_{VE}}{S_{EV}} d\lambda_V \\ &= [\alpha_{astro_{EV}} - (\lambda_E - \bar{\lambda}_E) \operatorname{sen} \varphi_E] - \alpha_{calc_{EV}} + v_\alpha \end{aligned}$$

Nota: todas as grandezas angulares devem ser calculadas nas mesmas unidades (graus ou radianos).

Ajustamento de Redes

5.2.1 Equações sobre o Elipsóide

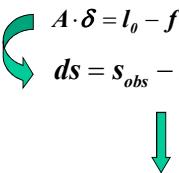
b) Equação de observação de Direcção Azimutal

$$\begin{aligned} A \cdot \delta &= l_\theta - f(x_\theta) + v \\ -d\alpha_\theta + dd_{az} &= d_{az} - [\alpha_{calc} - \alpha_\theta] + v_{d_{az}} \\ &\downarrow \\ -d\alpha_\theta + \frac{\rho_E \operatorname{sen} \alpha_{EV}}{S_{EV}} d\varphi_E - \left(\operatorname{sen} \varphi_E - \frac{N_E \cos \varphi_E \cos \alpha_{EV}}{S_{EV}} \right) d\lambda_E + \frac{\rho_V \operatorname{sen} \alpha_{VE}}{S_{EV}} d\varphi_V - \frac{N_V \cos \varphi_V \cos \alpha_{VE}}{S_{EV}} d\lambda_V \\ &= d_{az} - [\alpha_{calc} - (\bar{\alpha}_\theta)_E] + v_{d_{az}} \end{aligned}$$

Ajustamento de Redes

5.2.1 Equações sobre o Elipsóide

c) Equação de observação de Comprimento

$$\begin{aligned} A \cdot \delta &= l_\theta - f(x_\theta) + v \\ ds &= s_{obs} - s_{calc} + v_s \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} -\frac{\rho_E \sin \alpha_{EV}}{206265''} d\phi_E - \frac{N_E \cos \phi_E \sin \alpha_{EV}}{206265''} d\lambda_E + \frac{\rho_V \cos \alpha_{VE}}{206265''} d\phi_V - \frac{N_V \cos \phi_V \sin \alpha_{VE}}{206265''} d\lambda_V \\ = s_{red_{EV}} - s_{calc_{EV}} + v_s \end{aligned}$$

Nota: As correcções às coordenadas ($d\phi$, $d\lambda$) estão expressos em “.

Ajustamento de Redes

5.2.2 Processo de ajustamento sobre o elipsóide

- O cálculo dos valores aproximados de azimutes, comprimentos e coordenadas geodésicas necessita da aplicação dos problemas directo e inverso da geodesia através dos desenvolvimentos de Legendre-Delambre;
- Este facto torna o processo de ajustamento sobre o elipsóide mais complexo e moroso do que sobre o plano cartográfico;
- Ao exprimir-se as correcções das coordenadas em segundos de arco (“), obtém-se um sistema de equações numericamente mais estável;

Ajustamento de Redes

5.2.2 Processo de ajustamento sobre o elipsóide

d) O formulário do modelo matemático dos m.m.q. deduzido é aplicado da mesma forma que o caso anterior, incluindo a estimativa a priori das precisões;

e) A excepção dá-se no caso do tratamento dos elementos da matriz de covariâncias das coordenadas geodésicas, que vêm expressos (")², para a determinação das elipses de erro, onde é necessário fazer uma conversão:

$$\text{com } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{N_j \cos \varphi_j}{206265''} \\ \frac{\rho_j}{206265''} & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{dM_j}^2 & \hat{\sigma}_{dM_j dP_j} \\ \hat{\sigma}_{dM_j dP_j} & \hat{\sigma}_{dP_j}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{C}}_{d\phi_j d\lambda_j} \cdot \mathbf{J}^T$$

Ajustamento de Redes

5.3 Técnicas de resolução do sistema

a) O sistema de equações normais é, então, o sistema tornado possível e determinado ($n \times n$) ao qual têm de ser aplicadas uma das técnicas de resolução;

b) Basicamente, existem duas técnicas de resolução de sistemas de equações: 1 - o método da condensação da matriz e consequente resolução regressiva, e 2 - o método de inversão da matriz;

c) A opção no passado era óbvia, dada as restrições computacionais de memória e velocidade de processamento, escolhia-se o método da condensação;

d) Actualmente, salvo raras excepções, é perfeitamente praticável o método de inversão, dada a grande capacidade computacional;

Ajustamento de Redes

5.3.1 Técnicas de resolução do sistema

- e) Em termos de métodos de triangularização da matriz de coeficientes existem dois métodos, os **métodos de substituição-eliminação Cholesky** (semelhante ao de Doolittle) e o de Gauss;
- f) O Método de Cholesky usa como **elemento de redução a raiz quadrada dos elementos** da diagonal;
- g) O Método de Gauss usa como **elemento de redução o inverso dos elementos** da diagonal;
- h) O método de Cholesky e a Regra de Schreiber de eliminação de parâmetros inúteis são os métodos mais comuns usados no ajustamento de redes de geodesia, e são os métodos usados no nosso cálculo computacional;

Ajustamento de Redes

5.3.1 Técnicas de resolução do sistema

- f) Método de Cholesky

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad 2^a - 1^a \cdot \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}} \quad}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} & b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad 3^a - 1^a \cdot \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}}} \quad} \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} & b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} & b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}} \end{array} \right)$$

Ajustamento de Redes

5.3.1 Técnicas de resolução do sistema

g) Resolução regressiva

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23}x_3)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

Ajustamento de Redes

5.3.2 Eliminação de parâmetros inúteis

- Nas redes geodésicas de triangulação, onde são observadas direcções desorientadas pelo método dos giros do horizonte, é introduzida uma incógnita, o **rumo de orientação** do giro, R_0 , que é um **parâmetro inútil**;
- Não sendo necessário, ele pode ser eliminado, pois apenas ocupa memória e sobrecarrega o sistema de cálculo;
- A eliminação** tem de ser feita com alguma regra, ou seja, tem que **gerar um sistema modificado equivalente**, sem alterar a solução dos parâmetros úteis;
- A regra de Schreiber elimina todos os rumos de orientação dos giros (tanto quanto as estações), sem alterar a solução;

Ajustamento de Redes

5.3.2 Eliminação de parâmetros inúteis

e) Regra de Scheīber

Equações	Pesos	Equações truncadas	Pesos
$x + b_1y + c_1z = l_1 + v$	1		
$x + b_1y + c_1z = l_1 + v$	1		
...	...		
$x + b_1y + c_1z = l_1 + v$	1	$b_1y + c_1z = l_1 + \bar{v}$	1
		$b_1y + c_1z = l_1 + \bar{v}$	1
	
		$b_1y + c_1z = l_1 + \bar{v}$	1
		$[b]y + [c]z = [l] + [\bar{v}]$	$-\frac{1}{n}$

Por cada giro acrescenta-se
uma equação soma – **equação de Schreiber**.

Ajustamento de Redes

5.3.2 Falso resíduo e recuperação dos parâmetros

a) O sistema truncado, resultante da aplicação desta regra, tem um sistema de equações normais coincidente com o subsistema de equações normais do sistema original;

b) Os resíduos resultantes do sistema de equações truncadas são falsos resíduos; para determinar os resíduos verdadeiros temos que, implicitamente, recuperar o parâmetro eliminado;

d) Tomando a equação genérica $a_i\hat{M} + b_i\hat{P} - l_i = v_i - \hat{R}_\theta$

e somando em ordem a i $\sum \bar{v}_i = \sum v_i - n\hat{R}_\theta$

resulta $\hat{R}_\theta = -\frac{\sum \bar{v}_i}{n} + \frac{\sum v_i}{n} = -\frac{\sum \bar{v}_i}{n}$

e) Daqui saem os resíduos verdadeiros

Ajustamento de Redes

5.3.3 Resolução de sistemas por blocos

a) Na disciplina TAD, este problema de parâmetros inúteis é resolvido subdividindo-se o sistema de equações em blocos de parâmetros resolvendo-o por partes

$$A_1 \cdot \hat{\delta}_1 + A_2 \cdot \hat{\delta}_2 - v + \omega = \mathbf{0}$$

b) Aplicando o m.m.q. a este sistema obtém-se o seguinte sistema de equações normais

$$\begin{pmatrix} A_1^T P_l A_1 & A_1^T P_l A_2 \\ A_2^T P_l A_1 & A_2^T P_l A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_1^T P_l \omega \\ A_2^T P_l \omega \end{pmatrix}$$

c) Este sistema pode ser resolvido apenas em ordem a $\hat{\delta}_2$, eliminando o parâmetro $\hat{\delta}_1$;

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

- a) As **observações têm precisões diferentes** e isso obriga a que as equações das observação de maior precisão devam ter maior peso, por forma a resultar uma estimativa mais precisa e estatisticamente consistente;
- b) Por outro lado, o **sistema de equações é heterogéneo**, são utilizadas observações de diferentes unidades de medida;
- c) Estas duas razões obrigam a multiplicar o sistema por uma **matriz de pesos**, de forma a homogeneizar o sistema de equações e a pesar as equações de acordo com um critério adequado de atribuição de pesos.

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

- d) Definindo a atribuição de pesos através de uma **constante de proporcionalidade** (σ_0^2 - arbitrária) entre o peso e a variância da respectiva observação:

$$p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

- resulta a definição de peso: $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$

- e) Sendo a constante de proporcionalidade (σ_0^2) adimensional (sem unidades), a raiz quadrada do peso de uma observação tem como unidade o inverso da unidade da observação;

- f) Logo, se o sistema for multiplicado pela raiz quadrada do peso das observações, as equações resultam todas adimensionais (homogéneas) e com a mesma precisão σ_0 .

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

g) Na prática, como não se trabalha directamente sobre o sistema de equações lineares mas sim com o sistema de equações normais, não se multiplica pela raiz quadrada dos pesos, mas pelo próprio peso

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

- Sistema Linear Pesado: $\sqrt{P} \cdot A \cdot \hat{\delta} = -\sqrt{P} \cdot W$

- Sistema Normal Pesado:

$$(\sqrt{P} \cdot A)^T \cdot \sqrt{P} \cdot A \cdot \hat{\delta} = -(\sqrt{P} \cdot A)^T \cdot \sqrt{P} \cdot W$$

$$\Leftrightarrow A^T \cdot P \cdot A \cdot \hat{\delta} = -A^T \cdot P \cdot W$$

Ajustamento de Redes

5.7 Critérios para a escolha de pesos

h) O problema que se coloca agora é: **que pesos atribuir às direcções azimutais, aos comprimentos e aos azimutes observados?**

i) Se soubermos *a priori*, estimar as variâncias (σ_i^2) para cada tipo de observação e definir a constante de proporcionalidade (σ_0^2), teremos o problema resolvido pela relação:

$$p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

j) Para os comprimentos usa-se a respectiva **fórmula de variâncias** e para os azimutes o **e.m.q. das observações**. Enquanto que, para as direcções existem os métodos de “**ajustamento livre**” e a “**Formula de Ferrero**”;

Ajustamento de Redes

5.7.1 Fórmula de Ferrero

a) A fórmula de Ferrero dá-nos uma estimativa da precisão das direcções azimutais com base no erro de fecho de um triângulo geodésico;

b) Seja o **excesso esférico** de um triângulo geodésico, correspondente à diferença da soma dos ângulos para 180° , dado por

$$\varepsilon_{rad} = \frac{\text{Área do triângulo geodésico projectado no plano}}{\rho_m \cdot N_m}$$

c) $S=A+B+C$, a soma dos ângulos internos medidos, cujo valor verdadeiro é $V=180^\circ+\varepsilon$. A respectiva diferença corresponde ao erro verdadeiro de S

$$\Delta = S - V = A + B + C - (180^\circ + \varepsilon)$$

Ajustamento de Redes

5.7.1 Fórmula de Ferrero

d) Da estatística temos, por definição, a variância de uma dada grandeza é definida por

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n E_i^2}{n} = \frac{E^T E}{n}$$

onde $E=V-O_i$ é o erro verdadeiro de cada valor da amostra.

Tomando $n=1$, a variância é dada pelo quadrado do erro $\sigma^2 = E^2$

e) Sabendo que a soma dos ângulos de um triângulo é

$$S = (d_2 - d_1) + (d_4 - d_3) + (d_6 - d_5)$$

e admitindo que as direcções foram observadas com a mesma precisão, pela lei geral de propagação dos erros vem:

$$\sigma_S^2 = 6\sigma_{dir}^2 \Leftrightarrow \sigma_{dir}^2 = \frac{\sigma_S^2}{6} = \frac{A^2}{6}$$

Ajustamento de Redes

5.7.1 Fórmula de Ferrero

- f) A expressão anterior dá a variância de uma direcção azimutal observada, calculada a partir do fecho de um único triângulo (um grau de liberdade);
g) Tendo n triângulos observados pode-se obter uma melhor estimativa para esta variância

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j \cdot \sigma_j^2)}{\sum_{j=1}^N f_j}$$

- h) Atendendo a que $f=1$ e $\sigma^2_s = \Delta \cdot \Delta$, obtém-se a Fórmula de Ferrero

$$\hat{\sigma}_{dir}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_j^2}{6N}$$

Geodesia & Aplicações – Aula 6

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.7.2 Ajustamento Livre

- a) O ajustamento livre consiste num ajustamento por mínimos quadrados onde só entram direcções azimutais, servindo como método de determinação de uma estimativa de precisão das direcções observadas;
b) Garantindo-se que as direcções são observações independentes e de igual precisão (pelo método de observação), então nesse ajustamento a matriz peso é a identidade ($P=I$) e a variância de unidade de peso à posterior corresponderá à variância das observações de direcção

$$\sigma_{dir}^2 = \hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}}{n-q} = \frac{\sum_{j=1}^n v_j^2}{n-q}$$

Geodesia & Aplicações – Aula 6

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.7.2 Ajustamento Livre

- c) O ajustamento livre só com direcções será um problema indeterminado se não se definirem os 4 graus de liberdade da rede - 2 translações, 1 escala e 1 orientação;
- d) Este problema é resolvido de duas formas:
 - 1- fixar 1 ponto, 1 comprimento e 1 azimute;
 - 2- fixar 2 pontos;
- e) Qualquer das formas **não impõem constrangimentos** às observações de direcção e, portanto, não condicionam a variância de referência à posteriori;
- f) As duas formas **são equivalentes** porque os resíduos das direcções não são alterados e os resíduos do comprimento e azimute no 1º caso resultam nulos;

Ajustamento de Redes

5.7.3 Exemplos numéricos

- a) A soma do quadrado dos erros de fecho dos 109 triângulos da rede geodésica nacional de 1ª ordem é $44,6483''$ (Cad. Téc. IGC, nº. 21); aplicando a Fórmula de Ferrero obtém-se:

$$\sigma_{dir}^2 = \frac{44,6483('')^2}{6 * 109} = 0,0683('')^2 \Rightarrow \sigma_{dir} = 0,26''$$

- b) O valor da precisão de uma direcção da rede de 1ª ordem dada pela compensação livre é de $\sigma_{dir}=0,64''$
- c) O método do ajustamento livre é assim mais realista.
- d) Caso sejam observados diferentes blocos com diferentes métodos e/ou instrumentos, devem-se estimar precisões (diferentes pesos) para cada um desses blocos.

Ajustamento de Redes

5.7.4 Pesos dos comprimentos

- a) A fórmula da variância de comprimentos por métodos electromagnéticos é dada por

$$\sigma_{comp}^2 = p^2 + q^2 D^2$$

onde os parâmetros p e q dependem de cada instrumento;

- b) Exemplos dos aparelhos utilizados na rede geodésica nacional:

- Ranger Master III → $p=0,005$ m e $q=1$ ppm (10^{-6})
- Tulerómetro MRA2 → $p=0,008$ m e $q=3$ ppm (3×10^{-6})

- c) O peso de um comprimento, de acordo com o critério de pesos, será dado por

$$P_{comp} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_{comp}^2}$$

Ajustamento de Redes

5.7.5 Pesos de observação de Azimute

- a) Uma primeira abordagem é considerar um azimute como uma observação de direcção e atribuir-lhe igual peso;

- b) A observação de azimutes astronómicos segue um processo estatístico de estimação ($m.m.q.$) do qual resulta uma estimativa de precisão a posteriori, esse valor deve ser utilizado para a definição do peso a atribuir;

- c) A observação de azimutes astronómicos está dividida em dois método de precisão, os métodos de 1^a ordem (0.2 a 0.4") e os métodos de 2^a ordem (0.5 a 1.5");

- d) Contudo há a considerar a imprecisão da correção da Equação de Laplace, proveniente da imprecisão da longitude astronómica

$$\alpha = A - (\Lambda - \lambda) \cdot \text{sen}\phi$$

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangido

- a) Após se determinarem numérica e correctamente os pesos de todas as observações, procede-se ao ajustamento final, designado “constrangido”, por se tratar de um constrangimento entre observações e aos g.l. da rede;
- b) Os diferentes comprimentos e azimutes introduzidos vão “constrangir” as direcções (na forma, escala e orientação da rede), jogando todas as observações em “contrapeso” e condicionando a estatística e solução do ajustamento;
- c) Enquanto que o ajustamento livre é realizado apenas para estimar a precisão das direcções, neste ajustamento o objectivo é ajustar a rede e obter as coordenadas ajustadas juntamente com as suas precisões;

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangido

- d) A variância de referência *a priori* foi tomada como arbitrária e com ela se definiu a relação de pesos das observações. No final do ajustamento obtém-se a sua estimativa *a posteriori* que reflecte a coerência das observações e da respectiva relação de pesos;

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_I \mathbf{v}}{n-q}$$

- e) Da estatística sabe-se que a relação $\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_I \mathbf{v}}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{(n-q)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$

é uma variável Qui-quadrado de $n-q$ graus de liberdade, caso as observações e respectivos resíduos tenham uma distribuição normal;

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangida

- f) Esta condição possibilita a realização de um teste de hipótese por forma a validar os pressupostos do modelo e, consequentemente, aceitar ou rejeitar os resultados do ajustamento;
- g) Testa-se a conformidade entre os valores *a priori* e *a posteriori* da variância de referência, se o resultado for positivo então os dois valores de variância são estatisticamente iguais;
- h) Teste unilateral
 - Hipótese H_0 (nula): $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ vs. Hipótese H_1 (alternativa): $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$
 - Rejeita-se H_0 , ao nível de confiança $1-\alpha$, se o valor da variável for superior ao valor tabelado
$$\frac{(n-q)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha, n-q}^2$$

Ajustamento de Redes

5.8 Ajustamento Constrangida

- i) Se o teste rejeitar a igualdade dos valores de variância, as hipóteses em que assenta o modelo matemático estão erradas e, consequentemente, deve-se rever o processo;
- j) O erro pode provir tanto do modelo funcional (dados), como do modelo estocástico (pesos);
- k) Relativamente ao modelo funcional, há que rever os dados, coordenadas e observações, nomeadamente se foram feitas as devidas correcções;
- l) Relativamente ao modelo estocástico há que rever as precisões das observações e respectivos pesos;
- m) Este teste pode servir também para verificar se os dados estão ou não viciados (manipulados).

Ajustamento de Redes

5.9 Precisão dos resultados do ajustamento

- a) Após se ter testado e aceite o modelo matemático de ajustamento da rede geodésica, pode-se analisar as componentes *a posteriori* do modelo estocástico – as precisões de todos os parâmetros, coordenadas e observações;
- b) Do modelo extraem-se as matrizes de variância e covariância estimadas das coordenadas dos pontos e das observações efectuadas, com as quais se obtêm elipses e intervalos de erro e de confiança;
- c) Dessas covariâncias também se podem deduzir covariâncias de observações não realizadas, ou seja, de observações deduzidas (comprimentos, direcções azimutais e azimutes);

Ajustamento de Redes

5.9.1 Precisão das coordenadas

- a) A base para todo este cálculo é a matriz de variância e covariância *a posteriori* dos parâmetros, que resulta da matriz normal ou de configuração de 2^a ordem:

$$\hat{C}_{\hat{x}_t} = \hat{C}_{\hat{\delta}_t} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T P_t A)^{-1}$$

- b) Desta matriz podem-se extrair as precisões das coordenadas compensadas de todos os vértices da rede;
- c) Para um ponto na posição (i) do vector de coordenadas, a respectiva sub-matriz de covariâncias é

$$\hat{C}_{\hat{x}_t} \begin{pmatrix} 2i-1, 2i-1 & 2i-1, 2i \\ 2i, 2i-1 & 2i, 2i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{M_i}^2 & \sigma_{M_i P_i} \\ \sigma_{M_i P_i} & \sigma_{P_i}^2 \end{bmatrix}$$

Ajustamento de Redes

5.9.2 Precisão das observações medidas

- a) Pela aplicação da Lei Propagação das Variâncias e Covariâncias (LPVC) ao sistema de equações lineares, na forma

$$\hat{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{l}} - \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

obtém-se a matriz das variâncias-covariâncias das observações compensadas:

$$\hat{\mathbf{C}}_l = \mathbf{A} \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\boldsymbol{\delta}}} \mathbf{A}^T = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_l \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

da qual se pode extrair as respectivas precisões.

Ajustamento de Redes

5.9.3 Precisão das observações deduzidas

- a) A precisão de uma qualquer observação deduzida *a posteriori* resulta da sua expressão algébrica em função das coordenadas dos vértices;
- b) Tomemos, como exemplo, a distâncias entre dois vértices (i,j) da rede, cuja expressão genérica é dada por

$$\hat{s}_{i,j} = \sqrt{(\hat{M}_j - \hat{M}_i)^2 + (\hat{P}_j - \hat{P}_i)^2}$$

- c) Diferenciando a expressão de distância

$$d\hat{s}_{ij} = -\operatorname{sen}\hat{R}_{ij}d\hat{M}_i - \operatorname{cos}\hat{R}_{ij}d\hat{P}_i + \operatorname{sen}\hat{R}_{ij}d\hat{M}_j + \operatorname{cos}\hat{R}_{ij}d\hat{P}_j$$

e aplicando a LPVC obtém-se a variância *a posteriori* da distância $\hat{\sigma}_{\hat{s}_{ij}}^2 = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{C}}_{\hat{x}_{ij}} \cdot \mathbf{J}^T$ com $\mathbf{J} = [-\operatorname{sen}\hat{R}_{ij} \quad -\operatorname{cos}\hat{R}_{ij} \quad \operatorname{sen}\hat{R}_{ij} \quad \operatorname{cos}\hat{R}_{ij}]$

Ajustamento de Redes

5.9.3 Precisão das Observações deduzidas

- d) Este tipo de cálculo pode ser aplicado a qualquer outro tipo de observação de relação de posição (azimute ou direcção);
- e) Esta determinação não obriga a um cálculo completo da inversa da matriz normal (N), basta calcular as colunas da sub-matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas dos respectivos pontos;
- f) Este tipo de atalho é realizado por algoritmos mais rápidos, que são muito vantajosos em redes de grande dimensão;
- g) Este aspecto é muito importante nas redes globais ou mesmo regionais, onde os sistemas podem alcançar os milhares de linhas e colunas, ocupando grandes quantidades de memória;
- h) Normalmente, como a matriz normal é simétrica, é apenas armazenada a sua matriz triangular inferior.

