

# 5. Morfologia matemática numérica

Operações morfológicas elementares (erosão e dilatação). Operações morfológicas de abertura e fecho. Gradiente morfológico. Semi-gradientes. Operações de Chapéu-Alto e Chapéu-Baixo. Reconstrução geodésica numérica. Extremos regionais. Transformação Watershed.

As operações elementares da morfologia matemática binária podem ser estendidas para as imagens de escala de cinzentos através do uso das operações de “**mínimo**” e “**máximo**”, que estabelecem um paralelo com as operações de erosão e dilatação binárias.

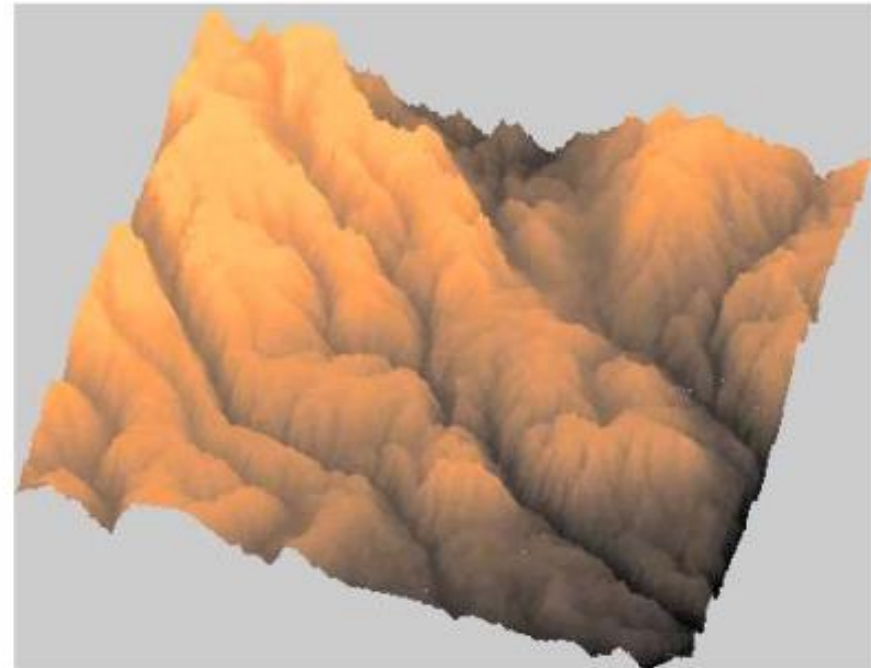
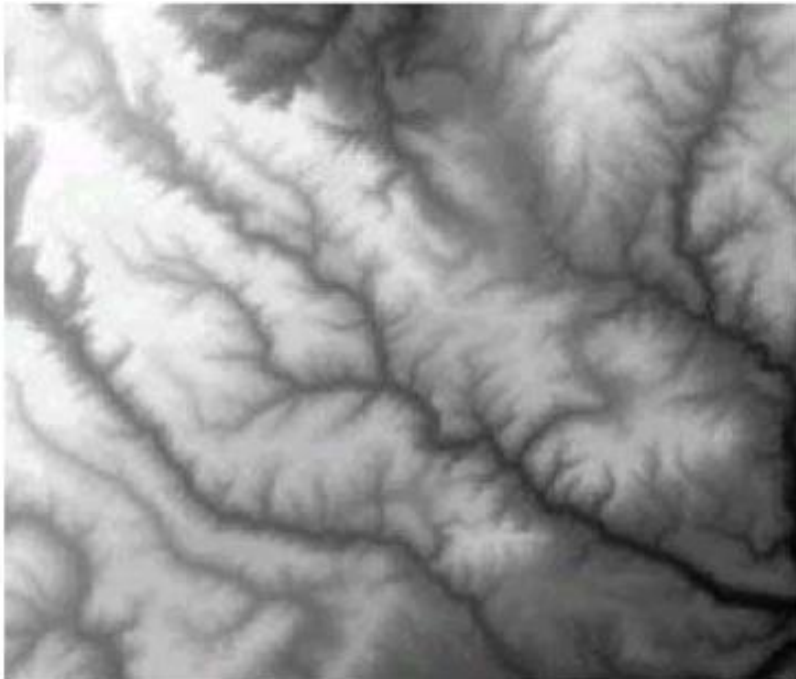
Estas operações atribuem a cada pixel da imagem novos valores correspondentes ao mínimo ou ao máximo valor de uma dada vizinhança em torno desse pixel. A vizinhança fica definida de acordo com a forma do elemento estruturante.

A morfologia matemática numérica tem aplicação em processos de contraste de imagem, descrição de texturas, detecção de fronteiras e limiarização, entre outras.

# Introdução

*Fernando Soares*

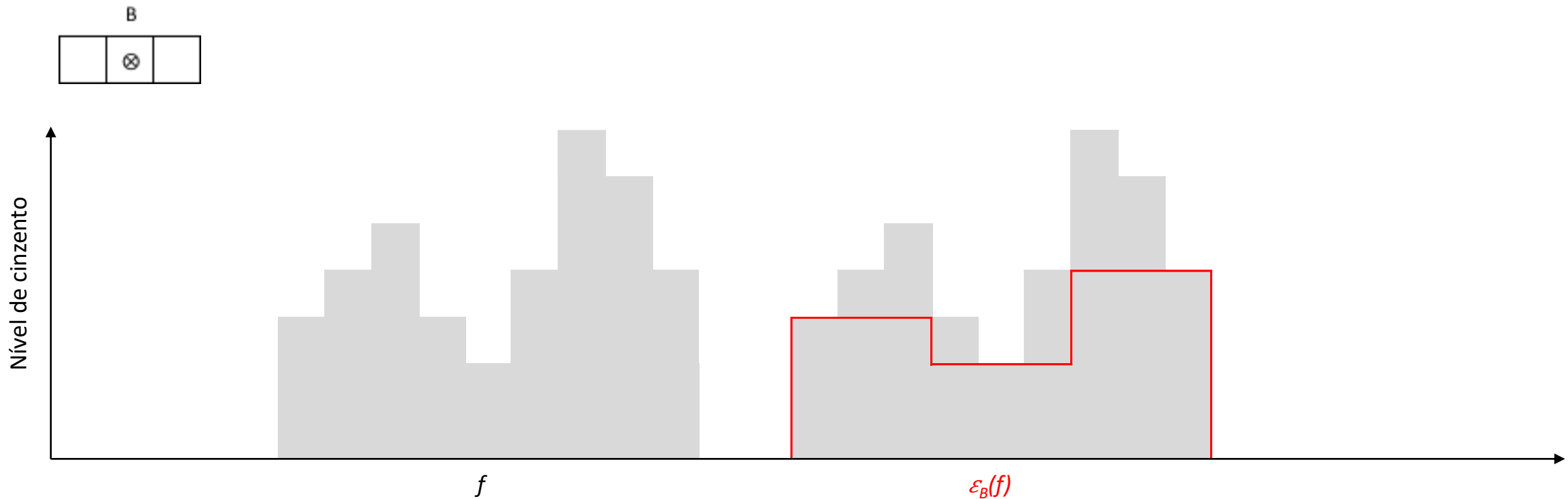
Na morfologia matemática as intensidades dos pixels das imagens numéricas são consideradas como elevações topográficas.



# Transformações morfológicas elementares

A operação de **erosão**  $\varepsilon$  de uma dada função  $f$ , por um elemento estruturante  $B$ , posicionado com a sua origem em  $x$  ( $B_x$ ), é dada pela expressão:

$$\varepsilon_B(f(x)) = \min_{b \in B} f(x + b)$$



# Transformações morfológicas elementares

## Exemplo 2D da erosão:

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1

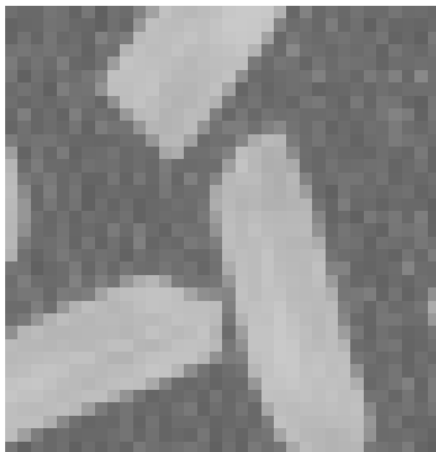
imagem

	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

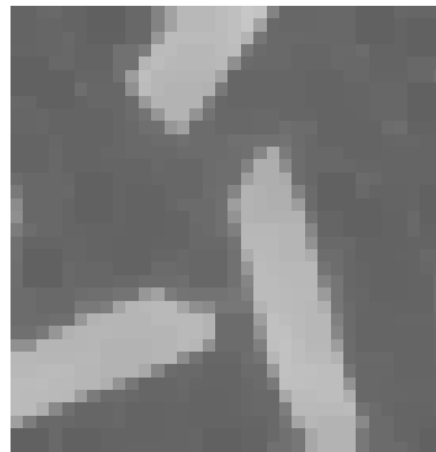
erosão

	2	2	2	2	2
..					..
..		3	2	0	..
..		3	1	0	..
..		3	1	1	..
..					..
	2	2	2	2	2

Inicial



Erosão



Inicial



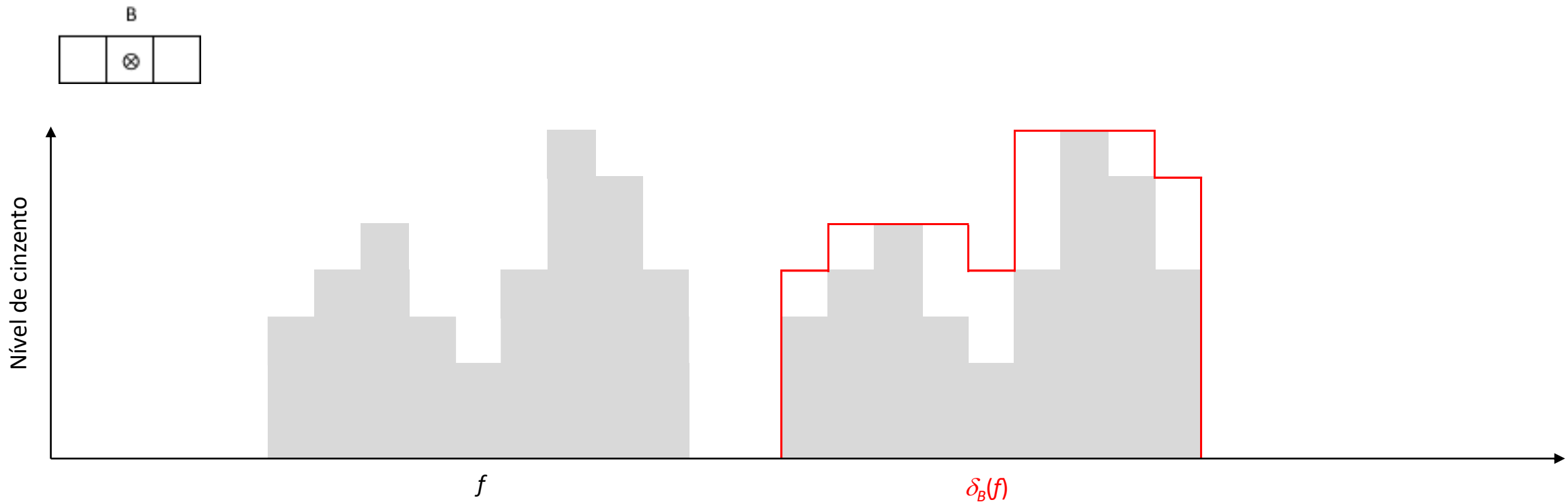
Erosão



# Transformações morfológicas elementares

A operação de **dilatação**  $\delta$  de uma dada função  $f$ , por um elemento estruturante  $B$ , posicionado com a sua origem em  $x$  ( $B_x$ ), é dada pela expressão:

$$\delta_B(f(x)) = \max_{b \in B} f(x + b)$$



# Transformações morfológicas elementares

Exemplo 2D da dilatação:

