Ajustamento de Redes

5.1 Equações de observação sobre o Plano Cartográfico

a) O ajustamento sobre o plano cartográfico é aplicado a observações definidas no respectivo sistema de referência;

b) São aplicadas correcções de redução às observações, previamente, reduzidas ao elipsóide;

c) Sobre as ***direcções azimutais*** temos: correcção ***tangente-corda***;

d) Sobre os ***azimutes*** temos: correcção ***tangente-corda*** e ***convergência de meridianos***;

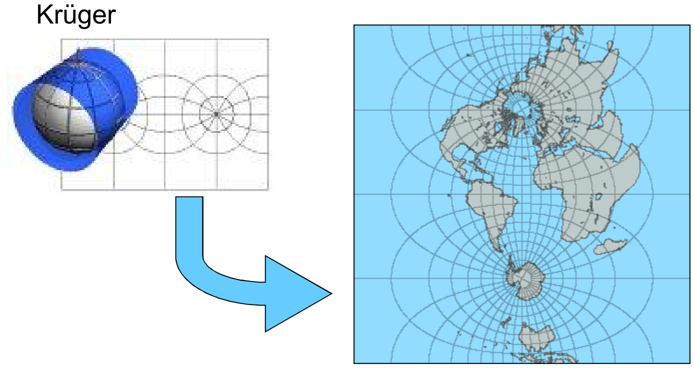
e) Sobre as ***distâncias*** temos: redução do ***factor de escala***;

f) A vantagem de se recorrer ao plano cartográfico decorre da simplicidade da geometria e do seu formalismo matemático.

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

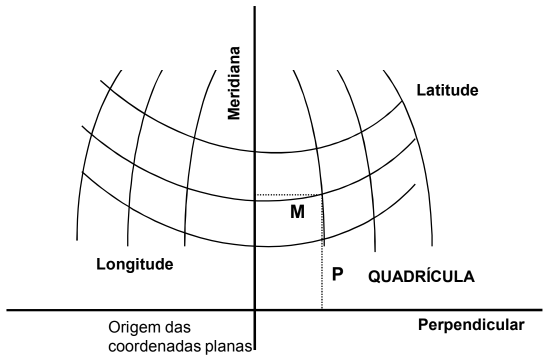
a) Projecção de Mercator Transversa, Gauss ou Gauss-Krüger

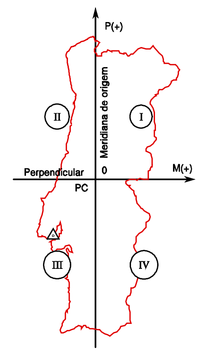


Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

b) Sistema de coordenadas cartográfica





Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

c) Sistemas de Projecção Cartográfica Nacionais

Hayford-Gauss

Datum geodésico Hayford-Lisboa = ***Datum Lisboa***

Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central (φ=39º 40';λ=-8º 7' 54.862'')

Origem das coordenadas planas: Ponto Central (ΔM= 0 ; ΔP= 0)

Hayford-Gauss Militar

Datum geodésico Hayford-Lisboa = ***Datum Lisboa***

Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central (φ=39º 40';λ=8º 7' 54.862'')

Origem das coordenadas planas: 'Ponto Fictício' resultante da translacção de 200 km E-W e 300 km N-S (para as coordenadas serem sempre positivas)

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

c) Sistemas de Projecção Cartográfica Nacionais

Sistema UTM – Continente - Fuso 29

Datum Hayford-Postdam = ***ED50***

Projecção Mercator Transversa Universal (com origem no meridiano central do Fuso 29)

Origem do referencial plano: intersecção do meridiano central (9º WGr) com o Equador;

Origem (fictícia) das coordenadas planas: resulta de uma translação E-W de 500 Km.

Sistema UTM – Açores e Madeira - Fusos 25, 26, 28

***Data* locais** (Porto Santo, Ocidental, Central e Oriental),

Projecção Mercator Transversa Universal (com origem no meridiano central do respectivo Fuso)

Origem do referencial plano: intersecção do meridiano central (33º; 27º; 15º WGr) com o Equador;

Origem (fictícia) das coordenadas planas: resulta de uma translação E-W de 500 Km.

