

3. Domínio das frequências

Sinal e série amostral. Transformada de *Fourier*. Espectro de frequências. Filtragem no espaço de *Fourier*. Teorema da convolução. Exemplos de aplicação.

Sinal e série amostral

Uma onda periódica elementar como o seno fica definida por uma das seguintes expressões (em função do período T , ou da frequência f):

$$P(t) = A \times \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) + C$$

$$P(t) = A \times \sin(2\pi ft + \varphi) + C$$

A : amplitude

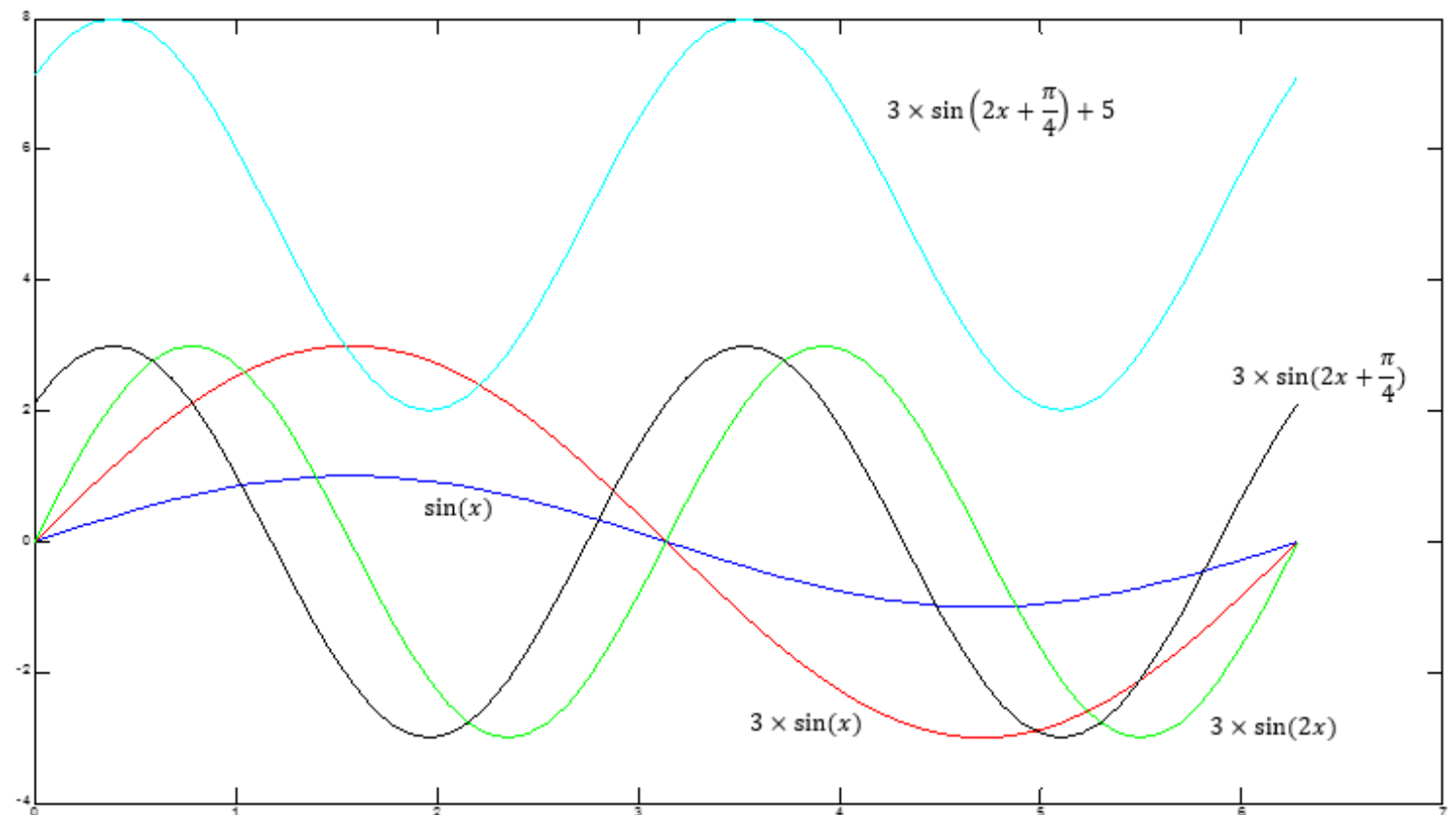
f : frequência linear

T : período

φ : fase

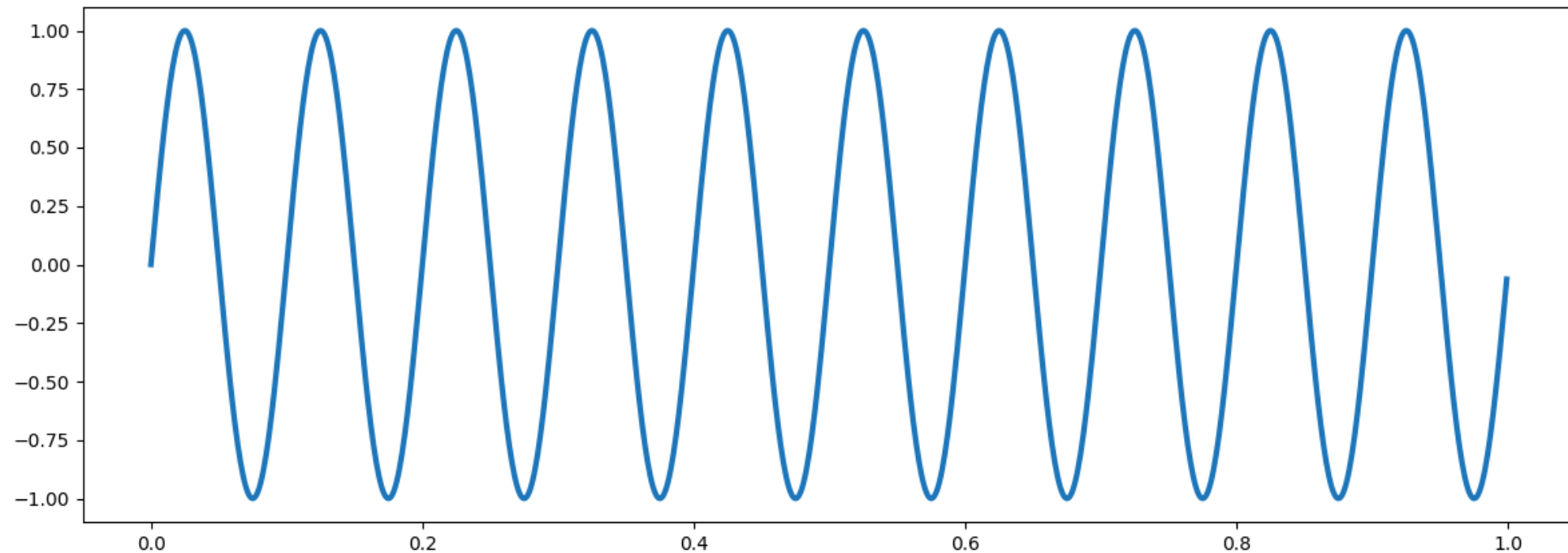
C : translação

$\omega = 2\pi f$: frequência angular



Sinal e série amostral

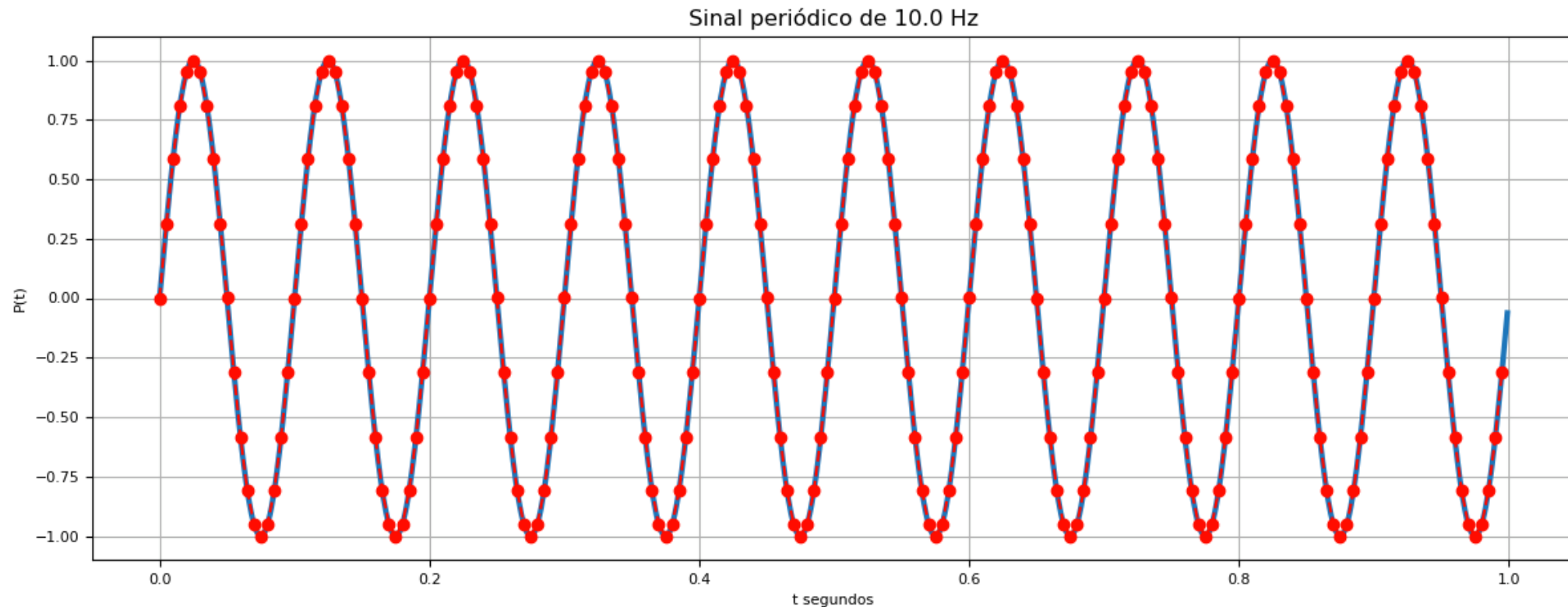
Num sinal periódico P , o valor da frequência f , quando expressa em Hertz (Hz), corresponde ao número de ciclos m que ocorre no intervalo de tempo de um segundo.



Sinal com frequência de 10 Hz

Sinal e série amostral

Num processo de digitalização de um sinal analógico, a amostragem de P consiste em gerar uma sequência discreta S de impulsos (série amostral) com uma frequência de amostragem f_s .



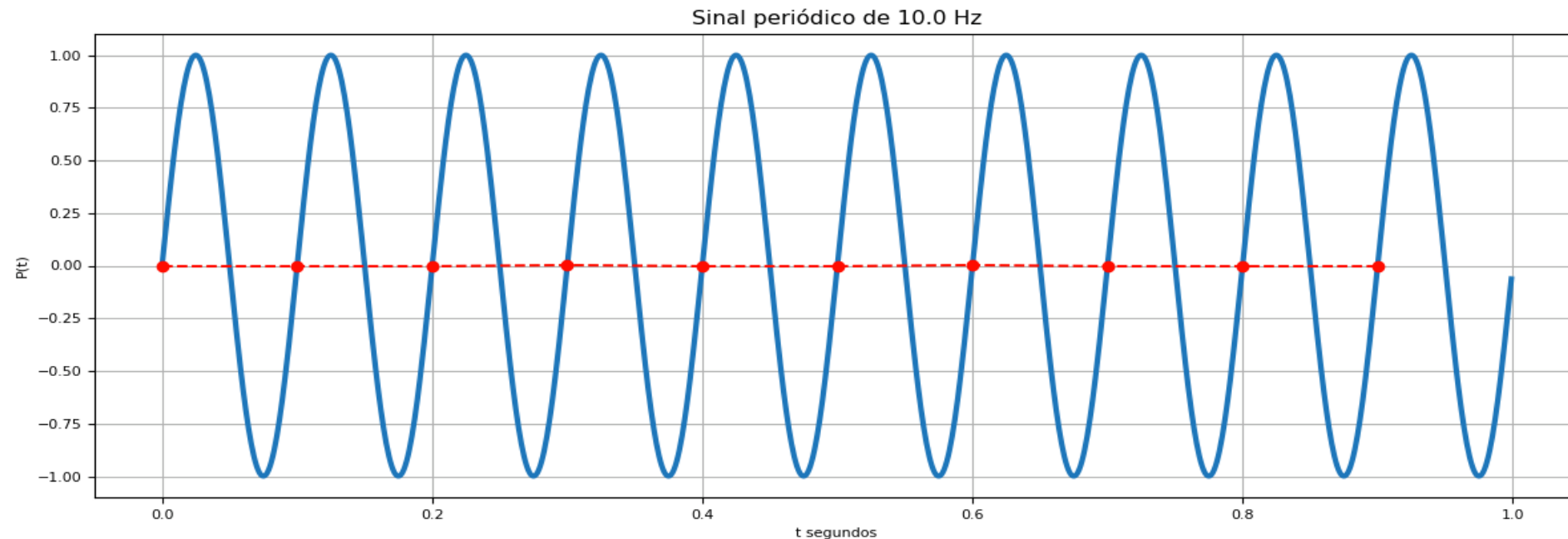
O teorema de amostragem de *Nyquist-Shannon* estabelece a condição que determina qual deve ser a menor frequência de amostragem que torna adequada a reconstrução do sinal:

$$f_s > 2 \times f_{max}$$

Por outras palavras, a frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a máxima frequência do sinal.

Sinal e série amostral

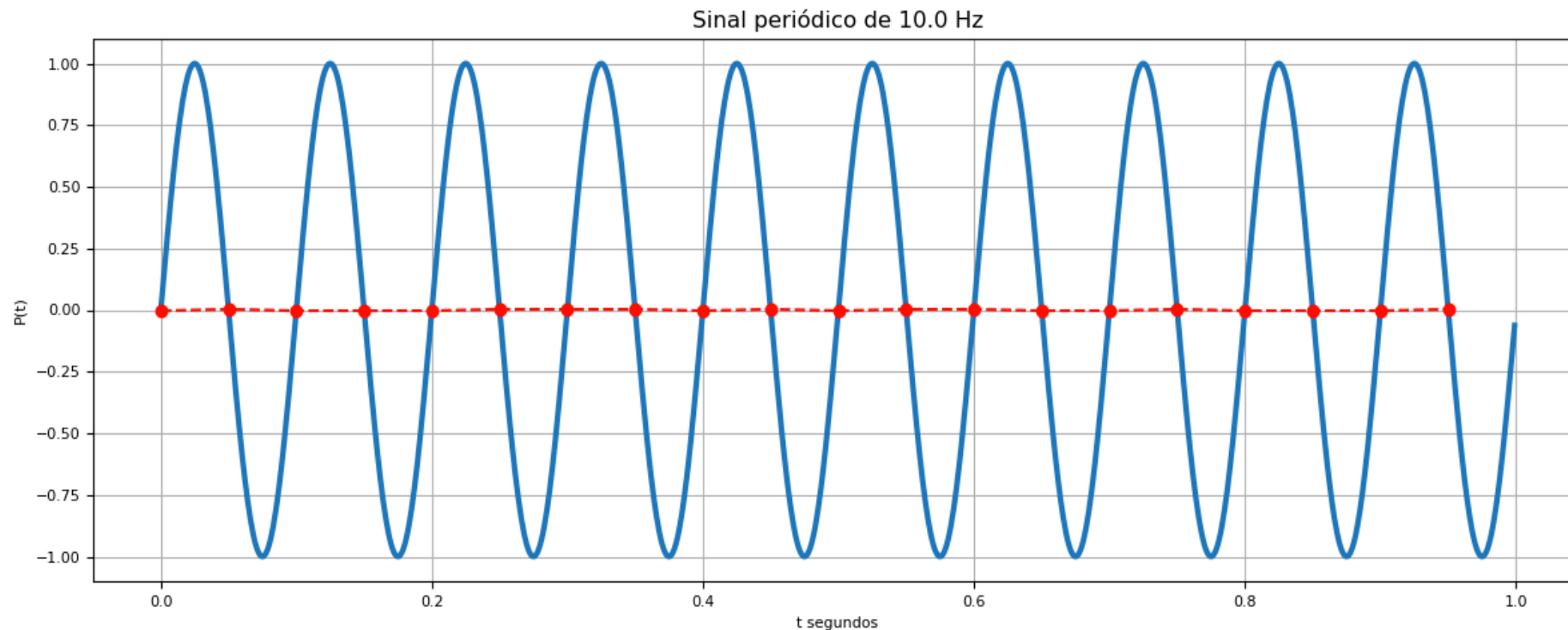
Considere-se, como exemplo, uma onda periódica P de um seno com $f = 10$ Hz, ou seja, um sinal com uma frequência de dez ciclos por segundo (simplificada com $A = 1$ e $\phi = C = 0$). Uma série com $f_s = 10$ Hz (que não respeita a condição referida anteriormente) tem uma amostra por período.