B

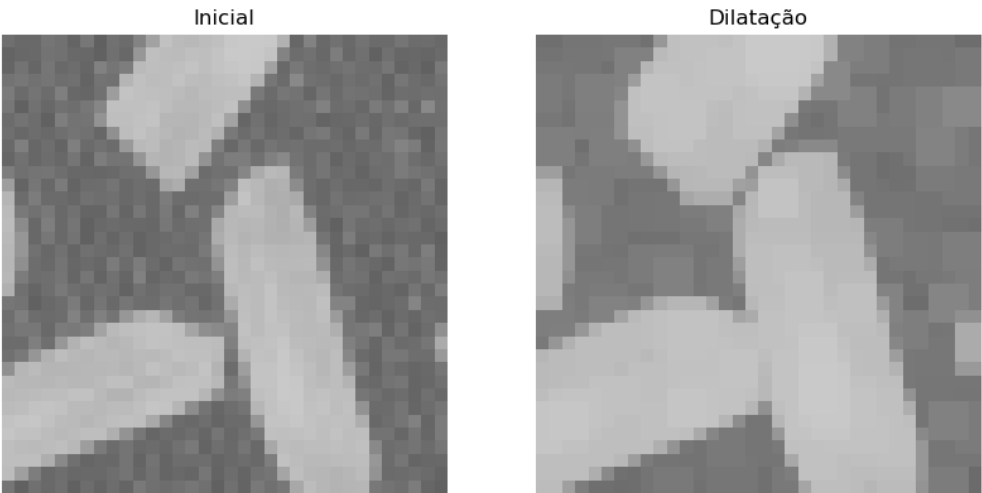
1	1	1
1	1	1
1	1	1

imagem

:	:	:	:	:		
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
:	:	:	:	:	:	

dilatação

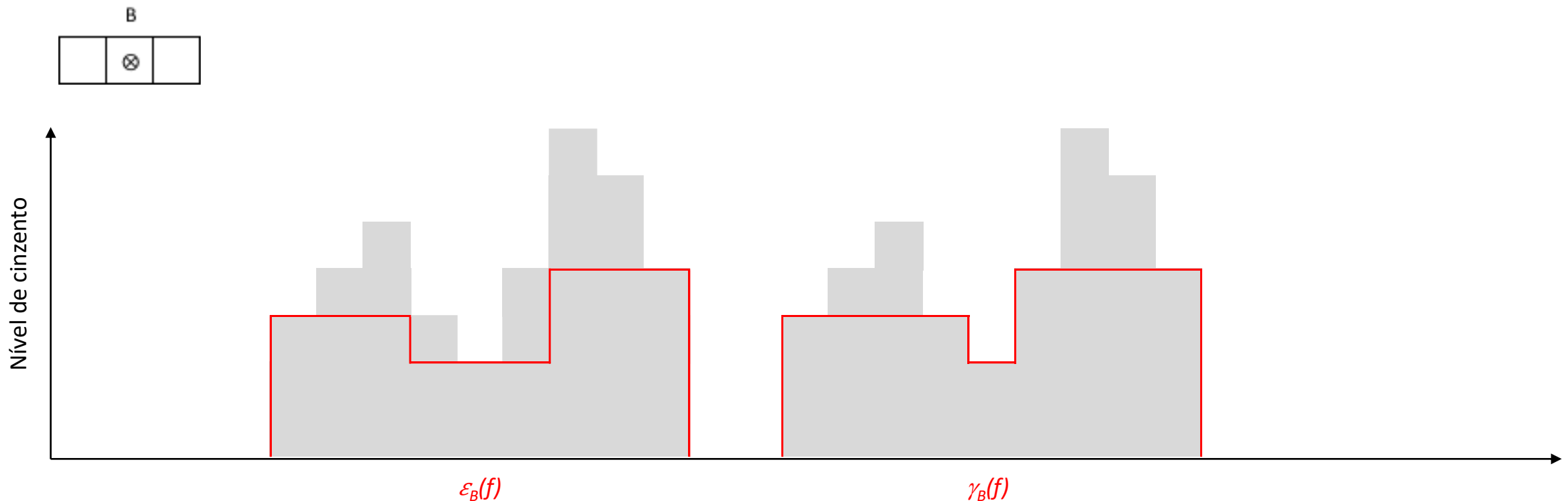
:	:	:	:	:		
..					..	
..		24	21	21		..
..		22	21	24		..
..		22	23	24		..
..						..
:	:	:	:	:	:	



# Transformações morfológicas elementares

A operação de **abertura**  $\gamma$  de uma dada função  $f$ , por um elemento estruturante  $B$ , posicionado com a sua origem em  $x$  ( $B_x$ ), é dada pela expressão:

$$\gamma_B(f(x)) = \delta_B(\varepsilon_B(f(x)))$$





## Exemplo 2D da abertura:

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1

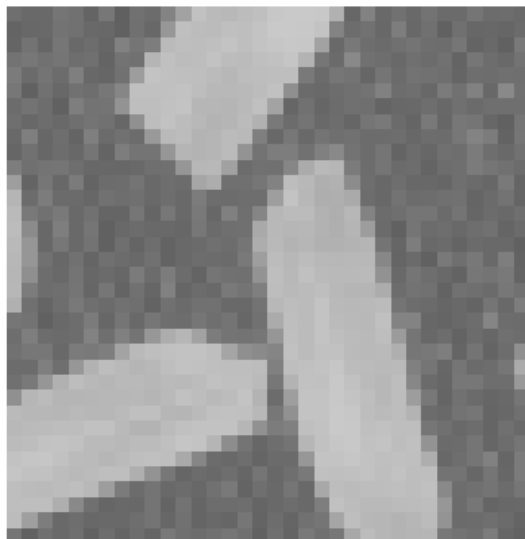
imagem

	:	:	:	:	:	
..	15	8	18	6	11	..
..	16	5	21	2	0	..
..	22	14	3	20	19	..
..	4	10	7	1	24	..
..	13	12	17	23	9	..
	:	:	:	:	:	

abertura

	2	2	2	2	2	
..						..
..						..
..		3				..
..						..
..						..
	2	2	2	2	2	

Inicial



Abertura

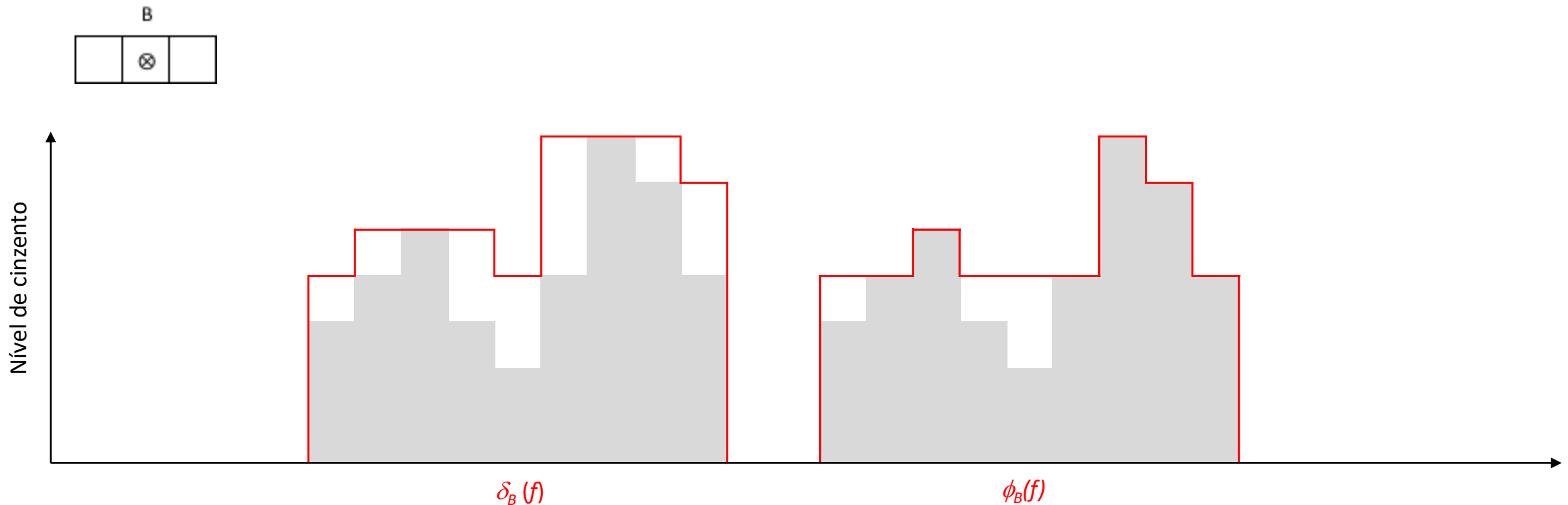


# Transformações morfológicas elementares

Fernando Soares

A operação de **fecho**  $\phi$  de uma dada função  $f$ , por um elemento estruturante  $B$ , posicionado com a sua origem em  $x$  ( $B_x$ ), é dada pela expressão:

$$\phi_B(f(x)) = \varepsilon_B(\delta_B(f(x)))$$



## Exemplo 2D do fecho:

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1

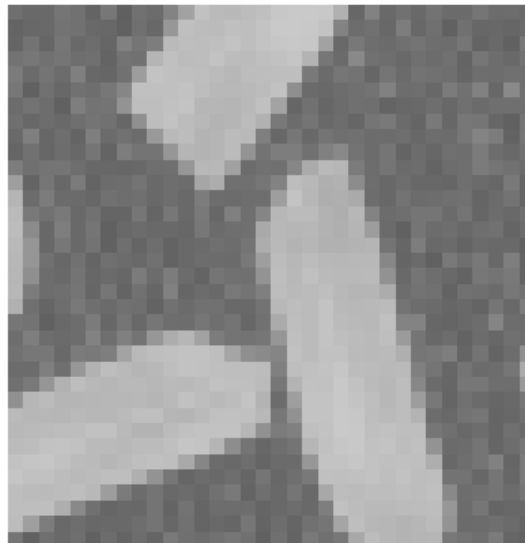
imagem

..	:	:	:	:	..
..	15	8	18	6	11
..	16	5	21	2	0
..	22	14	3	20	19
..	4	10	7	1	24
..	13	12	17	23	9
..	:	:	:	:	..

fecho

..	:	:	:	:	..
..					..
..					..
..		21			..
..					..
..					..
..	:	:	:	:	..