Ajustamento de Redes

5.1.1 Projecção Cartográfica

c) Sistemas de Projecção Cartográfica Nacionais

Hayford-Gauss

Datum geodésico Hayford-Melriça = ***Datum 73***

Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central (φ=39º 40';λ=-8º 7' 54.862'')

Origem das coordenadas planas: Ponto Central (ΔM= 180.598m ; ΔP= -86.99m)

PT-TM06

Datum geodésico = ***ETRS89***

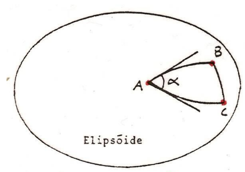
Projecção de Gauss-Kruger (versão elipsoidal da Projecção de Mercator Transversa) com origem no (meridiano do) Ponto Central (φ=39º 40' 5.73'';λ=-8º 7' 59.19'')

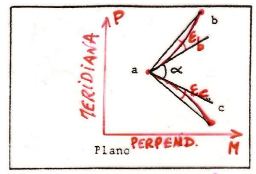
Origem das coordenadas planas: Ponto Central (ΔM= 0 ; ΔP= 0)

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

a) Correcção tangente-corda – Projecção de Gauss





$$\varepsilon_{rad} = \frac{1}{6R_m^2}(2M_e + M_v)(P_e - P_v)\left\{1 - \frac{(2M_e + M_v)^2}{27R_m^2}\right\}$$

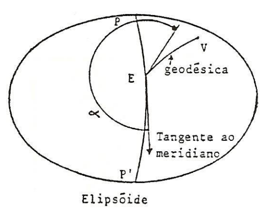
com $R_m^2 = k_0^2 N_m \rho_m$ calculado na latitude média $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_e + \varphi_v)$

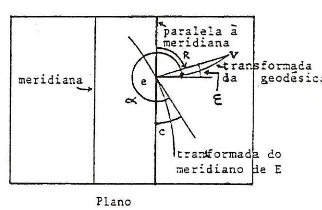
Fórmula aproximada $\varepsilon'' = 84606 \cdot 10^{-14}(2M_e + M_v)(P_e - P_v)$

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

b) Convergência de meridianos – Projecção de Gauss





$$c = (\lambda_e - \lambda_0) \cdot sen\varphi_e$$

- correcção aos azimutes: $R_{ev} = \alpha_{ev} - c + \varepsilon \; (\pm 180^0)$

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

c) Factor de escala – Projecção de Gauss

$$k = \frac{comprimento - no - plano - cartográfico}{comprimento - no - elipsóide}$$

$$k = k_0 \left\{ 1 + \frac{M_\mu^2}{6R_m^2} \left(1 + \frac{M_\mu^2}{36R_m^2} \right) \right\}$$

onde $M_\mu^2 = M_e^2 + M_e M_v + M_v^2$

Ajustamento de Redes

5.1.2 Correcções de redução ao plano cartográfico

c) Factor de escala – Projecção de Gauss

- correcção aos comprimentos: $c_k = k \cdot D_E - D_E = (k-1) \cdot D_E$

- Para uma projecção tangente (k_0=1) e latitude do ponto central
φ=39º 40', tem-se uma correcção aproximada de

$$c_d = \frac{M_\mu^2}{6R_m^2} \cdot D_E = 41018 \cdot 10^{-19} \cdot \left(M_e^2 + M_e M_v + M_v^2 \right) \cdot D_E$$

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

a) As equações de observação (do sistema linear) no processo de ajustamento resultarão de fórmulas diferenciais no plano cartográfico das relações

- de rumo: $$\mathbf{R_{ev}} = \mathbf{arctg}\frac{\mathbf{M_v - M_e}}{\mathbf{P_v - P_e}}$$

- e de comprimento $$D_{ev} = \sqrt{(M_v - M_e)^2 + (P_v - P_e)^2}$$

b) A sua simples geometria permite trabalhar com fórmula mais simples, quando comparada com a geometria do elipsóide

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

c) Para definir a relação de equação linear de observação

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \cdot \delta + f(x_0) - l_0 = \nu$$

que se pode escrever na forma

$$A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + \nu$$

$$\boxed{corr.dif.linear = observ. - "observ.calc." + resíduo}$$

necessitamos de determinar a correcção diferencial linear ($df=A.\delta$) para cada relação de observação (direcção azimutal, rumo e distância);