A ligação desses pontos resulta numa linha sem qualquer relação com a forma do sinal

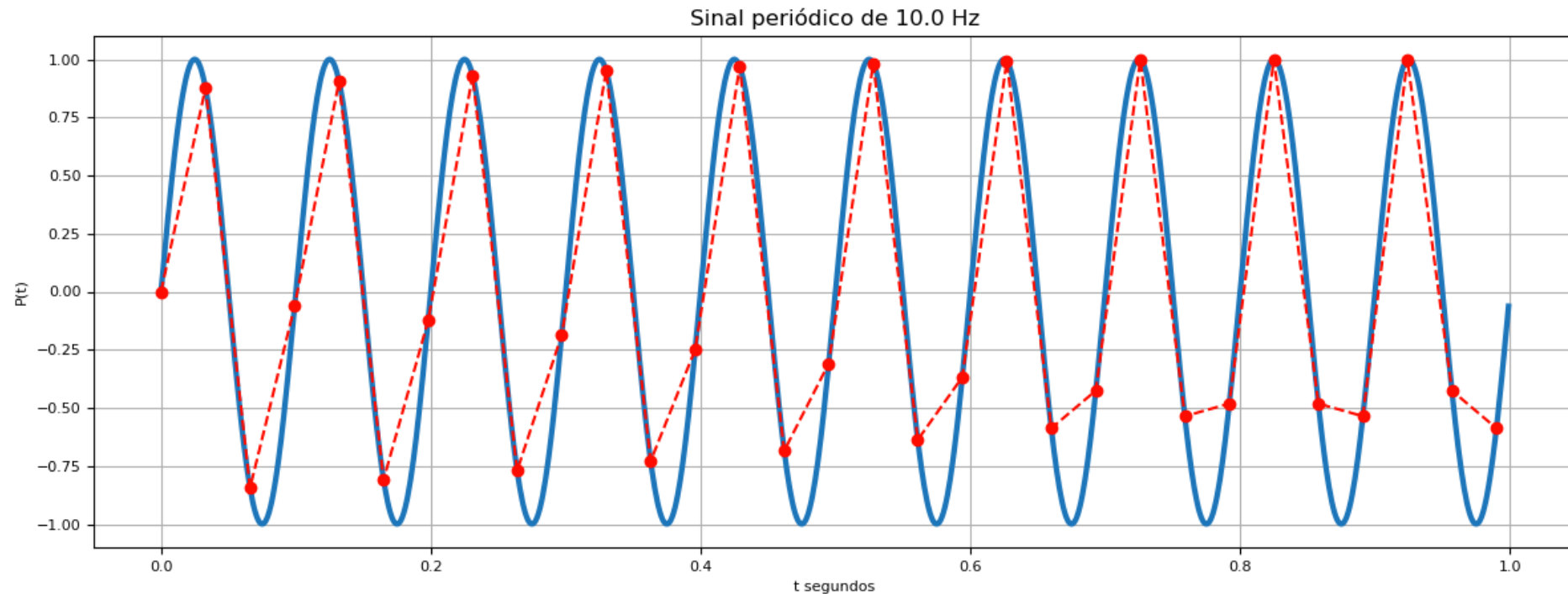
Sinal e série amostral

Veja-se agora uma série com $f_s = 2 \times 10 = 20$ Hz, que está no limite da condição de *Nyquist* (mas ainda sem a respeitar); neste caso têm-se duas amostras por período que, conectadas, formam uma linha semelhante à anterior.



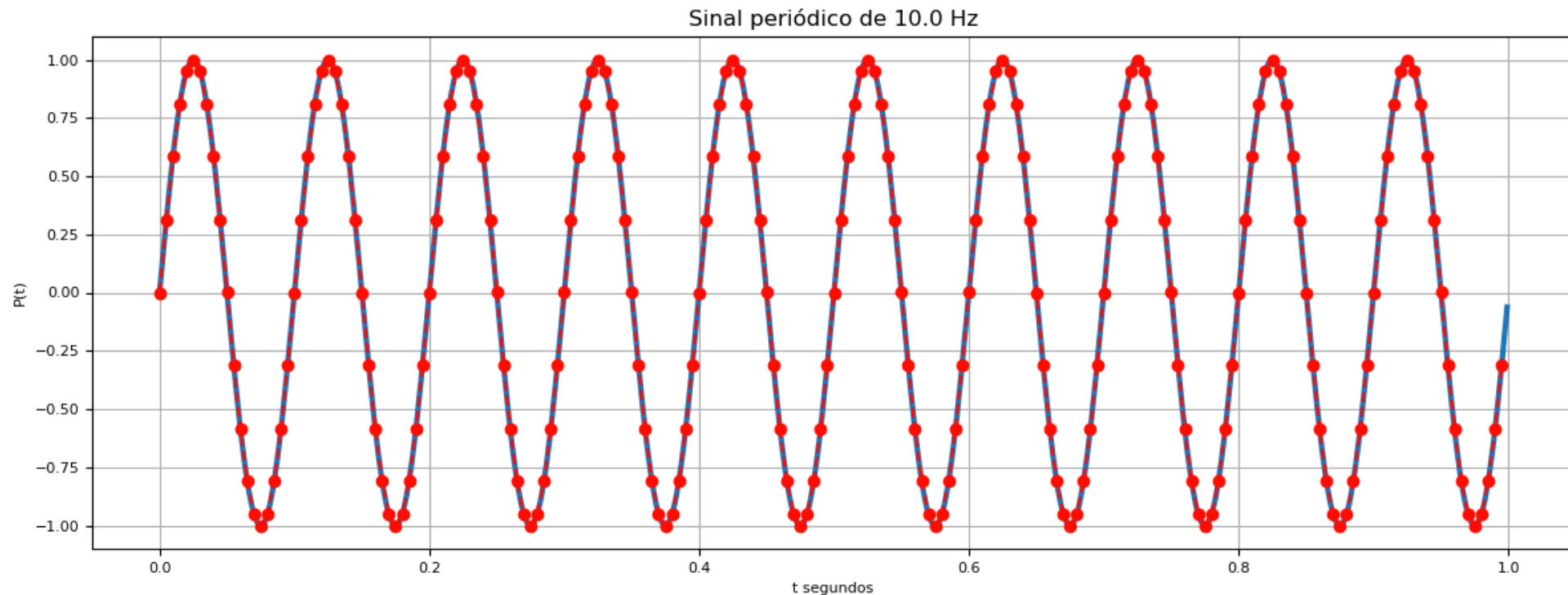
Sinal e série amostral

Aumentando-se a frequência de amostragem para um valor que respeite a condição, por exemplo, $f_s = 3 \times 10 = 30$ Hz, pode-se verificar que a série adquire um comportamento que possibilita já reconstituir o sinal de uma forma clara, podendo ser quase suficiente para os objetivos a cumprir.



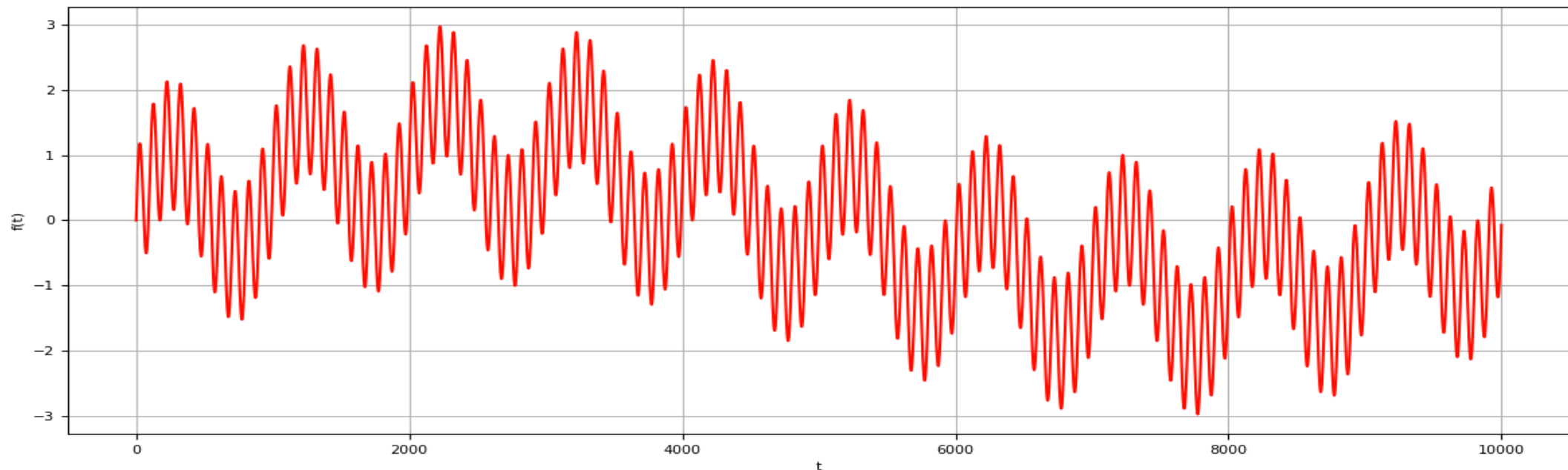
Sinal e série amostral

Com um valor superior de, por exemplo, $f_s = 20 \times 10 = 200$ Hz, tem-se uma série amostrada já bastante fiel ao sinal original.



Assim sendo é desnecessário amostrar um sinal com frequências de amostragem acima das que permitem reconstituí-lo sem ambiguidade.

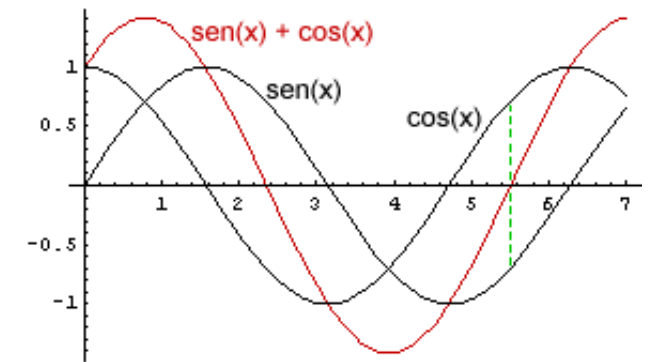
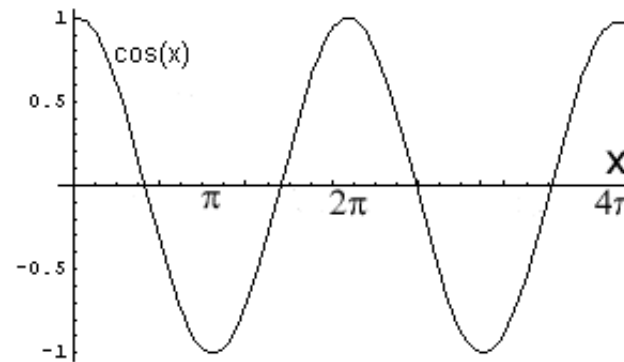
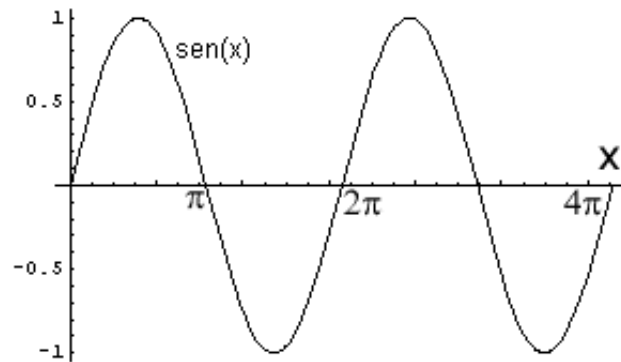
Considere-se um segundo exemplo sintético, produzido a partir da soma de três senoidais com diferentes frequências não conhecidas e que, apesar de igualmente periódica, tem um comportamento mais difícil de interpretar. O objetivo será o de saber as características das ondas elementares. Para tal recorre-se à análise espectral com a **transformada de *Fourier***.



Transformada de *Fourier*

A teoria de *Fourier* afirma que qualquer sinal pode ser expresso como uma soma de várias senoidais, ou seja, uma soma de funções seno e cosseno.

$$f(x) = a_0 + a_1 \text{sen}(x) + a_2 \text{sen}(2x) + a_3 \text{sen}(3x) + \dots + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \dots$$



A transformada de *Fourier* (TF) permite realizar a decomposição de um sinal (definido no domínio espacial) nas suas componentes seno e cosseno, representando-o no chamado “domínio das frequências”, ou espaço de *Fourier*.