Inicial



Fecho



# Suavização morfológica

A suavização de uma imagem por métodos morfológicos pode ser obtida com várias abordagens. Uma delas consiste em executar uma operação de abertura, seguida de um fecho. Desta forma removem-se artefactos claros e escuros com tamanho igual ou abaixo do tamanho do elemento estruturante.

Inicial

 $f$ 

Suavização 1

 $\phi_B(\gamma_B(f))$

# Suavização morfológica

Fernando Soares

Uma segunda abordagem de suavização consiste em executar a média entre as operações de erosão e dilatação de uma imagem.

Inicial



$f$

Suavização 2

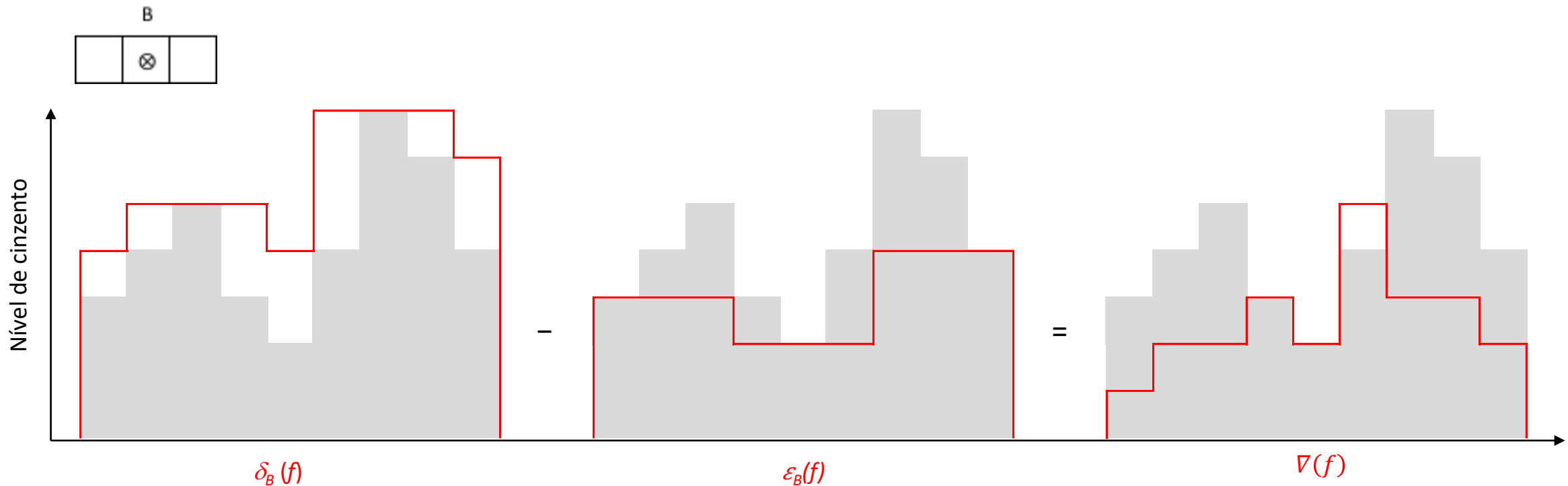


$0.5 \times [\varepsilon_B(f) + \delta_B(f)]$

# Gradiente morfológico

O **gradiente morfológico**  $\nabla$  (também designado por gradiente de Beucher) determina-se, em cada pixel, pela diferença algébrica entre a dilatação  $\delta(f)$  e a erosão  $\varepsilon(f)$ .

$$\nabla(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$$



# Gradiente morfológico

Exemplo 2D do gradiente morfológico:

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1

imagem

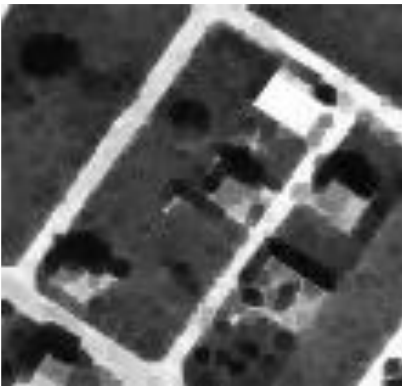
...	:	:	:	:	:	...
...	15	8	18	6	11	...
...	16	5	21	2	0	...
...	22	14	3	20	19	...
...	4	10	7	1	24	...
...	13	12	17	23	9	...
...	:	:	:	:	:	...

gradiente morfológico

:	:	:	:	:	
..					..
..		21	19	21	..
..		19	20	24	..
..		21	22	23	..
..					..
:	:	:	:	:	:



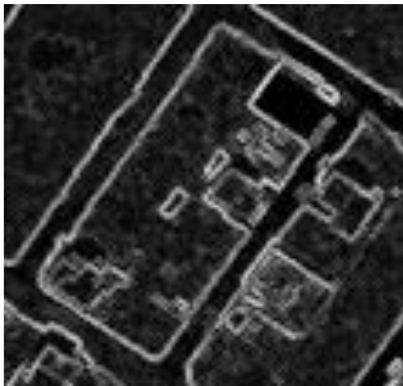
$f$



$\varepsilon(f)$



$\delta(f)$



$\nabla(f) \equiv \delta(f) - \varepsilon(f)$

A assunção comum relativa ao gradiente é a de que as fronteiras dos objectos, ou arestas estão localizadas onde se verificam diferenças elevadas entre os valores de pixels vizinhos. Os operadores de gradiente são usados para evidenciar essas variações.

A espessura de uma aresta detectada por um gradiente morfológico é igual a dois pixels (considerando um elemento estruturante elementar, ou seja, 3x3): um pixel em cada lado da fronteira.

Havendo ruído aleatório, a imagem deve ser filtrada antes de aplicar o operador de gradiente, para evitar realçar também o ruído. Ao contrário dos operadores de gradiente lineares de *Sobel*, *Prewitt*, ou *Roberts*, os gradientes morfológicos obtidos com elementos estruturantes simétricos tendem a depender menos da direccionalidade das arestas dos objectos.

Os **semi-gradientes** podem ser usados para detectar os limites interno ou externo de uma fronteira. Os semi-gradientes têm só um pixel de espessura.

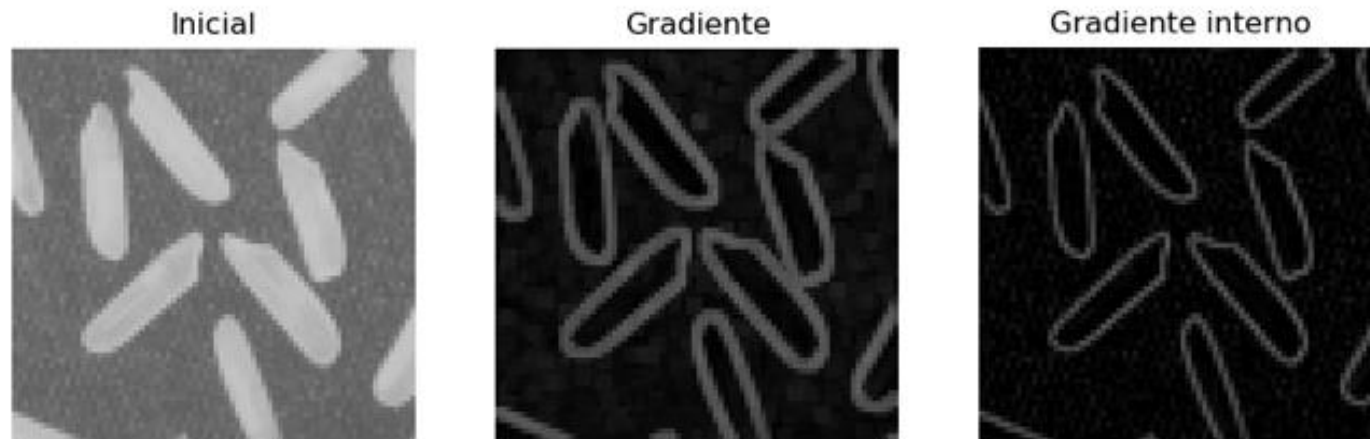


O **semi-gradiente por erosão**, ou **gradiente interno**  $\nabla^-$ , define-se como sendo a diferença entre a imagem original e a sua erosão numérica.

$$\nabla_B^-(f) = f - \varepsilon_B(f)$$

O gradiente interno evidencia:

- as fronteiras internas dos objectos que são mais claros que o fundo.
- as fronteiras externas dos objectos que são mais escuros que o fundo.

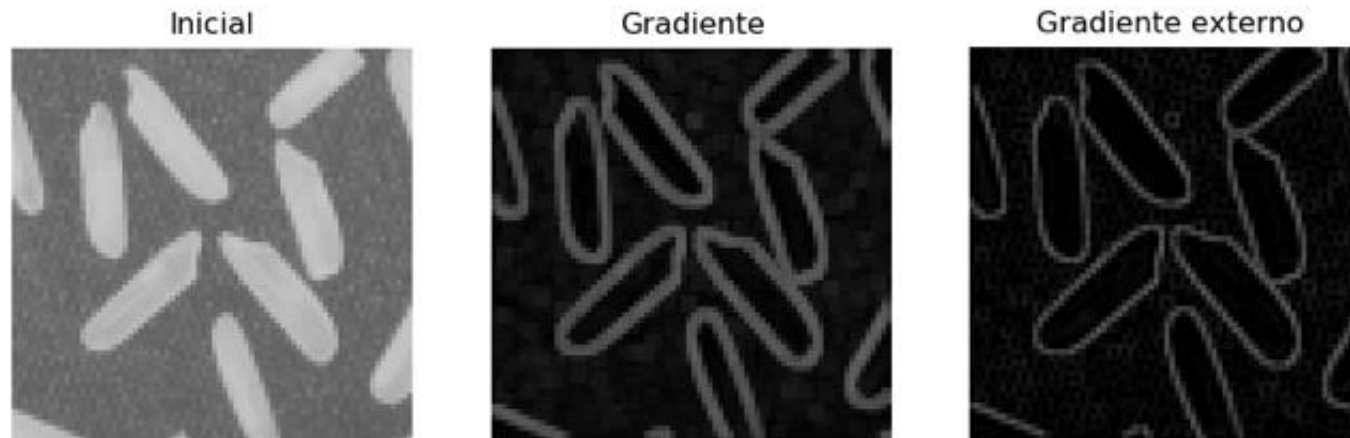


O **semi-gradiente por dilatação**, ou **gradiente externo**  $\nabla^+$ , define-se como sendo a diferença entre a dilatação numérica de uma imagem e a sua representação original.

$$\nabla_B^+(f) = \delta_B(f) - f$$

O gradiente externo evidencia.

- as fronteiras internas dos objectos que são mais escuros que o fundo.
- as fronteiras externas dos objectos que são mais claros que o fundo.