Ajustamento de Redes

5.9.4 Intervalos de confiança de observações ajustadas

- a) A determinação das variâncias das observações ajustadas tem como objectivo a determinação do intervalo de confiança dessa estimativa;
- b) Sendo I uma observação aleatória de distribuição normal, cujas estimativas da esperança matemática $\mu\{I\}$ e variância teórica σ_I^2 são dadas pela sua média e variância a posteriori, a variável

$$\frac{\bar{I} - \mu\{I\}}{\hat{\sigma}_I}, \text{ na ausência de erros sistemáticos, tem uma}$$

distribuição ***t-Student*** com $n-1$ graus de liberdade;

Ajustamento de Redes

5.9.4 Intervalos de confiança de observações ajustadas

c) O intervalo de confiança $[k_1, k_2]$ da média de uma observação directa, por exemplo para uma probabilidade a 95% de confiança, é dado pela relação

$$P\left(\frac{\bar{I} - k_1}{\hat{\sigma}_I} \geq t \geq \frac{\bar{I} + k_2}{\hat{\sigma}_I}\right) = I - \alpha = 0.95$$

cujos limites do intervalo são: $k_1 = \bar{I} - t_{I-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \hat{\sigma}_I$; $k_2 = \bar{I} + t_{I-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \hat{\sigma}_I$

d) Para as observações ajustadas (ou calculadas a partir das coordenadas ajustadas), os limites são determinados por uma variável **t-Student** com **n-q** graus de liberdade em vez de n-1:

$$k_1 = \hat{I} - t_{I-\frac{\alpha}{2}, n-q} \cdot \hat{\sigma}_I; \quad k_2 = \hat{I} + t_{I-\frac{\alpha}{2}, n-q} \cdot \hat{\sigma}_I$$

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

a) À semelhança das observações, também se pode definir **domínios de erro e de confiança das posições dos vértices** da rede compensadas;

b) Usando a informação de variâncias-covariâncias das coordenadas dos vértices, determinam-se as elipses de erro (região de incerteza das coordenadas) e elipses de confiança (região provável de localização do valor verdadeiro para um dado nível confiança);

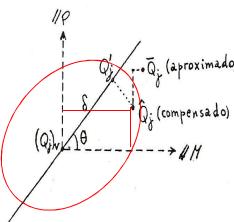
c) As elipses deduzidas directamente dos valores da matriz de variância-covariância das coordenadas são designadas de **absolutas**, por reportarem a uma zona de erro em relação à origem do sistema de coordenadas;

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

d) Seja $\hat{M}_j = \bar{M}_j + \Delta M_j$; $\hat{P}_j = \bar{P}_j + \Delta P_j$ e $\hat{M}_j = (M_j)_v + (\Delta M_j)_v$; $\hat{P}_j = (P_j)_v + (\Delta P_j)_v$
onde resulta $(\Delta M_j)_v = \Delta M_j + C_M$; $(\Delta P_j)_v = \Delta P_j + C_P$

e) Se considerarmos que a estimativa da posição \hat{Q}_j é uma v.a. cuja infinidade de soluções oscilam em torno da posição exacta $(Q_j)_v$, as variações das coordenadas $(\Delta M, \Delta P)$ têm uma distribuição normal não enviesada



$$\mu[(\Delta M_j)_v] = \mu[(\Delta P_j)_v] = 0$$

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

d) Projectando a posição \hat{Q}_j sobre uma recta de ângulo θ com origem em $(Q_j)_v$, obtemos a posição Q'_j à distância da origem de

$$\delta = \cos \theta (\Delta M_j)_v + \sin \theta (\Delta P_j)_v$$

cuja variância, por aplicação da LPVC, será

$$\hat{\sigma}_{\delta}^2 = \cos^2 \theta \cdot \hat{\sigma}_{\Delta M_j}^2 + 2 \cos \theta \cdot \sin \theta \hat{\sigma}_{\Delta M_j, \Delta P_j} + \sin^2 \theta \cdot \hat{\sigma}_{\Delta P_j}^2$$

e) Derivando a variância e igualando a zero, determinamos o valor de θ_1 para o seu máximo

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{2 \hat{\sigma}_{\Delta M_j, \Delta P_j}}{\hat{\sigma}_{\Delta M_j}^2 - \hat{\sigma}_{\Delta P_j}^2} \right]$$

verificando-se o seu mínimo na direcção perpendicular $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$

Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

d) A substituição das duas soluções de θ_1 e $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ na expressão da variância da distância dá-nos os seus valores máximo e mínimo

$$\hat{\sigma}_{d\max}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{M_j}^2 + \sigma_{P_j}^2 + \sqrt{(\sigma_{M_j}^2 - \sigma_{P_j}^2)^2 + (2\sigma_{M_j P_j})^2} \right\}$$

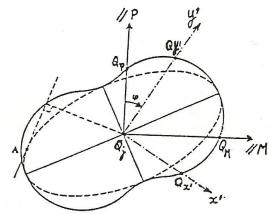
$$\hat{\sigma}_{d\min}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{M_j}^2 + \sigma_{P_j}^2 - \sqrt{(\sigma_{M_j}^2 - \sigma_{P_j}^2)^2 + (2\sigma_{M_j P_j})^2} \right\}$$

- quadrados dos **eixos da elipse de erro** com orientações θ_1 e θ_2 , respectivamente;

e) Se fizermos variar o ângulo θ de 0 a 360° , e com esses valores calcularmos σ_d , este descreve uma figura designada por **curva-padrão do erro**;

Geodesia & Aplicações – Aula 6

FCUL-EG



Ajustamento de Redes

5.9.5 Elipses de erro dos vértices da rede

f) Este tipo de elipses, apesar de definirem a incerteza da posição relativamente ao sistema de referência, apresentam algumas limitações:

1 – O tamanho das elipses é variável, é zero na origem do referencial e aumenta à medida que se afasta;

2 – As elipses não são invariantes com respeito à mudança (arbitrária) da localização da origem; uma origem central produzirá elipses menores do que outra localizada na periferia;

3 – Um par de pontos adjacente pode ter grandes elipses de erro, mas apresentarem um erro relativo muito pequeno;

g) Por estas razões se utiliza também outro tipo de elipses de erro – as **elipses relativas**.

Geodesia & Aplicações – Aula 6

FCUL-EG

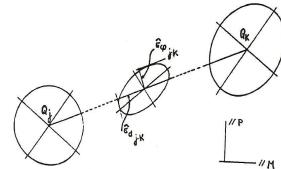
Ajustamento de Redes

5.9.6 Elipse de erro relativa

a) A elipse de erro relativa define a incerteza estatística da posição de um ponto relativamente a outro;

b) A sua geometria é determinada a partir da relação de posição entre os pontos e as respectivas covariâncias

$$\Delta M_{j,k} = M_k - M_j; \quad \Delta P_{j,k} = P_k - P_j$$



c) Aplicando a LPVC a estas relações, obtemos a respectiva matriz de covariâncias

$$\hat{C}_{j,k} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}}^2 & \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}\Delta P_{jk}} \\ \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}\Delta P_{jk}} & \hat{\sigma}_{\Delta P_{jk}}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}}^2 &= \hat{\sigma}_{M_j}^2 + \hat{\sigma}_{M_k}^2 - 2\hat{\sigma}_{M_j M_k} \\ \hat{\sigma}_{\Delta P_{jk}}^2 &= \hat{\sigma}_{P_j}^2 + \hat{\sigma}_{P_k}^2 - 2\hat{\sigma}_{P_j P_k} \\ \hat{\sigma}_{\Delta M_{jk}\Delta P_{jk}} &= \hat{\sigma}_{M_j P_j} - \hat{\sigma}_{M_j P_k} - \hat{\sigma}_{P_j M_k} + \hat{\sigma}_{M_k P_k} \end{aligned}$$

Ajustamento de Redes

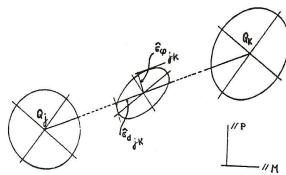
5.9.6 Elipse de erro relativa

d) De igual modo, retirando os elementos da matriz de covariância do vector de posição relativa, obtém-se os quadrados dos semieixos da elipse e a respectiva orientação

$$\hat{\sigma}_{max}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\Delta M_{j,k}}^2 + \sigma_{\Delta P_{j,k}}^2 + \sqrt{(\sigma_{\Delta M_{j,k}}^2 - \sigma_{\Delta P_{j,k}}^2)^2 + 4\sigma_{\Delta M_{j,k}\Delta P_{j,k}}^2} \right\}$$

$$\hat{\sigma}_{min}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\Delta M_{j,k}}^2 + \sigma_{\Delta P_{j,k}}^2 - \sqrt{(\sigma_{\Delta M_{j,k}}^2 - \sigma_{\Delta P_{j,k}}^2)^2 + 4\sigma_{\Delta M_{j,k}\Delta P_{j,k}}^2} \right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \text{arctg} \left[\frac{2\hat{\sigma}_{\Delta M_{j,k}\Delta P_{j,k}}}{\hat{\sigma}_{\Delta M_{j,k}}^2 - \hat{\sigma}_{\Delta P_{j,k}}^2} \right]$$

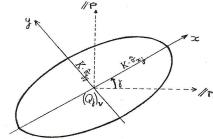


Ajustamento de Redes

5.9.7 Elipses de confiança

- A elipse de confiança define uma área ampliada, resultante da multiplicação dos semieixos da elipse de erro por um factor probabilístico k ;
- Seja xoy um sistema de eixos centrado no ponto verdadeiro fazendo um ângulo γ com os eixos do sistema de coordenadas da rede;
- Pretende-se calcular a probabilidade de uma estimativa aleatória de um ponto \hat{Q}_j cair dentro da elipse figurada, ou seja,

$$P\left\{\frac{x^2}{(k\hat{\sigma}_x)^2} + \frac{y^2}{(k\hat{\sigma}_y)^2} < 1\right\} = P_k$$



Geodesia & Aplicações – Aula 7

FCUL-EG

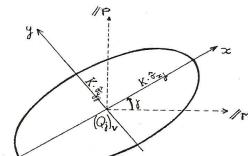
Ajustamento de Redes

5.9.7 Elipses de confiança

- Aplicando uma rotação do valor de γ , através da respectiva matriz R_γ , passamos do sistema (M,P) para o sistema (x,y) ;
- Tomando a matriz das variâncias-covariâncias das coordenadas do ponto \hat{Q}_j , obtém-se a matriz das variâncias-covariâncias definida no sistema (x, y)

$$\hat{C}_{xy_{\hat{Q}_j}} = R_\gamma \cdot \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{M_j}^2 & \hat{\sigma}_{M_j P_j} \\ \hat{\sigma}_{M_j P_j} & \hat{\sigma}_{P_j}^2 \end{bmatrix} \cdot R_\gamma^T$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{x_j}^2 &= \cos^2 \gamma \hat{\sigma}_{M_j}^2 + \sin^2 \gamma \hat{\sigma}_{P_j}^2 + \sin(2\gamma) \hat{\sigma}_{M_j P_j} \\ \hat{\sigma}_{y_j}^2 &= \sin^2 \gamma \hat{\sigma}_{M_j}^2 + \cos^2 \gamma \hat{\sigma}_{P_j}^2 - \sin(2\gamma) \hat{\sigma}_{M_j P_j} \\ \hat{\sigma}_{x_j y_j} &= \frac{\sin(2\gamma)}{2} (\hat{\sigma}_{P_j}^2 - \hat{\sigma}_{M_j}^2) + \cos(2\gamma) \hat{\sigma}_{M_j P_j}\end{aligned}$$



Geodesia & Aplicações – Aula 7

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.9.7 Elipses de confiança

- f) O termo não-diagonal (covariância) é nulo quando $\gamma=0$
g) Como se tem

$$\hat{\sigma}_{x_j}^2 = c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2; \quad \hat{\sigma}_{y_j}^2 = c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2; \quad \hat{\sigma}_{x_j y_j} = 0$$

onde c_x e c_y são constantes calculadas por um produto matricial, a condição de probabilidade pode-se escrever da forma

$$P\left\{ \frac{x^2}{c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} + \frac{y^2}{c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} < k^2 \right\} = P_k$$

Ajustamento de Redes

5.9.7 Elipses de confiança

- h) Fazendo algumas modificações legítimas temos

$$P\left\{ \frac{\frac{(x-\mu_x)^2}{c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_0^2}}{\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}} < k^2 \right\} = P_k$$

- i) Na expressão de desigualdade tem-se no numerador uma v.a. de χ^2 de 2 g.l. (soma dos quadrados de duas v.a. normais reduzidas) e no denominador uma v.a. de χ^2 de $(n-q)$ g.l.

$$P\left\{ \frac{\chi^2/2}{\chi^2_{n-q}/(n-q)} < \frac{k^2}{2} \right\} = P\left\{ F(2, n-q) < \frac{k^2}{2} \right\} = P_k$$

Ajustamento de Redes

5.9.7 Elipses de confiança

j) A relação anterior fornece-nos a probabilidade de o ponto \hat{Q}_j , se encontrar dentro da elipse ampliada do factor k e centrada no ponto verdadeiro, $(Q_j)_v$;

k) Estas relações permitem-nos resolver dois tipos de problema:

1 – **Fixando a probabilidade P_k** , qual deverá ser o factor de ampliação k, para que o ponto aleatório caia dentro da elipse?

2 – **Fixando o valor de k**, qual a probabilidade de esse ponto se situar dentro da elipse;

l) Exemplos numérico:

$$1 - F_{tab}(2, 14, 0.95) = 3.74 \Rightarrow k^2/2 = 3.74 \Rightarrow k = \sqrt{7.18} = 2.74$$

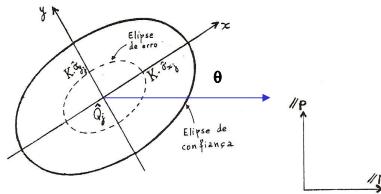
$$2 - k=1 \Rightarrow k^2/2 = 0.5 \Rightarrow F_{tab}(2, \infty, P_k) = 0.5 \Rightarrow P_k = 39\%$$

Ajustamento de Redes

5.9.7 Elipses de confiança

m) Conclui-se que a elipse de erro ($k=1$) corresponde a uma elipse de confiança entre os 35% ($n-q=3$) e os 39% ($n-q=\infty$) de probabilidade, constituindo um domínio de dispersão não dilatado;

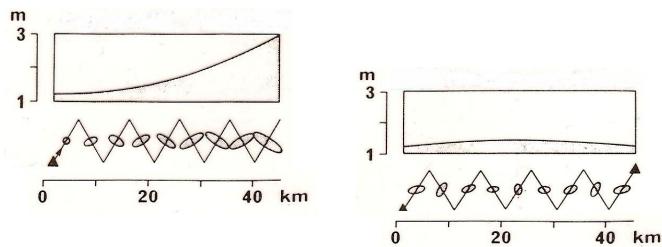
n) Para probabilidades superiores (90, 95 ou 99%), correspondendo a maior confiança no valor estimado, obtém-se domínios de dispersão bem mais dilatados.



Ajustamento de Redes

5.9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

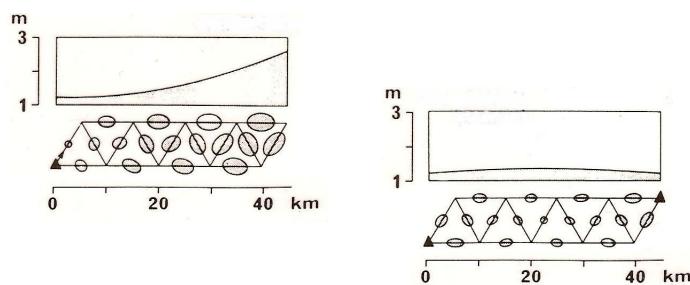
a) Poligonal aberta e poligonal fechada (amarrada)



Ajustamento de Redes

5.9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

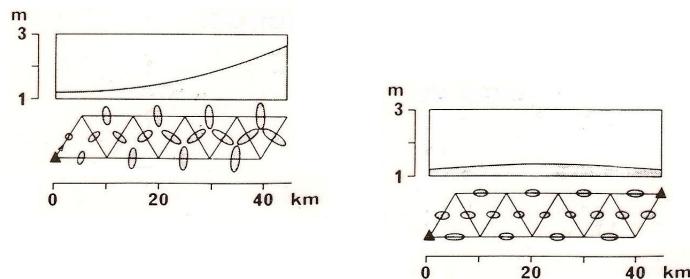
b) Triangulação em cadeia com 1 e 2 pontos fixos



Ajustamento de Redes

5.9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

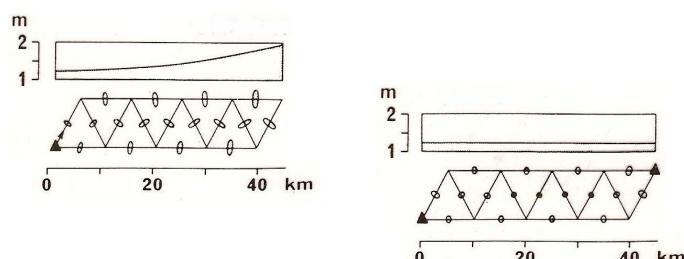
c) Trilateração em cadeia com 1 e 2 pontos fixos



Ajustamento de Redes

5.9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

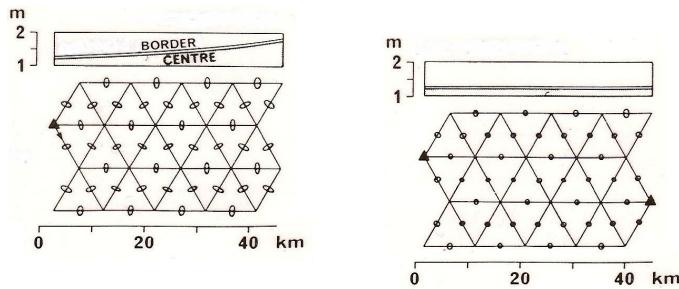
d) Combinação em cadeia com 1 e 2 pontos fixos



Ajustamento de Redes

5.9.8 Exemplos de Elipses de erro relativas

e) Rede com 1 e 2 pontos fixos

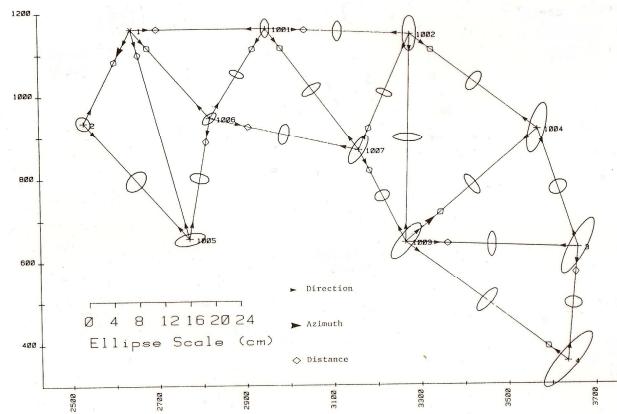


Geodesia & Aplicações – Aula 7

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.9.9 Exemplo de Elipses a 95% confiança (1 pt fixo)

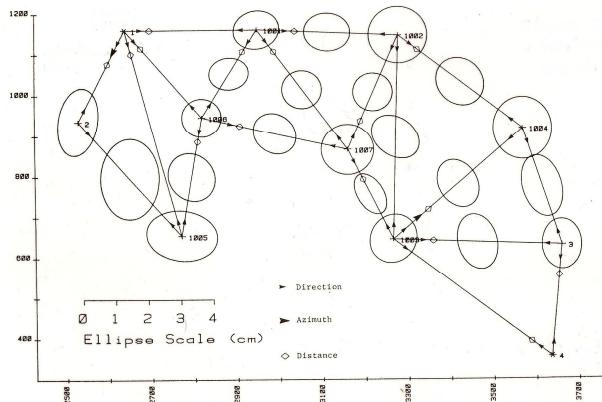


Geodesia & Aplicações – Aula 7

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.9.9 Exemplo de Elipses a 95% confiança (2 pts fixos)



Geodesia & Aplicações – Aula 7

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.9.10 Elipse de erro – outro modo de determinação

a) Da álgebra matricial, sabe-se que os valores e vectores próprios de uma matriz quadrada, de dimensão q, determinam-se pela resolução do sistema linear:

$$B \cdot x = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \quad (B - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$$

além da sua solução trivial, tem as soluções dadas pela **equação característica da matriz B**: $|B - \lambda I| = 0$

- b) Esta igualdade representa um polinómio real de grau q em λ , com q raízes, que definem os valores próprios da matriz;

c) A cada valor próprio λ_i corresponde um vector próprio x_i , que se obtém por substituição no sistema linear de x ;

Geodesia & Aplicações – Aula 7

FCUL-EG

Ajustamento de Redes

5.9.10 Elipse de erro – outro modo de determinação

- d) O cálculo de valores e vectores próprios da matriz de covariância dos parâmetros, C_s , permite determinar também os elementos de uma elipse de erro dos vértices da rede;
- e) A aplicação da equação característica ao caso bidimensional, conduz ao polinómio:

$$(-\lambda)^2 + \text{Tr}(\mathbf{B}) \cdot (-\lambda) + |\mathbf{B}| = 0$$

substituindo na equação o traço e o determinante da sub-matriz de covariâncias obtemos um polinómio de 2º grau em λ

$$\lambda^2 - (\hat{\sigma}_{\Delta M_j}^2 + \hat{\sigma}_{\Delta P_j}^2) \cdot \lambda + (\hat{\sigma}_{\Delta M_j}^2 \cdot \hat{\sigma}_{\Delta P_j}^2 - \hat{\sigma}_{\Delta M_j \Delta P_j}^2) = 0$$

Ajustamento de Redes

5.9.10 Elipse de erro – outro modo de determinação

- d) Resolvendo este polinómio anterior, obtém-se como solução, os valores próprios λ_1 e λ_2 ,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\Delta M_j}^2 + \sigma_{\Delta P_j}^2 + \sqrt{(\sigma_{\Delta M_j}^2 - \sigma_{\Delta P_j}^2)^2 + 4\sigma_{\Delta M_j \Delta P_j}^2} \right\}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\Delta M_j}^2 + \sigma_{\Delta P_j}^2 - \sqrt{(\sigma_{\Delta M_j}^2 - \sigma_{\Delta P_j}^2)^2 + 4\sigma_{\Delta M_j \Delta P_j}^2} \right\}$$

- e) Estes valores correspondem às variâncias máxima e mínima, da sub-matriz de covariâncias;
- g) Como por definição, os semieixos das elipses correspondem aos valores máximo e mínimo do desvio-padrão, cada semieixo é determinado pela raiz quadrada dos valores próprios;
- g) As suas direcções são dadas pelos vectores próprios.