Transformada **Directa** (DTF):

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} \left[f(x) \times e^{-j \frac{2\pi ux}{N}} \right] = \sum_{x=0}^{N-1} \left[f(x) \times \left(\cos \left(-\frac{2\pi ux}{N} \right) + j \sin \left(-\frac{2\pi ux}{N} \right) \right) \right]$$

Transformada **Inversa** (IFT):

$$f(x) = \frac{1}{N} \times \sum_{u=0}^{N-1} \left[F(u) \times e^{j \frac{2\pi ux}{N}} \right] = \frac{1}{N} \times \sum_{u=0}^{N-1} \left[f(x) \times \left(\cos \left(\frac{2\pi ux}{N} \right) + j \sin \left(\frac{2\pi ux}{N} \right) \right) \right]$$

N = número de amostras que se tem

x = amostra corrente (0...N-1)

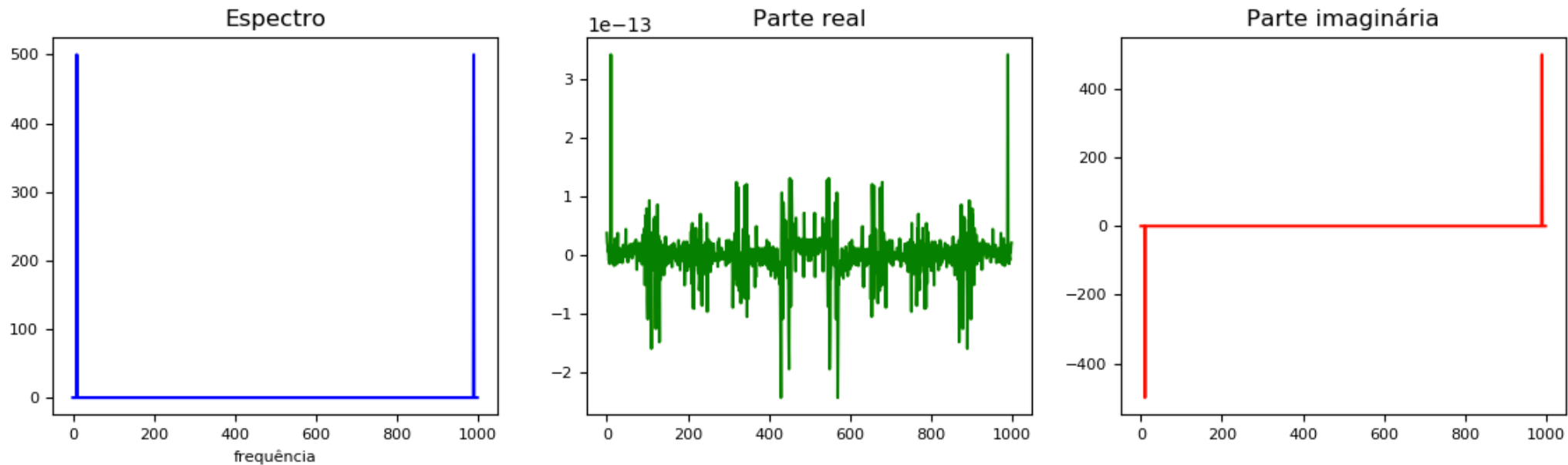
f(x) = valor do sinal em x

u = frequência corrente (0 Hertz até N-1 Hertz)

F(u) = quantidade de frequência u presente no sinal

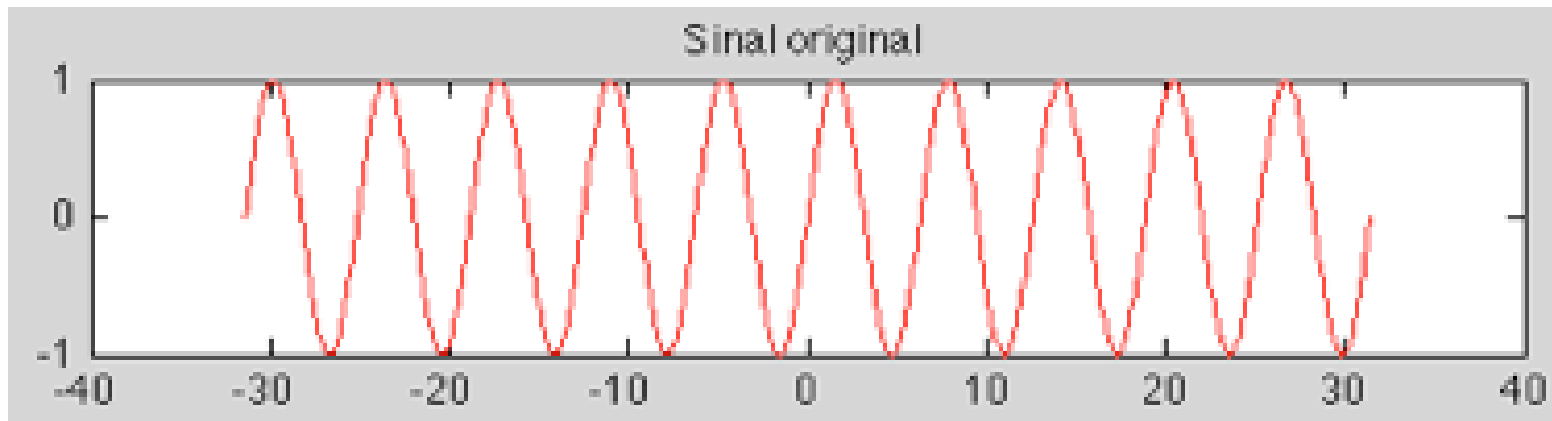
Transformada de *Fourier* 1D

O espectro de frequências de uma função resulta da aplicação da DFT. Os valores resultantes desta transformação pertencem ao domínio dos números complexos ($z = a+bj$), sendo constituídos por uma parte real (a) e uma parte imaginária (b). A magnitude do espectro é igual ao valor absoluto da DFT ($|z|$)



Magnitude

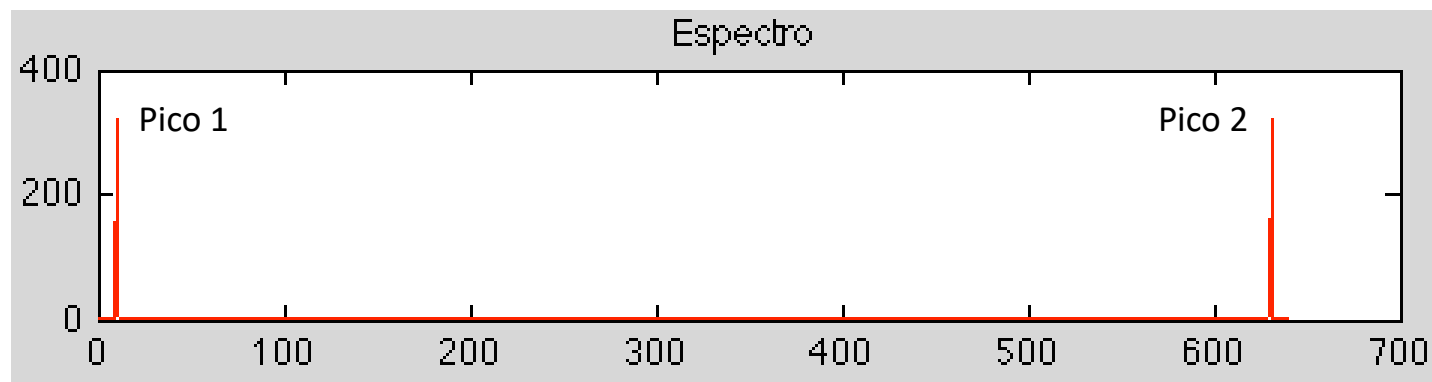
Considere-se o seguinte sinal periódico (seno).



O **espectro** de um sinal contém as magnitudes das frequências das ondas que o constituem. Neste exemplo, como o sinal representa um senoide (seno), há apenas uma frequência.

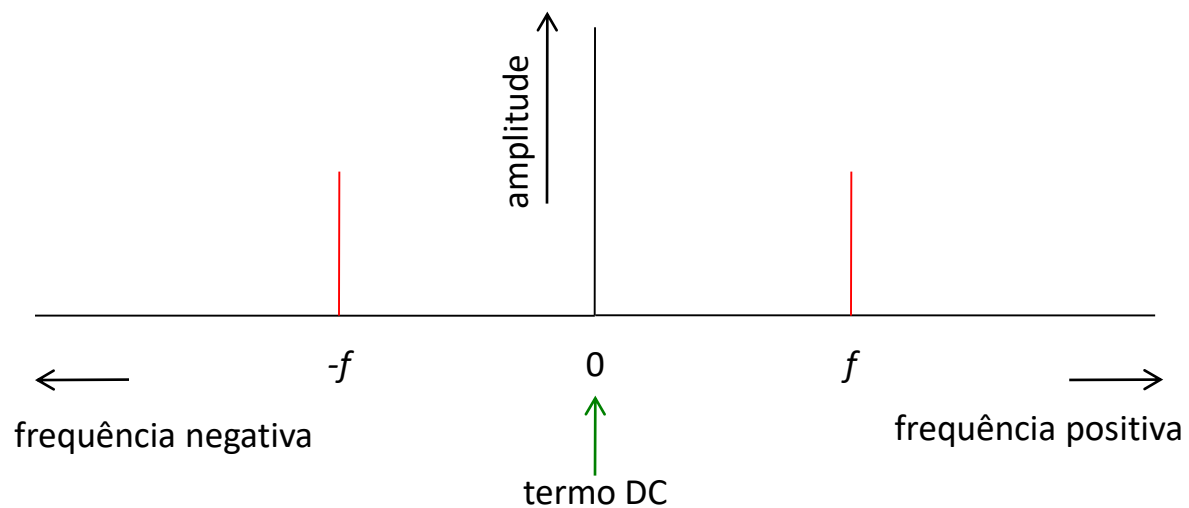
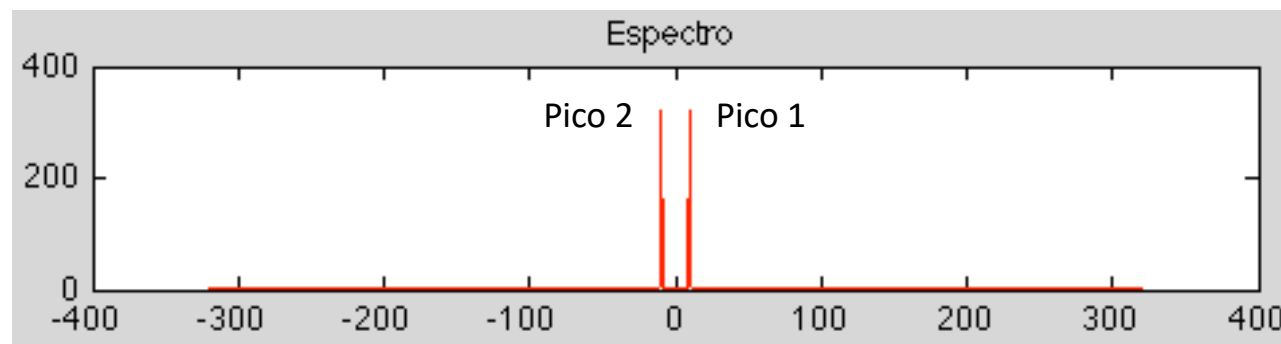
Espectro de frequências

O espectro tem duas partes: uma parte negativa e uma parte positiva. Para sinais reais (sem parte imaginária), a parte negativa do espectro é sempre uma versão “espelhada” da parte positiva. Assim, neste exemplo, a parte positiva terá apenas um pico e a parte negativa terá um pico idêntico ao da parte positiva.



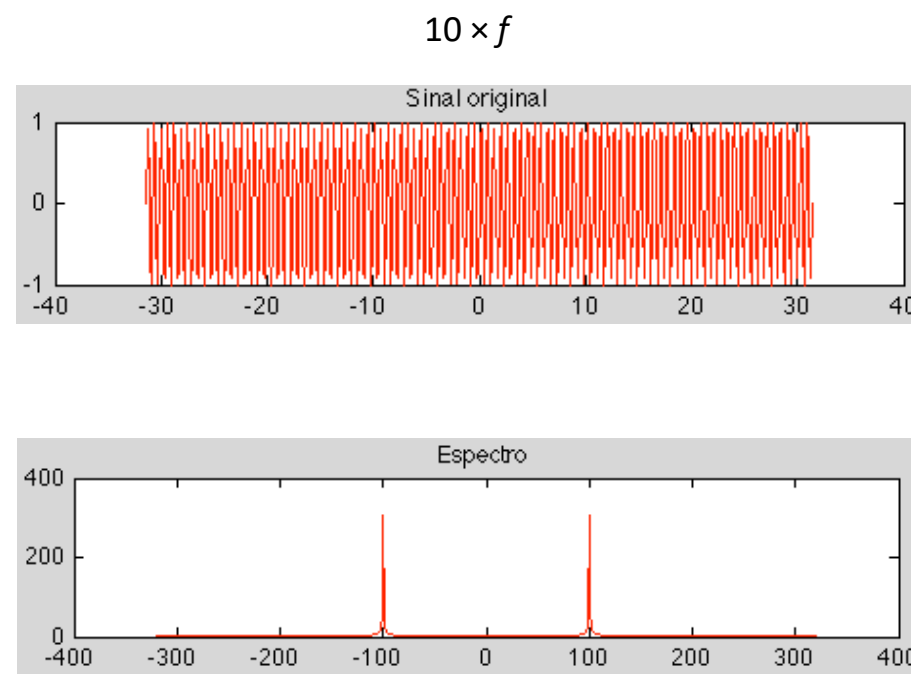
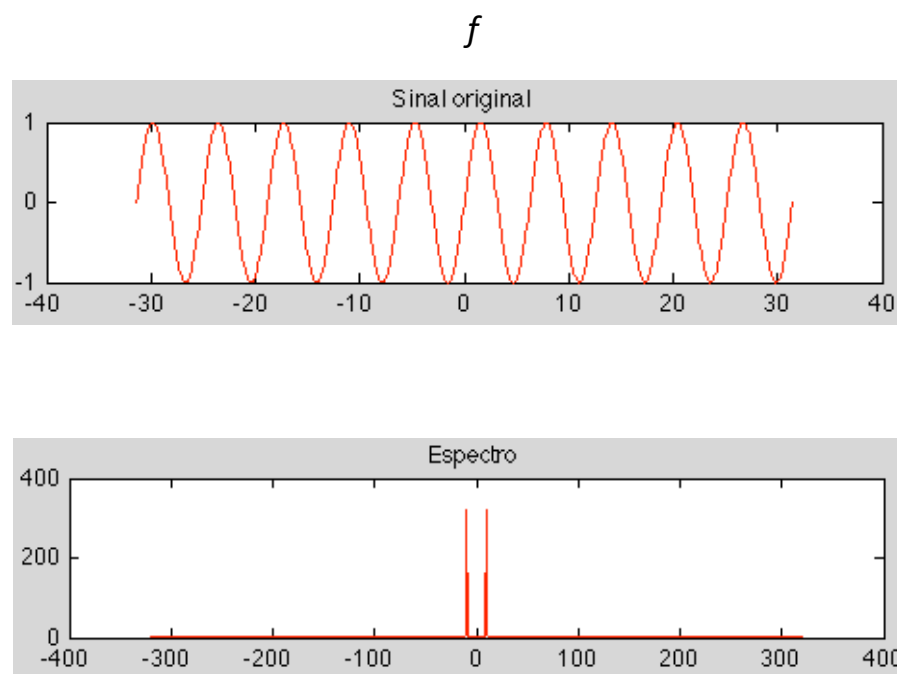
Espectro de frequências

Representação centrada do espectro



Espectro de frequências

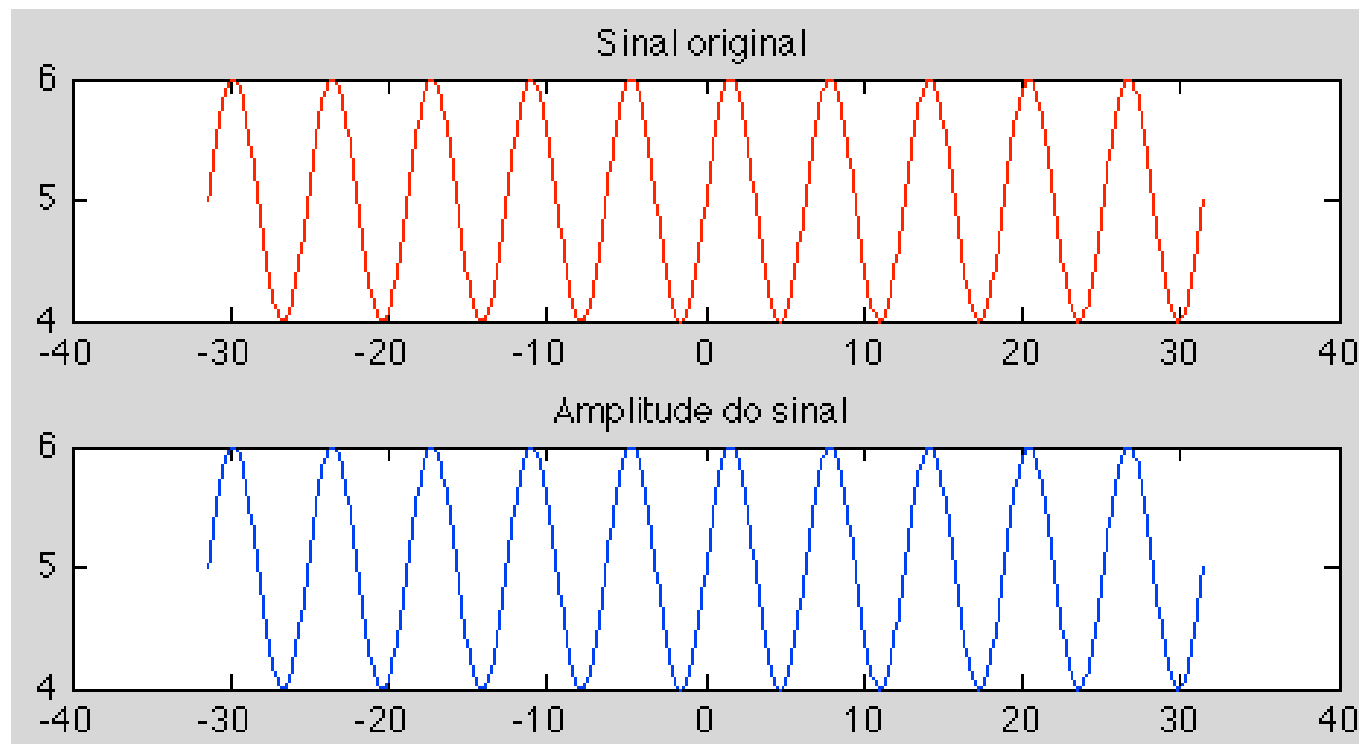
Quanto mais afastado para a esquerda (e para a direita) estiver um pico, maior é a frequência que o mesmo representa. Por outras palavras, um pico bastante afastado para a direita (e esquerda) significa que o sinal contém uma componente periódica de alta frequência.