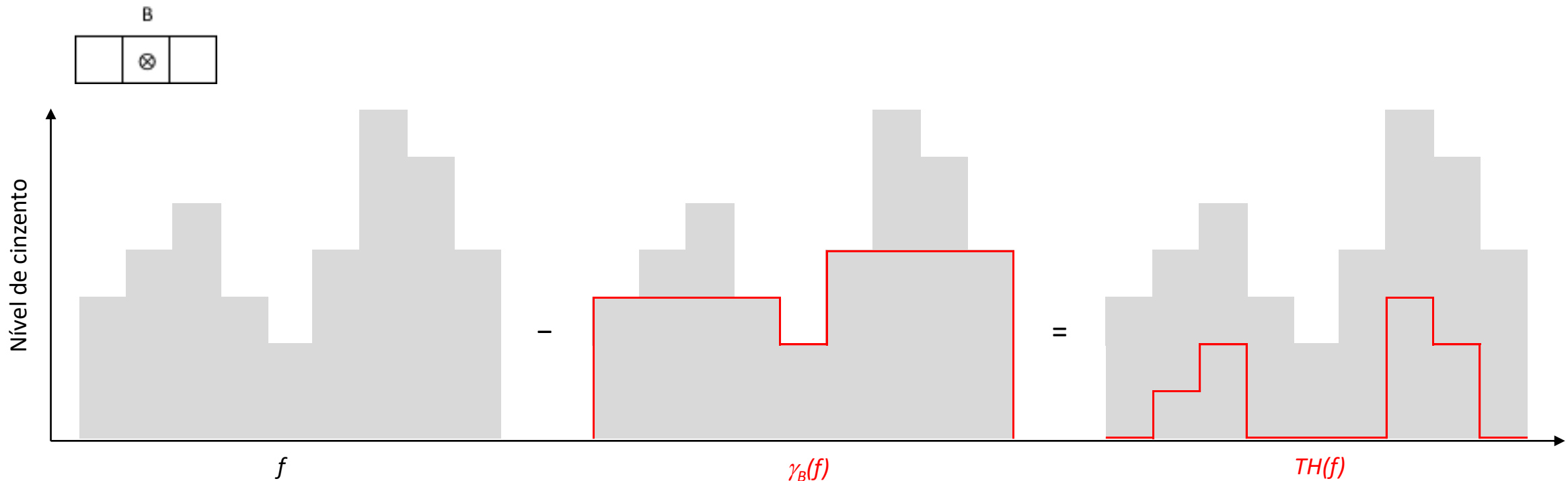


# Transformação Chapéu-Alto

Fernando Soares

**Chapéu-Alto** (*Top-Hat*): consiste na diferença algébrica entre a função (imagem) e a sua abertura.

$$TH(f) = f - \gamma_B(f)$$



# Transformação Chapéu-Alto

Fernando Soares

São extraídos os picos de intensidade da imagem. Todas as estruturas “em pico” que não estão contidas no elemento estruturante são removidas da imagem. Realça os detalhes da imagem. É um exemplo de como é mais simples agir sobre as estruturas relevantes, em vez de suprimir directamente os objectos mais irrelevantes.

Inicial

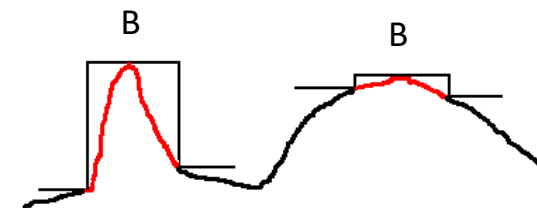


$f$

Top-Hat



$$TH(f) = f - \gamma_B(f)$$

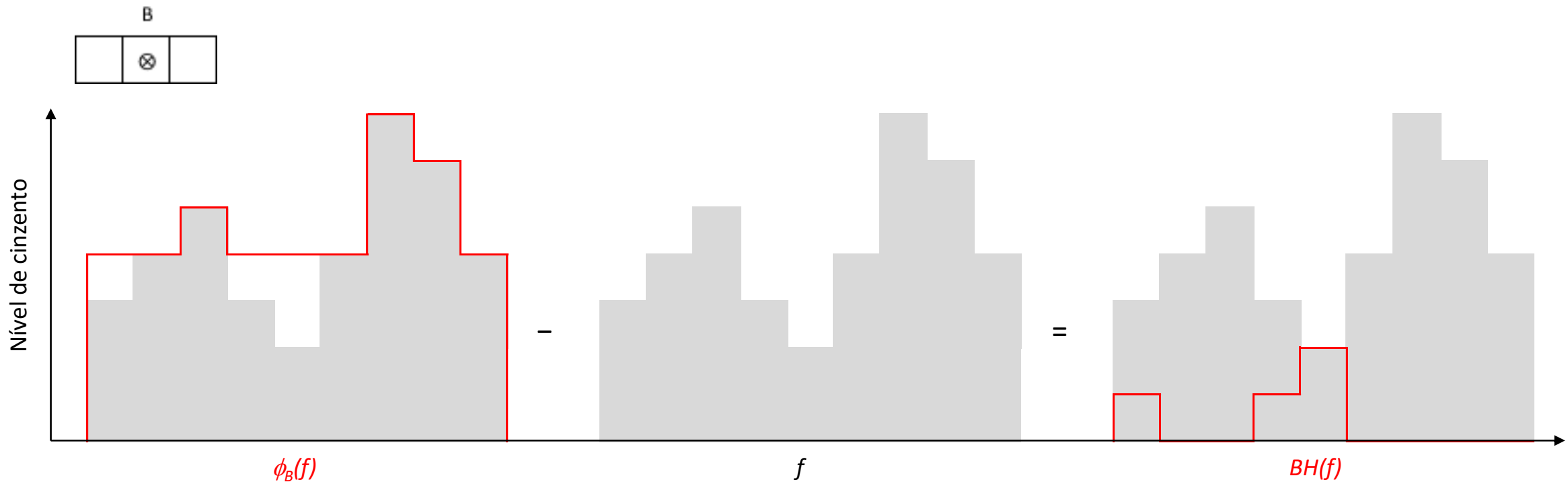


# Transformação Chapéu-Baixo

Fernando Soares

**Chapéu-Baixo (*Bottom-Hat*):** consiste na diferença algébrica entre o fecho da imagem e a imagem inicial.

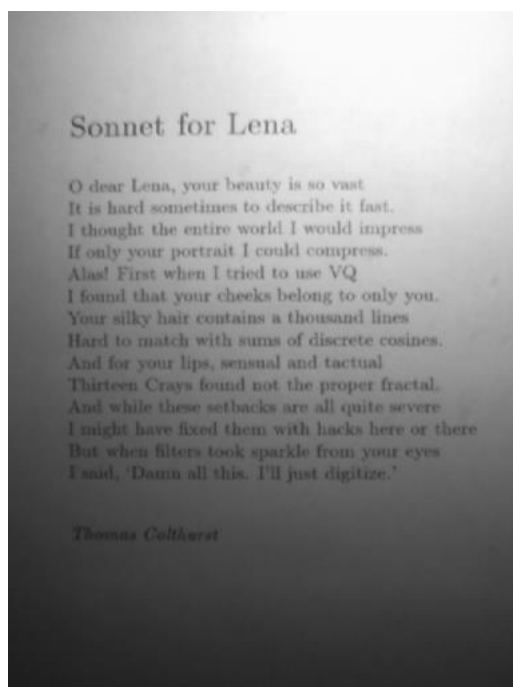
$$BH(f) = \phi_B(f) - f$$



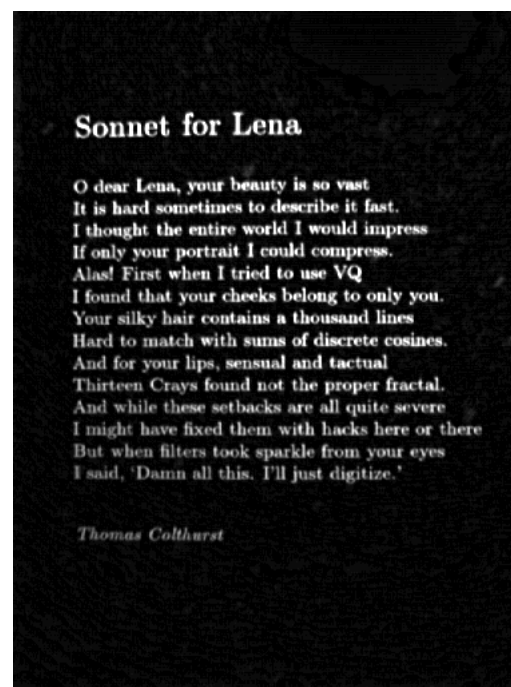
# Transformação Chapéu-Baixo

Fernando Soares

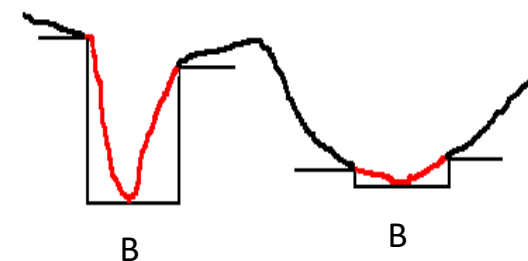
São extraídos os “vales” de intensidade da imagem. Todas as estruturas “em vale” que não estão contidas no elemento estruturante são removidas da imagem.



$f$



$BH(f) = \phi_B(f) - f$



# Chapéu-Alto auto complementar

A soma do *Top-Hat* com o *Bottom-Hat* extrai todos o objectos da imagem que não estão contidas no elemento estruturante dado, quaisquer que sejam os seus contrastes relativos (ou seja, picos ou vales).

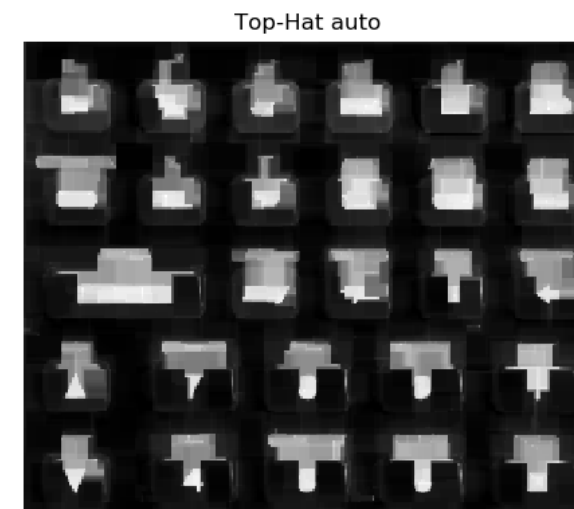
A partir das respectivas expressões deduz-se facilmente que,

$$TH(f) + BH(f) = f - \gamma_B(f) + \phi_B(f) - f = \phi_B(f) - \gamma_B(f)$$

Ou seja, o *Top-Hat* auto-complementar é dado pela **diferença entre o fecho e a abertura**.

# Chapéu-Alto auto complementar

Exemplo com elemento estruturante  $3 \times 3$  e  $9 \times 9$ :





# Chapéu-Alto e contraste de imagem

Um simples operador morfológico de contraste pode ser obtido com a adição, à imagem inicial, da diferença de ambos os operadores de *Top-Hat* e *Bottom-Hat*. Este procedimento consiste em começar por realçar os objectos mais claros (adição do *Top-Hat*), seguido do realce dos objectos mais escuros (subtracção do *Bottom-Hat*).

$$f + TH(f) - BH(f) = f + f - \gamma_B(f) - \phi_B(f) + f$$

Os valores resultantes que fiquem de fora do intervalo dinâmico da imagem inicial [ $z_{\min}$ ;  $z_{\max}$ ] terão os valores  $z_{\min}$ , ou  $z_{\max}$ , consoante fiquem abaixo ou acima dos extremos do intervalo ( $z_{\min}=0$  e  $z_{\max}=255$ , para imagens de 8 *bits*).