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

d) Assim, temos para o rumo:

$$dR_{ev} = -\frac{\cos R^0_{ev}}{D^0_{ev}} dM_e + \frac{senR^0_{ev}}{D^0_{ev}} dP_e - \frac{\cos R^0_{ve}}{D^0_{ev}} dM_v + \frac{senR^0_{ve}}{D^0_{ev}} dP_v$$

e para as distâncias

$$\mathrm{dD_{ev} = -senR^0_{ev} dM_e - \cos R^0_{ev} dP_e - senR^0_{ve} dM_v + \cos R^0_{ve} dP_v}$$

onde $R^0_{ev} = arctg\left(\frac{M^0_v - M^0_e}{P^0_v - P^0_e}\right)$ e $D^0_{ev} = \sqrt{(M_v - M_e)^2 + (P_v - P_e)^2}$

Ajustamento de Redes

5.1.3 Equações de observação

$\boxed{\text{corr.dif.linear = observ.–"observ.calc."+resíduo}}$

e) Equação de rumo

$$-\frac{\cos R^0_{ev}}{D^0_{ev}} dM_e + \frac{senR^0_{ev}}{D^0_{ev}} dP_e - \frac{\cos R^0_{ve}}{D^0_{ev}} dM_v + \frac{senR^0_{ve}}{D^0_{ev}} dP_v = R_{obs} - R^0_{ev} + \nu_R$$

f) Equação de direcção azimutal

$$-\frac{\cos R^0_{ev}}{D^0_{ev}} dM_e + \frac{senR^0_{ev}}{D^0_{ev}} dP_e - \frac{\cos R^0_{ve}}{D^0_{ev}} dM_v + \frac{senR^0_{ve}}{D^0_{ev}} dP_v - dR_0\big|_e = dAz_{obs} - \left(R^0_{ev} - (R_0)^0_E\right) + \nu_{dz}$$

g) Equação de distância

$$-senR^0_{ev} dM_e - \cos R^0_{ve} dP_e - senR^0_{ve} dM_v + \cos R^0_{ve} dP_v = D_{obs} - D^0_{ev} + \nu_D$$

Ajustamento de Redes

5.2 Ajustamento sobre o Elipsóide

a) Para estabelecer o processo de ***ajustamento sobre o elipsóide*** de referência vamos assumir ***três tipos de observações***, azimute, direcção azimutal e comprimento ***devidamente reduzidos***;

b) Comparando com as observações do ajustamento sobre o plano cartográfico, só não são aplicadas as correcções de redução cartográfica (tangente-corda, convergência de meridianos e factor de escala), todas as restantes correcções são aplicadas;

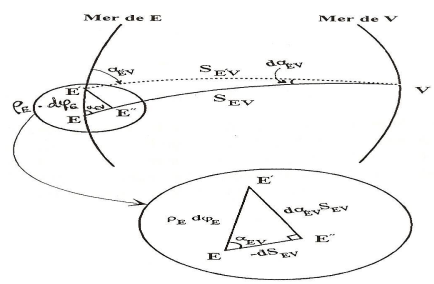
c) Como parâmetros principais temos as correcções às latitudes ($d\varphi_i$) e às longitudes ($d\lambda_i$) dos pontos considerados livres, definidas no sistema linear;

$$df = A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + \nu$$

Ajustamento de Redes

5.2 Ajustamento sobre o Elipsóide

d) As fórmula diferenciais das três equações de observação derivam da determinação de pequenas variações sobre o meridiano ($d\varphi$) e sobre o paralelo ($d\lambda$) no extremo do arco da geodésica;



Ajustamento de Redes

5.2.1 Equações sobre o Elipsóide

a) Equação de observação de Azimute

$$A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + \nu$$

$$d\alpha = \alpha_{obs} - \alpha_{calc} + \nu_\alpha$$

$$\frac{\rho_E \, sen\,\alpha_{EV}}{S_{EV}} d\varphi_E - \frac{N_E \cos\varphi_E \cos\alpha_{EV}}{S_{EV}} d\lambda_E + \frac{\rho_V \, sen\,\alpha_{VE}}{S_{EV}} d\varphi_V - \frac{N_V \cos\varphi_V \cos\alpha_{VE}}{S_{EV}} d\lambda_V$$
$$= \left[\alpha_{astro_{EV}} - \left(\Lambda_E - \overline{\lambda}_E\right) sen\,\varphi_E\right] - \alpha_{calc_{EV}} + \nu_\alpha$$

Nota: todas as grandezas angulares devem ser calculas nas mesmas unidades (graus ou radianos).