Espectro de frequências

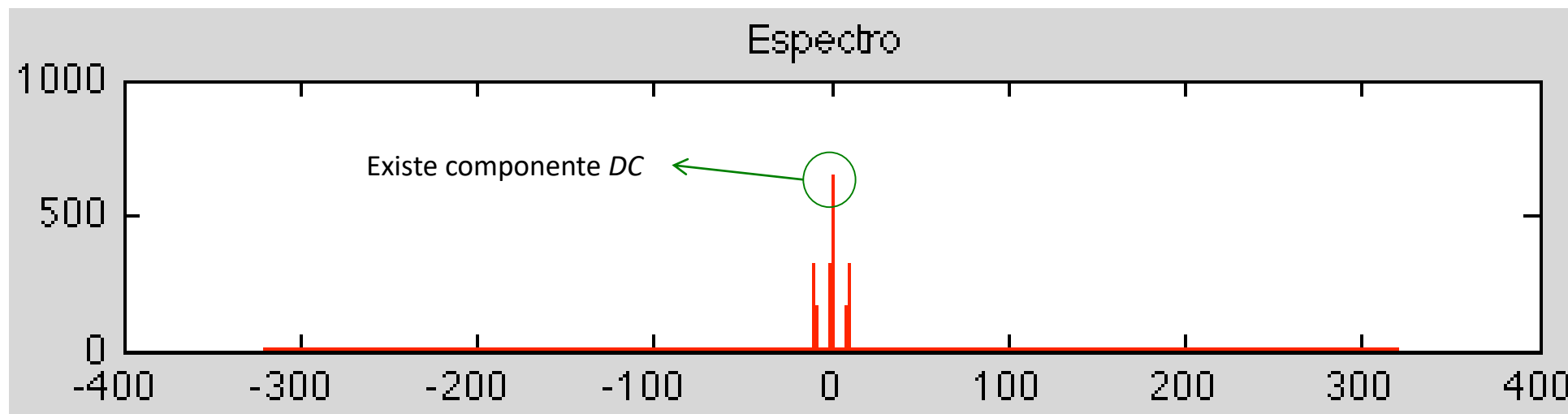
Considere-se um segundo exemplo de uma curva sinusoidal adicionada de um valor C : $f(x) = \sin(x) + C$. A acção desta soma é a de transladar o sinal segundo a direcção yy . O valor médio do sinal é igual ao valor de C (pois o valor médio de $\sin(x) = 0$).

$C = 5$



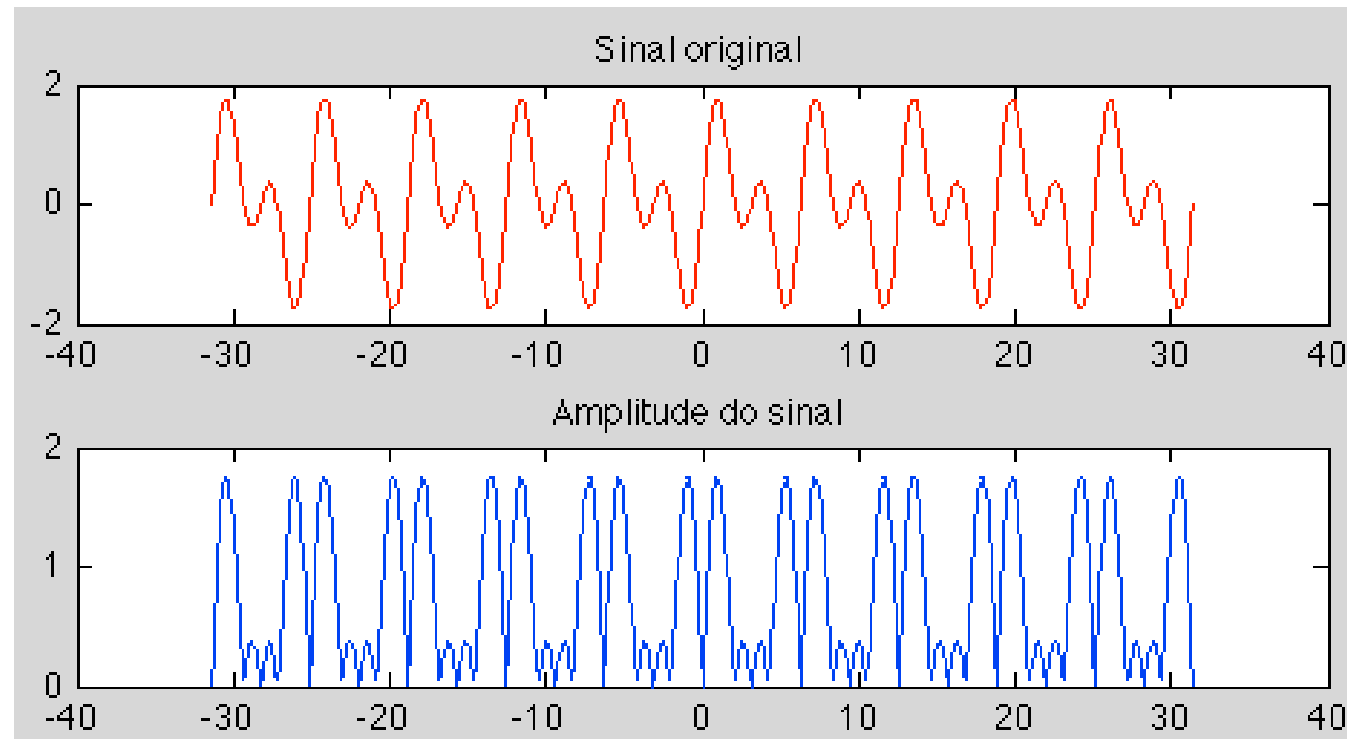
Espectro de frequências

No espectro de frequências a frequência $f=0$ corresponde à componente DC. Esta componente tem uma amplitude igual ao valor médio do sinal, para além dos picos de frequência das componentes sinoidais. Assim, se o espectro de um sinal tiver um valor diferente de zero na origem, saber-se-á que o valor médio do sinal é diferente de zero.



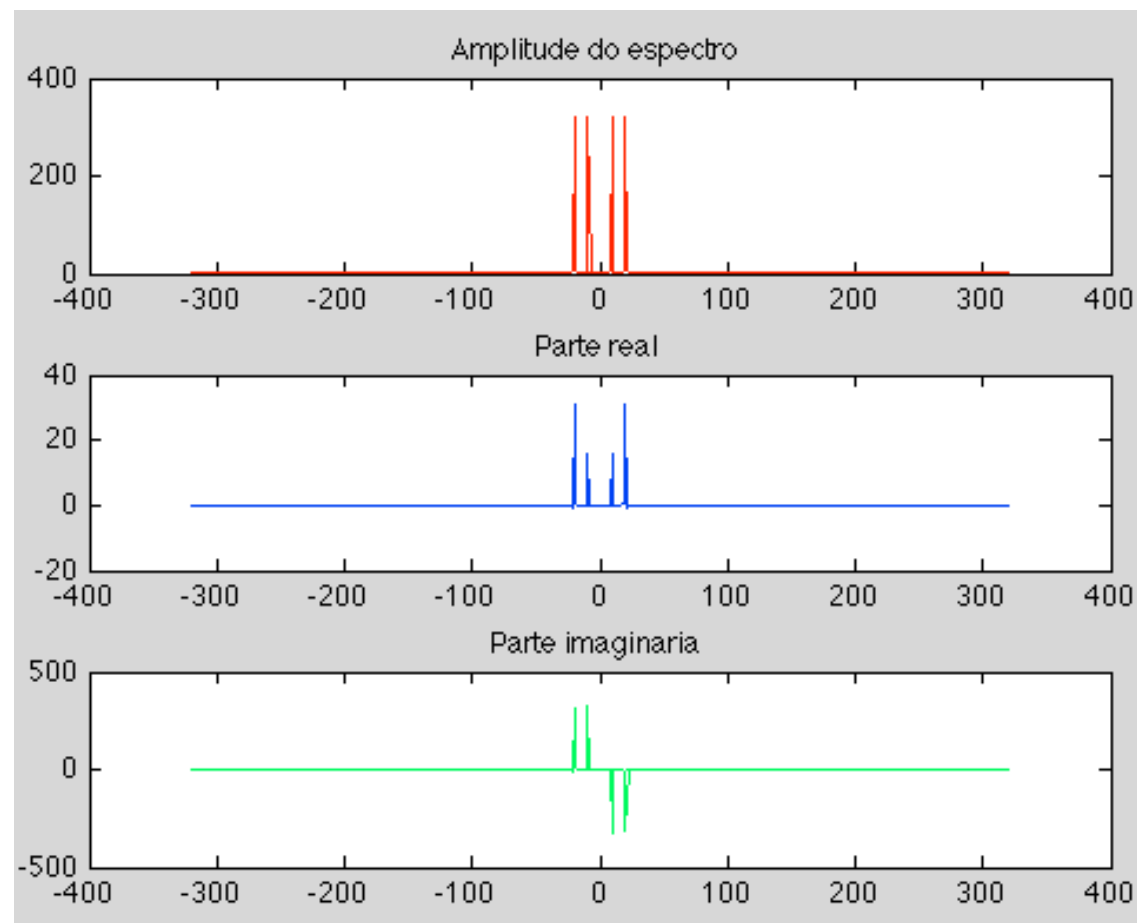
Espectro de frequências

Considere-se um terceiro exemplo, como a soma de duas funções seno, em que a segunda tem uma frequência dupla da primeira: $f(x) = \sin(kx) + \sin(2kx)$. O sinal tem a seguinte forma:



Espectro de frequências

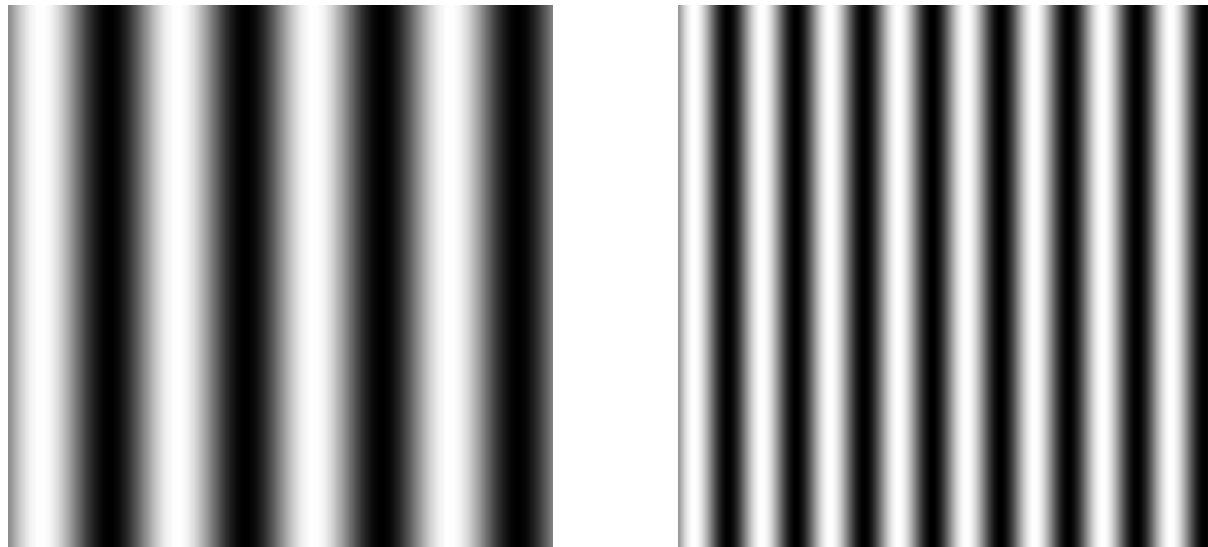
Como há duas funções seno com duas frequências diferentes, pode-se esperar dois picos no lado positivo do espectro (e dois no lado negativo).



Transformada de *Fourier* 2D

Numa imagem as variações são representadas pelas variações espaciais dos tons de cinzento dos pixels.

A frequência espacial corresponde à frequência ao longo do espaço onde há modulação da intensidade (no caso das imagens abaixo, ao longo do eixo dos xx). A imagem da esquerda tem uma menor frequência espacial do que a da direita.



Transformada de *Fourier* 2D

A transformação do domínio espacial para o domínio das frequências espaciais resulta numa função de valores complexos, ou seja, do tipo $z = a + bj$.

$$F(u) = re(F(u)) + im(F(u))j$$

re: parte real do número complexo
im: parte imaginária do número complexo

$$\text{Magnitude} = |F(u)| = \sqrt{(re(F(u)))^2 + (im(F(u)))^2}$$

$$fase = atan\left(\frac{im(F(u))}{re(F(u))}\right)$$

A visualização do espectro pode fazer-se com a determinação da função da Magnitude.

Transformada Discreta de *Fourier* (2D): Para uma imagem de dimensões $M \times N$, a Transformada Directa Discreta de Fourier bidimensional é dada por:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[f(x, y) \times e^{-j2\pi \left(\frac{u \times x}{M} + \frac{v \times y}{N} \right)} \right]$$

A função $f(x, y)$ é a imagem no domínio espacial e o termo exponencial é a função-base que corresponde à representação de cada ponto $F(u, v)$ do espaço de Fourier.