Exemplo:

Inicial



Top-Hat realce



# Filtragem sequencial alternada

A filtragem de uma imagem que contenha ruídos escuro e claro pode ser obtida através da aplicação de uma sequência de operações de fecho-abertura ou abertura-fecho.

Uma só operação sequencial de fecho-abertura, ou abertura-fecho, com um elemento estruturante grande não produz resultados aceitáveis

Uma solução para este problema consiste em aplicar fechos e aberturas alternados, começando com elementos estruturantes de baixas dimensões e ir aumentando progressivamente o seu tamanho até um dado tamanho final.

A este processo de filtragem por aplicação sequencial de fecho-abertura, ou abertura-fecho, dá-se o nome de **filtragem sequencial alternada**.

# Filtragem sequencial alternada

Exemplo:

Inicial



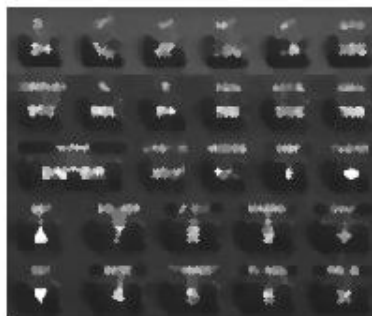
Disk radius = 1



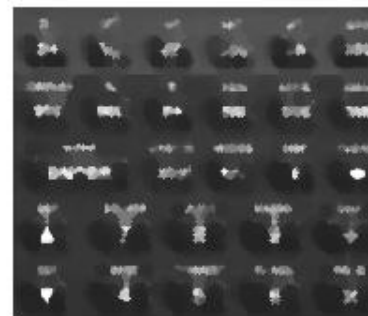
Disk radius = 2



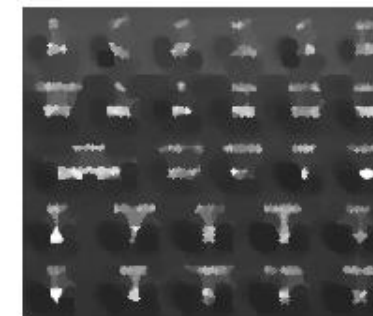
Disk radius = 3



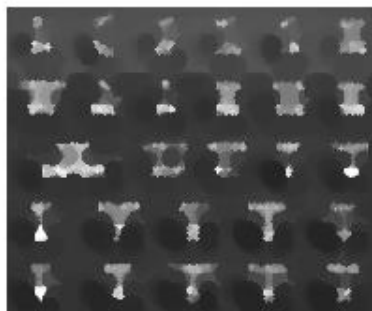
Disk radius = 4



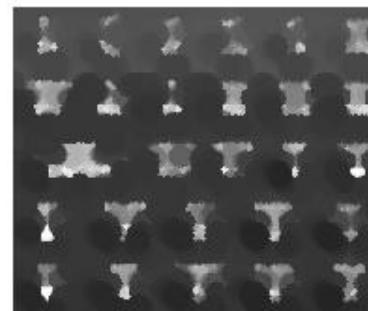
Disk radius = 5



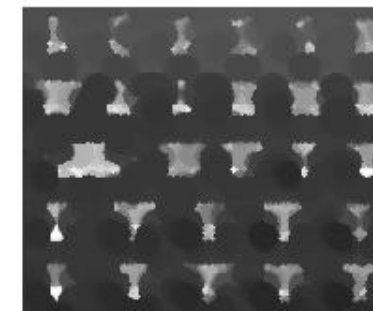
Disk radius = 6



Disk radius = 7



Disk radius = 8



**Transformações geodésicas numéricas** são transformações morfológicas aplicadas a uma imagem numérica  $h$ , mas condicionadas pela morfologia de uma outra imagem numérica  $f$ . Destacam-se as seguintes:

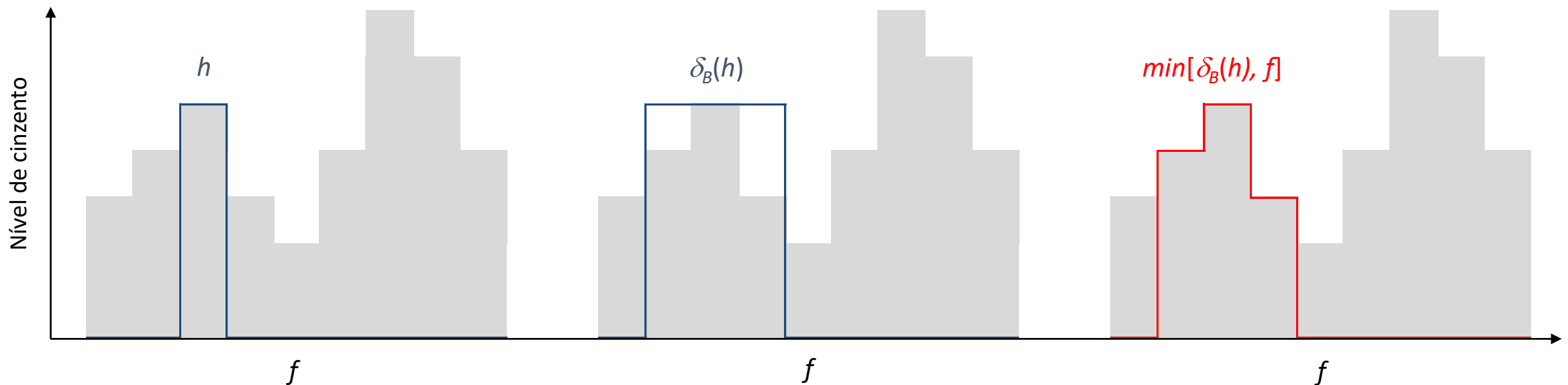
- 1 - Dilatação geodésica
- 2 - Erosão geodésica
- 3 - Reconstrução geodésica numérica por dilatações geodésicas sucessivas.
- 4 - Reconstrução geodésica numérica por erosões geodésicas sucessivas (reconstrução dual)

# Transformações geodésicas numéricas

Fernando Soares

**Dilatação geodésica:** consiste em determinar o valor mínimo entre a dilatação da imagem marcadora  $h$  ( $\leq f$ ) e a função  $f$ .

$$\delta_f(h) = \min[\delta_B(h(x, y)); f(x, y)]$$

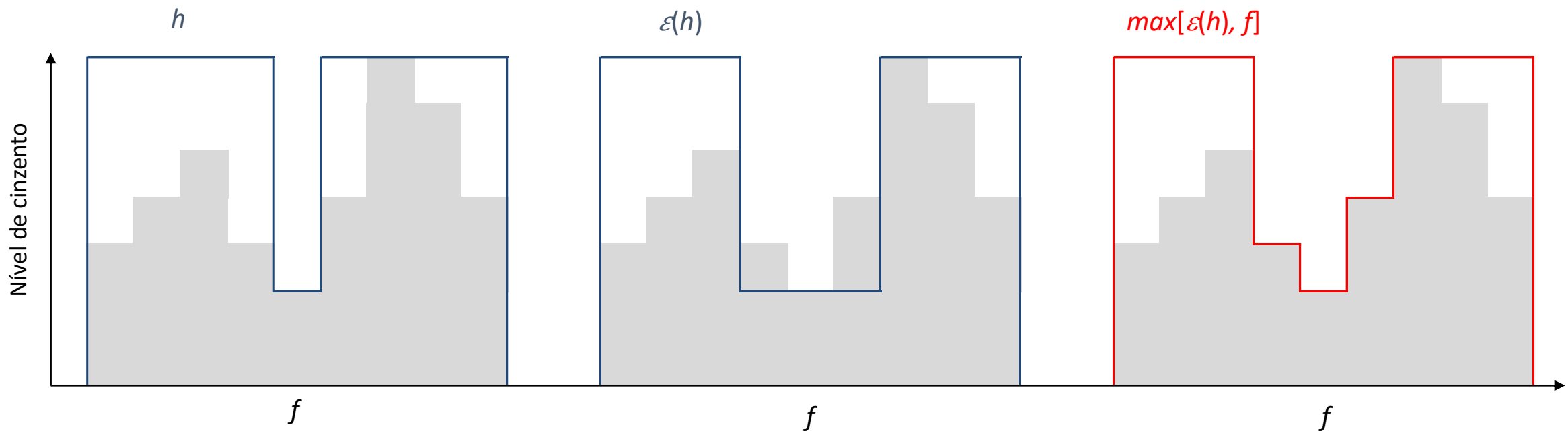


# Transformações geodésicas numéricas

Fernando Soares

**Erosão geodésica:** consiste em determinar o máximo entre a erosão da imagem marcadora  $h$  ( $\geq f$ ) e a função  $f$ .

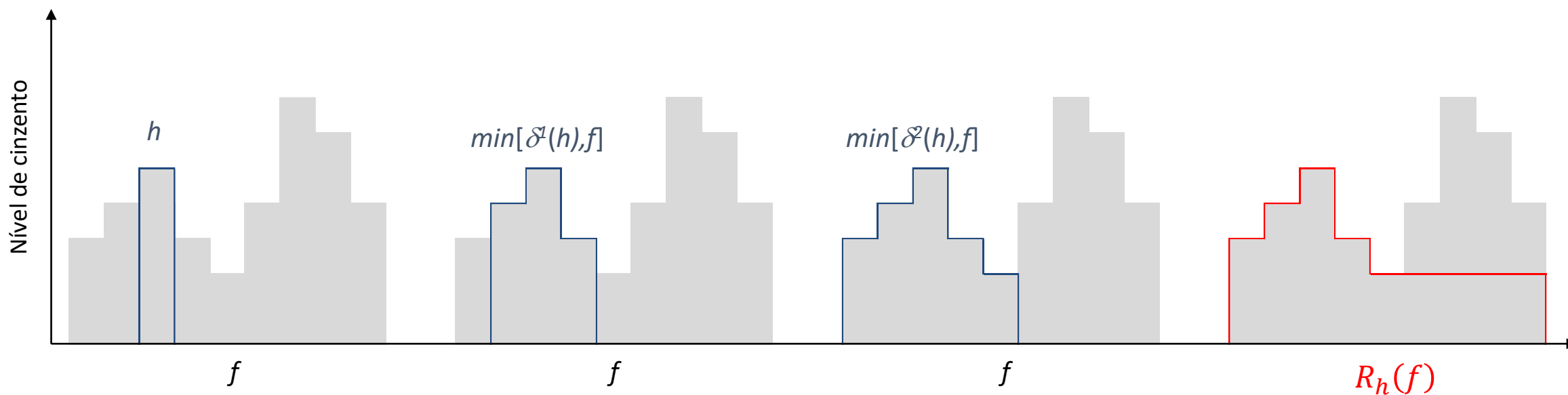
$$\varepsilon_f(h) = \max[\varepsilon_B(h(x, y)); f(x, y)]$$