Ajustamento de Redes

5.9.11 Hiperelipsóide de erro

- a) O hiper-elipsóide de erro é ***o domínio de erro de toda a rede geodésica***, com n-q graus de liberdade;
- b) Os seus semieixos são os valores próprios de uma dada matriz de covariância de uma nova variável, e dão-nos uma ***medida de precisão global da rede***;
- c) A análise anterior de domínios locais de erro (elipses relativas e absolutas) é limitada, pois refere-se a cada vértice isolado da rede, com desprezo pelas covariâncias entre as coordenadas desses vértices e as coordenadas dos restantes vértices;
- d) As ***elipses de erro*** correspondem a secções planas do hiper-elipsóide de erro da rede geodésica, e ***são uma solução aproximada*** do problema: “**Qual é a precisão da Rede?**”;

Ajustamento de Redes

5.9.11 Hiperelipsóide de erro

- e) É sempre possível transformar um conjunto de v.a. correlacionadas num outro de v.a. não-correlacionadas;
- f) A matriz de transformação não é única, uma das soluções é dada pela matriz cujas colunas são os vectores próprios normalizados da matriz de covariâncias das v.a. originais;
- g) Esta operação é equivalente a diagonalizar a matriz de covariâncias original;
- h) Para qualquer matriz **B**, existe sempre uma matriz rotação **S** (ortogonal) tal que $\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ é diagonal (constituída com os valores próprios de B);

Ajustamento de Redes

5.9.11 Hiperelipsóide de erro

- i) Se a matriz B for simétrica e definida positiva, então:
 - os seus valores próprios são reais e todos positivos;
 - os seus vectores próprios são todos mutuamente ortogonais;
- j) Se designarmos por S a **matriz ortogonal** cujas colunas são os **vectores próprios** normalizados de N^{-1} , e definirmos a seguinte mudança de variável: $\hat{U} = S^T \cdot \hat{\theta}$ obtemos uma nova matriz de covariâncias da v.a. não-correlacionada U
$$\hat{C}_{\hat{U}} = S^T \cdot (\hat{\sigma}_0^2 N^{-1}) \cdot S = \hat{\sigma}_0^2 \cdot D$$
- k) O **domínio de erro** respeitante a estas variáveis não correlacionadas é o **hiper-elipsóide** de erro cujos semieixos são as raízes quadradas dos seus valores próprios.

Ajustamento de Redes

5.9.12 Conclusões

- a) A análise da qualidade de uma rede através do modelo estocástico de ajustamento é de grande importância;
- b) Não só se pode avaliar *a posteriori* a qualidade do ajustamento, como também se pode garantir *a priori* essa qualidade pretendida;
- c) Dado que o modelo estocástico depende substancialmente da geometria e da qualidade (precisão) das observações, e não tanto das coordenadas dos pontos, ele pode ser determinado *a priori* com suficiente rigor para efeitos de fiabilidade e optimização da rede;
- d) A análise *a priori* do modelo estocástico, nomeadamente através do hiper-elipsóide de erro, é muito utilizado na Microgeodesia;

Ajustamento de Redes

5.9.12 Conclusões

- e) Quando se pretende garantir um determinado nível de precisão (a melhor matriz C_x) devem ser feitos estudos prévios ao nível do geometria da rede (modelo funcional) e da qualidade das observações (precisões *a priori*);
- f) Porque na Microgeodesia (exemplo das barragens) se tem mais liberdade de escolha, é fundamental escolher a melhor opção ao nível das observações, da localização dos vértices e dos instrumentos usados, antes mesmo de implantar a rede, para que os resultados correspondam ao esperado (ex.: detecção de deslocamentos milimétricos)

Ajustamento de Redes

5.10 Cálculo numérico de redes

- a) Neste capítulo abordamos os problemas de: 1- “**defeito do datum**”; 2- **redes livres**;
- b) A escolha de pontos de referência, devido à sua instabilidade no caso de redes de apoio de infraestruturas, pode requerer diferentes estratégias de ajustamento;
- c) A precisão final da rede pode justificar uma escolha adequada e criteriosa do *datum* da rede.

Ajustamento de Redes

5.10.1 Defeito do *Datum*

- a) A indeterminação da localização, da orientação e da escala da rede origina o que se chama “defeito do *datum*”;
- b) A existência dos 4 graus de liberdade numa rede bidimensional obriga à fixação dos respectivos parâmetros (localização, escala e orientação) para que o sistema resulte possível e determinado;
- c) Como estes parâmetros constituem uma indeterminação, e as observações não permitem a sua determinação exacta e precisa, tem de se impor certos **constrangimentos**;
- d) Para cada opção tomada tem-se uma solução diferente de referencial, *daí o seu defeito*;

Ajustamento de Redes

5.10.1 Defeito do *Datum*

- e) Em termos de localização, o ajustamento clássico obriga a que seja fixado pelo menos um ponto, considerando-se os restantes como pontos livres (v.a.);
- f) Para fixar um dado ponto da rede existem duas formas, ou se acrescentam equações de condição relativas aos parâmetros desse ponto:

$$(dM_k = \mathbf{0}; dP_k = \mathbf{0}) \text{ ou } (d\varphi_k = \mathbf{0}; d\lambda_k = \mathbf{0})$$

ou, não se consideram (não entram) esses parâmetros como variáveis do sistema;

- g) Num caso ou noutro o número de graus de liberdade é o mesmo;
- h) A segunda opção é a mais utilizada;

Ajustamento de Redes

5.10.2 Redes livres

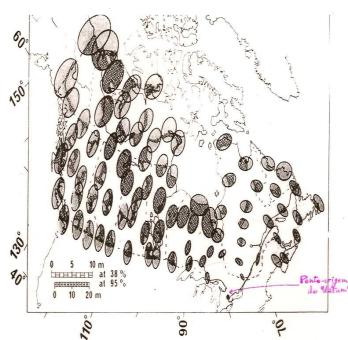
- a) Uma alternativa às redes fixas, muito utilizada actualmente, e que resolve em parte o problema do “*efeito do datum*”, é o conceito de rede livre;
- b) Ao invés de se considerar um ponto fixo, todos são pontos livres (v.a.), e considera-se um ou mais pontos com coordenadas constrangidas a uma variância limitada;
- c) São acrescentadas equações de condição das suas coordenadas, às quais fica associada uma dada variância ($\chi \text{ mm}^2$), e consequentemente, um dado peso;

$$\begin{cases} dM_k = (M_k^\theta - \bar{M}_k)_{n+1} - v_{n+1} \\ dP_k = (P_k^\theta - \bar{P}_k)_{n+2} - v_{n+2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} d\varphi_k = (\varphi_k^\theta - \bar{\varphi}_k)_{n+1} - v_{n+1} \\ d\lambda_k = (\lambda_k^\theta - \bar{\lambda}_k)_{n+2} - v_{n+2} \end{cases}$$

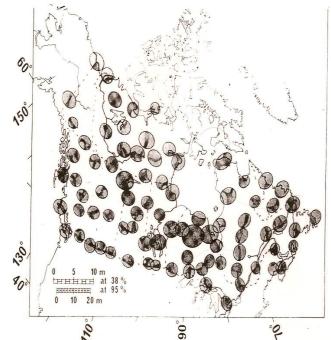
Ajustamento de Redes

5.10.2 Redes livres

a) Rede fixa



b) Rede livre



Ajustamento de Redes

5.10.3 Conceitos

- a) Compensação livre – ajustamento de observações homogéneas (direcções) livre de constrangimento às observações, método de estimativa da variância das direcções azimutais;
- b) Ajust. de constrangimento máximo - ajustamento de uma rede com o máximo de constrangimento (localização, escala e orientação), por exemplo, com 2 pontos fixos (equivalente à compensação livre).
- c) Ajustamento constrangido – ajustamento de uma rede com constrangimento aos seus graus de liberdade de localização (escala e orientação livre) ;
- d) Ajust. de constrangimento mínimo - ajustamento de uma rede com o mínimo de constrangimento aos seus graus de liberdade (localização, escala e orientação), sem pontos fixos,– rede livre (com pts de controlo);

Observações Clássicas

1. Correcção e Redução de Observações

As reduções a aplicar às medições feitas no terreno, após as correcções instrumentais e atmosféricas, são de ordem **referencial**, relativas ao sistema de referência;

- Na geodesia bi-dimensional, o elipsóide é a superfície de referência à qual todas as medições devem ser reduzidas;
- Na cartografia, a superfície de referência é o plano cartográfico, e as respectivas reduções dependem do elipsóide e do tipo de projecção utilizados;
- Na geodesia espacial tri-dimensional, não há lugar a qualquer tipo de redução, a menos da transformação de coordenadas entre STC.

Observações Clássicas

2. Redução de observações geodésicas

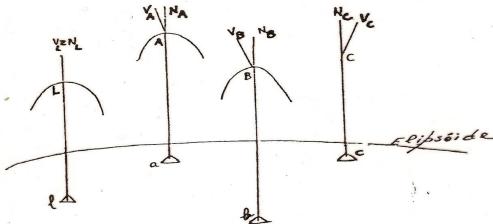
a) Lei de Projecção de Helmert

- Dado que as observações são obtidas directamente à superfície topográfica e o cálculo da rede geodésica é feito sobre o elipsóide, todas as observações devem ser projectadas (reduzidas) sobre o elipsóide de referência;
- Supondo que o elipsóide está posicionado relativamente ao sistema terrestre convencional (STC), todos os vértice geodésicos são **projectados ortogonalmente sobre o elipsóide**;

Observações Clássicas

2. Redução de observações geodésicas

b) Projecção de Helmert



- A cada ponto no terreno corresponde um ponto no elipsóide obtido pela projecção feita através da normal ao elipsóide do ponto no terreno.

Observações Clássicas

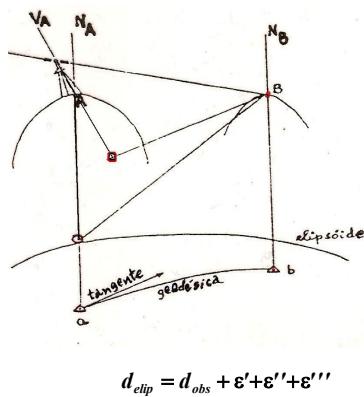
2. Redução de observações geodésicas

c) Tipos de redução

- Redução das direcções azimutais ao elipsóide:
 - 1- Correcção do desvio da vertical;
 - 2- Correcção de elevação do ponto visado;
 - 3- Correcção de redução à geodésica
- Redução de Azimutes Astronómicos;
 - 1- Equação de Laplace (desvio da vertical);
- Redução de comprimentos:
 - 1- Redução da corda espacial à corda do elipsóide;
 - 2- Redução da corda ao arco de elipsóide.

Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais



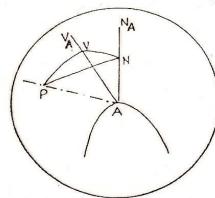
$$d_{clip} = d_{obs} + \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon'''$$

- 1) Passar o eixo instrumental da vertical para a normal ao elipsóide - **correcção do desvio da vertical**;
- 2) Passar a estação de **A** para **a** (sem correcção);
- 3) Passar **B** para **b** - **correcção de elevação do ponto visado**;
- 4) Passar da secção normal para a respectiva geodésica – **correcção de redução à geodésica**;

Observações Clássicas

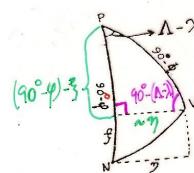
2.1 Redução de direcções azimutais

a) Correcção de redução do desvio da vertical



Componentes do desvio

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \Phi\end{aligned}$$



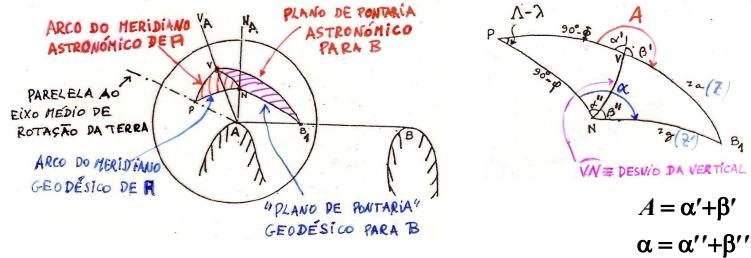
Desvio segundo o azimute α

$$\Delta p = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

a) Correcção de redução do desvio da vertical



A Equação de Laplace passa pela determinação dos dois termos de α 's e β 's desta expressão. O termo dos α 's resulta do 1º triângulo e o dos β 's resulta do 2º triângulo.

$$\alpha = A + (\alpha'' - \alpha') + (\beta'' - \beta')$$

Geodesia & Aplicações – Aula 8

FCUL-EG

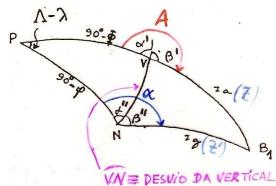
Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

a) Correcção de redução do desvio da vertical

- Feita a substituição das respectivas expressões resulta a chamada **Equação Completa de Laplace**:

$$\alpha = A - (\lambda - \lambda) \operatorname{sen} \varphi - (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \cos \alpha) \cot gZ$$



Como as visadas das observações geodésicas situam-se próximas do horizonte, obtém-se a **Equação Reduzida de Laplace**:

$$\alpha = A - (\lambda - \lambda) \operatorname{sen} \varphi$$

Geodesia & Aplicações – Aula 8

FCUL-EG

Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

a) Correcção de redução do desvio da vertical

- O facto de na geodesia se trabalhar com direcções, leva a aplicação da correcção do desvio da vertical seja feito em dois tempos;

- Ao azimute de orientação do giro (A_0) aplica-se apenas o primeiro termo da Eq. de Laplace, funciona como constante da estação;

- Às diferentes direcções azimutais do giro aplica-se o segundo termo, por este depender do azimute da direcção e da sua distância zenital;

Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

a) Correcção de redução do desvio da vertical

- Se chamarmos aos azimutes do zero do limbo A_0 e α_0 , então $\alpha_0 = A_0 - (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \varphi$

uma constante para cada estela de direcções;

- Para a redução das direcções astronómicas, temos

$$d_i = D_i - (\xi \operatorname{sen} \alpha_i - \eta \operatorname{cos} \alpha_i) \operatorname{cotg} Z_i$$

Dir. Az. Obs.	Dir. Az. Corr.	Az. Astronómico	Az. Geodésico
D_i (i=1,2,..)	$d_i = D_i - \Delta_i \operatorname{cotg} Z_i$	$A_i = D_i + A_0$	$\alpha_i = D_i + A_0 - (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \varphi - \Delta_i \operatorname{cotg} Z_i$

Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

$$\xi = -3''.8; \quad \eta = -8''.97; \quad \Delta\alpha = 6''.879$$

PE-PV	Dir. Az. Obs.	Corr. Lapl.	Dir. Az. Corr.	Az. Astro.	Az. Geod.
3 - 8	15° 9' 4.40"	-0''.1820	15° 9' 4.218"	280° 24' 49.70"	280° 24' 56.397"
3 - 15	42° 21' 55.0"	-0''.2785	42° 21' 54.722"	307° 37' 40.30"	307° 37' 46.901"
3 - 7	49° 30' 3.80"	0''.172	49° 30' 3.972"	314° 45' 49.10"	314° 45' 56.152"
3 - 2	53° 15' 16.80"	0''.325	53° 15' 17.125"	318° 31' 2.10"	318° 31' 9.304"

$$Az_0 = 265° 15' 45.3''$$

Geodesia & Aplicações – Aula 8

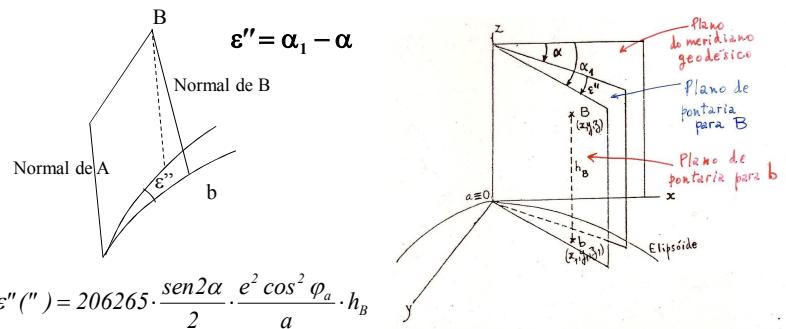
FCUL-EG

Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

b) Correcção de redução da elevação do ponto visado

- As normais de A e B não são paralelas



Geodesia & Aplicações – Aula 8

FCUL-EG

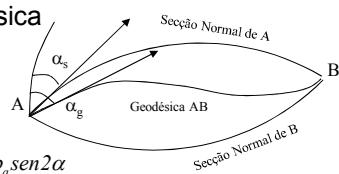
Observações Clássicas

2.1 Redução de direcções azimutais

c) Correcção de redução à geodésica

- Fórmula aproximada:

$$\varepsilon'''(rad) = -\frac{s^2 e'^2 \cos^2 \varphi_a \operatorname{sen} 2\alpha}{12N^2} \approx -\frac{s^2 e^2 \cos^2 \varphi_a \operatorname{sen} 2\alpha}{12a^2}$$



- Apesar desta correcção ser muito pequena (ordem das milésimas de segundo de arco), juntamente com a anterior (ordem das décimas de segundo de arco), comportam-se como erros sistemáticos, pelo que deve haver algum cuidado no seu desprezo.

Observações Clássicas

2.1 Redução de azimute astronómicos

a) Correcção de redução do desvio da vertical

- A conversão de um azimute astronómico a azimute geodésico faz-se pela aplicação da Equação de Laplace completa:

$$\alpha = A - (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \varphi - (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \operatorname{cos} \alpha) \cot gZ$$

- Esta correcção só pode ser aplicada em estações onde sejam feitas observações astronómicas (latitude e longitude para a eq. completa e apenas de longitude para a eq. reduzida);

- Estas estações são designadas de estações de Laplace.

- Para além do ponto origem (caso do datum local), devem ser feitas estações de Laplace com espaçamento de 100 a 200 Km.

Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

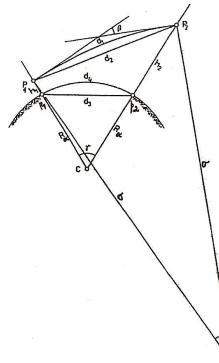
a) Correcções de redução de comprimento ao elipsóide

1- Correcção de arco à corda (d_1-d_2)
(de refracção e só para electro-ópticas)

2- Correcção de corda à corda (d_2-d_3)

3- Correcção de corda ao arco (d_3-d_4)

∴ A aplicação destas correcções de redução respeita a Lei de Projecção de Helmert.



Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

b) Correcção de frequência

- As condições ambientais de pressão e temperatura condicionam o funcionamento do oscilador de quartzo do EDM, provocando uma alteração da frequência da radiação em relação à frequência nominal;

- Se for possível medir à saída do sinal a frequência de emissão, através de um frequencímetro, então a distância deduzida internamente pelo EDM pode ser corrigida por

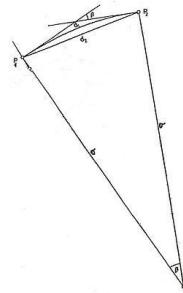
$$D = D' + D' \left(\frac{f_{ref} - f}{f_{ref}} \right)$$

Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

c) Correcções de arco à corda espacial – Só para distâncias electro-ópticas

- As correcções do índice de refração aos comprimentos electro-ópticos não colocam o comprimento sobre o segmento recta (corda):
 - 1ª correcção de velocidade corrige o valor medido do índice de refracção;
 - 2ª correcção de velocidade corrige o valor medido da trajectória (correcção de curvatura);
- A correcção $d_1 - d_2$ reduz o valor de comprimento à corda espacial (distância espacial rectilínea).



Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

d) Correcções de arco à corda espacial – Só para distâncias electro-ópticas

- Da figura tira-se $D_2 = 2\sigma \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2\sigma \cdot \sin\left(\frac{D_1}{2\sigma}\right)$

- Desenvolvendo a função seno

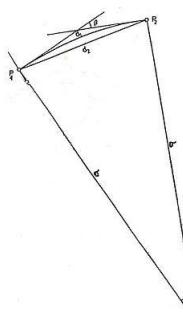
$$\left(\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$$

e substituindo-a na expressão anterior, vem

$$D_2 = D_1 - \frac{D_1^3}{24\sigma^3} + \frac{D_1^5}{1920\sigma^5} - \dots$$

- Finalmente a correcção pode ser escrita por

$$D_2 = D_1 - k^2 \frac{D_1^3}{24R_a^2} \quad \text{com} \quad k = \frac{R_a}{\sigma}$$



Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

e) Correcção de redução à corda do elipsóide ($d_2 - d_3$)

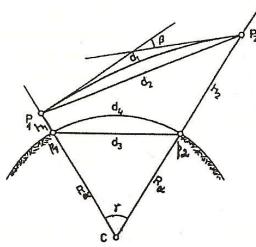
- Do teorema de Carnot sobre o triângulo P_1CP_2 , tem-se

$$D_2^2 = (R_a + h_1)^2 + (R_a + h_2)^2 - 2(R_a + h_1)(R_a + h_2)\cos\gamma$$

$$\text{- sabendo que } \cos\gamma = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2\left(\frac{D_3}{2R_a}\right)^2$$

e apóis alguma simplificação, obtém-se

$$D_2^2 = \Delta h^2 + \left(1 + \frac{h_1}{R_a}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R_a}\right) D_3^2$$



$$\text{Resultando finalmente: } D_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{h_1}{R_a}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R_a}\right) D_2^2 - \Delta h^2}$$

Geodesia & Aplicações – Aula 8

FCUL-EG

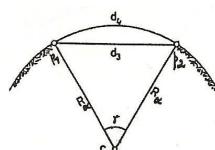
Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

f) Correcção de redução ao arco do elipsóide

- Da figura tira-se

$$D_3 = 2R_a \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2R_a \operatorname{sen}\left(\frac{D_4}{2R_a}\right)$$



- Com um raciocínio análogo à passagem

anterior do arco à corda, obtém-se

$$D_3 = D_4 - \frac{D_4^3}{24R_a^2}$$

- Escrevendo em ordem a D_4 e substituindo D_3 por D_4 no numerador do termo correctivo, vem

$$D_4 = D_3 + \frac{D_3^3}{24R_a^2}$$

Geodesia & Aplicações – Aula 8

FCUL-EG

Observações Clássicas

2.2 Redução de distâncias

g) Correcção de redução directa (a menos de d_1)

- Da relação $D_3 = 2R_\alpha \operatorname{sen} \left(\frac{D_4}{2R_\alpha} \right)$

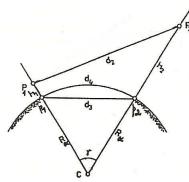
retira-se $D_4 = 2R_\alpha \cdot \operatorname{arcsen} \left(\frac{D_3}{2R_\alpha} \right)$

substituindo a expressão de D_3 em ordem a D_2 , vem

$$D_4 = 2R_\alpha \cdot \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{D_2^2 - \Delta h^2}{4R_\alpha^2 \left(1 + \frac{h_1}{R_\alpha} \right) \left(1 + \frac{h_2}{R_\alpha} \right)}}$$

Nota: Na Topografia

$$D_0 = D_H \frac{R}{R + H_p}$$



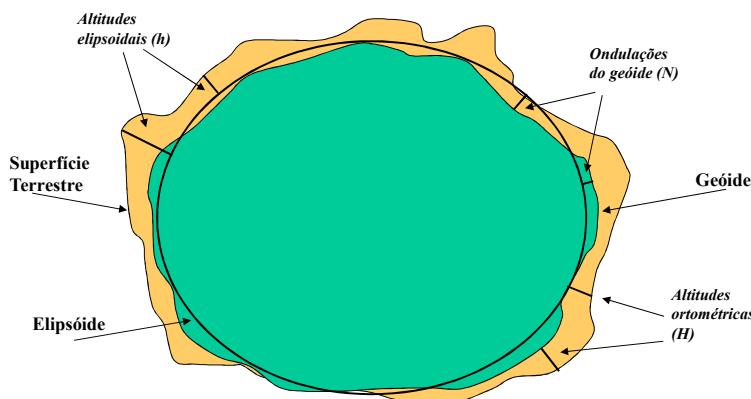
Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

- a) Designa-se por **nivelamento** toda e qualquer técnica de geodesia que determina as altitudes referidas a um sistema de referência (datum altimétrico);
- b) Chama-se **altitude ortométrica** (H) de um ponto A à distância vertical medida ao longo da linha de força do campo gravítico terrestre, entre o ponto e a superfície do geóide (referência);
- c) Chama-se **altitude elipsoidal** ou **elipsóidica** (h) de um ponto A à distância medida ao longo da normal ao elipsóide, entre o ponto e a superfície do elipsóide de referência;
$$h = H + N$$
- d) A menos de um erro de obliquidade, a diferença entre as duas altitudes geodésicas, designa-se por **ondulação do geóide** (N) ou altura do geóide (afastamento entre o elipsóide e o geóide);

Nivelamento

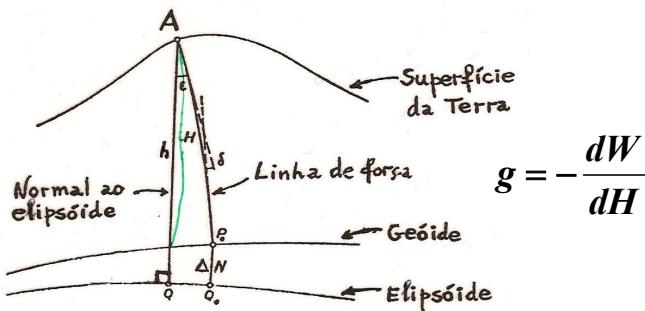
6. Generalidades. Métodos



Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

e) Enquanto que a altitude **elipsoidal** é puramente geométrica, já a altitude **ortométrica** é uma grandeza física (gravítica), mede o afastamento entre superfícies equipotenciais;



Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

f) **Métodos de nívelamento** por nível decrescente de precisão:

- Nivelamento geodésico (geométrico ou directo);
- Nivelamento hidrostático;
- Nivelamento trigonométrico (ou indirecto);
- Nivelamento barométrico.

g) Salvo raras excepções, os métodos usados na geodesia são o geométrico e o trigonométrico, contudo só o nívelamento geodésico directo permite obter a precisão geodésica de 1 ppm (1 mm/km);

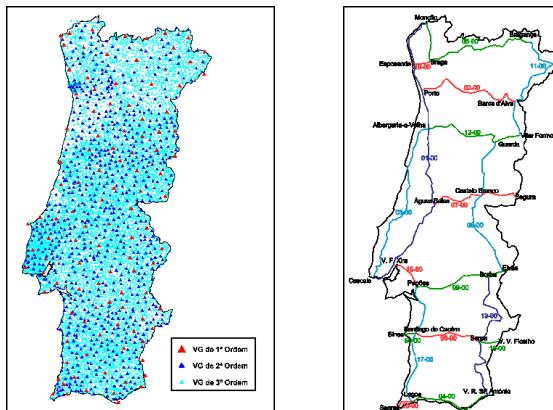
h) O nívelamento trigonométrico (5-10 cm/km) é importante por ser o único que permite alcançar os vértices geodésicos;

i) O nívelamento geométrico é limitado a pequenos desniveis, limita-se a percorrer as vias rodoviárias;

Nivelamento

6. Generalidades. Métodos

j) Rede geodésica e rede de nivelamento geométrico



Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.1 Nivelamento barométrico

a) Como o nome indica, baseia-se na medição da pressão atmosférica num dado ponto com a qual se deduz o valor da altitude;

b) O peso de uma coluna de ar desde a altura H até aos limites atmosféricos, resulta da relação integral

$$p \equiv \int_H^{40\text{ km}} \rho_a \bar{g} dH$$

c) Assumindo a lei dos gases perfeitos pode-se escrever o desnível entre dois pontos por

$$H_2 - H_1 = \int_{H_1}^{H_2} dH = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_s T}{g_s \rho_s T_s p} dp = \frac{H_s T}{T_s} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

resultando

$$\Delta H = \frac{H_s T}{T_s} (\ln p_1 - \ln p_2)$$

em que "s" se refere às condições atmosféricas padrão.

Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.1 Nivelamento barométrico

- d) Este modelo, conhecido por Equação de Lapalce, é válida apenas sob a hipótese isotérmica da coluna de ar;
- e) Os pontos devem supostamente estar na mesma linha de prumo, caso contrário, é necessário que as superfícies isobáricas sejam paralelas (só em curtas distâncias);
- f) Devido à variação da densidade, as isobáricas variam com o tempo;
- g) A pressão tradicionalmente mede-se em **bars**:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N cm}^{-2} = 100 \text{ kPa}$$

e é equivalente à pressão exercida por 750,06 mm de mercúrio;

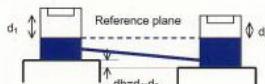
- h) A pressão normal à superfície da Terra é

$$1 \text{ atmosfera} = 1013,25 \text{ mbar} = 760 \text{ mm Hg} = 1013,25 \text{ hPa}$$

Nivelamento

6.2 Nivelamento hidrostático

- a) O nivelamento hidrostático baseia-se no princípio dos vasos comunicantes:



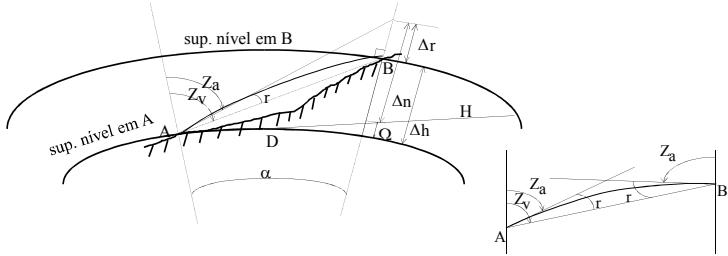
- b) É uma técnica muito específica que dá grandes precisões mas só é aplicado em condições muito particulares, ligação de pontos muito próximos (controlo de movimentos verticais do terreno ou estruturas); é muito utilizado na indústria, e em centros de pesquisa, como CERN;

- c) A grande escala, temos o exemplo da ligação das redes de nívelamento da Suécia e Dinamarca: foi utilizado um tubo de 19 km e as medidas foram feitas com a precisão de 0.1 mm/Km;

Nivelamento

6.3 Nivelamento trigonométrico

- a) O nivelamento geodésico indireto é realizado com as medições de distância zenital e distância inclinada (pode ser deduzida);
- b) Permite medir grandes desniveis e com grandes alcances, e por isso foi utilizado nas redes geodésicas;
- c) Apresenta o grande inconveniente da refracção, atenuado com a observação de zenitais recíprocas e simultâneas;



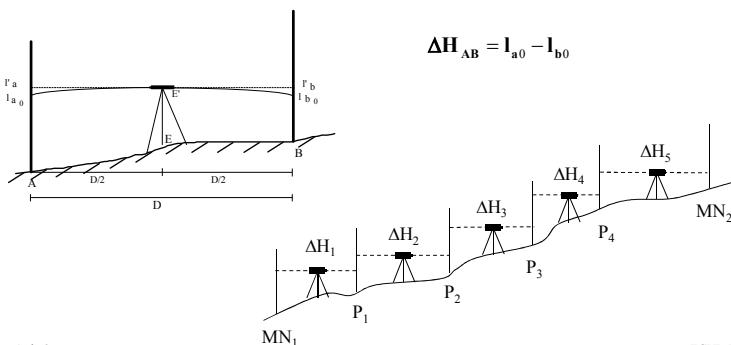
Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.4 Nivelamento geométrico

- a) A medição directa é feita em lanços de 80-100 m, perfazendo troços de 1 km, os quais constituem sub-secções de nivelamento;
- b) As medições são feitas com níveis de alta precisão, as miras são de invar, com dupla graduação e regularmente calibradas;



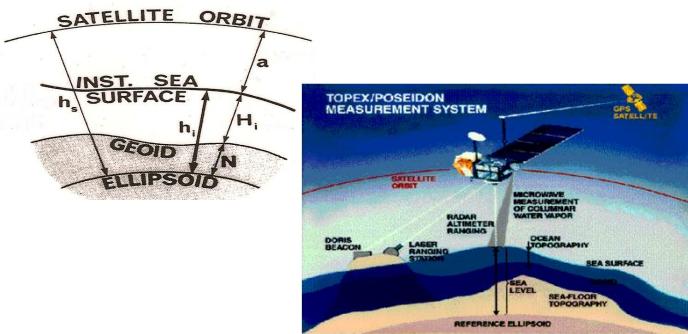
Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.5 Técnicas espaciais e remotas

- a) **Altimetria de satélite**, baseia-se no conhecimento rigoroso da órbita do satélite e na medição indireta da superfície dos oceanos ou de gelo



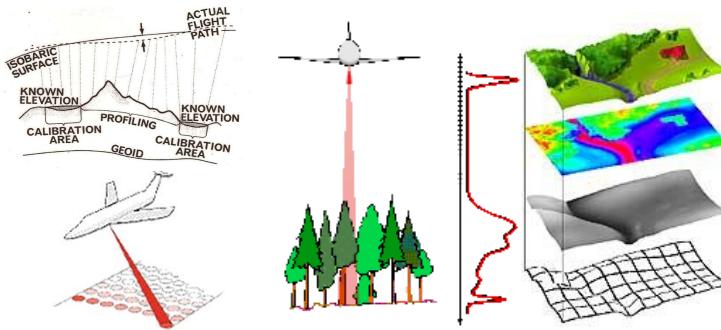
Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.5 Técnicas espaciais e remotas

- b) **Altimetria laser (LiDAR Aéreo)**, através de aeronaves (aviões ou helicópteros), cuja altitude é conhecida quer por GNSS quer por barometria, é medida a distância vertical da superfície terrestre e daí deduzida a altimetria:



Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

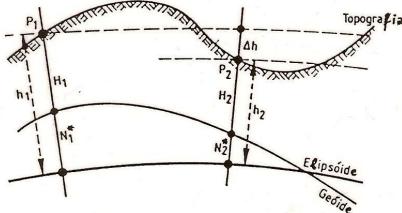
6.6 Relações entre parâmetros altimétricos

- a) As altitudes usadas em redes geodésicas, e agora comumente observadas com o sistema GNSS, são puramente geométricas;
- b) Contudo, as altitudes que mais interessam à geodesia e às suas aplicações (ortométricas ou normais) estão relacionadas com o campo gravítico;

$$h_1 = H_1 + N_1^*$$

$$h_2 = H_2 + N_2^*$$

$$\Delta h = \Delta H + \Delta N^*$$



Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.6 Relações entre parâmetros altimétricos

- c) Desta relação podemos formular vários tipos de problemas:
 - Mediindo desníveis elipsoidais (por GNSS) e tendo um modelo de geóide, podem-se transportar altitudes ortométricas:

$$H_2 = H_1 + \Delta H = H_1 + \Delta h - \Delta N^*$$

- Tendo-se simultaneamente nivelamento geométrico e altitudes elipsoidais (GNSS), pode-se determinar directamente a ondulação:

$$N_1^* = h_1 - H_1$$

- Sem contar com as actuais técnicas espaciais (GNSS), as altitudes elipsoidais necessárias no sistema geodésico são determinadas com nivelamento e modelo de geóide

$$h_1 = H_1 + N_1^*$$

- Havendo deslocamentos verticais ao longo do tempo, as variações podem ser feitas quer por nivelamento quer por GNSS

$$\Delta h_{t_i, t_{i+1}} = \Delta H_{t_i, t_{i+1}}$$

Nivelamento

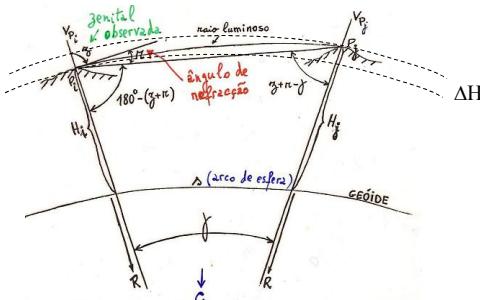
6.7 Nivelamento Trigonométrico ortométrico

- a) É considerado aqui apenas o método de observação, cálculo e ajustamento de nivelamento trigonométrico ortométrico, já que **a passagem para o nivelamento elipsoidal exige o conhecimento dos desvios da vertical** (modelo de geóide);
- b) Embora **limitado pelas incertezas** do modelo de **refracção atmosférica**, serve amplamente para as **aplicações** topográficas (ou cartográficas) da geodesia e permite uma cobertura global da rede;
- c) Dado o fraco rigor, é legítimo adoptar um modelo matemático simplificado;
- d) Vamos supor que para distâncias relativamente pequenas (<20km) as superfícies equipotenciais são esféricas e concêntricas;
- e) Como o método é relativo, para se obter a altitude do ponto visado é necessário conhecer a altitude do ponto-estação, o transporte é então feito através de poligonais trigonométricas, ou através de redes, desde um marégrafo (datum altimétrico);

Nivelamento

6.7.1 Desnível trigonométrico

- a) A distância zenithal observada (aparente) é afectada pelo efeito de refracção, o respectivo ângulo é a diferença entre a zenithal verdadeira e a aparente



b) Desnível entre P_i e P_j $\Delta H = H_j - H_i = (2R + H_i + H_j) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{cotg} \left(z + r - \frac{\gamma}{2} \right)$

Nivelamento

6.7.2 Coeficiente de refracção

- a) Hipótese para o modelo de refracção: “Se a distância zenital for observada às horas de maior calor, o ângulo de refracção obedece à relação

$$r = k \cdot \frac{\gamma}{2}$$

em que o coeficiente k é, aproximadamente, constante para cada região e época do ano.”, [Biot];

b) Para Portugal continental o coeficiente de refracção k é, em média, igual a 0.14 (é comum o coeficiente se apresentado por $k/2=0.07$, é o caso da Topografia);

c) Tal como o índice de refracção (μ), esta é uma grandeza física que depende também da temperatura e pressão do ar, [Bomford, 1983]

$$k = \frac{16.25R}{206265} \cdot \frac{P_{1/3}}{T_{1/3}} \cdot \left\{ 0.0342 + \left(\frac{dT}{dH}_{1/3} \right) \right\}$$

Nivelamento

6.7.3 Expressões de desnível

- a) Feitos os desenvolvimentos e as substituições, e desprezando termos muito pequenos, a expressão do desnível trigonométrico geodésico resulta na expressão:

$$\Delta H = \left(1 + \frac{H_i}{R} \right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta H}{2 \cdot R} \right) \cdot \left(1 + \frac{s^2}{12 \cdot R^2} \right) \cdot s \cdot \cot g \left(z - (1-k) \cdot \frac{s}{2 \cdot R} \right)$$

b) Nas **linhas muito longas** (>30 km) o cálculo é iterativo, iniciando-se com os primeiros factores igual à unidade;

c) Não é necessário conhecer s e R com grande rigor, R pode assumir o valor do raio médio e s é calculado com coordenadas aproximadas das estações (problema inverso da geodesia);

d) Nas **linhas curtas** a fórmula pode sofrer grandes simplificações, aproximando-se da fórmula simplificada usada na Topografia;

Nivelamento

6.7.3 Expressões de desnível

e) Atendendo a que

$$\frac{H_i}{R} \approx 0; \quad \frac{\Delta H}{2 \cdot R} \approx 0; \quad \frac{s^2}{12 \cdot R^2} \approx 0$$

e fazendo o desenvolvimento em série de Taylor, tomando $\delta = (1-k) \cdot \frac{s}{2 \cdot R}$ como acréscimo de z , obtém-se

$$\Delta H = s \cdot \cot z + (1-k) \cdot \frac{s^2}{2 \cdot R} \cdot \cos ec^2 z$$

Como na geodesia se tem $z \approx 90^\circ$, $\text{cosec } z = 1$, resulta nesta condição a fórmula simplificada ou **fórmula topográfica**

$$\Delta H = s \cdot \cot z + \frac{s^2}{2 \cdot R} - \frac{k}{2 \cdot R} \cdot s^2 = s \cdot \cot z + q \cdot s^2$$

f) Na Topografia temos a expressão de desnível definida com o cosseno pelo facto de aí serem medidas directamente as distâncias inclinadas da visada

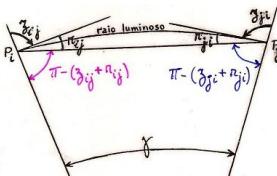
$$\Delta H = D_i \cdot \cos z + \Omega - \Delta r = D_i \cdot \cos z + 6,8E^{-8} D^2$$

Nivelamento

6.7.4 Nivelamento com zenitais recíprocas

a) O nivelamento trigonométrico com zenitais simples (expressão anterior) apresenta o problema do erro associado ao coeficiente de refracção k ;

b) Este problema resolve-se através da observação de zenitais recíprocas;



c) Sejam z_{ij} e z_{ji} as zenitais observadas, respectivamente, de P_i para P_j e P_j para P_i , com as quais se obtêm os respectivos desníveis recíprocos

$$H_j - H_i = s \cdot \cot z_{ij} + q \cdot s^2$$

$$H_i - H_j = s \cdot \cot z_{ji} + q \cdot s^2$$

Nivelamento

6.7.4 Nivelamento com zenitais recíprocas

d) Fazendo a subtracção ordenada de ambos os membros das igualdades, e assumindo que o valor do coeficiente de refracção é comum às duas estações P_i e P_j , o termo de q é cancelado, resultando

$$\Delta H_{ij} = -\Delta H_{ji} = H_j - H_i = \frac{s}{2} \cdot (\cot z_{ij} - \cot z_{ji})$$

e) A observação de zenitais recíprocas atenua o efeito da refracção sobre os desníveis trigonométricos, tornando as medidas mais exactas (efeito de refracção atenuado ou eliminado);

f) Dado que as condições atmosféricas variam no tempo e de lugar para lugar, este tipo de observações devem ser feitas em simultâneo, para que esse efeito seja ainda menor;

g) O valor de coeficiente de refracção assumido verifica-se nos momentos de máximo gradiente vertical da temperatura, pelo que, e ao contrário das observações azimutais, estas observações devem ser feitas na hora de maior calor (excepto para curtas distâncias, < 1 km);

Nivelamento

6.7.5 Determinação do coeficiente de refracção

a) A observação de distâncias zenitais recíprocas e simultâneas permite a determinação do valor do coeficiente da refracção;

b) Tomemos o triângulo formado pelos dois pontos e pelo centro da Terra, somando os seus ângulos internos obtemos

$$[\pi - (z_{ij} + r_{ij})] + [\pi - (z_{ji} + r_{ji})] + \gamma = \pi$$

assumindo a hipótese de Biot, os ângulos de refracção são iguais e assumem a expressão

$$r_{ij} = r_{ji} = r = k \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{k}{2 \cdot R}$$

fazendo a respectiva substituição e resolvendo em ordem a k , obtemos

$$k = 1 + [\pi - (z_{ij} + z_{ji})] \cdot \frac{R}{s}$$

Nivelamento

6.7.6 Compensação de redes trigonométricas

- a) A compensação de redes de nivelamento é feito com a mesma ferramenta usada na compensação de redes geodésicas bidimensionais, a diferença está nas equações de observação, neste caso muito mais simples

$$f(x_o) + A \cdot \delta = l_0 + v$$

$$\Delta H_{calc} + correcção = \Delta H_{obs} + v_{\Delta H}$$

- b) Esta equação de observação de desniveis pode ainda escrever-se na forma

$$dH_j - dH_i = \Delta H_{obs} - (\bar{H}_j - \bar{H}_i) + v_{ij}$$

- c) Resultando para caso de uma rede com n desniveis observados em q estações, o sistema de equações lineares

$$A \cdot dH = -w + v$$

Nivelamento

6.7.6 Compensação de redes trigonométricas

- d) O **primeiro passo** para a compensação da rede é o **cálculo das altitudes ortométricas aproximadas** a partir do transporte altimétrico seguindo um dado encadeamento;