Ajustamento de Redes

5.2.1 Equações sobre o Elipsóide

b) Equação de observação de Direcção Azimutal

$$A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + \nu$$

$$- d\alpha_0 + dd_{az} = d_{az} - \left[\alpha_{calc} - \alpha_0\right] + \nu_{d_{az}}$$

$$- d\alpha_0 + \frac{\rho_E \, sen\,\alpha_{EV}}{S_{EV}} d\varphi_E - \left(sen\,\varphi_E - \frac{N_E \cos\varphi_E \cos\alpha_{EV}}{S_{EV}} \right) d\lambda_E + \frac{\rho_V \, sen\,\alpha_{VE}}{S_{EV}} d\varphi_V - \frac{N_V \cos\varphi_V \cos\alpha_{VE}}{S_{EV}} d\lambda_V$$
$$= d_{az} - \left[\alpha_{calc} - \left(\overline{\alpha}_0\right)_E\right] + \nu_{d_{az}}$$

Ajustamento de Redes

5.2.1 Equações sobre o Elipsóide

c) Equação de observação de Comprimento

$$A \cdot \delta = l_0 - f(x_0) + \nu$$

$$ds = s_{obs} - s_{calc} + \nu_s$$

$$-\frac{\rho_E\, sen\alpha_{EV}}{206265''} d\varphi_E - \frac{N_E \cos\varphi_E\, sen\alpha_{EV}}{206265''} d\lambda_E + \frac{\rho_V \cos\alpha_{VE}}{206265''} d\varphi_V - \frac{N_V \cos\varphi_V\, sen\alpha_{VE}}{206265''} d\lambda_V$$
$$= s_{red_{EV}} - s_{calc_{EV}} + \nu_s$$

Nota: As correcções às coordenadas (dφ, dλ) estão expressos em ".

Ajustamento de Redes

5.2.2 Processo de ajustamento sobre o elipsóide

a) O cálculo dos valores aproximados de azimutes, comprimentos e coordenadas geodésicas necessita da aplicação dos problemas directo e inverso da geodesia através dos desenvolvimentos de Legendre-Delambre;

b) Este facto torna o processo de ajustamento sobre o elipsóide mais complexo e moroso do que sobre o plano cartográfico;

c) Ao exprimir-se as correcções das coordenadas em segundos de arco ("), obtém-se um sistema de equações numericamente mais estável;

Ajustamento de Redes

5.2.2 Processo de ajustamento sobre o elipsóide

d) O formulário do modelo matemático dos m.m.q. deduzido é aplicado da mesma forma que o caso anterior, incluindo a estimativa a priori das precisões;

e) A excepção dá-se no caso do tratamento dos elementos da matriz de covariâncias das coordenadas geodésicas, que vêm expressos (")^2, para a determinação das elipses de erro, onde é necessário fazer uma conversão:

$$\hat{\boldsymbol{C}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{dM_j} & \hat{\sigma}_{dM_j dP_j} \\ \hat{\sigma}_{dM_j dP_j} & \hat{\sigma}^2_{dP_j} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{C}}_{d\varphi_j d\lambda_j} \cdot \boldsymbol{J}^T$$

com $$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{N_j \cos\varphi_j}{206265''} \\ \dfrac{\rho_j}{206265''} & 0 \end{bmatrix}$$

Ajustamento de Redes

5.3 Técnicas de resolução do sistema

a) O sistema de equações normais é, então, o sistema tornado possível e determinado (*n*x*n*) ao qual têm de ser aplicadas uma das técnicas de resolução;

b) Basicamente, existem duas técnicas de resolução de sistemas de equações: 1 - o método da condensação da matriz e consequente resolução regressiva, e 2 - o método de inversão da matriz;

c) A opção no passado era óbvia, dada as restrições computacionais de memória e velocidade de processamento, escolhia-se o método da condensação;

d) Actualmente, salvo raras excepções, é perfeitamente praticável o método de inversão, dada a grande capacidade computacional;