Reconstrução geodésica **por dilatações geodésicas sucessivas.**

$$R_h(f) = \delta_f^{(i)}(h)$$

, até se verificar a condição  $\delta_f^{(i+1)}(h) = \delta_f^{(i)}(h)$

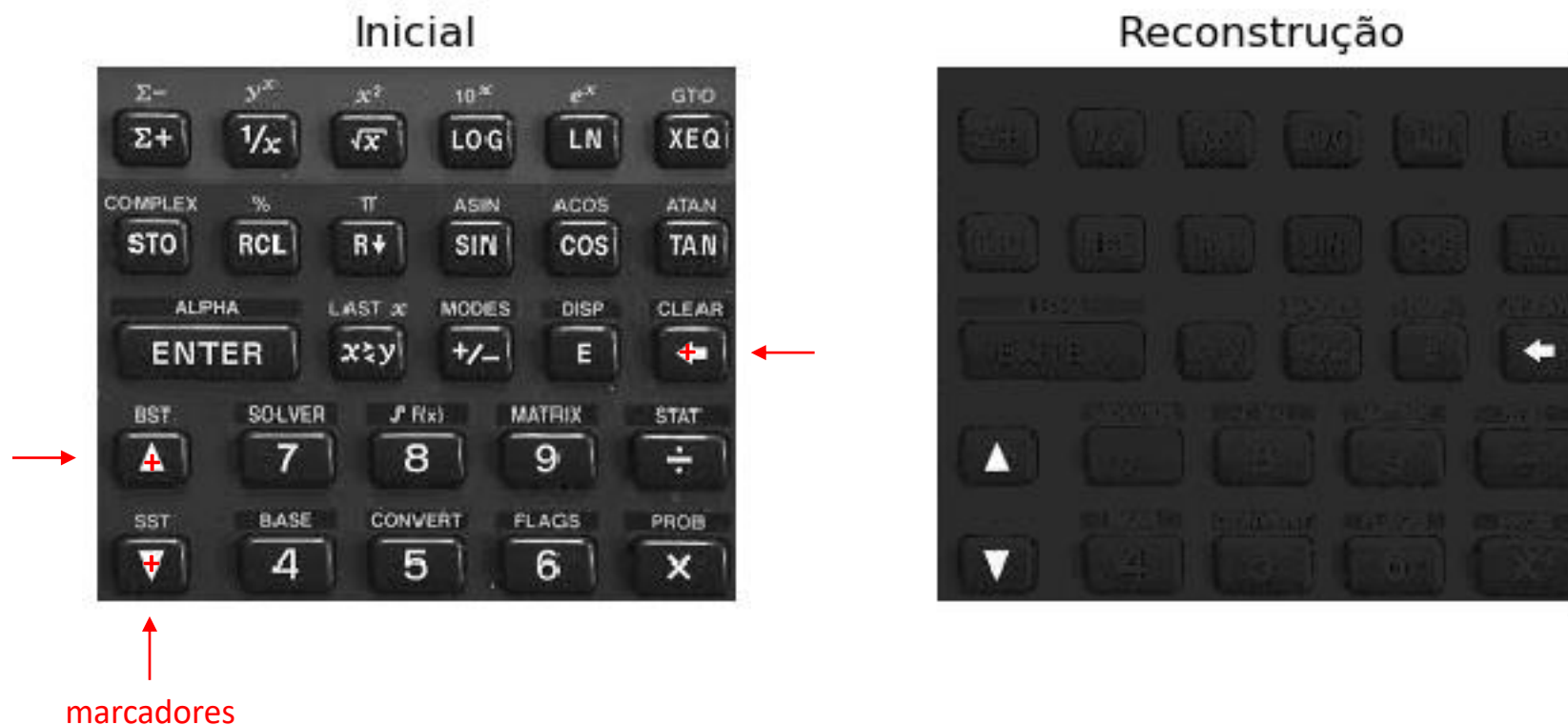




# Transformações geodésicas numéricas

Fernando Soares

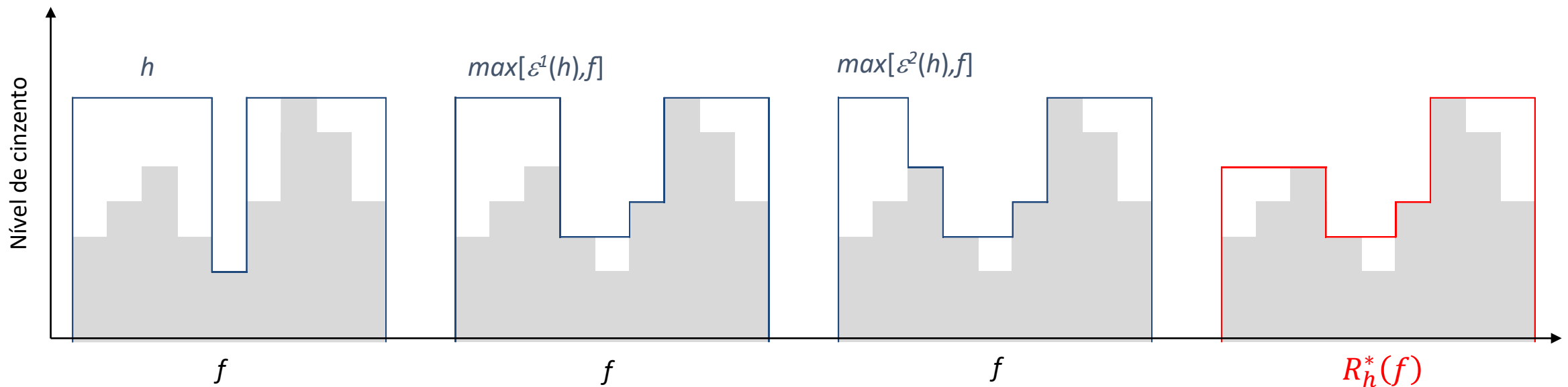
Exemplo da reconstrução geodésica **por dilatações geodésicas sucessivas**.



**Reconstrução geodésica** numérica por erosões geodésicas sucessivas (Reconstrução Dual).

$$R_h^*(f) = \varepsilon_f^{(i)}(h)$$

, até se verificar a condição  $\varepsilon_f^{(i+1)}(h) = \varepsilon_f^{(i)}(h)$



# Transformações geodésicas numéricas

Fernando Soares

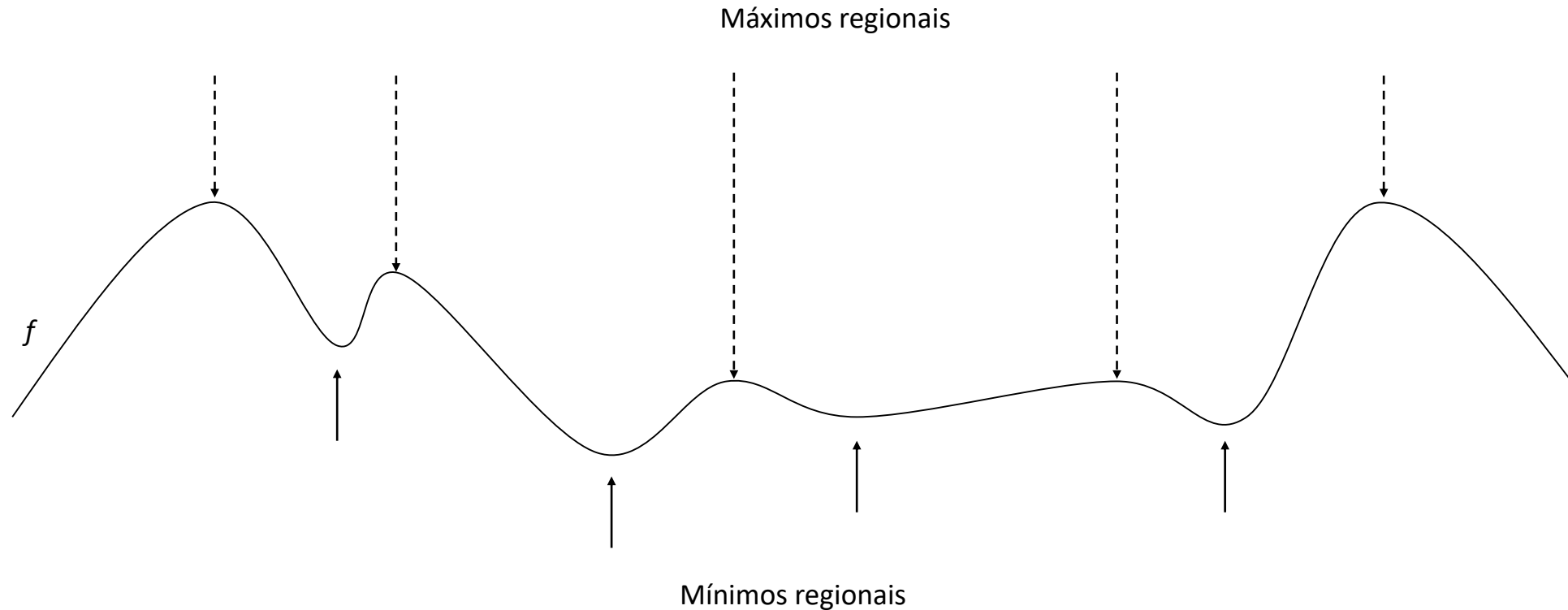
Exemplo da reconstrução geodésica numérica por erosões geodésicas sucessivas (Reconstrução Dual).



# Extremos regionais

Fernando Soares

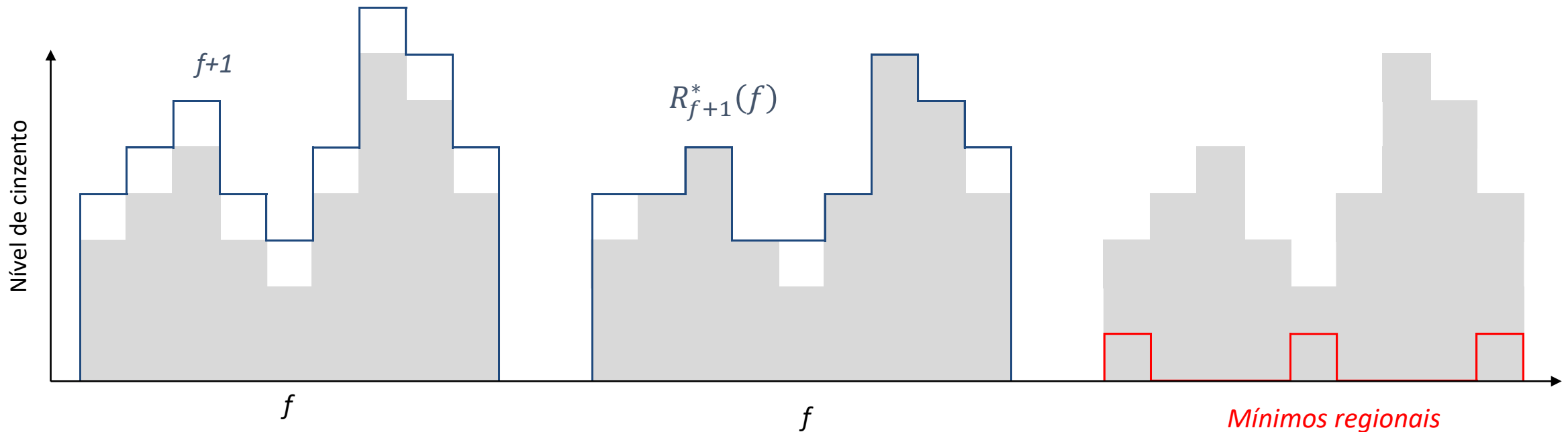
Uma imagem de mínimos/máximos regionais é, geralmente, uma imagem binária.