- e) Em seguida faz-se um ajustamento das equações de observação pelo m.m.q., do qual sai as correcções às altitudes aproximadas

$$\hat{H} = \bar{H} + d\hat{H}$$

- f) O modelo de ajustamento deve contemplar a precisão das observações (desniveis) e seguir a resolução do sistema de equações normais do tipo $(A^T P A) \cdot dH = -(A^T P) w$

- g) A matriz peso é, de igual modo, uma matriz diagonal calculada com o inverso das variâncias dos desniveis, que

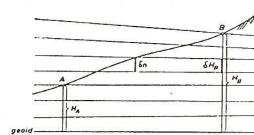
$$\text{para zenitais recíprocas: } \sigma_{\Delta H}^2 \approx \frac{s^2}{2} \cdot \sigma_z^2 \text{ e para zenitais simples: } \sigma_{\Delta H}^2 \approx s^2 \cdot \sigma_z^2$$

Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

- a) As altitudes ortométricas são consideradas quantidades derivadas da diferença de potencial gravítico;
- b) Se se observar o nivelamento geométrico segundo um circuito fechado, a soma algébrica dos desníveis não é, em geral, igual a zero, mesmo que não se cometa qualquer erro de observação:

$$\begin{aligned}\delta n &\neq \delta H_B \\ \sum_A^B \delta n &\neq H_B - H_A\end{aligned}$$



- c) A razão vem do facto das superfícies equipotenciais não serem paralelas;
- d) Tomemos a diferença de potencial correspondente a δn , então

$$-\delta W = g \cdot \delta n = g \cdot \delta H_B \Rightarrow \delta H_B = \frac{g}{g'} \cdot \delta n \neq \delta n$$

Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

- e) Não existe nenhuma relação directa entre o valor medido de nívelamento geométrico e o desnível ortométrico;

$$\text{desnível_geométrico} \neq \text{desnível_ortométrico}$$

- f) Se, juntamente com o nívelamento geométrico, se mediem valores da gravidade, obtém-se diferenças de potencial, e o resultado é independente do percurso seguido

$$\Delta W_{AB} = W_B - W_A = -\sum_A^B g \cdot \delta n = -\int_A^B g dn$$

- g) Se se fizer um percurso fechado então $\Delta W = -\int_A^B g dn = W_A - W_A = 0$

mas, o mesmo não se passa com o desnível geométrico $\Delta n = -\int_A^B dn \neq 0$

Geodesia & Aplicações - Aula 9

FCUL-EG

Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

h) O desnível ortométrico obtém-se então, a partir dos desníveis geométricos corrigidos dos valores da gravidade medidos nas estações de nivelamento

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + OC_{AB}$$

onde OC_{AB} é uma correção gravimétrica dada por

$$OC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A + \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B$$

\bar{g}_A e \bar{g}_B são os valores da gravidade média da vertical de A e B, respectivamente, que podem ser obtidos de forma aproximada por

$$\bar{g} = g + 0.0424 \cdot H$$

i) A compensação de redes de nivelamento geométrico é feita nos mesmos moldes que no nivelamento trigonométrico. Depois de corrigidas as observações, são aplicadas as mesmas equações com os devidos pesos.

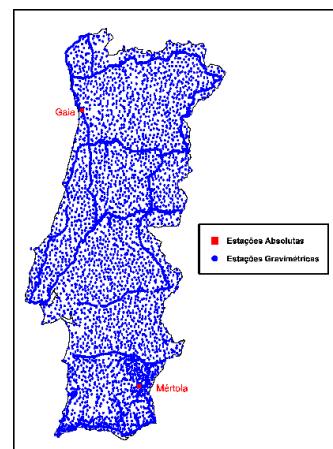
Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

- A densa rede de estações de gravimetria relativa percorre as linhas de nivelamento e a rede de vértices geodésicos, e é apoiada em 2 estações de gravimetria absoluta.

$$g = g_{abs} + \delta g_{rel}$$

- Esta rede permite a interpolação de g para cada ponto de nivelamento geométrico



Nivelamento

6.8 Nivelamento Geométrico

- j) A compensação de redes de nivelamento geométrico tem a particularidade de cada equação de observação se referir ao desnível de troços e não de simples lanços

$$\begin{aligned} f(x_o) + A \cdot \delta &= l_0 + v \\ \Delta H_{calc} + \text{correcção} &= \Delta H_{obs} + v_{\Delta H} \end{aligned}$$

- k) A equação de observação de desníveis escreve-se na forma

$$dH_j - dH_i = \Delta H_{obs} - (\bar{H}_j - \bar{H}_i) + v_{ij}$$

- m) Para o caso de uma rede com n troços observados entre q estações de nivelamento principal (NP), a resolução do sistema de equações lineares

$$A \cdot dH = -w + v$$

devolve as correcções às cotas iniciais das MN, com o qual se obtêm as coordenadas compensadas;

Nivelamento

6.9 Diferentes altitudes ortométricas

- a) Considere-se a seguinte grandeza, C, designada por números geopotenciais:

$$C = W_0 - W = \int_0^A gdn$$

- b) Obtém-se a altitude ortométrica, explicitamente definida por:

$$H = - \int_{W_0}^W \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g} = \frac{C}{g}$$

- c) Assim, podem-se definir outros tipos de altitude, em função da grandeza de gravidade utilizada:

- Altitude normal:

$$H^* = - \int_{W_0}^W \frac{dW}{\gamma} = \frac{C}{\bar{\gamma}}$$

- Altitude dinâmica:

$$H^{dyn} = - \int_{W_0}^W \frac{dW}{\gamma_0} = \frac{C}{\gamma_0}$$

Ajustamento tridimensional

7. Redes geodésicas tridimensionais

- a) O domínio das redes geodésicas está definido no espaço tridimensional, logo, por definição, a **Geodesia é tridimensional**;
- b) Contudo, dada a fraca, ou quase ausente, relação matemática entre as componentes altimétrica e planimétrica, **tem sido habitual separar a geodesia em bidimensional** (planimetria) e **unidimensional** (altimetria ou nivelamento);
- c) Do ponto de vista matemático **esta separação é resultante da independência** entre as duas componentes

$$\begin{bmatrix} A_{n,q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{m,q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{\varphi\lambda} \\ \delta_h \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w_{\varphi\lambda} \\ w_h \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{n,q} \cdot \delta_{\varphi\lambda} = -w_{\varphi\lambda} \\ B_{m,q} \cdot \delta_h = -w_h \end{cases}$$
$$\Sigma_{\varphi,\lambda,h} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\varphi\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_h \end{bmatrix} \Leftrightarrow P = \begin{bmatrix} P_{\varphi\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_h \end{bmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

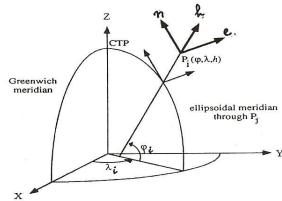
7. Redes geodésicas tridimensionais

- d) Por esta razão, as duas componentes do posicionamento geodésico eram tratadas separadamente em termos de ajustamento, tal como foi abordada nesta disciplina;
- e) Podem-se encontrar outras razões pela qual, na geodesia clássica, se separa a planimetria da altimetria: instrumentais, redução de observações, computacionais, objectivos e tipo de cálculo, etc.;
- f) As observações clássicas (direcção azimutal, distância zenithal e comprimento) definem uma relação de posicionamento tridimensional em coordenadas polares – vector posição 3D;
- g) Por esta razão, é lógico que o modelo matemático de ajustamento de redes geodésicas deva ser tridimensional;
- h) Com o advento da era espacial, tornou-se ainda mais evidente o objectivo de ajustar todos os dados geodésicos em conjunto – surge a **geodesia tridimensional** (espacial);

Ajustamento tridimensional

7.1 Sistemas de coordenadas e suas relações

a) Sistema geodésico e cartesiano global



$$x_p = (N + h_p) \cos \varphi_p \cos \lambda_p$$

$$y_p = (N + h_p) \cos \varphi_p \sin \lambda_p$$

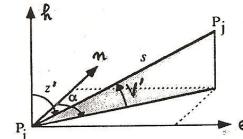
$$z_p = [N(1 - e^2) + h_p] \sin \varphi_p$$

b) Sistema geodésico local

$$n = s \cdot \cos V' \cos \alpha$$

$$e = s \cdot \cos V' \sin \alpha$$

$$h = s \cdot \sin V'$$



Ajustamento tridimensional

7.1 Sistemas de coordenadas e suas relações

c) Tendo em conta as relações dadas no capítulo de sistemas de referência podemos escrever as relações entre o sistema cartesiano global e o sistema geodésico local

$$\Delta r_{ij}^{TC} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i & -\sin \lambda_i & -\cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ -\sin \varphi_i \sin \lambda_i & \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \cos \varphi_i & 0 & \sin \varphi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ e \\ h \end{pmatrix}$$

e a relação inversa, que pelo facto da matriz rotação ser ortogonal, é dada pela sua transposta

$$\begin{pmatrix} n \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i & -\sin \varphi_i \sin \lambda_i & \cos \varphi_i \\ -\sin \lambda_i & \cos \lambda_i & 0 \\ -\cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \sin \lambda_i & \sin \varphi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.2 Modelo geodésico tridimensional

a) Resolvendo estes sistemas em ordem às observações, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \arctg \left(\frac{-\sin \lambda_i \cdot \Delta X + \cos \lambda_i \cdot \Delta Y}{-\sin \varphi_i \cdot \cos \lambda_i \cdot \Delta X - \sin \varphi_i \cdot \sin \lambda_i \cdot \Delta Y + \cos \varphi_i \cdot \Delta Z} \right) \\ V'_i = \arcsen \left(\frac{\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i \cdot \Delta X + \cos \varphi_i \cdot \sin \lambda_i \cdot \Delta Y + \sin \varphi_i \cdot \Delta Z}{s} \right) \\ s = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \end{array} \right.$$

b) Estas relações estabelecem o modelo funcional de equações do tipo paramétrico (não linear) $F(X, Y, Z) = l$ com o qual se pode realizar o ajustamento das redes geodésicas tridimensionais;

Ajustamento tridimensional

7.2 Modelo geodésico tridimensional

c) A correcção diferencial destas funções (termo das equações lineares) pode-se exprimir da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} : g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} : g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} : g_{34} & g_{35} & g_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{pmatrix} = (G_i : G_j) \begin{pmatrix} dU_i \\ dU_j \end{pmatrix}$$

onde os elementos da matriz de coeficientes g_{ij} , são as derivadas parciais das funções observação (α , V' , s) em relação às coordenadas cartesianas (X, Y, Z) dos pontos i e j (estaçao e ponto visado);

Ajustamento tridimensional

7.3 Modelo matemático sobre o elipsóide

a) Tomando as relações entre as coordenadas cartesianas (X,Y,Z) e geodésica (φ, λ, h), pode-se estabelecer o modelo de equações paramétricas sobre o elipsóide

$$F(\varphi, \lambda, h) = l$$

b) Por diferenciação da relação referida, obtém-se a respectiva relação diferencial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(\rho+h)\operatorname{sen}\varphi\cos\lambda & -(N+h)\cos\varphi\operatorname{sen}\lambda & -\cos\varphi\cos\lambda \\ -(\rho+h)\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\lambda & (N+h)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\operatorname{sen}\lambda \\ (\rho+h)\cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} &= J(\varphi, \lambda, h) \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ajustamento tridimensional

7.3 Modelo matemático sobre o elipsóide

c) Aplicando o operador matricial J ao diferencial $(d\alpha, dV', ds)$, obtemos o respectivo diferencial definido em relação às coordenadas geodésicas

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \end{pmatrix} = (G_i J_i : G_j J_j) \cdot \begin{pmatrix} d\varphi_i \\ d\lambda_i \\ dh_i \\ d\varphi_j \\ d\lambda_j \\ dh_j \end{pmatrix}$$

d) Com esta correção diferencial pode-se definir as equações lineares a partir da forma geral

$$F(\varphi_0, \lambda_0, h_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \frac{\partial F}{\partial h} \right)_0 \cdot (d\varphi, d\lambda, dh)^T = l + v$$

Ajustamento tridimensional

7.3 Modelo matemático sobre o elipsóide

e) Resultam então, as equações de observação de azimute astronómico, de direcção azimutal, de direcção zenithal e de comprimento

$$\begin{aligned} d\alpha &= -(\alpha_{calc} - \alpha_{obs}) + \nu_A \\ d\alpha - d\alpha_0 &= -((\alpha_{calc} - \alpha_0) + da_{obs}) + \nu_A \\ dV &= -(V_{calc} - (V_{obs} - k's \cos V)) + \nu_V \\ ds &= -(s_{calc} - s_{obs}) + \nu_s \end{aligned}$$

f) A estas equações podem ser acrescentadas equações de observação provenientes de bases GPS processadas, ou de qualquer outra técnica espacial

$$\begin{aligned} \Delta X_{ij} &= (X_j - X_i) \\ \Delta Y_{ij} &= (Y_j - Y_i) \\ \Delta Z_{ij} &= (Z_j - Z_i) \end{aligned}$$

Ajustamento tridimensional

7.4 Modelo matemático de bases

a) O modelo matemático de ajustamento de bases GPS é relativamente simples, dado o facto de se tratar de modelos lineares:

$$\begin{aligned} dX_{ij} &= \Delta X_{obs} - \Delta X_{calc} + \nu_X \\ dY_{ij} &= \Delta Y_{obs} - \Delta Y_{calc} + \nu_Y \\ dZ_{ij} &= \Delta Z_{obs} - \Delta Z_{calc} + \nu_Z \end{aligned}$$

onde

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{pmatrix} = (-I \quad : \quad I) \begin{pmatrix} dU_i \\ dU_j \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.5 Modelo matemático combinado

a) Embora cada vez menos comum, por vezes é necessário combinar dados clássicos com observações de técnicas espaciais;

b) É pois possível combinar observações geodésicas clássicas com observações de bases geodésicas tridimensionais, através da combinação dos respectivos modelos matemáticos:

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \\ dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & : & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & : & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & : & g_{34} & g_{35} & g_{36} \\ -1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i & : & G_j \\ -I & : & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_i \\ dU_j \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.5 Modelo matemático combinado

c) Se se pretender expressar o modelo matemático em termos de coordenadas geodésicas para se efectuar o ajustamento sobre o elipsóide, então basta a relação diferencial entre os sistemas cartesiano e geodésico

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J(\varphi, \lambda, h) \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$$

resultando a correção diferencial do modelo sobre o elipsóide

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dV' \\ ds \\ dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i & : & G_j \\ -I & : & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_i \\ J_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi_i \\ d\lambda_i \\ dh_i \\ d\varphi_j \\ d\lambda_j \\ dh_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i J_i & : & G_j J_j \\ -J_i & : & J_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi_i \\ d\lambda_i \\ dh_i \\ d\varphi_j \\ d\lambda_j \\ dh_j \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

a) As parametrizações do tipo (ϕ, λ, h) ou (n, e, h) são particularmente úteis, nomeadamente, para a melhor percepção da precisão final;

b) Tomando as relações

$$\begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = J^{-1}(\phi, \lambda, h) \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} dn \\ de \\ dh \end{pmatrix} = H(\phi, h) \cdot \begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$$

com

$$H(\phi, h) = \begin{pmatrix} \rho + h & 0 & 0 \\ 0 & (N+h)\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J^{-1}(\phi, \lambda, h) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\phi\cos\lambda}{\rho+h} & -\frac{\sin\phi\sin\lambda}{\rho+h} & -\frac{\cos\phi}{\rho+h} \\ -\frac{\sin\lambda}{(N+h)\cos\phi} & \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\phi} & 0 \\ \frac{\cos\phi\cos\lambda}{\cos\phi\sin\lambda} & \frac{\cos\phi\sin\lambda}{\cos\phi\sin\lambda} & 1 \end{pmatrix}$$

Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

Obtém-se

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J(\phi, \lambda, h) \cdot H^{-1}(\phi, h) \begin{pmatrix} dn \\ de \\ dh \end{pmatrix}$$

c) Usando a lei de propagação das variâncias-covariâncias, obtém-se a transformação de covariâncias (de dimensão 3x3)

$$\text{para } (n, e, h) \quad C_{n,e,h} = (HJ^{-1})C_{X,Y,Z}(HJ^{-1})^T$$

onde o produto de matrizes (HJ^{-1}) é a matriz R de passagem do sistema (X, Y, Z) para o sistema (n, e, h)

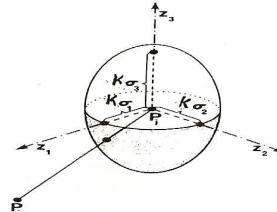
$$\text{e para } (\phi, \lambda, h) \quad C_{\phi,\lambda,h} = (J^{-1})C_{X,Y,Z}(J^{-1})^T$$

Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

- d) As regiões de erro dadas pela informação contida nas matrizes de covariâncias é agora de dimensão 3, o que significa que os elipsóides tomam o lugar das elipses de erro e de confiança consideradas na geodesia bidimensional;
- e) O domínio de confiança é definido pelo interior do elipsóide dado pela equação:

$$\frac{x^2}{(k \cdot \hat{\sigma}_x)^2} + \frac{y^2}{(k \cdot \hat{\sigma}_y)^2} + \frac{z^2}{(k \cdot \hat{\sigma}_z)^2} = I$$



Ajustamento tridimensional

7.6 Precisão dos resultados

- e) A generalização para três dimensões da teoria sobre a precisão dos resultados desenvolvida anteriormente conduz a uma relação equivalente

$$P \left\{ \frac{\frac{(x-\mu_x)^2}{c_x^2 \cdot \hat{\sigma}_{\theta}^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{c_y^2 \cdot \hat{\sigma}_{\theta}^2} + \frac{(z-\mu_z)^2}{c_z^2 \cdot \hat{\sigma}_{\theta}^2}}{\frac{\hat{\sigma}_{\theta}^2}{\sigma_{\theta}^2}} < k^2 \right\} = P_k$$

onde através de uma variável F-Fisher se define a região de probabilidade de ocorrência dos valores verdadeiros – elipsóide de confiança:

$$P \left\{ \frac{\chi^2_3 / 3}{\chi^2_{n-q} / (n-q)} < \frac{k^2}{3} \right\} = P \left\{ F(3, n-q) < \frac{k^2}{3} \right\} = P_k$$

Optimização de redes

1. Tipos de Rede Geodésica

- a) Actualmente, as redes geodésicas são concebidas para dar resposta a diferentes problemas;
- b) A Geodesia já não se limita unicamente à concepção de redes de apoio à cartografia e à topografia para a elaboração de mapas e cartas;
- c) Hoje em dia constroem-se:
 - redes de apoio;
 - redes permanentes de apoio;
 - redes de monitorização de estruturas;
 - redes de monitorização geodinâmica;
 - redes dinâmicas globais, etc.

Optimização de redes

1. Tipos de Rede Geodésica

- d) Em função dos objectivos de uma rede, são feitos estudos prévios de optimização, por forma a garantir a qualidade desejada dos resultados;
- e) Apresentam-se-nos diferentes problemas de optimização, que permitem classificar as redes geodésicas em várias ordens de optimização e concepção;
- f) No modelo matemático de ajustamento, existem diferentes parâmetros que podem ser optimizados: a geometria (A); a precisão das observações (P); a precisão da rede (Q_x); etc.
- g) Embora não muito comum entre nós, existe adicionalmente um parâmetro externo que deve ser considerado – o custo, para não inviabilizar a realização e os resultados da rede.

