Lògica en la Informàtica
Deducció en Lògica Proposicional

José Miguel Rivero

Dept. Ciències de la Computació
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Primavera 2025

Crèdits

El material utilitzat en aquesta presentació ha estat extret del elaborat pel professor Robert Nieuwenhuis (Dept. CS, UPC) per l'assignatura *Lògica en la Informàtica* de la FIB.

En particular, del llibre *Lógica para informáticos* - Farré, R. [et al.], Marcombo, 2011. ISBN: 9788426716941.

Temari

Sumari

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

7b) Quantes d'aquestes clàusules són insatisfactibles?

7c) Quantes clàusules diferents i que no són tautologias hi ha?

7d) Quantes clàusules diferents que contenen exactament un literal per cada símbol proposicional hi ha?

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

Donat un conjunt S de k elements, quants subconjunts diferents té?

$S = \{e_1\ e_2\ \dots\ e_k\}$

$0\ 0\ \dots\ 0$	denota el subconjunt buit
$0\ 0\ \dots\ 1$	denota el subconjunt $\{e_k\}$
$\dots$	
$1\ 1\ \dots\ 1$	denota el subconjunt $S = \{e_1\ e_2\ \dots\ e_k\}$

Això explica que hi ha 2^k subconjunts diferents.

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

Si tenim n símbols, quants literals hi ha? $2n$
Per tant, hi ha $2^{(2n)}$ clàusules (subconjunts dels $2n$ literals) $= 4^n$

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

Una altra manera de veure el mateix: per cadascun dels n símbols p, en una clàusula passarà una de les següents 4 situacions:

a) estan p i $\neg p$ en la clàusula

b) està només p en la clàusula

c) està només $\neg p$ en la clàusula

d) no està ni p ni $\neg p$ en la clàusula

és a dir, hi ha 4^n possibilitats de clàusules.

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7b) Quantes d'aquestes clàusules són insatisfactibles?

Només 1, la clàusula buida.

En una clàusula $p_1 \vee \cdots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ si $m+n > 0$, llavors sí és satisfactible.

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7c) Quantes clàusules diferents i que no són tautologıas hi ha?

3^n: per l'altra manera de resoldre el 7a): per cada p, desapareix el cas "a) estan p i $\neg p$ en la clàusula."

Exercici 7

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

`7d)` Quantes clàusules diferents que contenen exactament un literal per cada símbol proposicional hi ha?

2^n: per l'altra manera de resoldre el `7a)`: per cada p, desapareixen el cas a) i el cas d).

Exercici 8

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

Si tinc una clàusula massa llarga (més de 3 lits), puc escriure-la com a $l \vee l' \vee C$ on C és la resta de la clàusula.

Llavors S és de la forma $\{l \vee l' \vee C\} \cup S1$.

Com podem expressar que $p \leftrightarrow l \vee l'$ mitjançant clàusules de màxim 3 literals? Recordem: $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$

$$p \rightarrow l \vee l' \equiv \neg p \vee l \vee l'$$
$$p \leftarrow l \vee l' \equiv \{ l \rightarrow p, l' \rightarrow p \} \equiv \{ \neg l \vee p, \neg l' \vee p \}$$

Exercici 8

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

Sigui S' el conjunt $\{\, p \vee C, \neg l \vee p, \neg l' \vee p, \neg p \vee l \vee l' \,\} \cup S1$,
NOTA: aqui p és un símbol nou!!

Hem escurçat en 1 literal 1 clàusula.
Però puc repetir això tantes vegades com faci falta.

- Falta veure que S és satisfactible ssi S' és satisfactible.

Exercici 8

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

A) $\Longrightarrow$: S és satisfactible $\Longrightarrow$ S' és satisfactible.

B) $\Longleftarrow$: S' és satisfactible $\Longrightarrow$ S és satisfactible.

Exercici 8

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

A) $\Longrightarrow$: S és satisfactible $\Longrightarrow$ S' és satisfactible.