# Extremos regionais

Um conjunto binário  $M_h$  de uma imagem numérica  $f$  é um **mínimo regional** de elevação  $h$  se e só se  $M_h$  for uma superfície conexa de igual altitude  $h$ , a partir da qual seja impossível alcançar um ponto de elevação inferior sem ter que antes ascender na função.

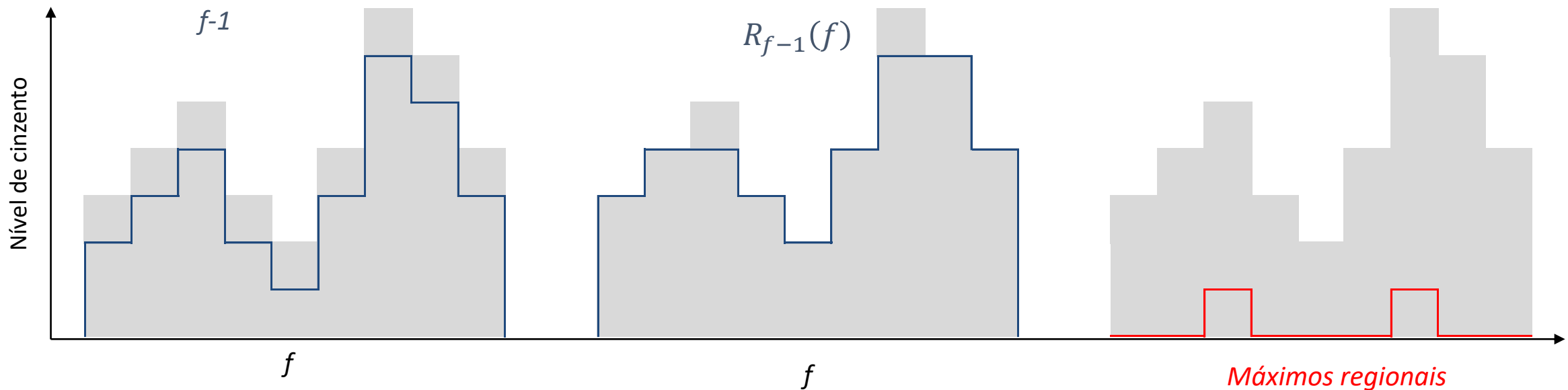
$$k_{\min(f)} = R_{f+1}^*(f) - f$$



# Extremos regionais

O mesmo se aplica ao conceito de **máximo regional** de elevação  $h$ , sendo que se tem que descer na função antes de alcançar outro máximo regional.

$$k_{\max(f)} = f - R_{f-1}(f)$$



Exemplo:

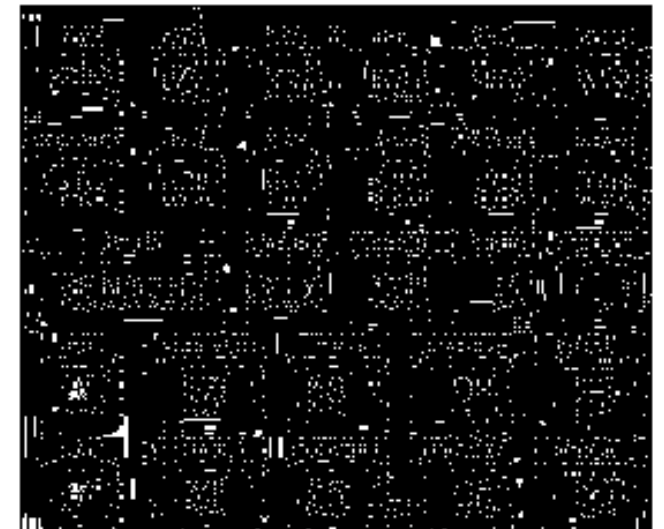
Inicial



Minimos



Máximos



# Transformação *watershed*

Transformação que visa **segmentar uma imagem de cinzentos** em regiões distintas, **a partir de uma imagem binária de marcadores**:

- Imagem 1 de entrada: imagem de cinzentos (superfície topográfica definida pelos valores de cinzento dos pixels).
- Imagem 2 de entrada: imagem de marcadores (pixels isolados ou conjuntos de pixels).
- Imagem de saída: Imagem binária, ou do tipo *label*, com as bacias de escoamento resultantes da transformação (ou, em alternativa, as linhas de *watershed*).

A transformação resulta da execução de um processo análogo ao processo físico de imersão vertical da superfície em água, com velocidade constante, a partir de “furos” feitos nessa superfície (imagem binária de marcadores).

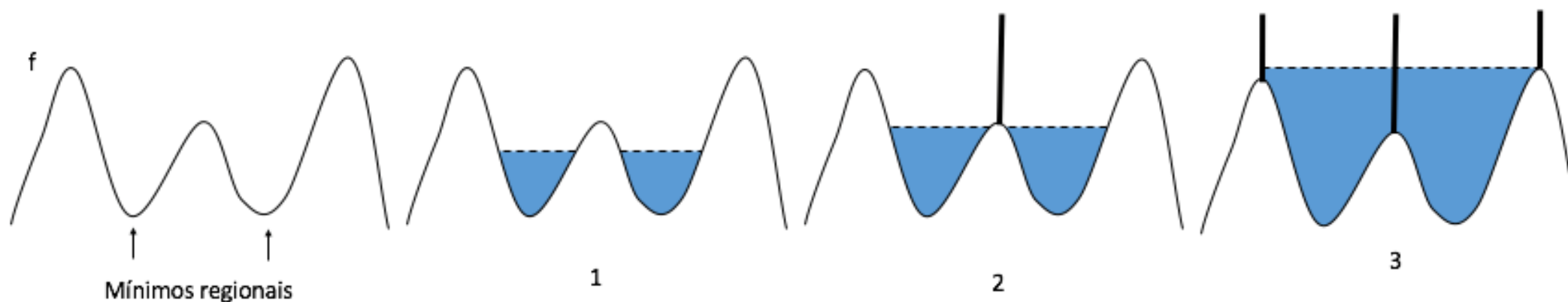


# Transformação *watershed*

Fernando Soares

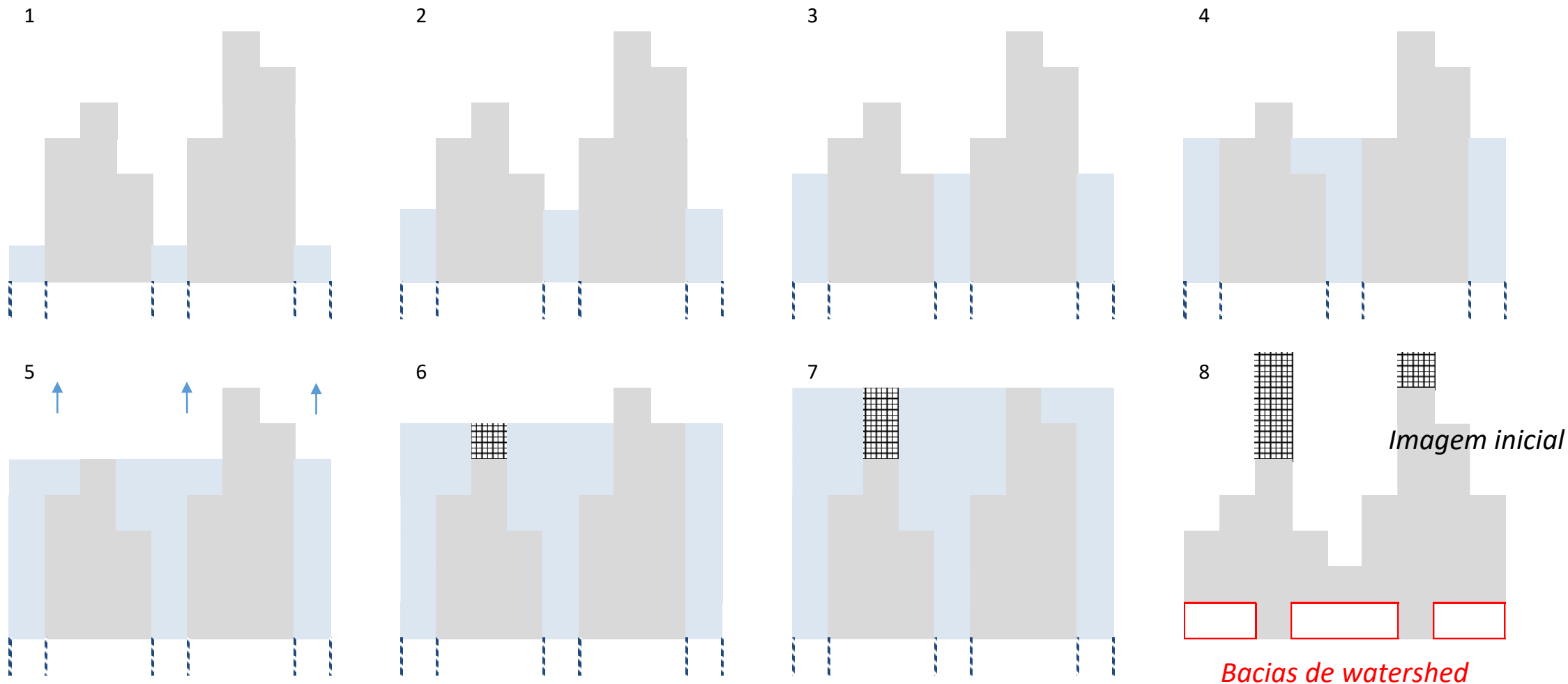
Por analogia com um processo de imersão, em água, de uma superfície com furos nos seus mínimos regionais, em certa altura dois ou mais vales inundados acabarão por se fundir. Para evitar que tal suceda, erguem-se barreiras em todos os pontos da superfície onde a fusão acontece.

No final do processo, apenas as barreiras são representadas. Estas barreiras, as linhas de *watershed* da superfície, separam as bacias de escoamento umas das outras.