Optimização de redes

2. Concepção e Optimização de Redes

a) Quando se estabelece uma rede, em termos genéricos, há que decidir sobre vários aspectos:

- Na **fase de concepção** há que decidir sobre:
 - ✓ Configuração geométrica da rede ($A \cdot \Delta X = W$)
 - ✓ Precisão das observações ($P = \sigma^2_0 \Sigma^{-1} = Q_{ll}^{-1}$)
 - ✓ Custo de construção, observação e manutenção ($C = K_\phi \cdot \phi + K_\psi \cdot \psi$)
- Na fase **de ajustamento** há que decidir sobre:
 - ✓ Rede Fixa (1 ou 2 ptos fixos) $dX_k = 0; dY_k = 0; dZ_k = 0$
 - ✓ Rede livre (constr. min.) $dX_k = \delta; dY_k = \delta; dZ_k = \delta$
 - ✓ Selecção do melhor conjunto de observações
 - ✓ Melhor critério de pesos
 - ✓ Validação com auxílio de testes de hipótese

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

a) Estão definidos 4 ordens de problemas de optimização:

- 1- Problema de **Ordem Zero** - POZ
 - ✓ *Optimização do datum* (referencial)
- 2- Problema de **Primeira Ordem** – PPO
 - ✓ *Optimização da configuração geométrica*
- 3- Problema de **Segunda Ordem** - PSO
 - ✓ *Optimização dos pesos das observações*
- 4- Problema de **Terceira Ordem** - PTO
 - ✓ *Optimização de melhoria da configuração*

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

a) Estão definidos 4 ordens de problemas de optimização:

1- Problema de Ordem Zero - POZ

✓ ***Optimização do datum*** (referencial)

Parâmetros Fixos: A - matriz de configuração geométrica; P – matriz peso

Variáveis: X – coordenadas, parâmetros do sistema; Σ_x – variâncias das coordenadas

.:. Definição adequada das coordenadas da rede (referencial) e da respectiva precisão

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

2- Problema de Primeira Ordem - PPO

✓ ***Optimização da configuração geométrica***

Parâmetros Fixos: P – matriz peso;
 Σ_x – variâncias das coordenadas;

Variáveis: A - matriz de configuração geométrica;

.:. Definição adequada da geometria da rede (localização e observações) por forma a garantir a precisão desejada

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

3- Problema de Segunda Ordem - PSO

✓ ***Optimização dos pesos das observações***

Parâmetros Fixos: A - matriz de configuração geométrica; Σ_x – variâncias das coordenadas;

Variáveis: P – matriz peso;

.: Definição adequada dos pesos e sua inter-relação por forma a garantir a precisão desejada

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

4- Problema de Terceira Ordem - PTO

✓ ***Optimização de melhoria da configuração***

Parâmetros Fixos: Σ_x – variâncias das coordenadas;

Variáveis: A - matriz de configuração geométrica;
P – matriz peso

.: Melhoria de redes existentes pela introdução de vértices ou de observações adicionais

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

5- Podemos ainda definir outros problemas adicionais de optimização de uma rede geodésica, como por exemplo:

- ✓ **Optimização do intervalo de tempo entre épocas de observação de redes de monitorização de deformações**

Parâmetros Fixos: A - configuração geométrica; P – matriz peso; Σ_x – variâncias das coordenadas;

Variável: $\Delta X = X_{t2} - X_{t1}$ – vector deslocamento

∴ Adequado intervalo de tempo entre observações em função da taxa de deformação sem aumentar significativamente os custos

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

6- A minimização de custos pode ser interpretada como um problema de transformação aplicada aos resultados de PPO e PSO:

- ✓ **Optimização do custo**

Parâmetros Fixos: Σ_x – variância das coordenadas;

Variável: A - configuração geométrica; P – matriz peso

$$C(A, \Sigma_{ll}) = K_\phi \cdot \phi(n, m) + K_\psi \cdot \psi(\Sigma_{ll})$$

∴ Procurar o melhor compromisso entre a precisão desejada e um custo adequado, em função da configuração geométrica e da precisão das observações

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

a) Função custo - Exemplo 1

- Observação de uma rede de triangulação por dois Teodolitos de precisão diferente (3 e 10 segundo centesimais)

$\sigma_\alpha = 3^{\text{cc}}$, $K_\phi = K_\psi = 1$			
n	10	40	80
ϕ	440	1640	3240
ψ	110	444	888
C(€)	550	2084	4128

$\sigma_\alpha = 10^{\text{cc}}$, $K_\phi = K_\psi = 1$			
n	10	40	80
ϕ	440	1640	3240
ψ	10	44	88
C(€)	450	1684	3328

Optimização de redes

2.1 Problemas Optimização de Redes

b) Função custo - Exemplo 2

- Observação de uma rede GPS regional

$\sigma_x = 2\text{mm}$, $K_\psi = 1.3$			
n/m	10/15	20/40	40/60
K_ϕ	1.5	1.4	1.3
ϕ	640	1240	2440
ψ	410	820	1640
C(€)	1493	2802	5304

$\sigma_x = 2\text{cm}$, $K_\psi = 1.2$			
n/m	10/15	20/40	40/60
K_ϕ	1.5	1.4	1.2
ϕ	640	1240	2440
ψ	110	220	440
C(€)	1092	2000	3456

Optimização de redes

2.2 Robustez e Fiabilidade

- a) **Robustez** é a propriedade que caracteriza a resistência de uma rede ao efeito de erros sistemáticos;
- b) É a resistência ou a imunidade da rede à contaminação de observações erradas;
- c) **Fiabilidade** é caracterizada pela capacidade de detecção de observações erradas, por intermédio de testes de hipóteses;
- d) Uma, confere à rede a insensibilidade à contaminação dos erros sistemáticos, a outra, permite a detecção de observações contaminadas;
- e) Ambas as propriedades estão intimamente relacionadas e são uma consequência dos Números de Redundância Local (NRL);

Optimização de redes

2.2 Robustez e Fiabilidade

- f) A Robustez está relacionada com o modo como, no ajustamento, os erros são projectados para os resíduos (ν) ou para as correcções às coordenadas (ΔX);
- g) Essa projecção é quantificada pelos parâmetros: NRL – Números de Redundância Local e NAL – Números de Absorção Local;
- h) Os NAL são dados pelos elementos da diagonal da matriz:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P}$$

- i) Enquanto que os NRL correspondem aos elementos da diagonal da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{U})$

Optimização de redes

2.2 Robustez e Fiabilidade

- j) Os NRL e NAL são valores reais entre 0 e 1, e a sua soma é igual a 1;
- l) Para que a rede seja robusta os NRL devem ser homogéneos e elevados (ex.: 0,7);
- m) Se houver alguns NAL com valores mais elevados que os restantes, os resíduos correspondentes tendem a acumular os erros, mesmo tendo sido cometidos noutras observações;
- f) A optimização da Robustez e da Fiabilidade de uma rede geodésica é a tarefa do PPO, onde a configuração é escolhida por forma a obter um mútuo controlo, da qualidade das observações e da precisão da rede;

Optimização de redes

2.3 Determinação de Outliers

2.3.1- Teste de Barda (*Data Snooping*)

$$Q_{vv} = Q_l - A Q_x A^T \quad \text{Resíduos normalizados: } \bar{v}_i = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{ii}}}$$
$$H_0: \bar{v}_i \in N(0,1) \quad \text{vs} \quad H_1: \bar{v}_i \in N(\Delta v, 1)$$

2.3.2- Método de Pope (Método de Tau - τ)

$$\bar{v}_i = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{q_{ii}}} \in \tau \quad \text{Distribuição TAU}$$
$$\text{Conversão de distribuição - } \tau \text{ em t-Student} \quad t_{(f-1)} = \sqrt{\frac{(f-1)\tau^2}{f-\tau^2}}$$

∴ Rejeitar H_0 para $1-\alpha$ se: $T_k = \sqrt{\frac{(f-1)\bar{v}^2}{f-\bar{v}^2}} > t_{1-\alpha}$

Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

Quando se rejeita ou aceita uma hipótese usando um teste estatístico baseado numa probabilidade, dois erros podem acontecer:

2.4.1- Erro do Tipo I (falso positivo)

- Rejeitar a Hipótese Nula H_0 e esta ser VERDADEIRA
- α (significância) é a probabilidade de cometer o erro

2.4.2- Erro do Tipo II (falso negativo)

- Não rejeitar a Hipótese Nula H_0 e esta ser FALSA
- β é a probabilidade de cometer o erro

Ao contrário do erro do tipo I, não é possível determinar à partida a probabilidade de ocorrência dum erro do tipo II, β .

Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

Síntese de erros possíveis associado aos testes de Hipótese:

Situação	Conclusão do teste	
Real	Rejeitar H_0	Aceitar H_0
H_0 VERDADEIRA	Erro Tipo I	Decisão Acertada
H_0 FALSA	Decisão Acertada	Erro Tipo II

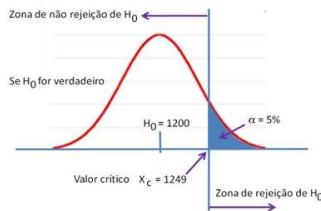
Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

Hipótese $H_0: \mu=1200$ vs Hipótese $H_1: \mu>1200$

com $\alpha= 5\%$ (probabilidade de rejeitar H_0 , sendo ela verdadeira)



tem-se a azul, a faixa da gama de valores possíveis em que H_0 é rejeitada.

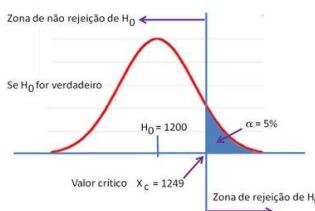
Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

Se a média observada X_{med} cair dentro da área de rejeição, existe um erro suficientemente grande entre a amostra e a hipótese H_0 .

Caso X_{med} cair fora da área de rejeição a hipótese H_0 é válida e não há lugar ao Erro Tipo I



Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

O valor crítico $X_{\text{med}} \text{ crítico} = 1249$ para este teste é calculado a partir da área $\alpha=5\%$ da curva normal

Uma forma de “ajuizar” a ocorrência de uma média superior a 1249 é:

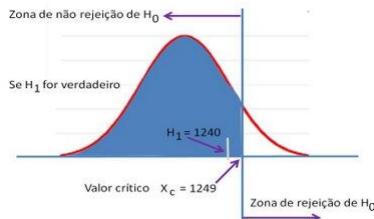
- a) H_0 é verdadeira, mas tivemos um tal azar que recolhemos uma amostra muito pouco provável.
- b) Ou, H_0 não é verdadeira, daí não ser surpresa o valor alto obtido para a média

Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

Suponhamos que a hipótese H_0 é falsa (H_1 é verdadeira), no caso de X_{med} se distribuir em torno de $\mu=1240$ (em vez de 1200)



A decisão correcta seria rejeitar a falsa hipótese nula H_0 .

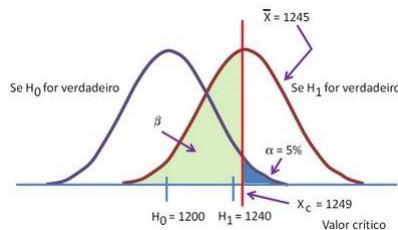
Aceitando H_0 quando esta é falsa é chamado de Erro Tipo II

Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

Na realidade desconhece-se qual a situação verdadeira. Se se tiver de tomar a decisão de aceitar ou não H_0 , na presença da incerteza, temos de aceitar correr riscos de um tipo ou de outro



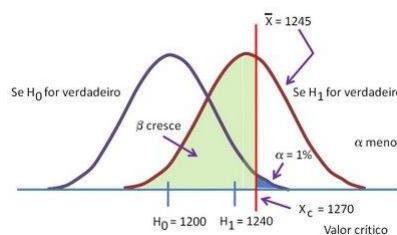
Ilustra-se aqui as probabilidades de cada um dos tipos de erro,
 α se H_0 é verdadeira, e β se H_0 é falsa

Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

A redução de α (deslocando o ponto crítico para a direita, por ex. 1270), aumenta ao mesmo tempo β , mas reduz a probabilidade do erro Tipo I.

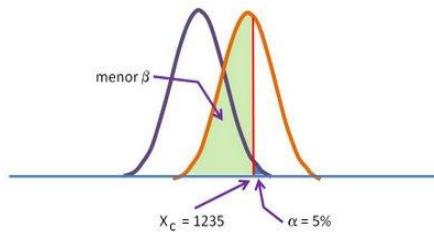


Optimização de redes

2.4 Erros do Tipo I e Tipo II

2.4.2 - Exemplo, baseado num processo com $\mu=1200$ e $\sigma=30$:

Uma forma de minimizar a possibilidade do erro II é aumentar a dimensão da amostra, diminuindo assim o desvio padrão e possibilitando que β se reduza sem aumentar α



Devemos trabalhar sempre com redundância elevada (amostra grandes) e com elevadas precisões.

Optimização de redes

3. Conclusão

- A realização de testes de hipótese, permitindo eliminar observações erradas, garantem resultados fiáveis e de confiança;
- Trabalhar com elevada redundância e uma boa geometria, garantindo elevada precisão, minimizará a probabilidade de se cometerem erros do Tipo I e do Tipo II.

Optimização de redes

3. Conclusão

- A ideia básica da optimização de redes geodésicas é a possibilidade de se garantir com qualidade a estimativa de uma rede antes de ser construída ou observada;
- A optimização de uma rede geodésica prende-se com o estudo da sua precisão, da sua fiabilidade e do seu custo.

Geóide

1. Determinação do geóide

- O geóide adquiriu na última década uma importância acrescida, pelo aparecimento das técnicas de posicionamento por satélite;
- Hoje é possível realizar nivelamento de alta precisão recorrendo aos sistemas GNSS e a um modelo preciso de geóide;
- Os modelos podem ser globais, regionais ou locais, sendo os modelos globais menos precisos e representados por harmónicas esféricas, como é o caso dos EGM96 e EGM2008
- Em termos clássicos o *Sistema de Referência Vertical* era definido pela rede de nivelamento geodésico (niv. geométrico de precisão), materializada num ponto de referência - *Datum Vertical*
- A sua altitude era definida em relação ao Nível Médio do Mar, dada pela média de uma série de observação maregráfica.

Geóide

1. Determinação do geóide

- O Geóide é a solução de um problema matemático de fronteira
 - 3º Problema de Fronteira (problema de fronteira da GF)
- Existem vários métodos de determinação do geóide:
 - Método Fórmula Integral de **Stokes** (anomalias da gravidade reduzidas);
 - Método **Astro-geodésico** (desvios da vertical);
 - **Colocação** por Mínimos Quadrados (combinação de dados);
 - **Molodensky** (anomalias da gravidade à superfície);
 - Coeficientes das **Harmónicas Esféricas** (anomalias da gravidade);
 - Abordagem do **Espaço Gravidade** (valores de gravidade e desvios da vertical);
- Abordaremos apenas os dois primeiros

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- A relação entre o potencial gravítico da Terra e o potencial normal do elipsóide de referência é dada por:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z)$$

- O campo gravítico anómalo ou perturbador (T) é definido pela diferença do campo gravítico terrestre com o campo gravítico normal do elipsóide de referência;
- Esta aproximação constitui a chamada linearização do problema de fronteira da geodesia física;
- O facto da diferença de potenciais ser uma quantidade pequena, permite aproximações lineares da função potencial $T(r, \theta, \lambda)$.

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- O potencial perturbador T descreve as irregularidades regionais e locais do potencial gravítico W em relação ao potencial U ;
- Devido à definição do campo gravítico normal, o potencial perturbador T satisfaz a equação de Laplace no exterior da Terra;

$$T(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A) - [\bar{V}(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A)] = V(\vec{r}_A) - \bar{V}(\vec{r}_A)$$

- Como Δ é um operador é linear, desprezando a atmosfera, o potencial perturbador é uma função harmónica em todo o espaço exterior à Terra :

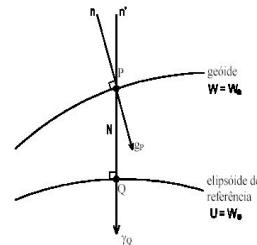
$$\Delta T(\vec{r}_A) = 0$$

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Comparemos a superfície do geóide definida por $W(x, y, z) = W_0$ com a superfície do elipsóide definida por $U(x, y, z) = U_0$
- Assumindo o mesmo valor de potencial $W_0 = U_0$, um ponto P sobre o geóide corresponde ao ponto Q projectado sobre o elipsóide através da sua normal;
- E considerando, respectivamente, o vector gravidade \mathbf{g} sobre P e o vector gravidade normal γ sobre Q: o vector anomalia da gravidade é definido pela sua diferença:

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \mathbf{\gamma}_Q$$



Geodesia & Aplicações - Aula 12

FCUL-EG

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Este vector tem uma magnitude, designada por anomalia da gravidade

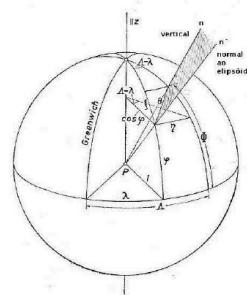
$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

- E uma direcção dada pelo desvio da vertical, cujas componentes são dadas por

$$\xi = \Phi - \varphi$$

$$\eta = (\lambda - \lambda) \cos \varphi$$

- A anomalia da gravidade resulta de observações gravimétricas e do cálculo de γ pela F.I.G., enquanto que, os desvios da vertical resultam de observações astronómicas e geodésicas



Geodesia & Aplicações - Aula 12

FCUL-EG

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Fórmula de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

- Esta fórmula relaciona directamente a ondulação do geóide com o valor do potencial perturbador, onde γ , a gravidade normal sobre o elipsóide, é uma mera constante.
- Esta fórmula constitui um resultado importante para a resolução do problema da determinação do geóide (problema de fronteira);
- Ao resolver o problema de fronteira determina-se o potencial perturbado T , e com esta fórmula resulta directamente a ondulação do geóide.

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- Desenvolvendo em série de Taylor a função de gravidade normal em torno do ponto Q sobre o elipsóide, tem-se

$$\gamma_P = \gamma_Q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} \right)_Q dn + \dots$$

- Tomando a sua parte linear e fazendo a diferença com o valor da gravidade g no ponto P

$$g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N = - \frac{\partial T}{\partial h}$$

$$\Delta g_P = - \frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T$$

Geóide

1.1 Problema de Fronteira da Geodesia Física

- O 3º problema de fronteira é o problema geodésico de fronteira, que na sua essência, é o problema da determinação da superfície do geóide – datum altimétrico;
- Determinar a função potencial T que seja harmónica no espaço exterior à Terra e que verifique, sobre o geóide, a equação fundamental da geodesia

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g_p \end{cases}$$

- A solução, que através da F. de Bruns nos dá a ondulação do geóide, é uma solução da equação de Laplace que verifica a condição de fronteira dada pela E.F.G.F.

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Stokes formulou em 1849, pela primeira vez de forma rigorosa, o problema da determinação da ondulação do geóide;
- Resolvendo a equação diferencial de fronteira definida sobre o geóide

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T = \Delta g_p$$

obteve a solução
$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

- Onde $S(\psi)$ é a chamada função de Stokes e é definida por

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + 1 - 5 \cos(\psi) - 3 \cos(\psi) \ln\left(\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)$$

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Aplicando o teorema de Bruns $N=T/\gamma$, onde γ é o valor da gravidade sobre o elipsóide (γ_Q), obtém-se a chamada **fórmula ou integral de Stokes**

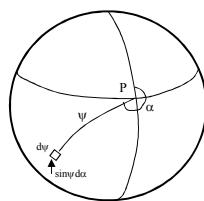
$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_S \Delta g S(\psi) d\sigma$$

- Esta é a **fórmula mais importante da geodesia física**, pois permite determinar directamente a **ondulação do geóide** a partir das **anomalias da gravidade** definidas sobre o geóide;
- Esta fórmula não é de fácil aplicação, já que a superfície terrestre não coincide com o geóide, e as anomalias da gravidade observadas não são definidos sobre o geóide;
- Isto implica que os **valores de gravidade observados** à superfície tenham de ser **reduzidos ao nível geóide**.

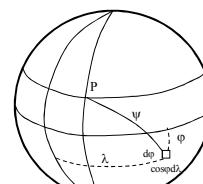
Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- A solução da ondulação do geóide mais comum é a solução dada pela Formula Integral de Stokes;
- Existem duas formas explicitas do integral de Stokes, uma usa **coordenadas polares esféricas** (ψ, α), a outra usa as **coordenadas geodésicas** (λ, φ);



Distribuição em Template (ψ, α)



Distribuição em Grelha (λ, φ)

Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Em coordenadas polares esféricas (método de template):

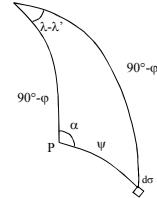
$$N_p(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) S(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha$$

- Em coordenadas geodésicas (método de grelha):

$$N_p(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$

Com $S(\psi) = \frac{I}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6 \sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos(\psi) - 3 \cos(\psi) \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$

Onde $\psi = \cos^{-1}(\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda))$



Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Na prática o cálculo da ondulação do geóide pela fórmula de Stokes, resume-se a um duplo somatório do produto da anomalia da gravidade de cada ponto da grelha pelo valor da função de distância de Stokes;
- Para o caso mais comum de dados em grelha, de dimensão $n \times m$ e espaçamento $\Delta\varphi \times \Delta\lambda$, o valor de N em cada ponto é dado por:

$$N(\varphi_i, \lambda_k) = N_i(\varphi_i, \lambda_k) + N_e(\varphi_i, \lambda_k)$$

Com $N_i(\varphi_i, \lambda_k) = \frac{S_0}{\gamma} \Delta g(\varphi_i, \lambda_k)$ onde S_0 é o raio da zona mais próxima do ponto

e $N_e(\varphi_i, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j S(\varphi_i, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i) \Delta\varphi \Delta\lambda$

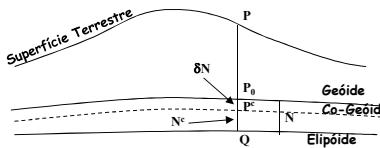
Geóide

1.2 Solução pelo Integral Stokes

- Para que o resultado seja válido, as anomalias da gravidade usadas na Fórmula de Stokes devem corresponder a valores reduzidos à superfície do geóide regularizado;
- Logo, o resultado do cálculo da fórmula de Stokes, com as anomalias reduzidas, conduz-nos, não ao geóide, mas a uma superfície designada por co-geóide, N^c ;
- O valor final da ondulação do geóide é dado por $N = N^c + \delta N$ onde δN representa o efeito indirecto dado por
$$\delta N = \frac{\pi G p_0 H_p^2}{\gamma} = \frac{\pi G p_0 H_p^2}{\gamma}$$

Geodesia & Aplicações - Aula 12

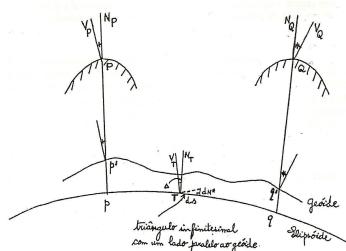
FCUL-EG



Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

- Este método de determinação baseia-se na utilização simultânea de observações astronómicas (latitude e longitude) e das respectivas coordenadas geodésicas – observações astro-geodésicas;
- Sendo os pontos de observação P e Q projectados sobre o elipsóide, a diferença de ondulação do geóide resulta da integração do desvio total da vertical ao longo do arco de elipsóide definido pelas projecções ortogonais p e q;
- Esta determinação parte do pressuposto de que o desvio total Δ varia linearmente entre p e q;



Geodesia & Aplicações - Aula 12

FCUL-EG

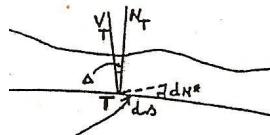
Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

d) Tomemos os desvio total da vertical num ponto genérico t sobre o arco pq , no qual se define o triângulo infinitesimal de comprimento ds :

$$\Delta = \xi \cdot \cos \alpha_{pq} + \eta \cdot \operatorname{sen} \alpha_{pq}$$

$$\Delta = (\Phi_T - \varphi_T) \cdot \cos \alpha_{pq} + (\Lambda_T - \lambda_T) \cdot \cos \varphi_T \cdot \operatorname{sen} \alpha_{pq}$$



e) A variação de ondulação de geóide dN^* medida nesse triângulo infinitesimal de vértice t será dada por

$$dN^* = -\operatorname{tg} \Delta \cdot ds \approx -\Delta \cdot ds$$

f) Integrando esta expressão diferencial ao longo do arco elipsoidal, resulta a diferença de ondulação do geóide entre P e Q

$$\Delta N_{pq} = N_{q'}^* - N_{p'}^* = - \int_{pq} \Delta \cdot ds$$

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

g) O cálculo do integral anterior só pode ser feito com o conhecimento da função $\Delta = \Delta(s)$, como ela não é conhecida admite-se que assume uma variação linear e pode ser estimada pela média dos valores

$$\Delta \approx \frac{\Delta_p + \Delta_q}{2}$$

h) Nessa hipótese podemos então escrever $\Delta N_{p'q'} = -\frac{\Delta_p + \Delta_q}{2} \cdot s_{p'q'}$

ou

$$\Delta N_{p'q'} = -\frac{(\xi_p'' + \xi_{q''}) \cdot \cos \alpha_{pq} + (\eta_p'' + \eta_{q''}) \cdot \operatorname{sen} \alpha_{pq}}{2 \cdot 206265''} \cdot s_{p'q'}$$

onde os valores de desvio da vertical devem ser reduzidos ao geóide, e admitindo-se que esses valores são iguais sobre o elipsóide;