S és satisfactible ssi
$\exists I$ tq I és model de S ssi
$\exists I$ tq $I \models S$

Exercici 8

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

A) $\Longrightarrow$: S és satisfactible $\Longrightarrow$ S' és satisfactible.

Si $I \models l \vee l'$ llavors sigui I' la interpretació que ESTÉN la I amb $I'(p) = 1$, (I' és com I, excepte que a més a més $I'(p) = 1$)
si no, sigui I' la interpretació que ESTÉN la I amb $I'(p) = 0$.

Tenim que $I' \models S1$, perquè $I \models S1$.
A més a més $I' \models \{ p \vee C, \neg l \vee p, \neg l' \vee p, \neg p \vee l \vee l' \}$ perquè (entre altres raons) $I \models l \vee l' \vee C$.
Per això $I' \models S'$ i per tant S' és sat.

Exercici 8

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

B) $\Longleftarrow$: S' és satisfactible $\Longrightarrow$ S és satisfactible.

Sigui I' model de S'.
Sigui I la RESTRICCIÓ de I' "oblidant-nos" de la p.
I veiem que $I \models S$.

Exercici 9

9. (dificultat 2) Sigui S un conjunt de clàusules de Horn on la clàusula buida no està en S ($\square \notin S$). Demostra que S és satisfactible (donant un model per a S) si no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positivo.

Totes les clàusules de S són de Horn i no-buides, és a dir, de la forma $p_1 \vee \cdots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m$ on $k+m > 0$, i $k \leq 1$. Com poden ser?

De la forma:

a) p

b) $p \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ amb $n > 0$

c) $\neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ amb $n > 0$

Exercici 9

9. (dificultat 2) Sigui S un conjunt de clàusules de Horn on la clàusula buida no està en S ($\Box \notin S$). Demostra que S és satisfactible (donant un model per a S) si no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positivo.

Ara diu que tampoc hi ha de tipus a): no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positiu.

a) $\cancel{p}$

b) $p \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n \quad$ amb $n > 0$

c) $\neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n \quad$ amb $n > 0$

Llavors és satisfactible: un model és la I on per a tot símbol p —que aparegui en les clàusules b) o c)— tenim $I(p) = 0$.

Exercici 10

10. (dificultat 2) Demostra que l'enunciat de l'exercici previ és fals quan S no és de Horn.

Donem un contraexemple d'un conjunt de clàusules S on:

- la clàusula buida no està en S, i
- no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positiu,
- i en canvi, S és insatisfactible.

Perquè no sigui de Horn, se'ns ocorre posar la clàusula més senzilla que no és de Horn:

$$p \vee q$$
$$\neg p$$
$$\neg q$$

Exercici 10

10. (dificultat 2) Demostra que l'enunciat de l'exercici previ és fals quan S no és de Horn.

Un altre exemple:

$$\begin{array}{rl} p \vee & q \\ p \vee & \neg q \\ \neg p \vee & q \\ \neg p \vee & \neg q. \end{array}$$

Això és insatisfactible, perquè cadascuna de les quatre interpretacions que hi ha és falsificada per una de les clàusules. És a dir, per a tota I, hi ha una clàusula C en S tal que I no satisfà C.

Exercici 12

12. (dificultat 3) Per a una fórmula en DNF, quin és el millor algorisme possible per a decidir si és satisfactible? Quin cost té?

Una DNF (disjunctive normal form) és una disjunció (OR) de "cubs", on cada cub és $p_1 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge \neg q_1 \wedge \cdots \wedge \neg q_m$.
Una DNF $= \{ C_1 \vee \cdots \vee C_n \}$ és satisfactible ssi algun cub C_i és satisfactible.

Una cub $p_1 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge \neg q_1 \wedge \cdots \wedge \neg q_m$ és satisfactible ssi no hi ha cap símbol que aparegui en un literal positiu del cub i també en un negatiu.

Per tant, el cost pot ser **lineal**.