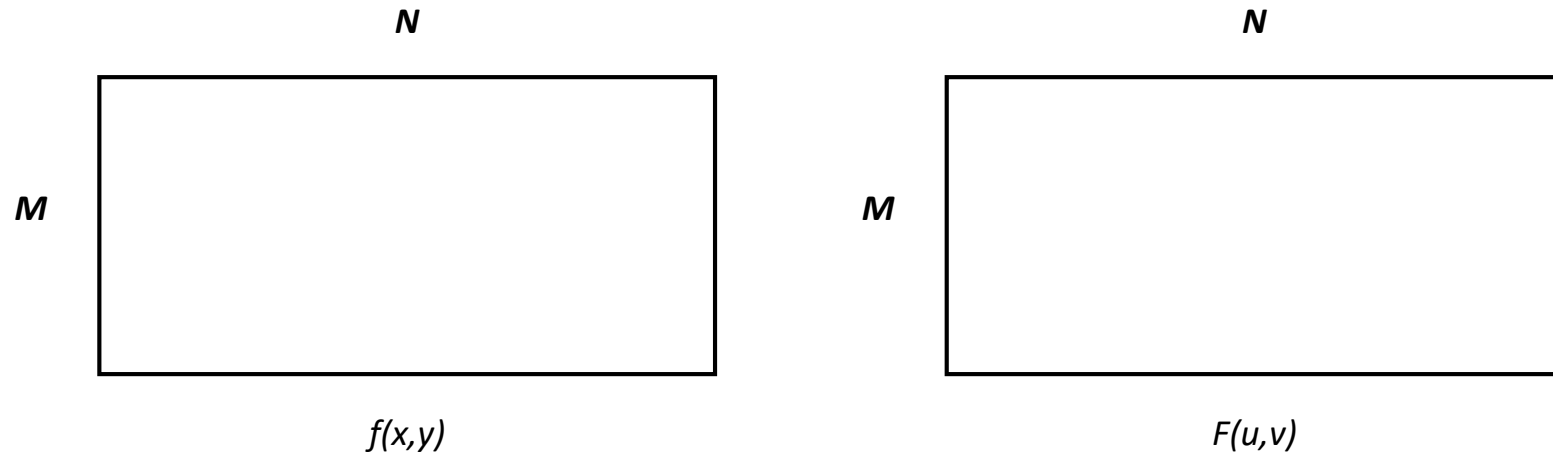
A magnitude do espectro calcula-se com a seguinte expressão:

$$Mag(u, v) = \frac{1}{(N \times M)} |F(u, v)|$$

Transformada de *Fourier* 2D

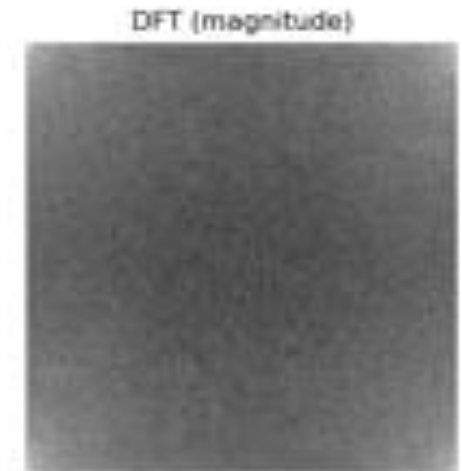
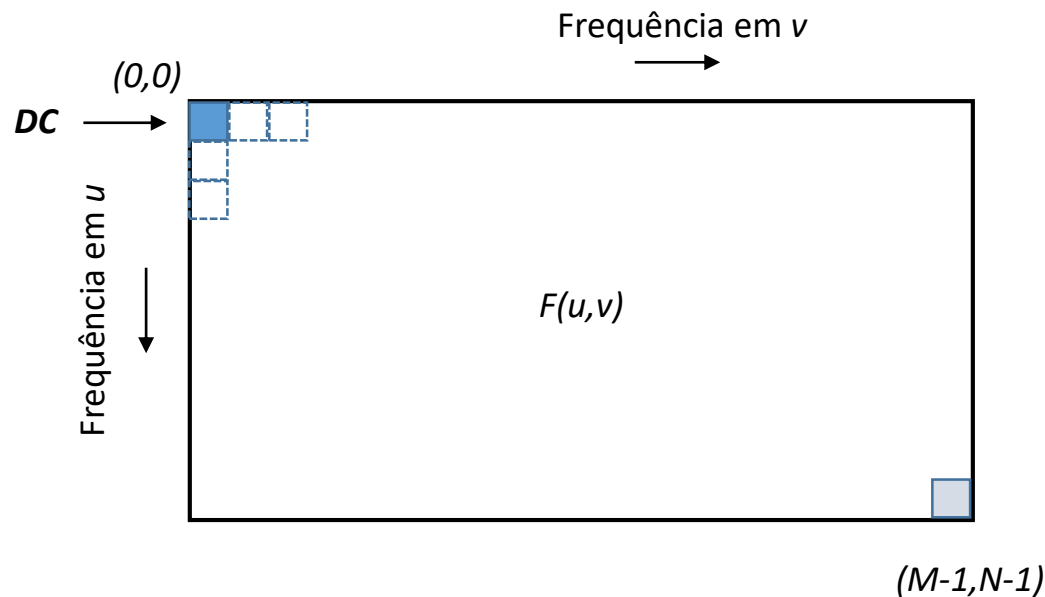
A Transformada Directa Discreta de *Fourier* (DDFT) corresponde à TF amostrada e, como tal, não contém todas as frequências que formam uma imagem, mas apenas um conjunto de amostras que é suficientemente grande para descrever o domínio espacial da imagem.

O número de frequências corresponde ao número de pixels da imagem do domínio espacial $f(x,y)$, ou seja, a imagem e o espectro têm as mesmas dimensões.



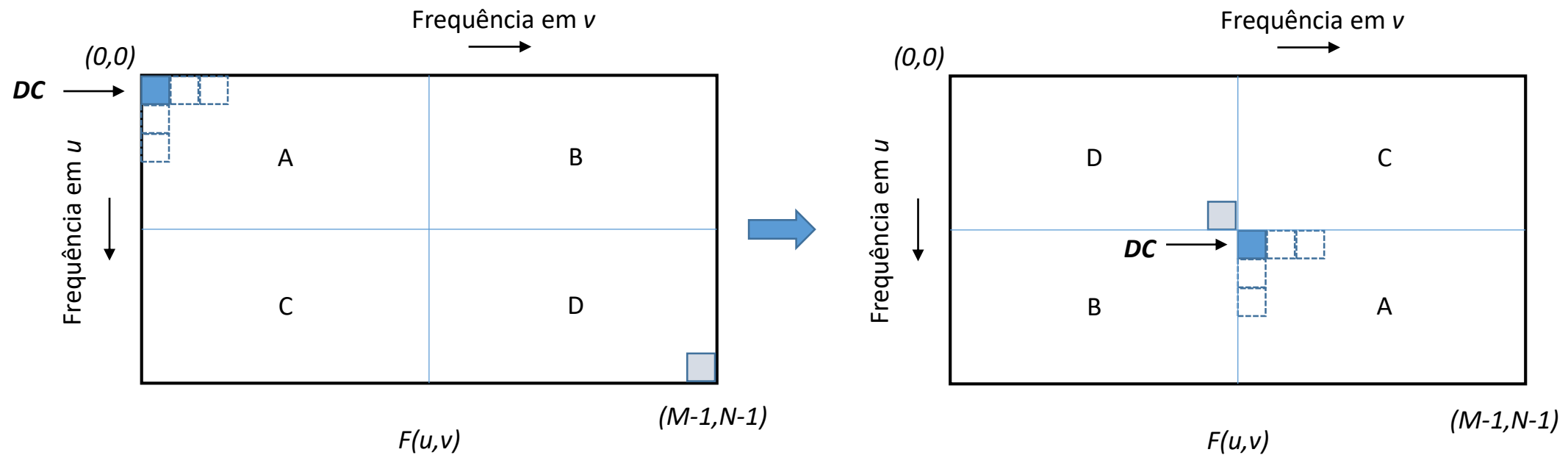
Transformada de *Fourier* 2D

As funções de base são ondas seno e co-seno com frequências progressivas, isto, é, $F(0, 0)$ representa a componente DC da imagem (que tem frequência zero), correspondente à intensidade média, e $F(M-1, N-1)$ representa a frequência mais elevada em xx e em yy .



Transformada de *Fourier* 2D

Por motivos de facilidade de interpretação/análise do espectro, a sua disposição é geometricamente alterada por forma a que o valor de $F(0, 0)$ se localize ao centro da janela.

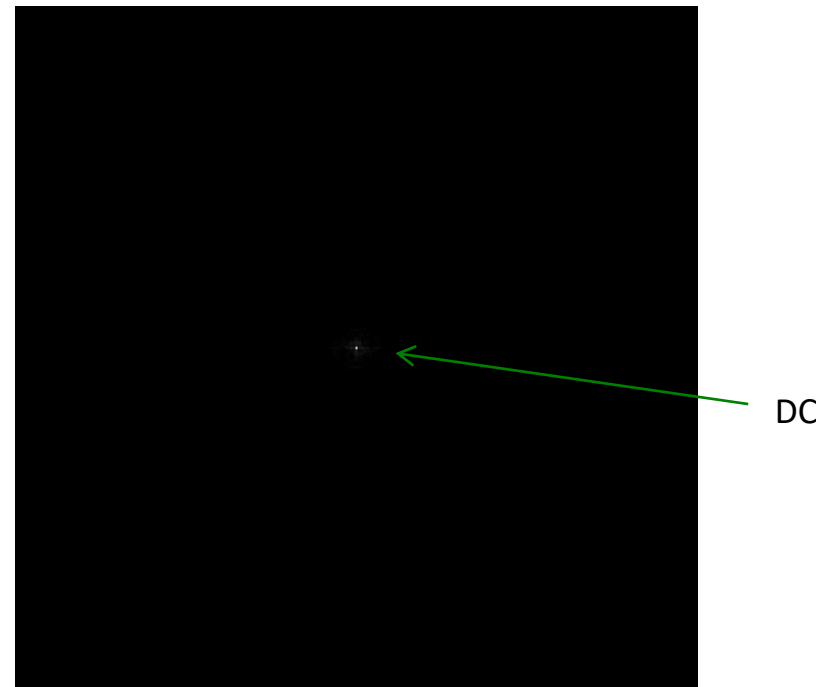


Transformada de *Fourier* 2D

Quase sempre o valor de DC é, de longe, a maior componente do espectro de frequências. O intervalo numérico dos valores do espectro é bastante grande para ser visualizado no ecrã, o que faz com que a sua representação imediata não seja frequentemente viável.



Imagem inicial



Magnitude do espectro

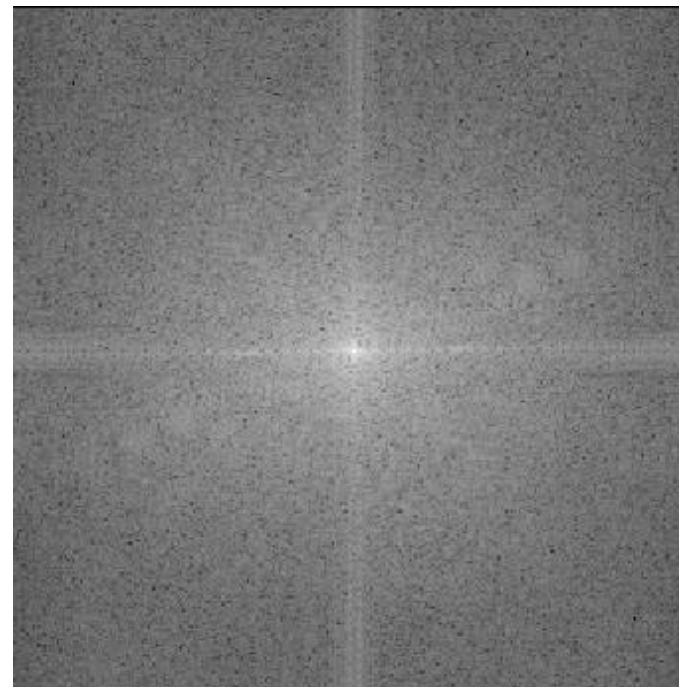
Min = 1.4514; Max = 6955093

Transformada de *Fourier* 2D

Aplicando a operador logarítmico, à função da Magnitude, para uma representação de 8 bits, obtém-se uma representação apropriada do espectro das frequências (como alternativa pode-se, por vezes, dividir a matriz da magnitude pelo número total de pixels).



Imagem inicial



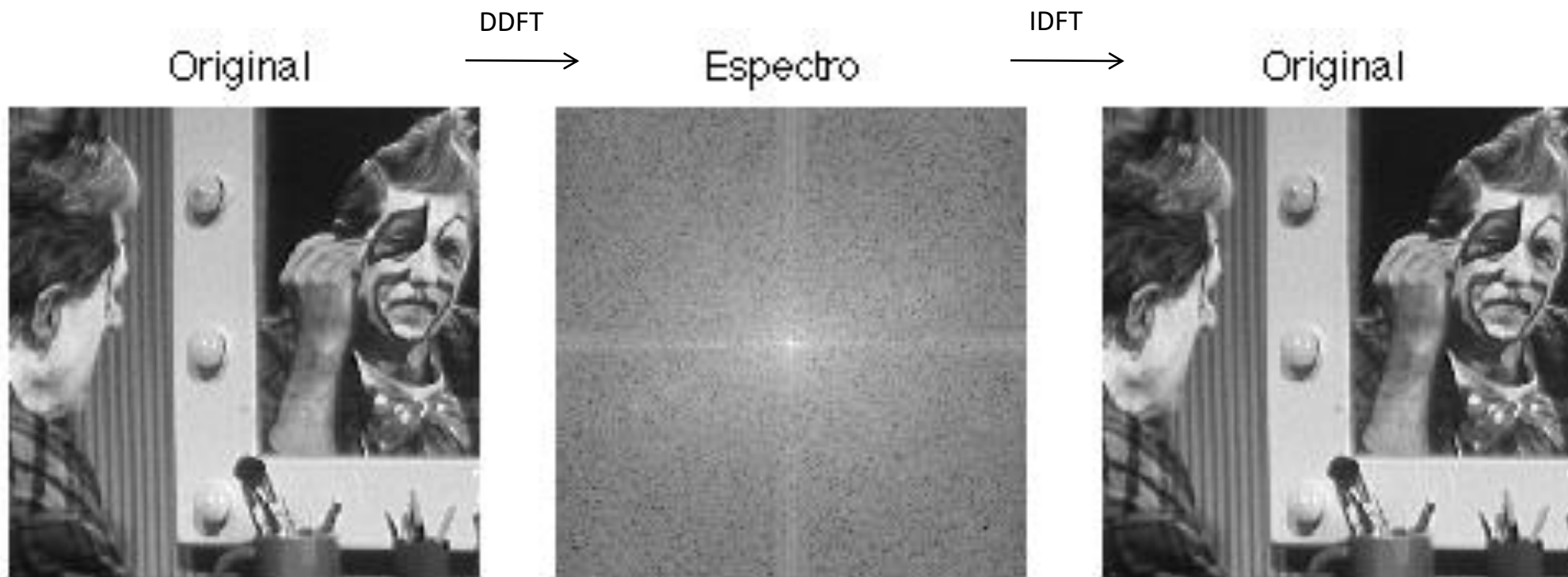
Magnitude do espectro centrado

Min = 0; Max = 255

Transformada de *Fourier* 2D

A Transformada Inversa Discreta de *Fourier* (IDFT) bidimensional é dada por:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{M \times N} \right) \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[F(u, v) \times e^{j2\pi \left(\frac{u \times x}{M} + \frac{v \times y}{N} \right)} \right]$$



Transformada de *Fourier* 2D

A IDFT necessita das partes real e imaginária obtidas com a DDFT.