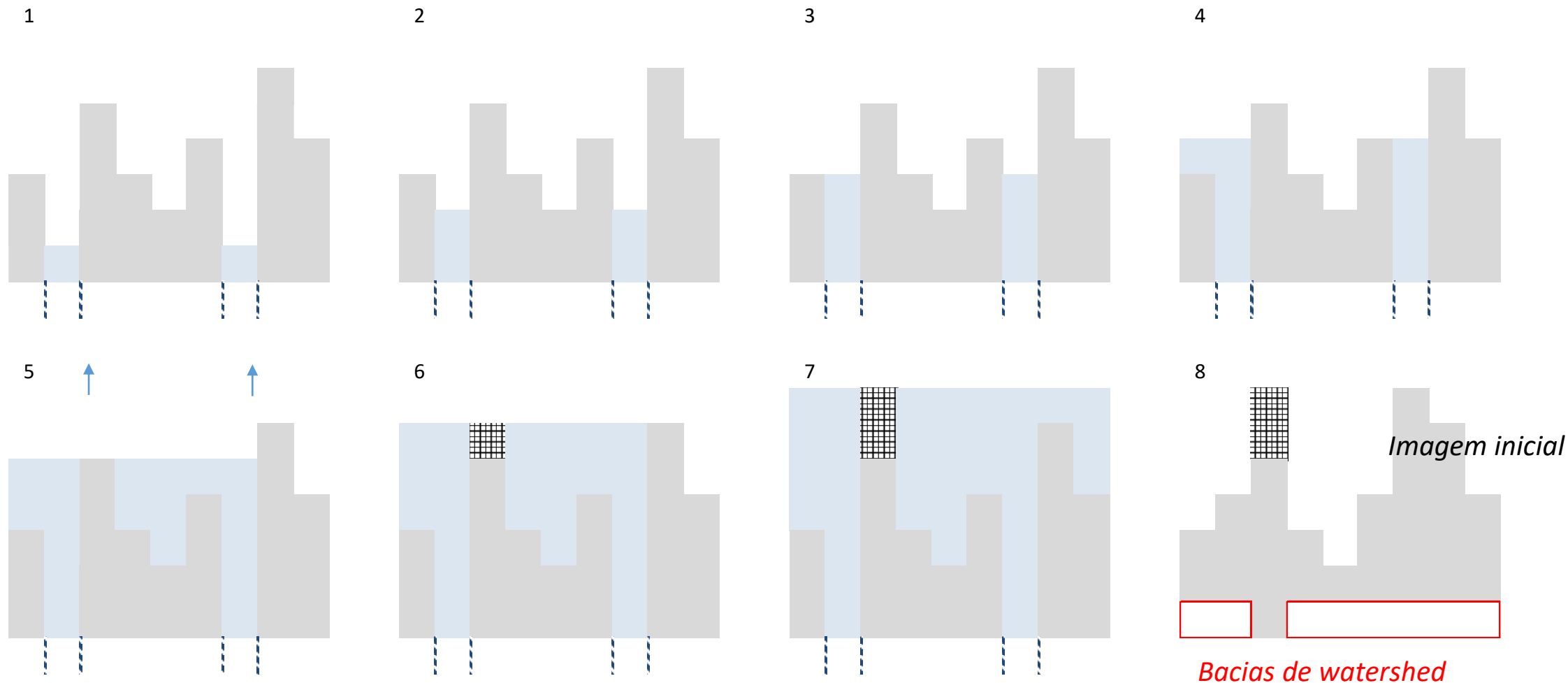
# Transformação *watershed*

Ilustração do processo de inundação a partir dos mínimos regionais.



# Transformação *watershed*

Ilustração do processo genérico de inundação a partir de um qualquer conjunto de marcadores.

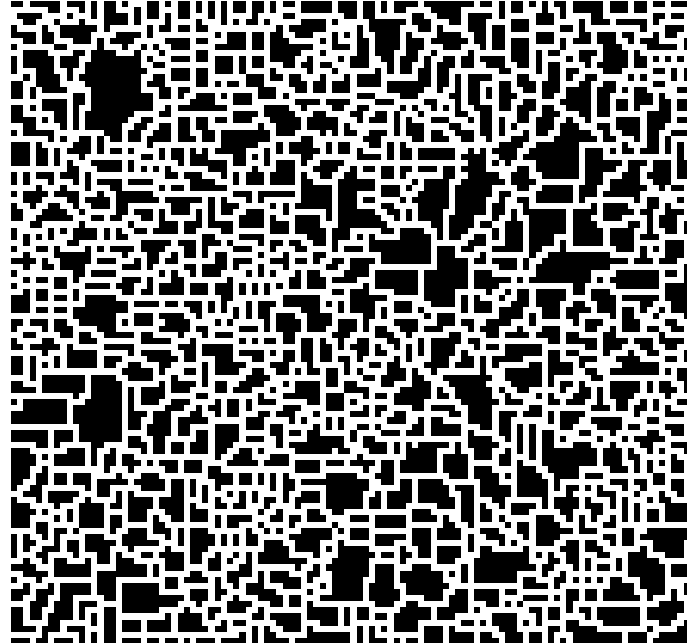


# Transformação *watershed*

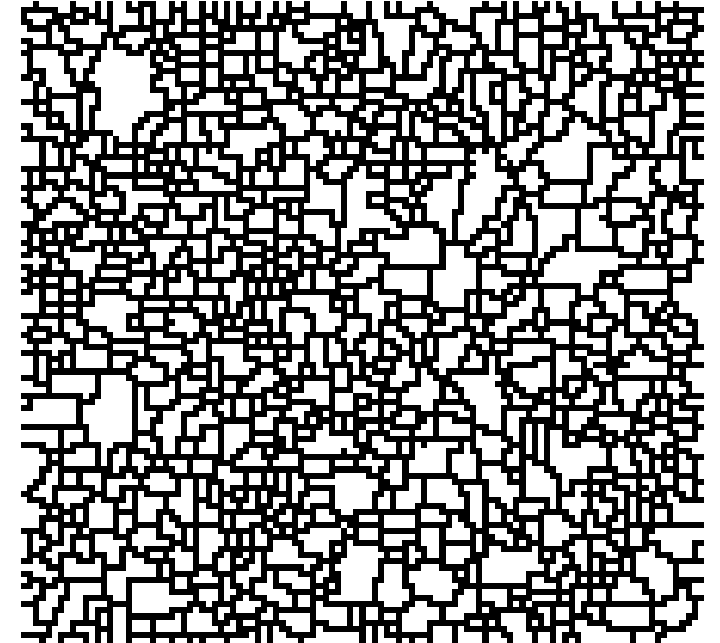
Exemplo da transformação *watershed*, a partir dos mínimos regionais.



Imagem inicial



Linhas de *watershed*

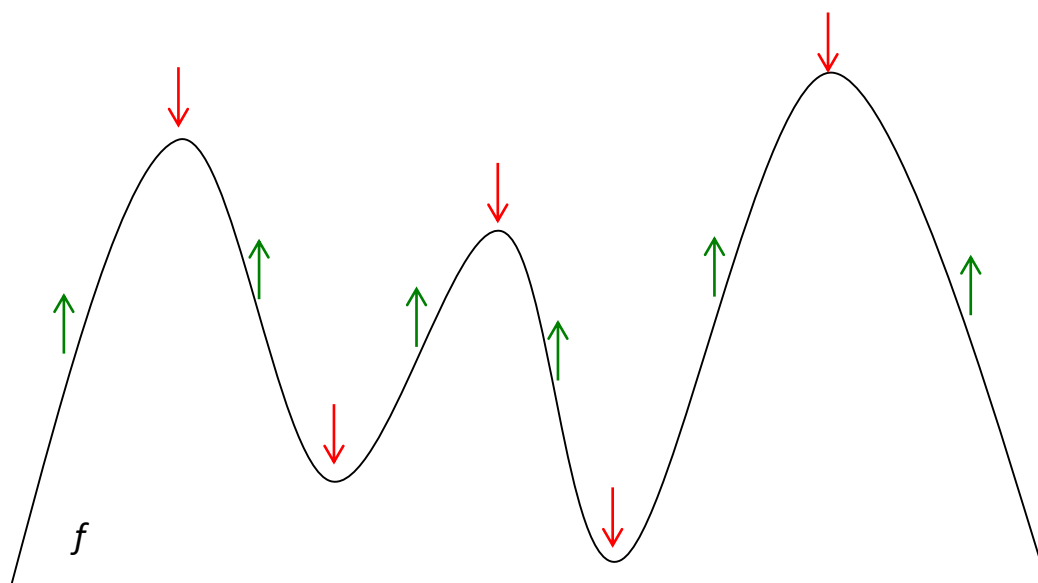




Bacias de escoamento

# Transformação *watershed*

Fernando Soares

**Watershed da imagem do gradiente:** em vez da imagem original  $f$ , aplica-se sobre a imagem de cinzentos do gradiente morfológico  $\nabla$  (ou outro), a partir dos respectivos mínimos regionais.



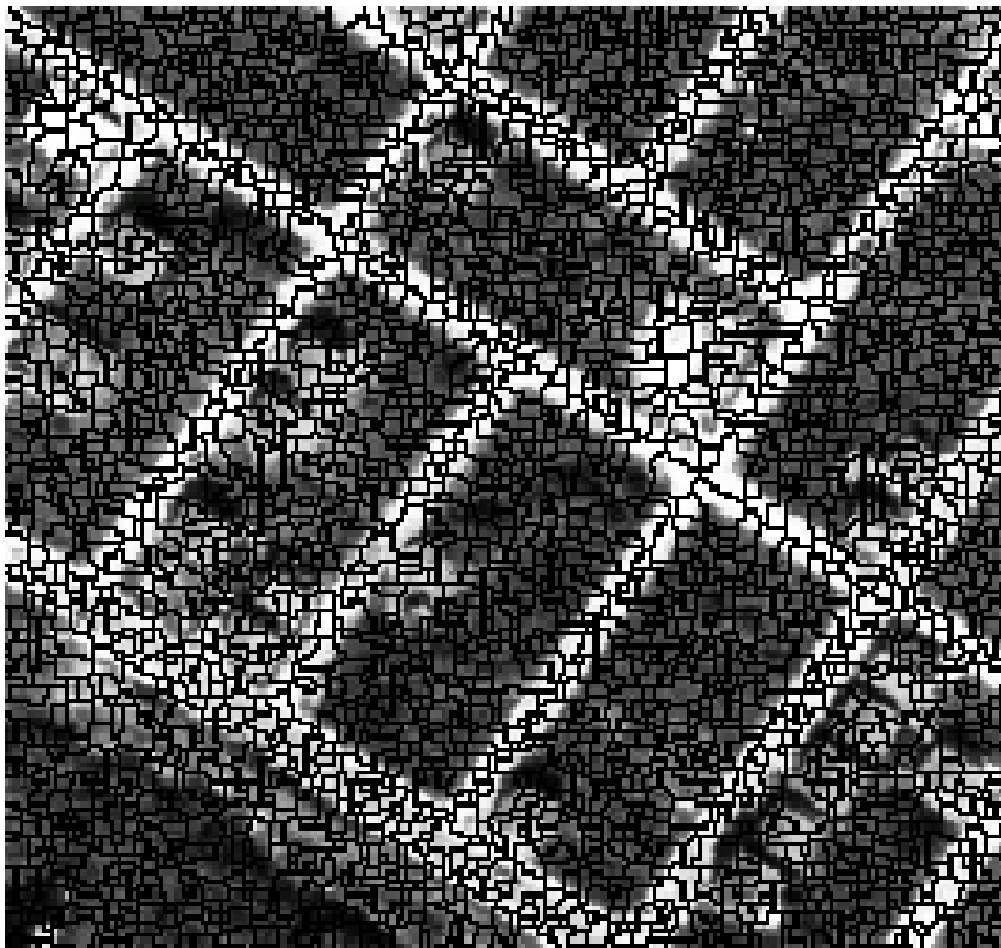
 Máximo da função gradiente
  Mínimo da função gradiente



# Transformação *watershed*

*Watershed* da imagem do gradiente  $G$ .

Watershed de  $F$



Watershed de  $G$