Col·lecció d'apunts bàsics de lògica. ☞ Fitxer `p3.pdf`

5. Resolució. Correcció i completitud

- Resolució
- Clausura sota resolució
- Clausura sota una regla deductiva qualsevol
- Correcció i completitud d'una regla deductiva
- Completitud refutacional de la resolució

- **Resolució** (*regla deductiva*)

  Donadas dues clàusules: $p \vee C$ i $\neg p \vee D$

  Resolució per a lògica proposicional:

  $$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

  Premisses: $p \vee C$, $\neg p \vee D$

  Conclusió: $C \vee D$

- La resolució és CORRECTA?

  És a dir, siguin com siguin C, D i p, tenim que $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$?

Exercici 15

15. (dificultad 2) Demostra que la resolució és correcta.

Es CORRECTA si siguin com siguin C, D i p, tenim que
$(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.

Sigui I un model de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$.
Hi han dos casos:

$I(p) = 1$ Llavors
$$I \models (p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \implies I \models \neg p \vee D \implies I \models D \implies I \models C \vee D$$

$I(p) = 0$ Llavors
$$I \models (p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \implies I \models p \vee C \implies I \models C \implies I \models C \vee D$$

Exercici 15

15. (dificultad 2) Demostra que la resolució és correcta.

Es CORRECTA si siguin com siguin C, D i p, tenim que
$(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.

Sigui I un model de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$.
Hi han dos casos (la demostració pel cas $I(p) = 0$ és similar):

- $I(p) = 1$:

  $I \models (p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$
  implica [per def. de $\models$]
  $eval_I((p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)) = 1$
  implica [per def. de $eval_I(\ \wedge\ )$]
  $min(eval_I(p \vee C), eval_I(\neg p \vee D)) = 1$
  implica [per def. de $eval_I$, i de min]
  $eval_I(p \vee C) = 1$ **i** $eval_I(\neg p \vee D) = 1$
  implica [per def. de conjunció i]
  $eval_I(\neg p \vee D) = 1$

Exercici 15

15. (dificultat 2) Demostra que la resolució és correcta.

Es CORRECTA si siguin com siguin C, D i p, tenim que
$(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.

Sigui I un model de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$.
Hi han dos casos (la demostració pel cas $I(p) = 0$ és similar):

- $I(p) = 1$ (cont.):

  $eval_I(\neg p \vee D) = 1$
  implica [per def. de $eval_I(\ \vee\ )$]
  $max(eval_I(\neg p), eval_I(D)) = 1$
  implica [per def. de $eval_I(\ \neg\ )$]
  $max(1 - eval_I(p), eval_I(D)) = 1$
  implica [per def. de $eval_I(p)$]
  $max(1 - I(p), eval_I(D)) = 1$
  implica [perquè $I(p) = 1$, i per aritmètica]
  $max(0, eval_I(D)) = 1$

Exercici 15

15. (dificultad 2) Demostra que la resolució és correcta.

Es CORRECTA si siguin com siguin C, D i p, tenim que $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.

Sigui I un model de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$.

Hi han dos casos (la demostració pel cas $I(p) = 0$ és similar):

- $I(p) = 1$ (cont.):

  $max(0, eval_I(D)) = 1$

  implica [per def. de *max*]

  $eval_I(D) = 1$

  implica [per def. de $eval_I$ i de *max*, i per qualsevol C]

  $max(eval_I(C), eval_I(D)) = 1$

  implica [per def. de $eval_I(\ \vee\ )$]

  $eval_I(C \vee D) = 1$

  implica [per def. de $\models$]

  $I \models C \vee D$

- **Clausura sota resolució**

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

Exemple: Sigui S el conjunt de clàusules:

$$\begin{array}{l} \{\ \ p \vee \ \ q \\ \quad\ p \vee \neg q \\ \quad \neg p \vee \ \ q \\ \quad \neg p \vee \neg q\ \}. \end{array}$$

➤ Puc obtenir mitjaçant resolució a partir de $p \vee q$ i $p \vee \neg q$ (sobre la q) i obtinc $p \vee p$ que és el mateix que p.