Inicial



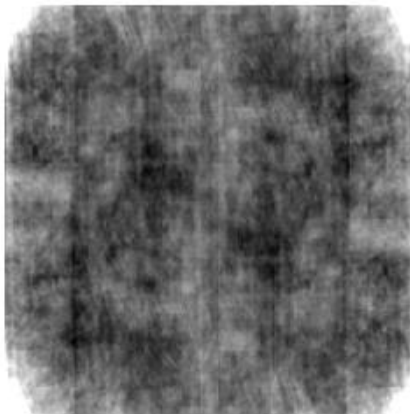
ITF da parte real



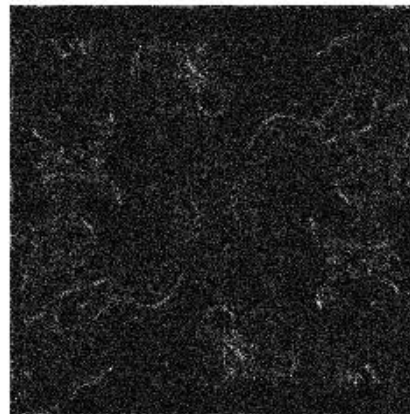
ITF da parte imaginária



ITF do modulo



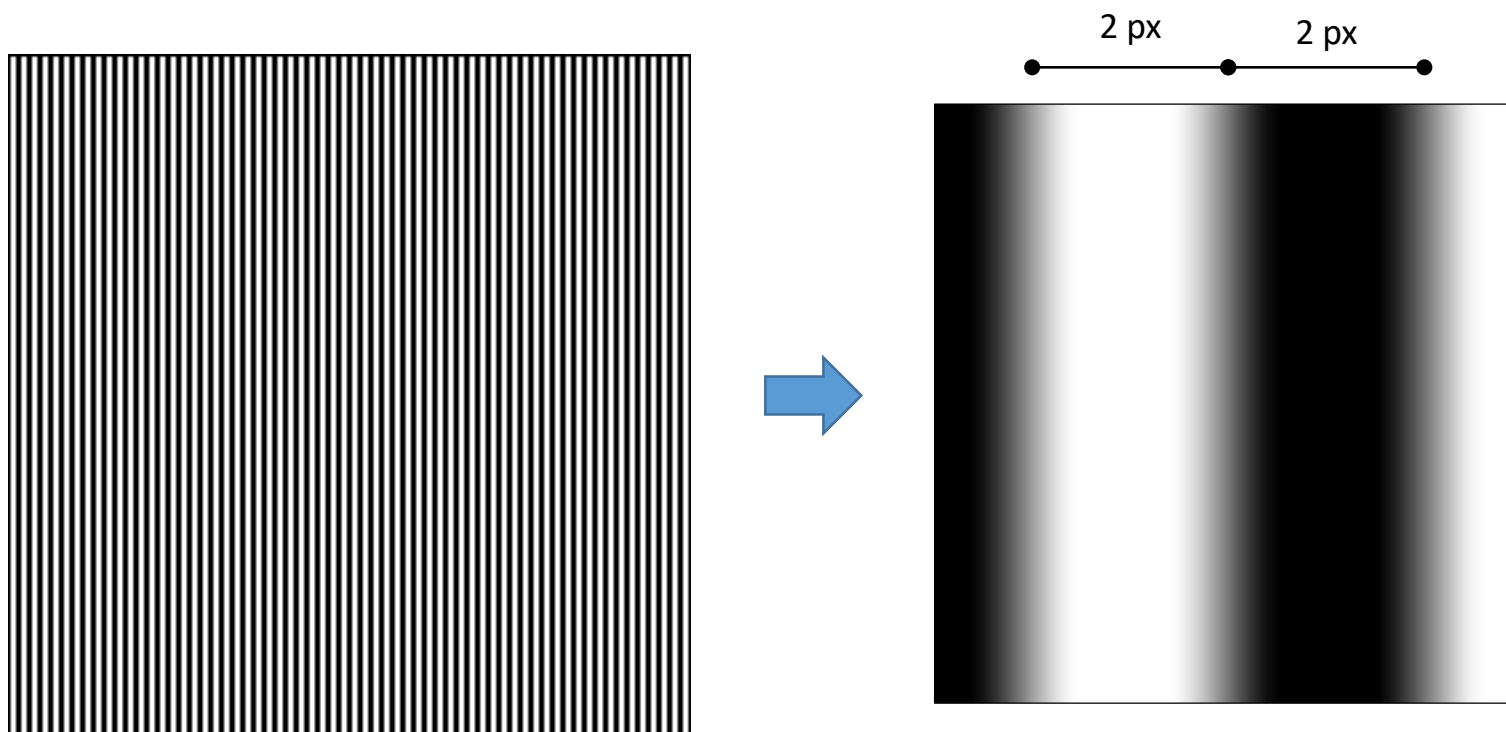
ITF da fase



Transformada de *Fourier* 2D

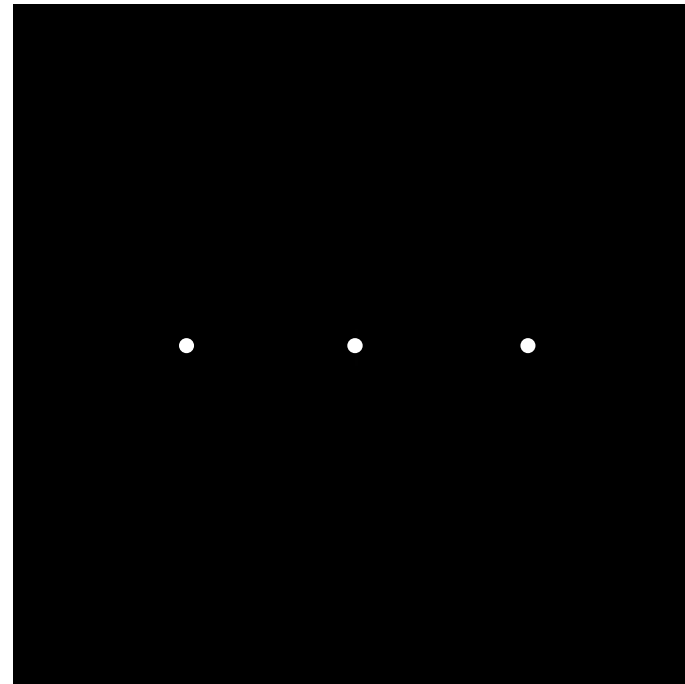
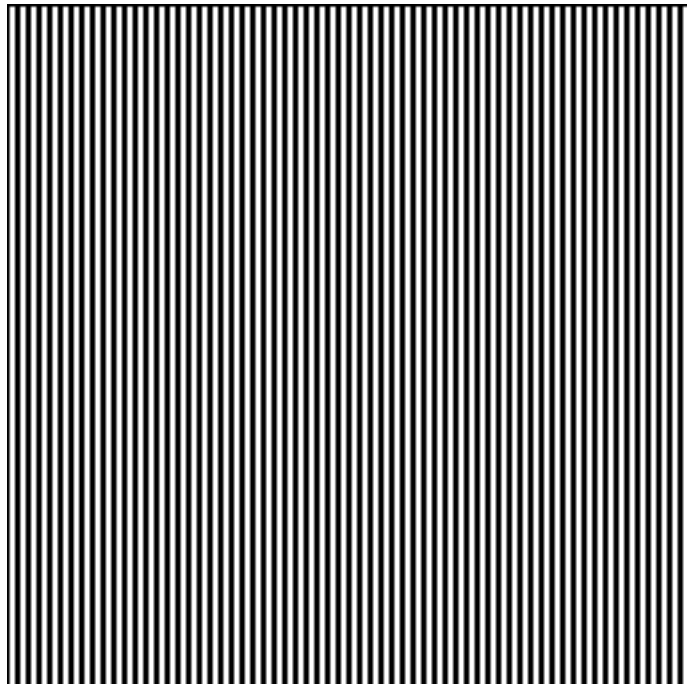
Fernando Soares

Interpretação: como exemplo considere-se a imagem abaixo, em que cada faixa vertical (branca ou preta) tem uma espessura de 2 pixels.



Transformada de *Fourier* 2D

O respectivo espectro (à direita) tem três frequências: o valor de DC ao centro (frequência 0) e os dois picos correspondentes à frequência das linhas na imagem original. Como, no domínio espacial, a função se altera segundo a direcção horizontal, os pontos do espectro apresentam-se alinhados ao longo de uma recta horizontal que passa pelo centro.



A distância dos pontos ao centro pode ser explicada da seguinte forma: a frequência máxima (k_{\max}), que pode ser representada na imagem original, corresponde a 2 pixels de distância (um preto e um branco):

$$k_{\max} = \frac{1}{2}$$

Sendo o sinal constituído por faixas verticais com espessura de 2 pixels (ciclo de 4 pixels) tem-se:

$$k = \frac{1}{4} = \frac{k_{\max}}{2}$$

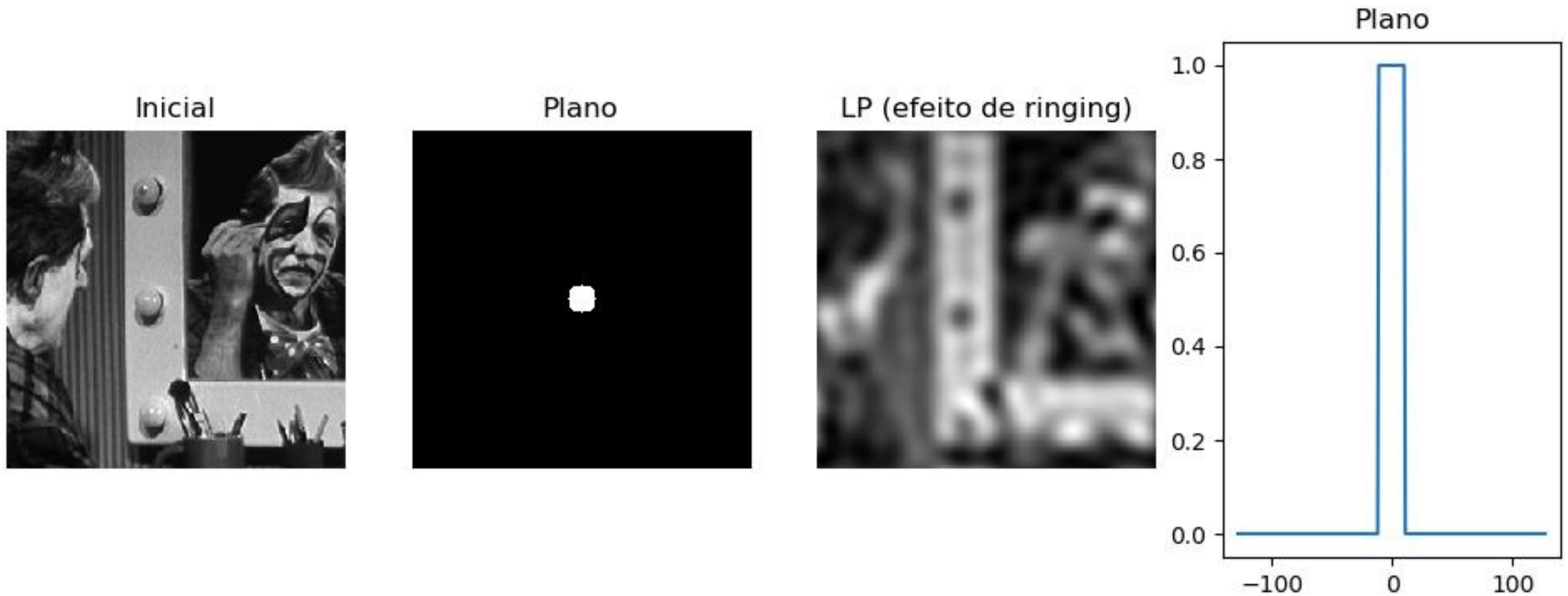
Portanto, os pontos do espectro situam-se a meio caminho entre o centro e os limites da imagem, ou seja, a frequência representada é igual a metade da frequência máxima.

A TF está directamente relacionada com muitas operações, entre as quais as operações de filtragem.

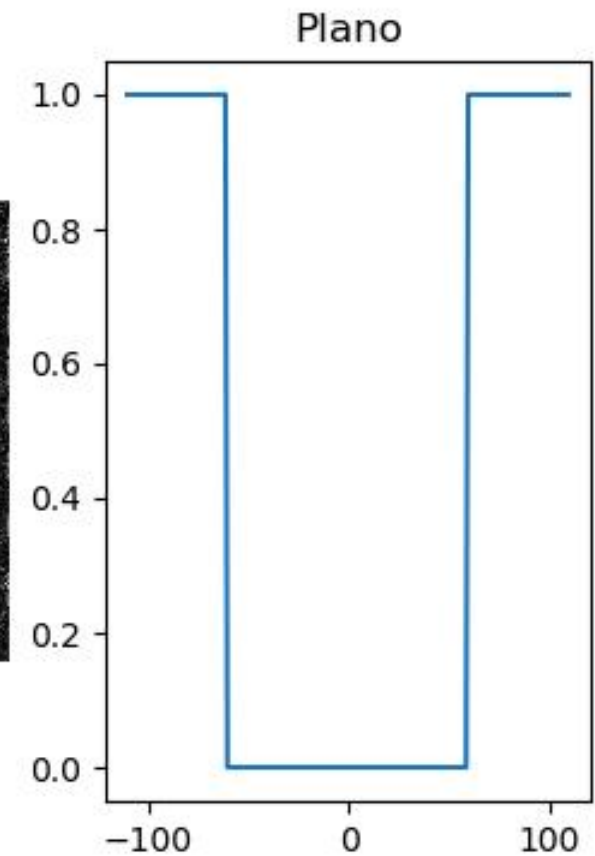
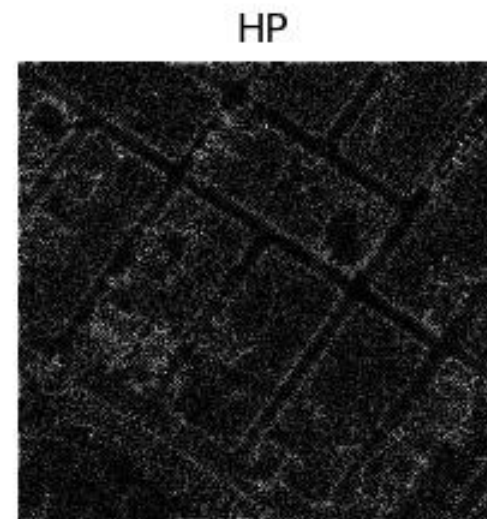
Uma operação de filtragem, que no domínio espacial resulta de uma operação de convolução entre um filtro (kernel) e a imagem de cinzentos, executa-se com uma simples multiplicação no domínio das frequências (TF da imagem inicial).

Assim podem-se definir filtros passa-baixa, passa-alta e passa-banda, eliminando frequências do espectro de forma seleccionada.