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

- i) A correcção de redução dos desvios da vertical ao geóide passa pela seguinte redução das coordenadas astronómicas

$$\Phi_{\text{geoid}} = \Phi_{\text{superf}} - 0.17'' \cdot H_{km} \cdot \text{sen}2\Phi$$

$$A_{\text{geoid}} = A_{\text{superf}}$$

- j) A precisão obtida para ΔN^* vai depender, principalmente de dois factores:

1 – Da precisão das observações astronómicas;

2 – Da distância entre as estações astronómicas, quanto mais próximas menor o erro introduzido pela aproximação da fórmula de cálculo;

$$\text{Perfil Este-Oeste: } \sigma = 2 \cdot \sqrt{\frac{s_{(km)}}{1000}} (\text{m}) \quad \text{Perfil Norte-Sul: } \sigma = 1,5 \cdot \sqrt{\frac{s_{(km)}}{1000}} (\text{m})$$

Geodesia & Aplicações - Aula 12

FCUL-EG

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

- k) Sendo observados os desvios da vertical em todos os vértices geodésico, o cálculo de ondulação de geóide passa pelo ajustamento das diferenças, à semelhança do que é feito no nívelamento:

$$\begin{aligned} f(x_o) + A \cdot \delta &= I_0 + v \\ \Delta N_{\text{calc}} + \text{correcção} &= \Delta N_{\text{obs}} + v_{\Delta N} \end{aligned}$$

- l) Esta equação de observação de diferenças de ondulação de geóide pode escrever-se na forma

$$dN_j - dN_i = \Delta N_{\text{obs}} - (\bar{N}_j - \bar{N}_i) + v_{ij}$$

- m) Resultando para o caso de uma rede com n diferenças observadas em q estações, o sistema de equações lineares

$$A \cdot d\hat{N} = -w + v \quad \hat{N} = \bar{N} + d\hat{N}$$

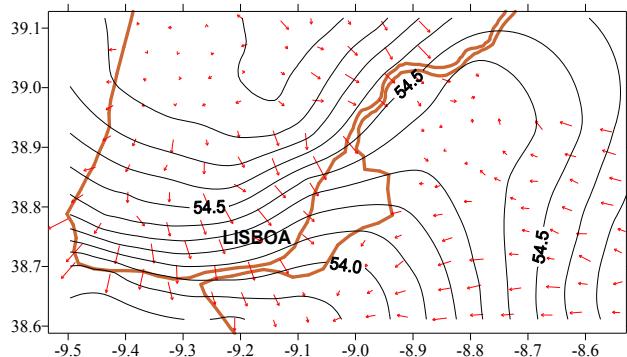
Geodesia & Aplicações - Aula 12

FCUL-EG

Geóide

1.3 Determinação astro-geodésica do geóide

- Desvios da vertical sobre modelo gravimétrico do geóide na Bacia do Tejo



Determinação do Geóide

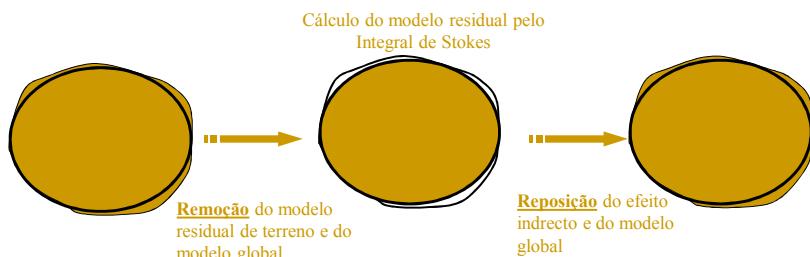
1. Determinação gravimétrica do geóide

- O modelo gravimétrico do geóide é determinado unicamente com recurso a observações gravimétricas – anomalias da gravidade;
- O método integral de Stokes é o método mais comum para modelos regionais ou locais, que recorre à integração numérica directa ou à Transformada Rápida de Fourier – FFT;
- Os dados de anomalias da gravidade devem ser reduzidos, de alguma forma, dos efeitos topográficos – anomalias reduzidas;
- Os valores de anomalias devem interpolados na forma de grelha regular, com espaçamentos fixo em latitude - $\Delta\varphi$ e em longitude - $\Delta\lambda$;
- Para modelação local, deve serem também removida a componente regional do campo gravítico, através de modelos globais (ex.: EGM96);
- Após a sua determinação pelo Integral de Stokes, devem ser repostos todos os efeitos removidos – efeito indireto e modelo geopotencial.

Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

- São removidos os efeitos de atracção gravitacional do modelo geopotencial global e residual do terreno a retirar dos valores observados de anomalias, e posteriormente, repostos sobre a forma de ondulações (efeito indireto);
- É usada a chamada “**Técnica de Remoção - Reposição**”.



Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

- Esta técnica é usada, não na forma convencional, mas na forma de optimização da determinação rigorosa dos pequenos comprimentos de onda (componente residual).



$$\text{REMOÇÃO} \Rightarrow \Delta g_{\text{res}} = \Delta g_{\text{obs}} - \Delta g_{\text{EGM96}} - \Delta g_{\text{RTM}}$$

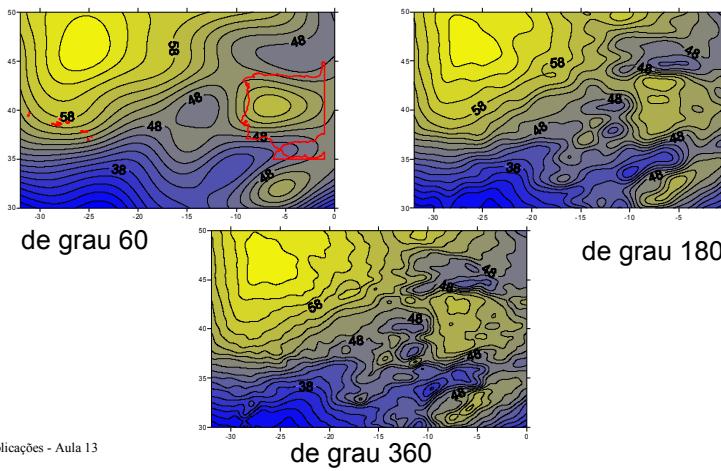
$$\text{STOKES} \Rightarrow N_{\text{res}} = \frac{S_0}{\gamma} \Delta g(\varphi_i, \lambda_k) + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_S \Delta g S(\psi) d\sigma$$

$$\text{REPOSIÇÃO} \Rightarrow N = N_{\text{res}} + N_{\text{EGM96}} + \delta N$$

Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

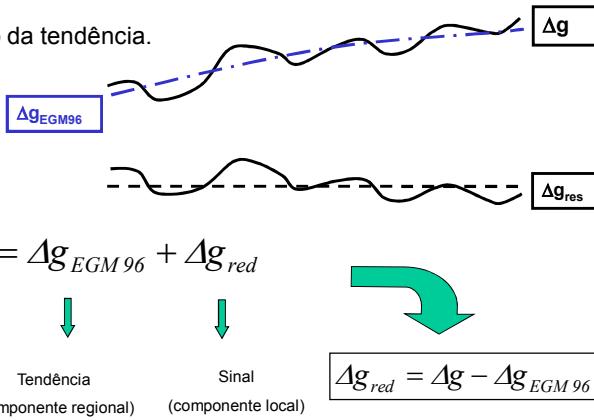
- Ondulação do geóide EGM96 na região Atlântico Norte / Ibérica



Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

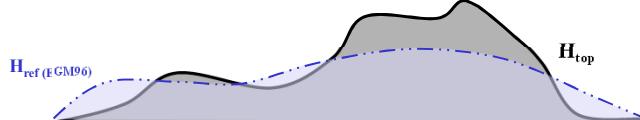
- Remoção da tendência.



Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

- O modelo de anomalias da gravidade do EGM96 correspondem a anomalias reduzidas (sem efeitos do terreno), cujas reduções foram feitas com base num modelo global de terreno (DTM global), designado de superfície topográfica de referência;

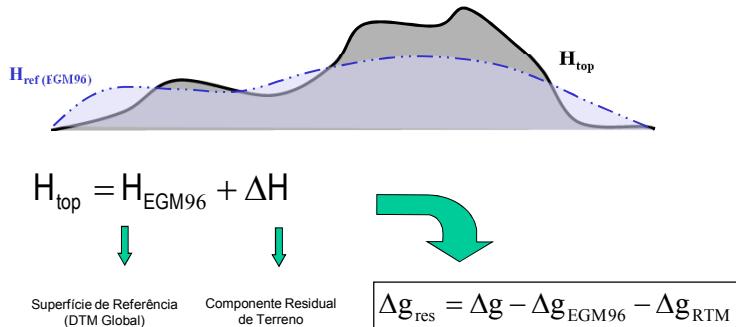


- Como este modelo difere da topografia real, com um DTM mais rigoroso pode-se calcular os efeitos residuais de terreno (RTM – correção topográfica residual) relativamente aos efeitos removidos pelo modelo global EGM96.

Determinação do Geóide

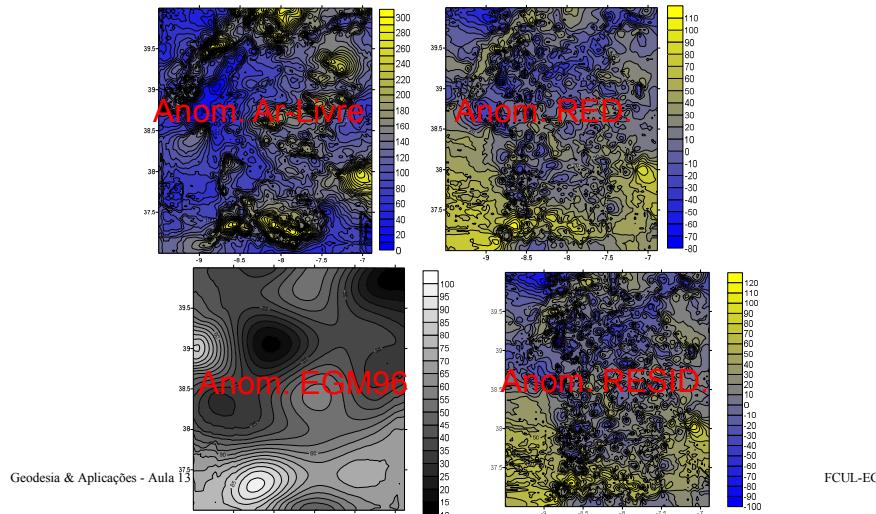
1.1 Técnica da remoção-reposição

- Remoção do Modelo Residual do Terreno - RTM.



Determinação do Geóide

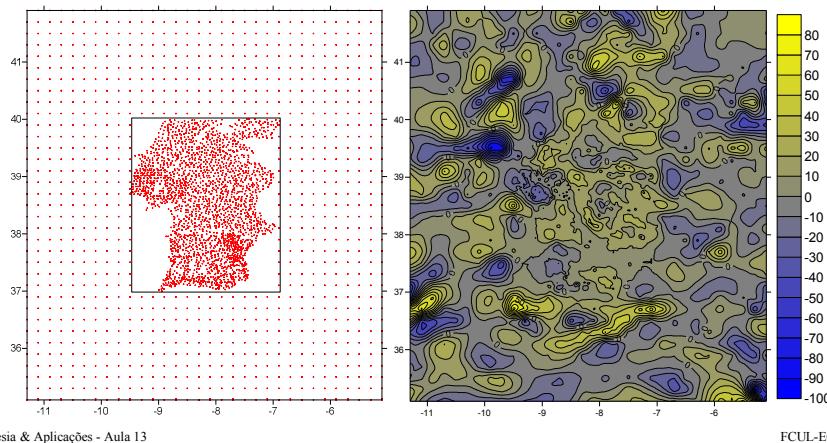
1.1 Técnica da remoção-reposição



Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

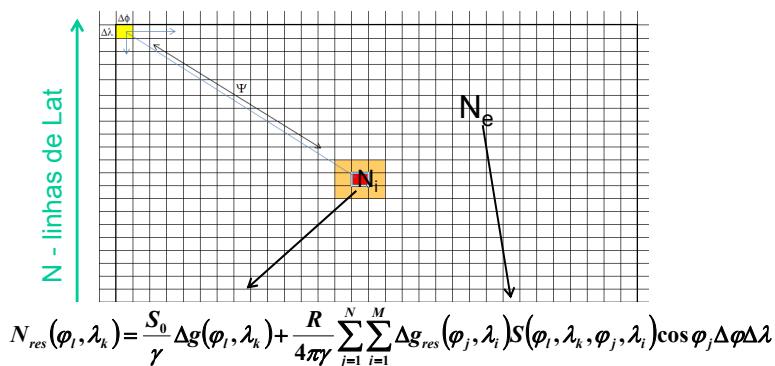
Anom. RESIDUAIS Interpoladas



Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

- Integração numérica da Fórmula de STOKES – dados em GRELHA



Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

- Integração numérica da Fórmula de STOKES – dados em GRELHA

$$N_{\text{res}}(\phi_i, \lambda_k) = \frac{S_0}{\gamma} \Delta g(\phi_i, \lambda_k) + \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \Delta g_{\text{res}}(\phi_j, \lambda_i) \cos \phi_j S(\phi_i, \lambda_k, \phi_j, \lambda_i) \Delta \phi \Delta \lambda$$
$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos(\psi) - 3 \cos(\psi) \ln\left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2}\right)$$
$$\psi = \cos^{-1}(\sin \phi_i \sin \phi_j + \cos \phi_i \cos \phi_j \cos(\lambda_i - \lambda_k))$$

Geodesia & Aplicações - Aula 13

FCUL-EG

Determinação do Geóide

1.1 Técnica da remoção-reposição

- Reposição do modelo global - EGM96 (ondulação do co-geóide)

$$N^c = N_{\text{res}} + N_{\text{EGM96}}$$

- Reposição do efeito indirecto

$$N = N^c + \delta N = N^c + \frac{\delta W}{\gamma}$$
$$N = N^c + \frac{\pi G \rho_0 H_p^2}{\gamma}$$

Geodesia & Aplicações - Aula 13

FCUL-EG

Determinação do Geóide

1.2 Ajuste e validação do modelo de geóide

- Para validar o modelo, deve-se determinar os resíduos do modelo em marcas de nívelamento principal (NP);
- Com observação de GPS em marcas NP obtém-se directamente a ondulação do geóide observada

$$N_{obs} = h_{GPS} - H_{NP}$$

- Fazendo a média e o desvio padrão dessas diferenças (resíduos), obtém-se a diferença absoluta em relação ao datum vertical e a precisão do modelo;
- Afim de se anular essa diferença e eliminar possíveis tendências residuais, deve-se proceder a um ajuste do modelo nas marcas de NP.

Determinação do Geóide

1.2 Ajuste e validação do modelo de geóide

- O ajustamento é feito a partir de 4 parâmetros, correspondendo de grosso-o-modo, a uma translação, um factor de escala e 2 rotações;
- Usa-se o modelo

$$N = N_0 + \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

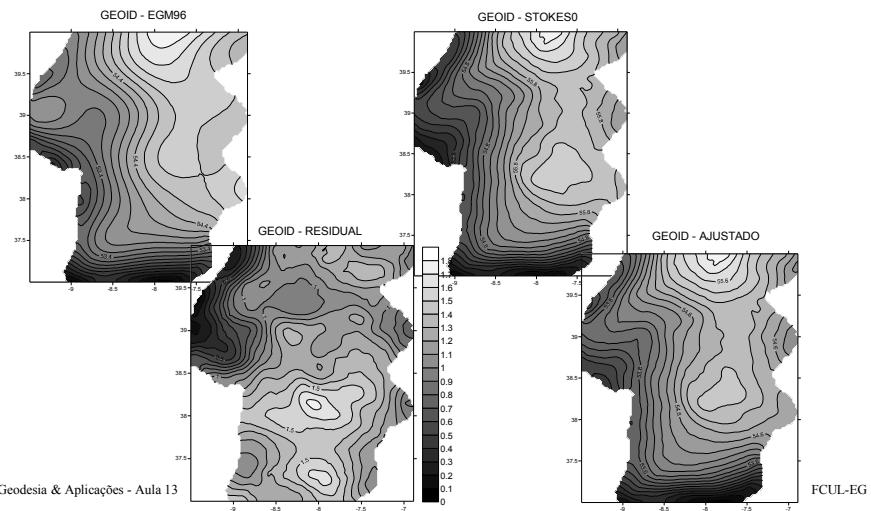
onde N_0 é o valor do modelo inicial (antes de ajustado) e N o valor após ajustamento;

- Os parâmetros são determinados pelo MMQ, com o seguinte sistemas de equações

$$A \hat{\delta} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = (N_{mod} - N_{NP}) + v$$

Determinação do Geóide

1.2 Ajuste e validação do modelo de geóide



EVRS - European Vertical Reference System

C. Antunes – FCUL 2014

FCUL 2014

EVRS - Definição

- O EVRS resulta da necessidade da harmonização dos sistemas de referência europeus;
- A adopção de um SRV comum é uma condição necessária para a inter-operacionalidade de dados no espaço Europeu;
- O estabelecimento e manutenção do EVRS é um objectivo e uma missão da EUREF – Sub-Comissão da IAG;

FCUL 2014

EVRS - Definição

- O referencial EVRS2007 é a mais recente realização do EVRS e uma continuação da solução da rede de nívelamento europeia, UELN95/98 (Unified European Levelling Network);
- O EVRS2007 resulta de uma revisão e redefinição do anterior referencial EVRS2000.

FCUL 2014

EVRS - Objectivos

- Definir um sistema de referência vertical europeu harmonizado e sem hiatos;
- Providenciar um sistema de altitudes actualizado e compatível com as convenções;
- Ser adoptado pelos estados membros através da directiva INSPIRE, por recomendação da EUREF à Comissão Europeia;

FCUL 2014

EVRS - Altitudes

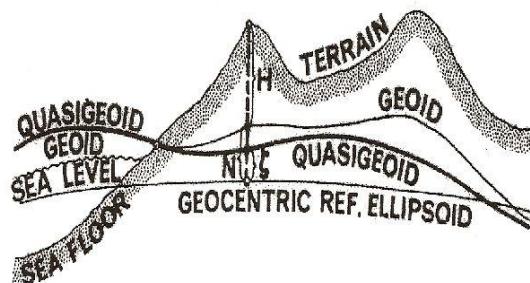
- O EVRS é definido em termos geopotenciais (C), compatível com o sistema de altitudes normais (H^*), relativas a um quasi-geóide, ou com o sistema de altitudes ortométricas relativas a um geóide;

$$H^* = - \int_{w_0}^w \frac{dW}{\gamma} = \frac{C}{\bar{\gamma}}$$

$$\zeta = h - H^*$$

$$H = - \int_{w_0}^w \frac{dW}{g} = \frac{C}{\bar{g}}$$

$$N = h - H$$



FCUL 2014

EVRS – Altitudes

- Os vários sistemas de altitudes:**
- Altitudes Normais $H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}}$
 - $\bar{\gamma}$ é a gravidade normal média ao longo da normal ao elipsóide
- Altitude Ortométricas $H = \frac{C}{\bar{g}}$
 - \bar{g} é a média da gravidade ao longo da vertical de lugar até à superfície topográfica
- Altitudes Normais-Ortométricas $H^* = \frac{C}{\gamma}$
 - γ é a gravidade normal sobre o elipsóide calculada pela F.I.G.
- Altitudes de Helmert (Ortométricas) $H = \frac{C}{g + 0.0424H}$
 - g é a gravidade medida à superfície

FCUL 2014

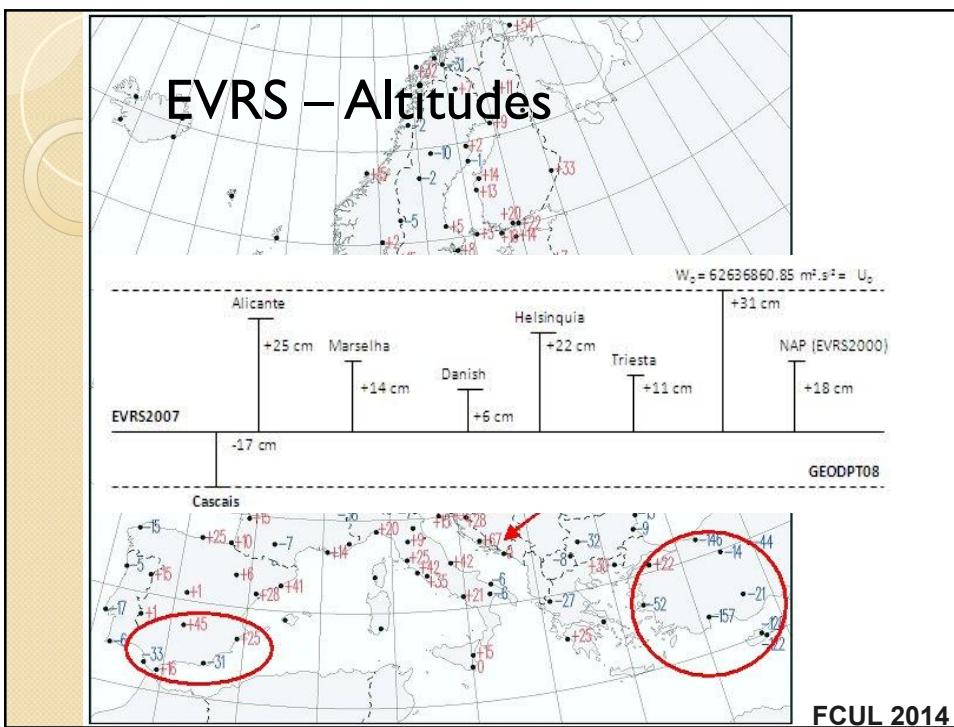
EVRS – Altitudes

- Várias altitudes utilizadas na Europa:
- Ortométricas (Portugal, Espanha, Suiça...)
- Normais (França, Alemanha,...)
- Normais-Ortométricas (Austria, Noruega,...)