Ajustamento de Redes

5.3.1 Técnicas de resolução do sistema

e) Em termos de métodos de triangularização da matriz de coeficientes existem dois métodos, os ***métodos de substituição-eliminação*** *Cholesky* (semelhante ao de *Doolitle*) e o de *Gauss*;

f) O Método de Cholesky usa como ***elemento de redução a raiz quadrada dos elementos*** da diagonal;

g) O Método de Gauss usa como ***elemento de redução o inverso dos elementos*** da diagonal;

h) O método de Cholesky e a Regra de Schreiber de eliminação de parâmetros inúteis são os métodos mais comuns usados no ajustamento de redes de geodesia, e são os métodos usados no nosso cálculo computacional;

Ajustamento de Redes

5.3.1 Técnicas de resolução do sistema

f) Método de Cholesky

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[2^a - 1^a \cdot \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} & b_1 - \frac{a_{21}b_2}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_1 \end{array}\right] \xrightarrow[3^a - 1^a \cdot \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}}}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} & b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}} \end{array}\right]$$

Ajustamento de Redes

5.3.1 Técnicas de resolução do sistema

g) Resolução regressiva

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23}x_3)}{a_{22}} \qquad x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

Ajustamento de Redes

5.3.2 Eliminação de parâmetros inúteis

a) Nas redes geodésicas de triangulação, onde são observadas direcções desorientadas pelo método dos giros do horizonte, é introduzida uma incógnita, o ***rumo de orientação*** do giro, R_0, que é um ***parâmetro inútil***;

b) Não sendo necessário, ele pode ser eliminado, pois apenas ocupa memória e sobrecarrega o sistema de cálculo;

c) ***A eliminação*** tem de ser feita com alguma regra, ou seja, tem que ***gerar um sistema modificado equivalente***, sem alterar a solução dos parâmetros úteis;

d) A regra de Schreïber elimina todos os rumos de orientação dos giros (tantos quanto as estações), sem alterar a solução;

Ajustamento de Redes

5.3.2 Eliminação de parâmetros inúteis

e) Regra de Scheïber

Equações	Pesos
$x + b_1 y + c_1 z = l_1 + \nu$	1
$x + b_1 y + c_1 z = l_1 + \nu$	1
$\cdots \quad \cdots$	$\cdots$
$x + b_1 y + c_1 z = l_1 + \nu$	1

Equações truncadas	Pesos
$b_1 y + c_1 z = l_1 + \bar{\nu}$	1
$b_1 y + c_1 z = l_1 + \bar{\nu}$	1
$\cdots \quad \cdots$	$\cdots$
$b_1 y + c_1 z = l_1 + \bar{\nu}$	1
$[b]y + [c]z = [l] + [\bar{\nu}]$	$-\frac{1}{n}$

Por cada giro acrescenta-se uma equação soma – ***equação de Schreïber***.

Ajustamento de Redes

5.3.2 Falso resíduos e recuperação dos parâmetros

a) O sistema truncado, resultante da aplicação desta regra, tem um sistema de equações normais coincidente com o subsistema de equações normais do sistema original;

b) Os resíduos resultantes do sistema de equações truncadas são <u>*falsos resíduos*</u>; para determinar os resíduos verdadeiros temos que, implicitamente, recuperar o parâmetro eliminado;

d) Tomando a equação genérica $a_i \hat{M} + b_i \hat{P} - l_i = \nu_i - \hat{R}_0$

e somando em ordem a ***i*** $\sum \bar{\nu}_i = \sum \nu_i - n\hat{R}_0$

resulta $\hat{R}_0 = -\frac{\sum \bar{\nu}_i}{n} + \frac{\sum \nu_i}{n} = -\frac{\sum \bar{\nu}_i}{n}$

e) Daqui saem os resíduos verdadeiro

Ajustamento de Redes

5.3.3 Resolução de sistemas por blocos

a) Na disciplina TAD, este problema de parâmetros inúteis é resolvido subdividindo-se o sistema de equações em blocos de parâmetros resolvendo-o por partes

$$\boldsymbol{A}_1 \cdot \hat{\delta}_1 + \boldsymbol{A}_2 \cdot \hat{\delta}_2 - \nu + \omega = \mathbf{0}$$

b) Aplicando o m.m.q. a este sistema obtém-se o seguinte sistema de equações normais

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^T \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1^T \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_2^T \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2^T \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^T \boldsymbol{P}_l \omega \\ \boldsymbol{A}_2^T \boldsymbol{P}_l \omega \end{pmatrix}$$

c) Este sistema pode ser resolvido apenas em ordem a δ_2, eliminando o parâmetro δ_1;