Filtro passa-baixa plano:



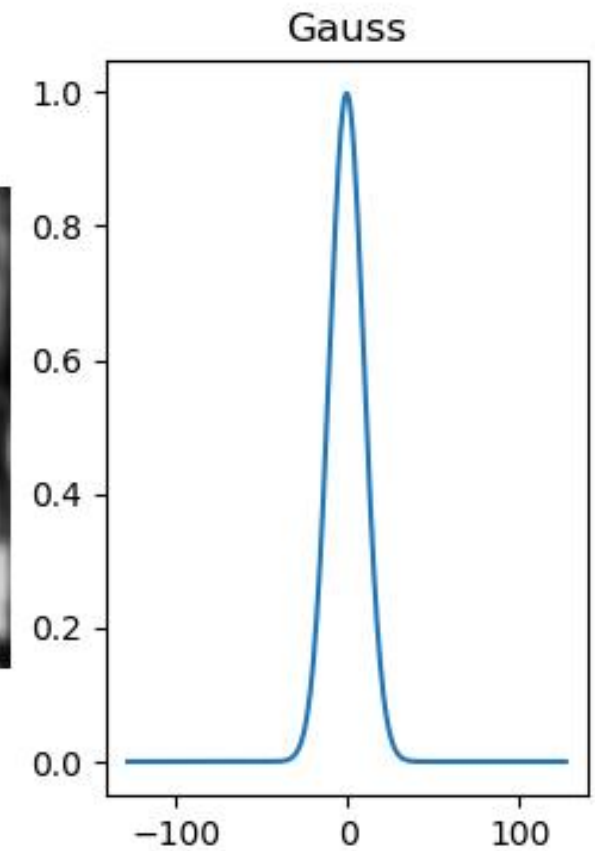
Filtro passa-alta plano:



Filtragem no domínio das frequências

Fernando Soares

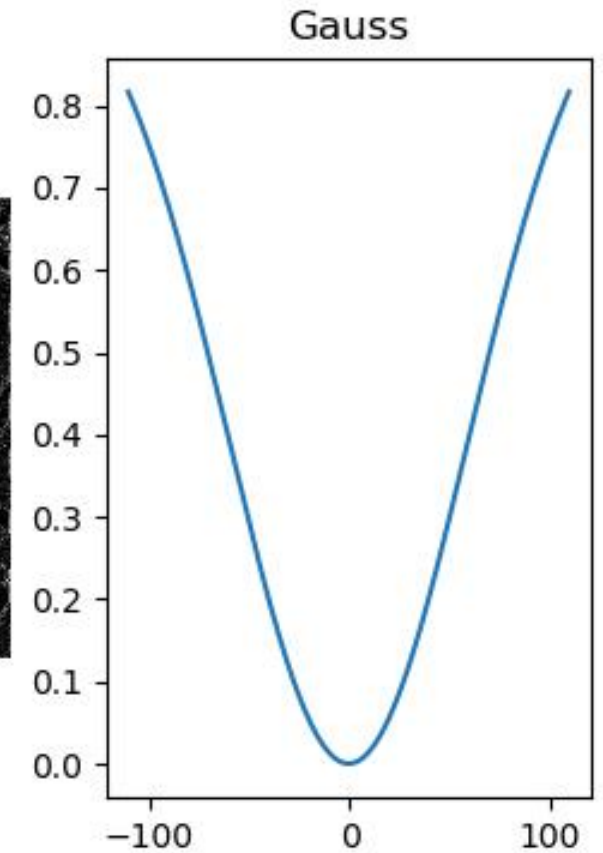
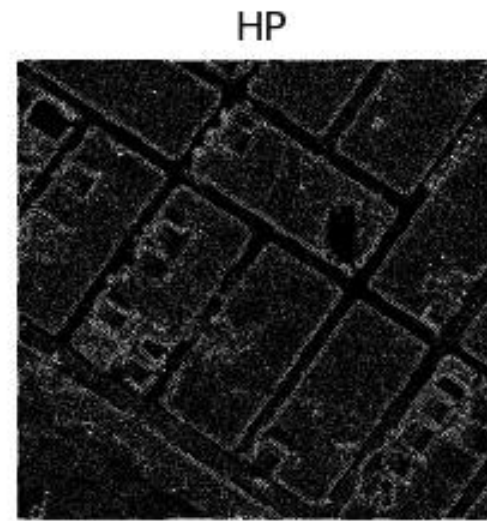
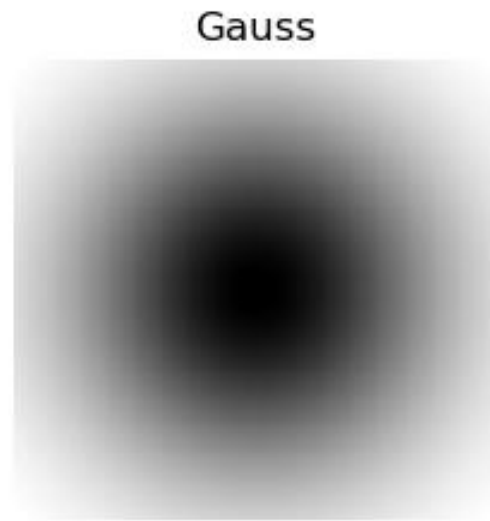
Filtro passa-baixa gaussiano:



Filtragem no domínio das frequências

Fernando Soares

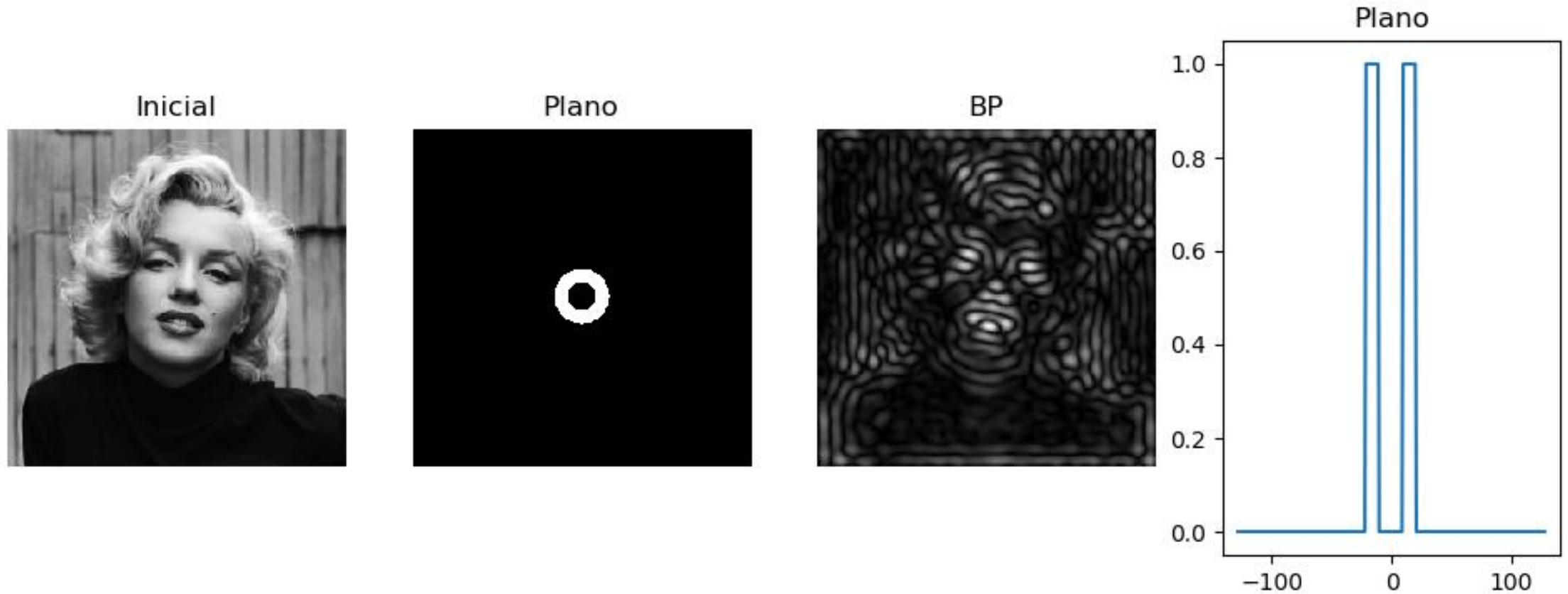
Filtro passa-alta gaussiano:



Filtragem no domínio das frequências

Fernando Soares

Filtro passa-banda plano:



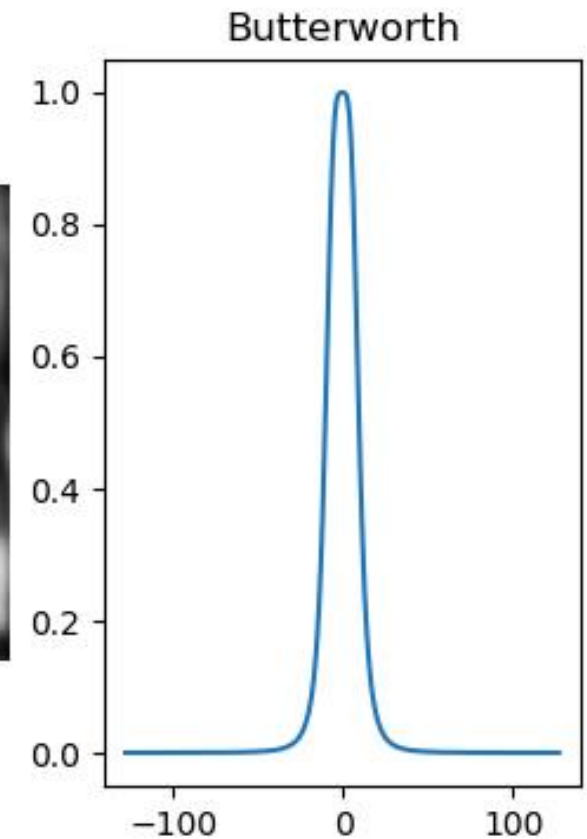
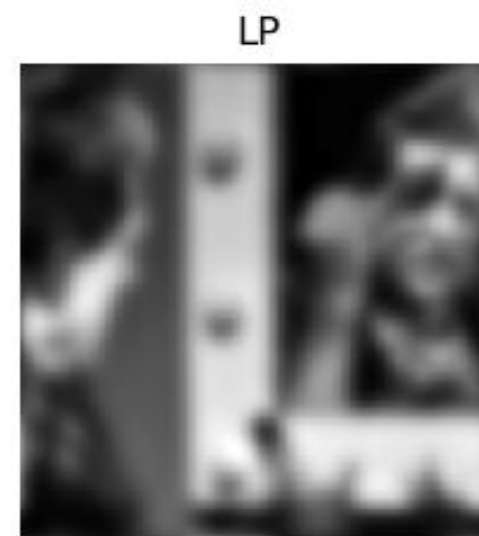
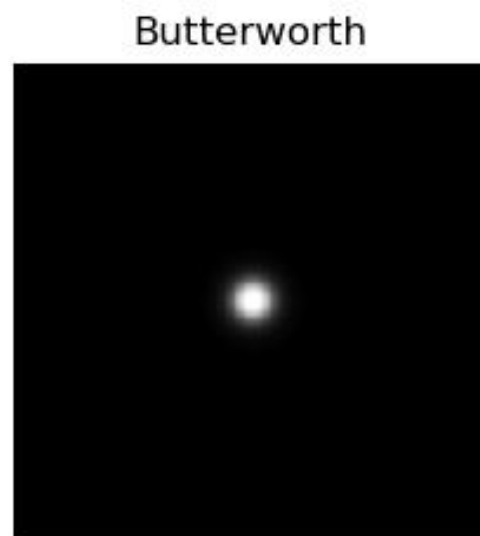
O filtro **Butterworth** de ordem n e frequência de corte D_0 é definido como:

$$B(u, v) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0} \right)^{2n} \right]}$$

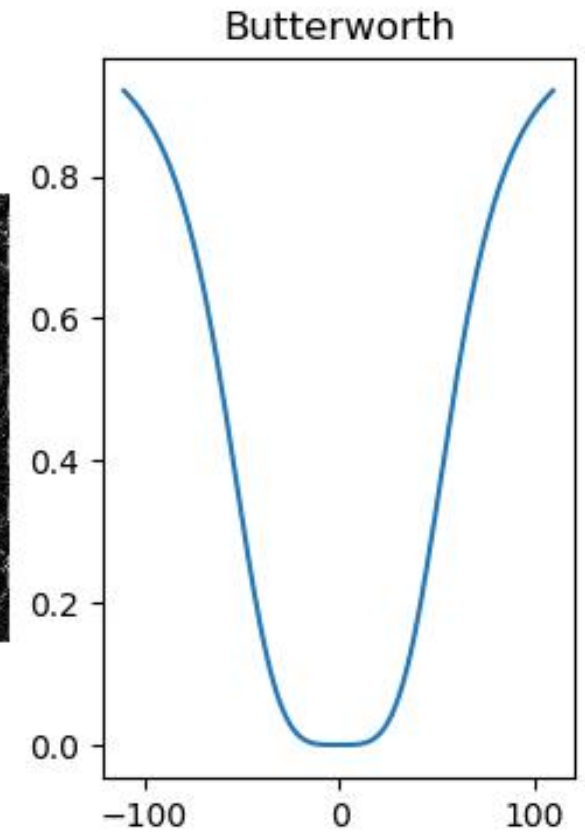
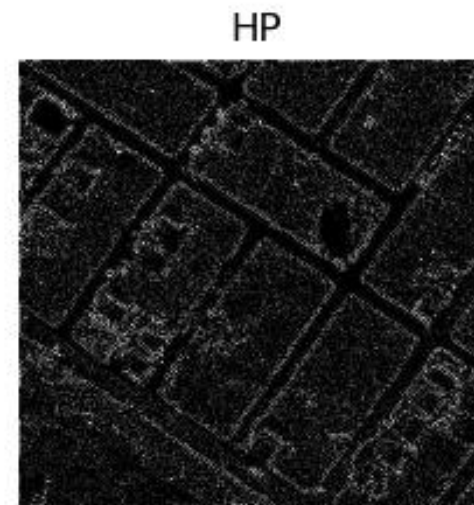
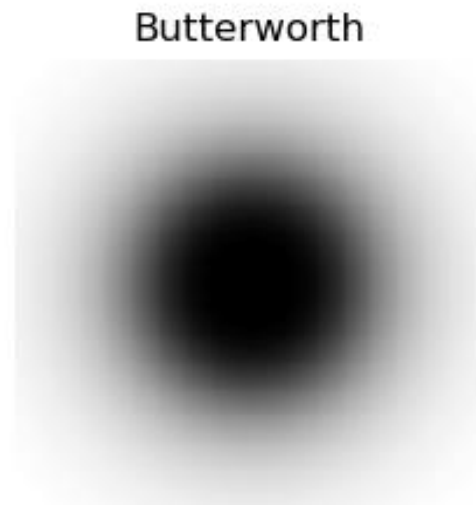
Este filtro tem a vantagem de se poder controlar a nitidez com a ordem (n).

Um filtro passa-baixa *Butterworth* mantém frequências dentro do raio D_0 e descarta as de fora. Introduce ainda uma transição gradual de 1 para 0 para reduzir o efeito de *ringing* que se verifica com o filtro plano.

Filtro passa-baixa *Butterworth*:



Filtro passa-alta *Butterworth*



Teorema da convolução

Em matemática, o **teorema da convolução** afirma que, em condições adequadas, a TF de uma convolução de dois sinais obtém-se multiplicando as suas transformadas individuais de *Fourier* e executando a inversa da TF desse produto.