Kind of Heights

- normal heights
- orthometric heights
- normal orthometric heights
- no information
- no levelling heights
- UELN lines

FCUL 2014

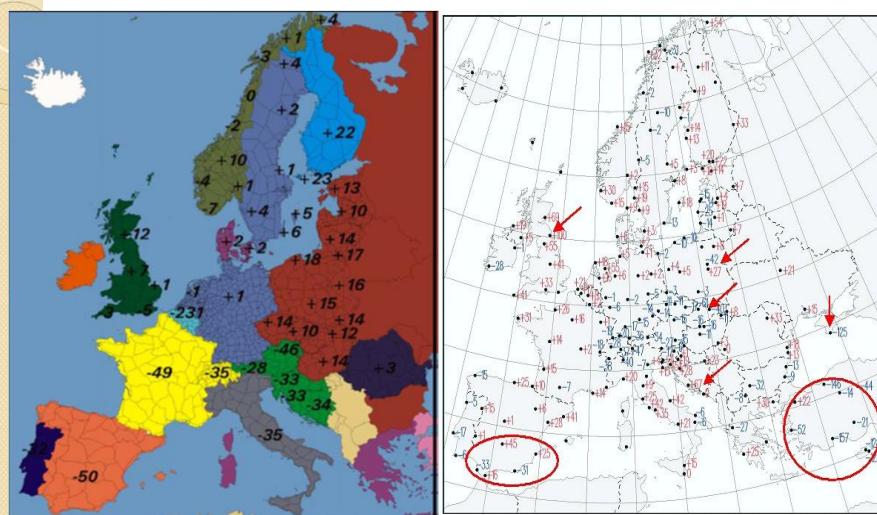


EVRS - Revisão

Diferenças	EVRS 2000	EVRS 2007
Referência	Fixo ao NAP (Amesterdão)	Ajust. a 13 Marcas Principais
Sistema de Redução de Maré	Média (Mean-Tide)	Nula (Zero-Tide)

FCUL 2014

EVRS2000 vs EVRS2007



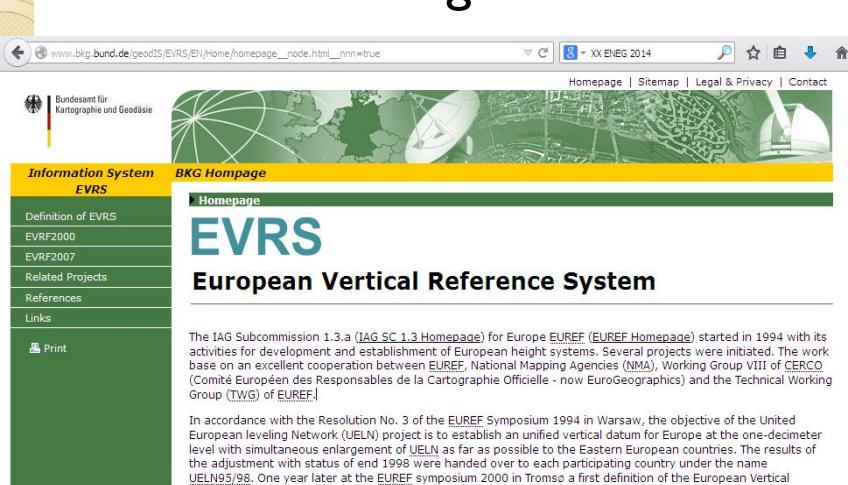
FCUL 2014

EVRS – Perspectivas Futuras

- Por imposição da Directiva INSPIRE, Portugal será, em princípio, obrigado a:
 - Adoptar o Sistema Europeu de Referência Vertical (EVRS2007 ou outra realização posterior);
 - Definir um sistema de altitudes normais compatível;
 - Rever o seu sistema de altitudes e *data verticais*;
 - Definir e providenciar uma forma de transformação entre os sistemas de altitudes adoptados;

FCUL 2014

EVRS – Web Page



The screenshot shows the homepage of the EVRS website. The header includes the BKG logo and navigation links for Homepage, Sitemap, Legal & Privacy, and Contact. The main title "EVRS" is prominently displayed, followed by "European Vertical Reference System". A detailed description of the IAG Subcommission 1.3.a's work on EUREF and the development of EVRS is provided. At the bottom, there is a link to the homepage and a "Print" button.

<http://www.bkg.bund.de/geodIS/EVRS/EN/Home>

FCUL 2014

Subida do NMM e Referenciais Verticais

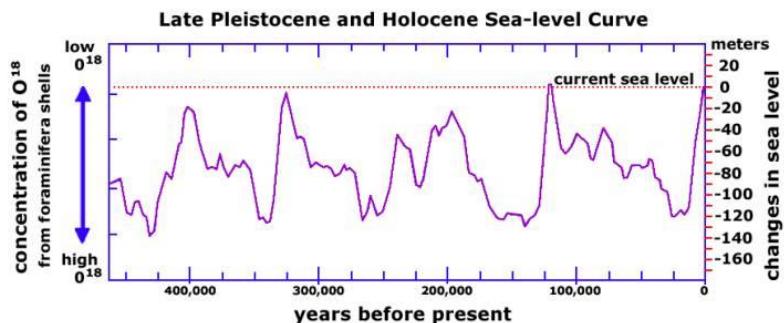
- **Introdução**
- **Sistemas de Referência Verticais**
- **Subida do NMM**
- **Revisão do Datum Altimétrico**
- **Discussão & Conclusão**

Introdução

- Componentes da variação do NMM local:
 - ✓ **Forçamento atmosférico & oceânico** – sobre-elevação meteorológica;
 - ✓ **Subsidiência** – movimento vertical de terras/estruturas resultante de cargas superficiais;
 - ✓ **Tectónica** – movimentos resultantes da tectónica das placas;
 - ✓ **Isostática** – ajustamento da crosta como reposta viscoelástica à carga superficial do gelo glacial;
 - ✓ **Eustática** – variação do volume de água.
- **Os efeitos variam de local para local, uns são relativos outros são absolutos**

Introdução

- Variação do NMM nos últimos ciclos glaciares



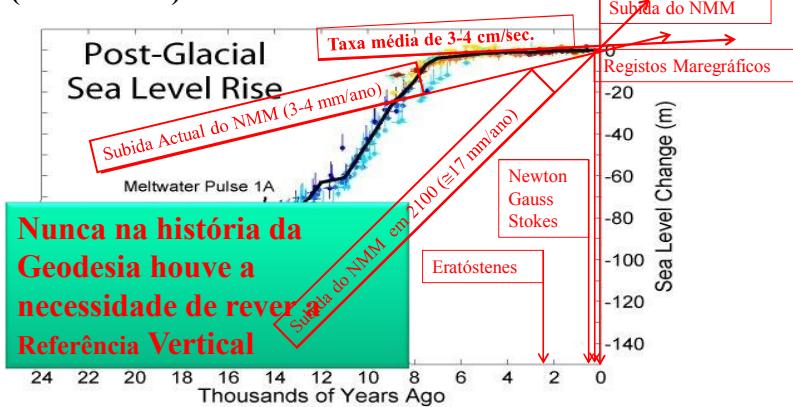
Source of data modified from CLIMAP isotopic data summarized in chart in from *Ice Ages* by John Imbrie and Katherine Imbrie, 1979

Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Introdução

- Subida do NMM no último período Pós-glacial (Holocénico)



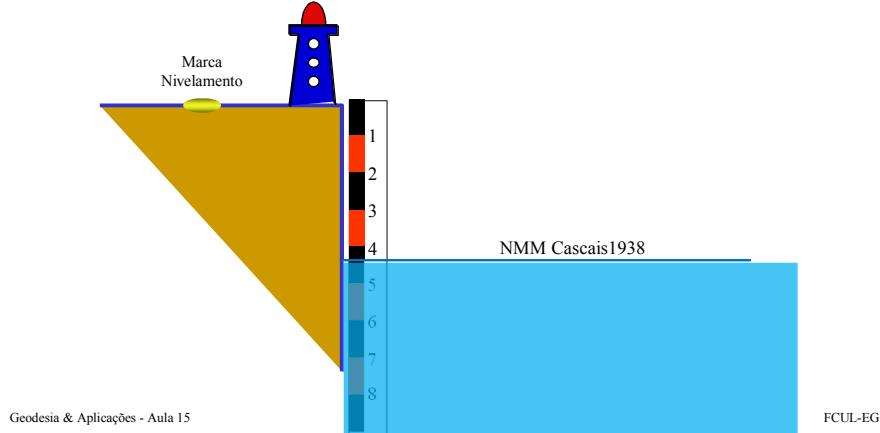
Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Sistemas de Referência Verticais

• Datum Altimétrico

- a) O Datum Cascais1938 é materializado através de uma Marca de Nivelamento, situada 4.308 m acima do NMM1938 - Referencial Vertical.

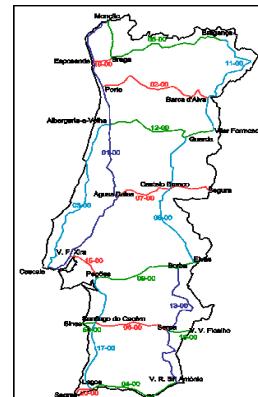


Sistemas de Referência Verticais

• Datum Altimétrico

- a) O Datum Cascais1938 é materializado através de uma Marca de Nivelamento, situada 4.308 m acima do NMM1938 - Referencial Vertical.
- b) A altitude da marca de referência de Cascais1938 é transportada por nívelamento geométrico para o resto do país através de linhas de nívelamento geométrico.
- c) O sistema nacional de referência vertical é dado por um sistema de altitudes ortométricas (Helmert 1938).

$$H = \frac{C}{g} \approx \frac{C}{g + 0.0424H}$$



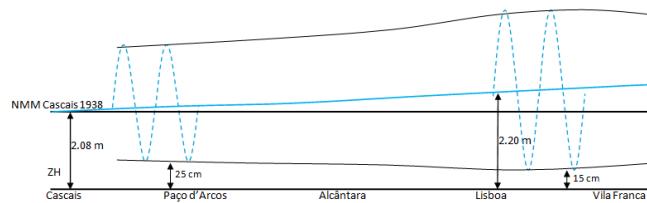
Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Sistemas de Referência Verticais

• Zero Hidrográfico - ZH

- ✓ O ZH é o referencial vertical válido na Hidrografia (para as marés e cartografia náutica) para uma dada zona hidrográfica.
- ✓ Em Portugal é definido pela mais baixa das baixa-mares registadas num período nodal (18.6 anos), acrescido de uma margem de segurança.
- ✓ Dado que as marés equinociais em Cascais atingem a amplitude máxima de 1.85 m, o ZH situa-se a 2.08 m do NMM1938.



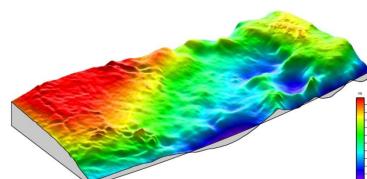
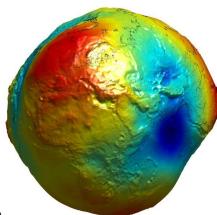
- ✓ No resto do país o ZH é de 2 m, na Madeira de 1.4 m e nos Açores de 1 m.

Sistemas de Referência Verticais

• Geóide

- ✓ É a superfície equipotencial de referência que define rigorosamente o datum altimétrico global (ou regional);
- ✓ Define matematicamente a figura física da Terra e é a solução do problema de fronteira da Geodesia Física;
- ✓ O Geóide pode ser definido por vários modelos e fixado, por convenção, num qualquer “nível” – modelo de geóide convencionado.

Modelo Global de Geóide

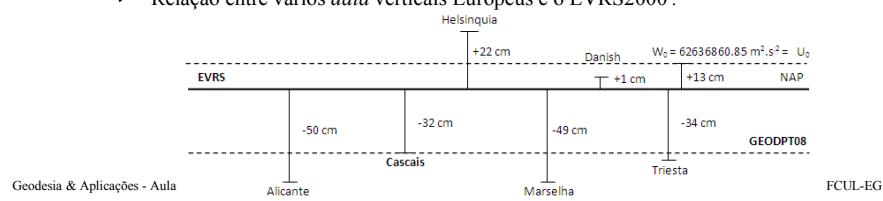


Iberian-Azores Gravity Model (Catalão, 2006)

Sistemas de Referência Verticais

• EVRS

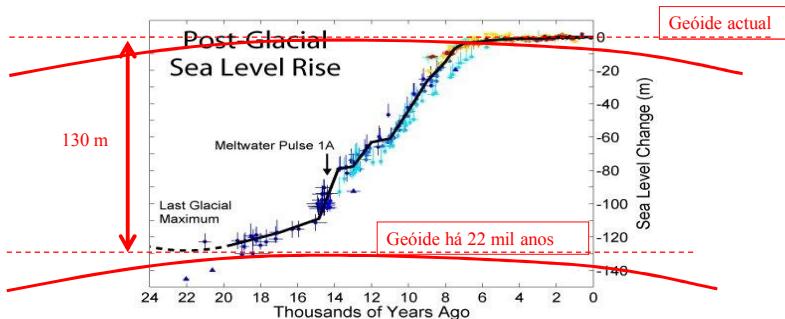
- ✓ O referencial *European Vertical Reference Frame 2007* é a mais recente realização do sistema de referência vertical europeu (EVRS2007) e a continuação da solução da rede de nívelamento europeia, UELN95/98;
- ✓ Os objectivos do EVRS são: a) definir um sistema de referência vertical europeu harmonizado e sem hiatos; b) elaborar recomendações à Comissão Europeia para uma futura adopção do EVRS a ser proposto na directiva INSPIRE; c) providenciar um sistema de altitudes actualizado e compatível com as convenções do EVRS.
- ✓ Relação entre vários *data verticais Europeus* e o EVRS2000 :



Subida do NMM

• Modelo de Geóide com a subida do NMM

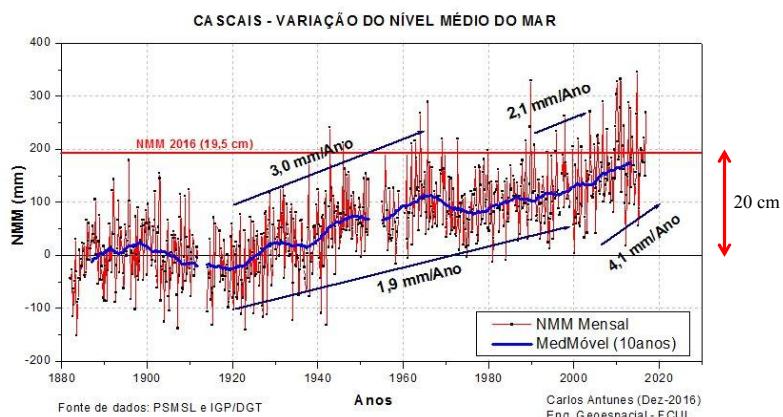
- 1) A concretização do GEÓIDE é definida pelo W_0 , o qual é determinado pelos parâmetros (GM , a , e^2 , ω);



- 2) No período interglacial, GM permanece constante, mas (a, e^2) variam

Subida do NMM

- Série secular da variação mensal do NMM

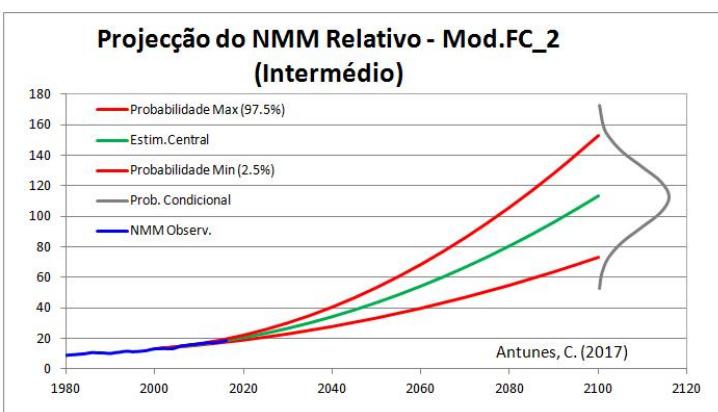


Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Subida do NMM

- Projecção do NMM relativo em Cascais

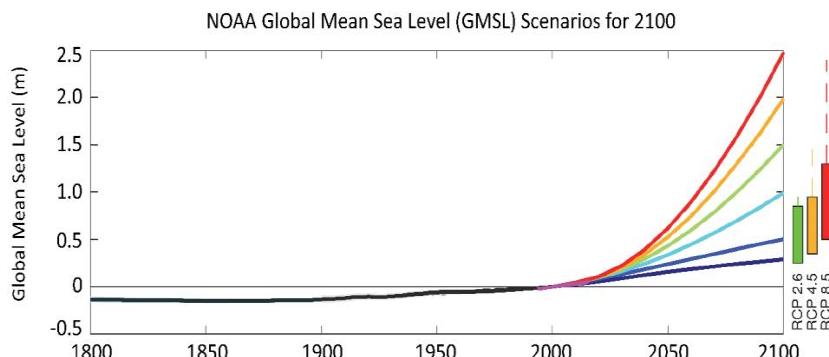


Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Subida do NMM

- **Projeções da NOAA, 2017**

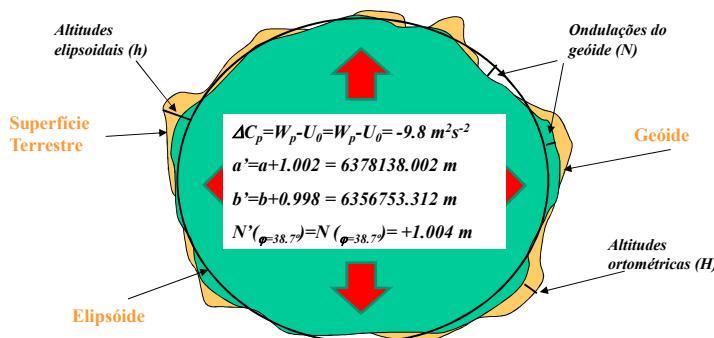


Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Subida do NMM

- **Modelo de Geóide com a subida do NMM**



- Supondo uma subida do NMM de 1 m, aumenta o semi-eixo maior (a), eleva-se a superfície do GEÓIDE, diminui o potencial $W_0=U_0$ e aumentam os raios do ELIPSÓIDE.

Geodesia & Aplicações - Aula 15

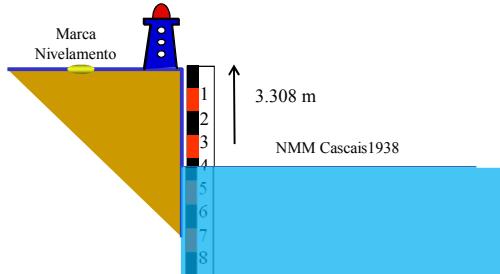
FCUL-EG

Revisão do Datum Altimétrico

• Datum Altimétrico e sistema de altitudes

- Supondo a subida do NMM em 1 m, a redefinição do referencial altimétrico (Datum Cascais1938) implica:

- Redução da cota da marca de referência, de 4.308 para 3.308 m;



- E a consequente redução de todas as altitude ortométricas em 1 m.

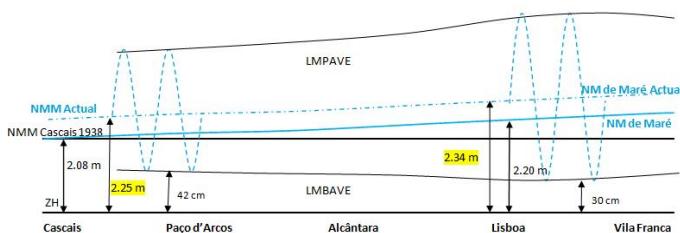
Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Revisão do Datum Altimétrico

• ZH vs NMM Actual

- Actualmente, devido à subida do NMM, 17 cm acima do Datum Cascais1938, o ZH situa-se 2.25 m abaixo do NMM actual de Cascais e 2.34 m abaixo do NM Maré em Lisboa.



- Uma consequência é o aumento da coluna de água abaixo do nível de maré, com implicações na segurança de navegação e nos níveis de dragagem nas águas restritas (canais, cais e docas).

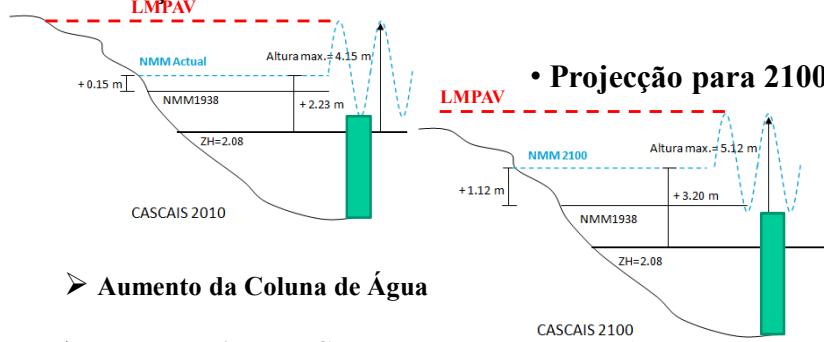
Geodesia & Aplicações - Aula 15

FCUL-EG

Revisão do Datum Altimétrico

• ZH e profundidades em águas restritas

• Situação de referência



➤ Aumento da Coluna de Água

➤ Recuo da Linha de Costa e deslocação da LMPAVE

Discussão & Conclusões

• A subida do NMM obrigará :

- à revisão do Datum Vertical e sistema de altitudes ortométricas;
- à revisão do Zero Hidrográfico e da batimetria de toda a cartografia náutica costeira;

• A subida do NMM implicará :

- o recuo da linha de costa;
- alteração dos limites administrativos (LMPAV) e da cartografia costeira;

Discussão & Conclusões

- Por imposição da Directiva INSPIRE, Portugal será obrigado a :
 - adotar o sistema europeu de referência vertical (EVRS2007 ou outro posterior);
 - rever os dados verticais e o sistema de altitudes em toda a sua cartografia;
- A não revisão dos ZH devido à subida do NMM levará a :
 - a um aumento de segurança na navegação;
 - à redução da navegabilidade efectiva;
 - ao aumento do volume de dragagens, com os consequentes custos económicos;