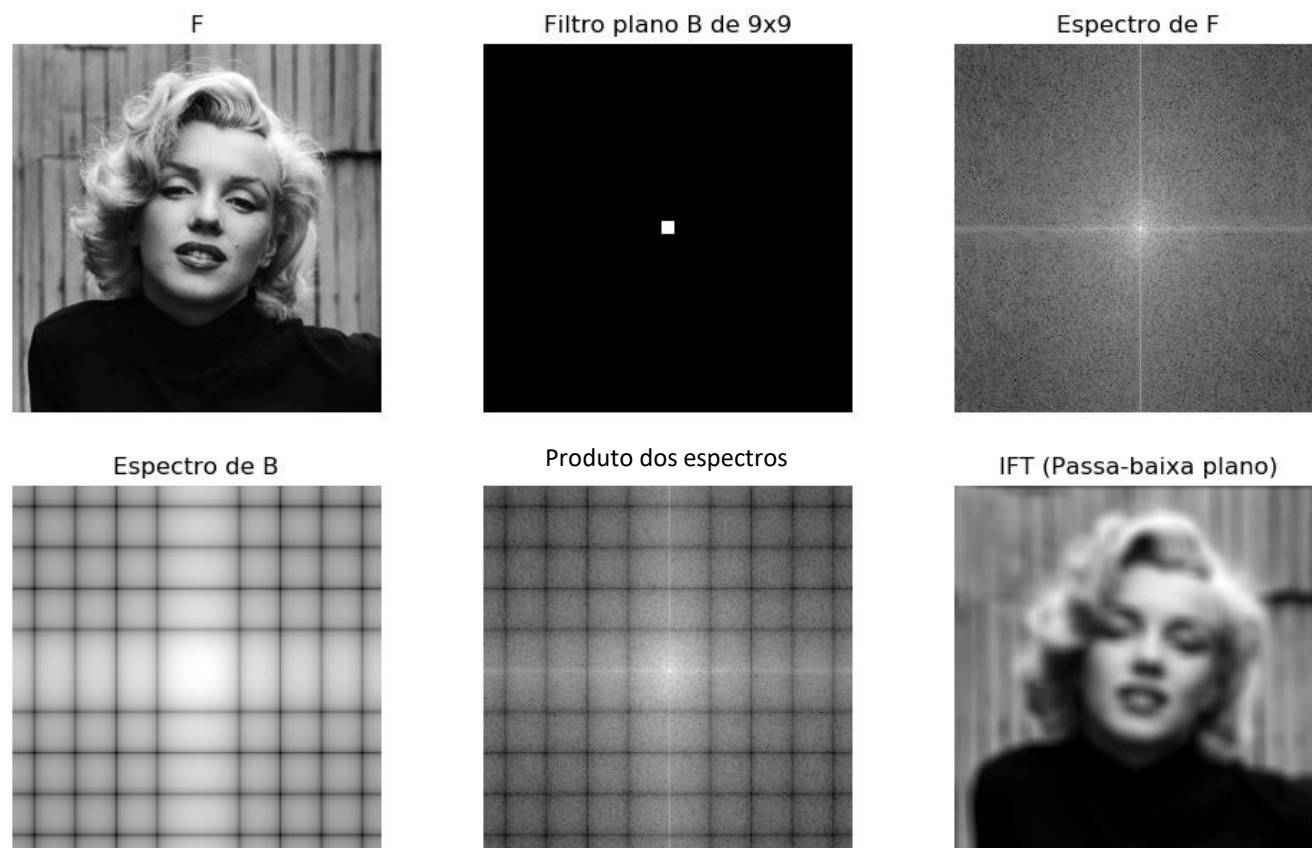
$$f(x, y) * h(x, y) = idft(F(u, v) \times H(u, v))$$

Este teorema é importante porque estabelece a ligação entre operações no domínio das frequências e a acção de filtros espaciais lineares.

As operações de filtragem linear, feitas por convolução no domínio espacial, podem ser realizadas por multiplicações simples no domínio de *Fourier*, tornando mais rápido o processo filtragem.

Teorema da convolução

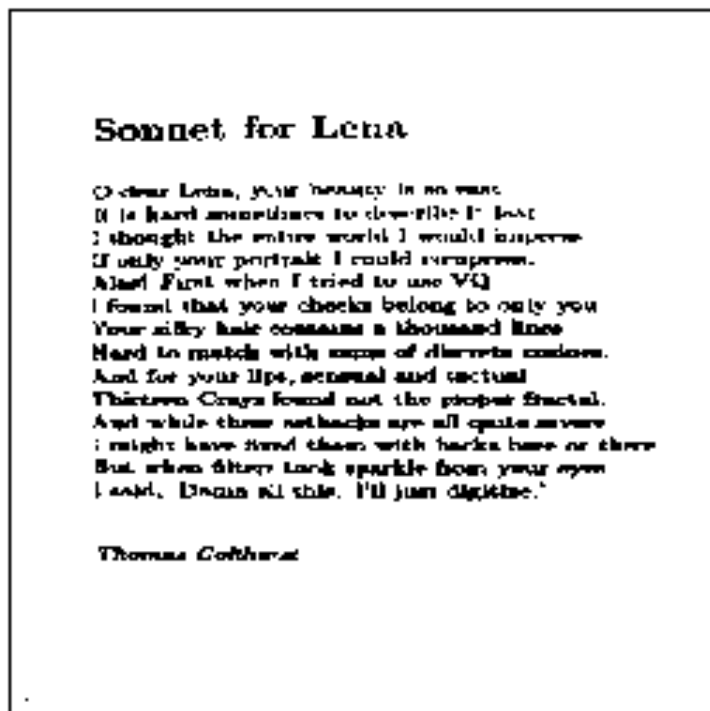
Multiplica-se matriz do filtro pretendido pela imagem resultante da DFT (espectro com ambas as partes real e imaginária) e aplica-se de seguida a IFT. Na figura pode-se ver a ilustração do processo de filtragem de uma imagem, por um filtro rectangular da média aritmética.



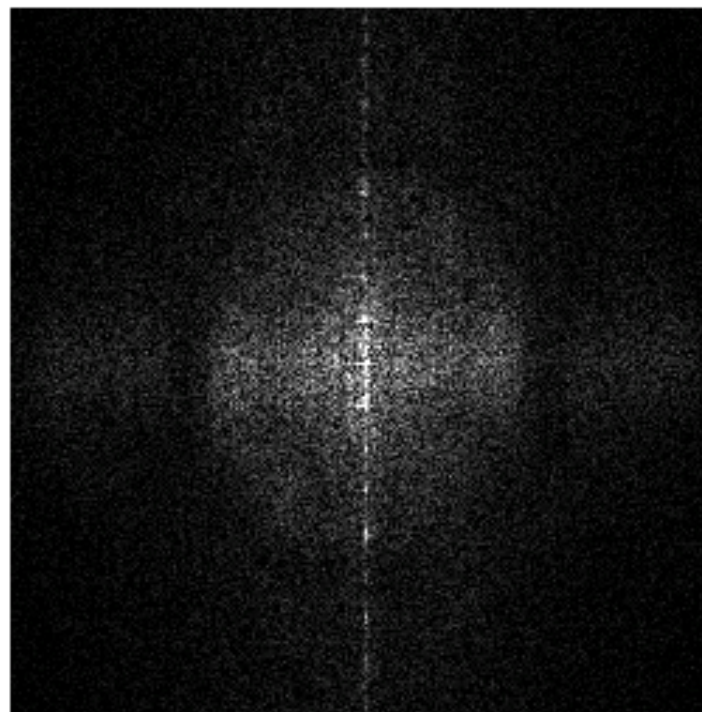
Exemplos de aplicação

Detecção de orientação de texto: A TF é usada para adquirir informação acerca da estrutura geométrica do domínio espacial de uma imagem. O reconhecimento de texto, usando técnicas de processamento de imagem fica simplificado se for assumido que as linhas de um dado texto estão dispostas numa dada direção.

Original



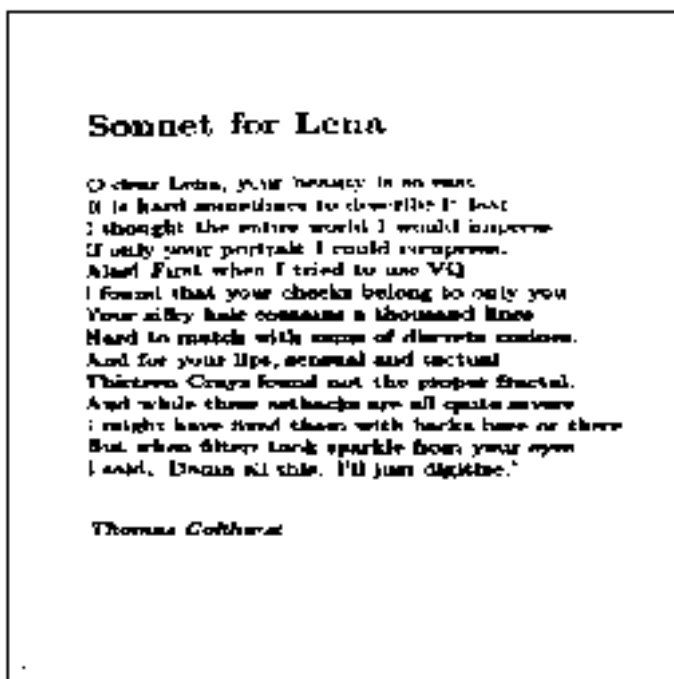
Espectro linxcol



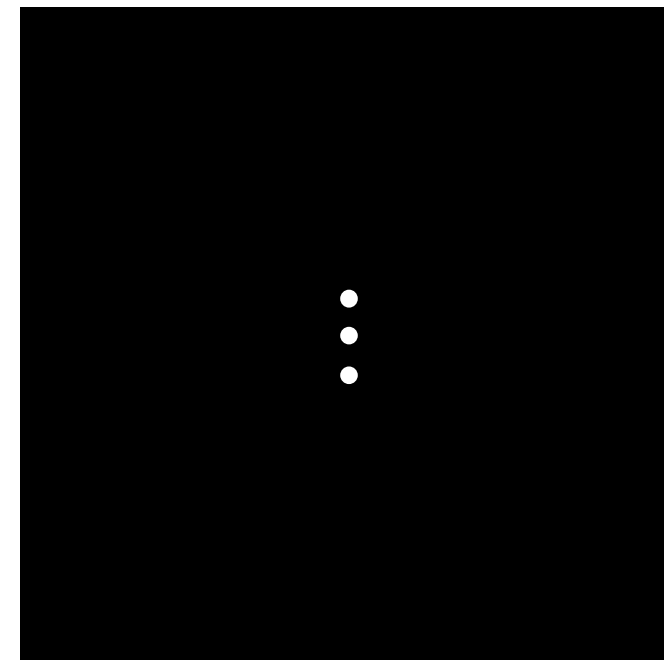
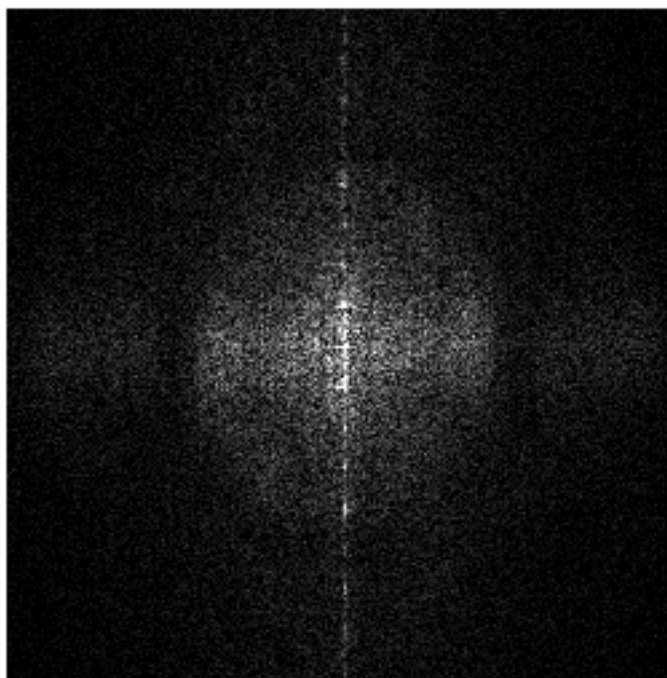
Exemplos de aplicação

A limiarização dos picos da imagem do espectro permite identificar a orientação da disposição das linhas de texto.

Original

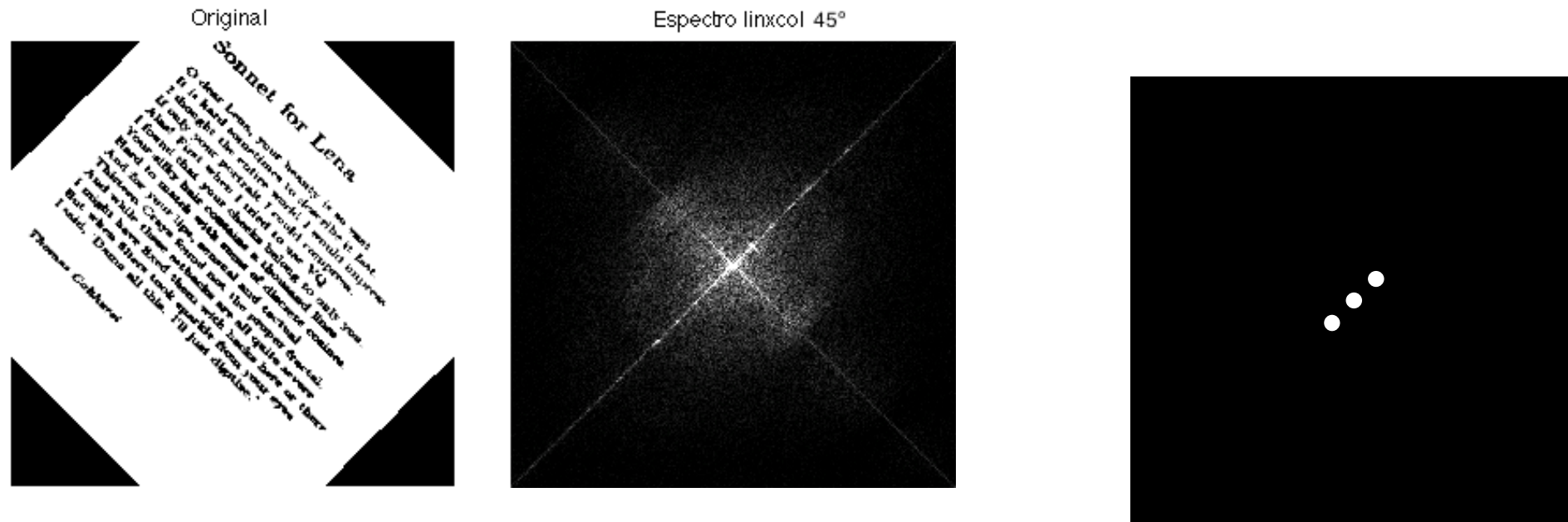


Espectro linxcol



Exemplos de aplicação

No caso de uma imagem rodada de 45° , após a identificação dos picos de frequência sobre a linha principal, a imagem pode ser rodada usando para tal o conhecimento do ângulo que se obtém nesse procedimento.



A linha perpendicular à linha principal resulta da existência de cantos escuros na imagem rodada.

Exemplos de aplicação

A Transformada de *Fourier* pode ser usada para executar operações de localização objectos numa imagem, por determinação do espectro de potência cruzada (que se verá no capítulo de segmentação de imagem).

Template

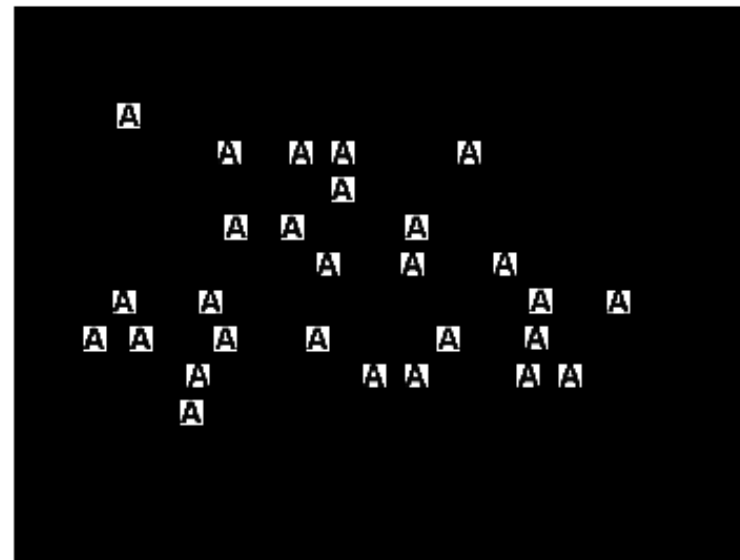
A

F

JOÃO RECEBEU UM TEXTO DE INSTRUÇÃO PARA MONTAR UM BRINQUEDO: BRACELETE DE SUPER HERÓI. MAS, A PESSOA QUE ESCREVEU, ESQUECEU DE FAZER A LISTA DOS MATERIAIS. VOCÊ CONSEGUE AJUDÁ-LO A FAZER A LISTA DOS MATERIAIS QUE PRECISAM SER SEPARADOS PARA MONTAR ESSE BRINQUEDO?

Imagem inicial

Resultado



Posições
(máximos da correlação)