➤ Puc obtenir mitjaçant resolució a partir de $\neg p \vee q$ i $\neg p \vee \neg q$ (sobre la q) i obtinc $\neg p \vee \neg p$ que és el mateix que $\neg p$.

- **Clausura sota resolució**

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

Exemple: Sigui S el conjunt de clàusules:

$$\{ \begin{array}{r} p \vee q \\ p \vee \neg q \\ \neg p \vee q \\ \neg p \vee \neg q \end{array} \}.$$

A partir de les dues clàusules noves p i $\neg p$, en un altre pas puc obtenir **la clàusula buida** $\square$.

- **Clausura sota resolució**

$$\frac{p \vee C \qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

Exemple: Sigui S el conjunt de clàusules:

$$\begin{array}{ll} \{ \; p \vee q & S_0 = S \\ \quad p \vee \neg q & S_1 = S_0 \cup \{ p, \neg p, q, \neg q, p \vee \neg p, q \vee \neg q, \ldots \} \\ \quad \neg p \vee q & S_2 = S_1 \cup \{ \Box, \ldots \} \\ \quad \neg p \vee \neg q \; \}. & S_3 = S_2 \cup ??? \end{array}$$

$$Res(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

- **Correcció i completitud d'una regla deductiva**

  $S = \{F_1, \ldots, F_n\} \quad (S = F_1 \wedge \cdots \wedge F_n)$.

  $R(S)$ denota la clausura de S sota la regla deductiva R.

  - R és *correcta* si mitjançant R només podem obtenir conseqüències lògiques del que ja tenim.

    ➤ si $F \in R(S)$ llavors $S \models F$.

  - R és *completa* si mitjançant R podem deduir totes les conseqüències lògiques.

    ➤ si $S \models F$ llavors $F \in R(S)$.

- **Completitud refutacional de la resolució**

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

La resolució és *refutacionalment completa*, és a dir, si S és insatisfactible llavors per resolució obtindré la clàusula buida.

Hi ha un teorema que diu:

> S és insatisfactible **SSI** mitjançant resolució puc arribar a obtenir la clàusula buida (formalment, SSI $\square \in Res(S)$).

Exercici 16

16. (dificultat 2) Demostra que, per a tot conjunt finit de clàusules S, tenim que $Res(S)$ és un conjunto finit de clàusules, si es consideren les clàusules com a conjunts de literals (per exemple, $C \vee p$ és la mateixa clàusula que $C \vee p \vee p$).

Si el conjunt inicial S té n símbols diferents, llavors EXISTEIXEN $2^{(2n)}$ clàusules diferents (que és un número gran, però **finit**).

Per tant, la resolució arribarà un moment, una S_i, tal que $S_i = S_{i+1}$, és a dir, que a partir d'aquesta S_i ja no afegim res nou, i totes les S_j a partir d'aquí seran iguals.

Exercici 17

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

a) $I \models Res(S) \implies I \models S$
b) $I \models S \implies I \models Res(S)$

Exercici 17

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

a) $I \models Res(S) \implies I \models S$

Trivialment, perquè S és un subconjunt de $Res(S)$ (per def. de $Res(S)$ que és la unió de totes les S_i's).

Exercici 17

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

b) $I \models S \implies I \models Res(S)$

Hem obtingut $Res(S)$ a partir de S, a força d'afegir, un nombre finit de vegades k, una conclusió per resolució a partir de clàusules que ja teníem.
Demostrarem que per a tota I, $I \models S \implies I \models Res(S)$ per **inducció** sobre k.

Exercici 17

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

b) $I \models S \implies I \models Res(S)$

- Si $k = 0$, trivial perquè llavors $S = Res(S)$.
- Si $k > 0$, suposa que el primer pas és de S a un S', afegint 1 clàusula per resolució a partir de S.

  Per correcció de la resolució $S \models S'$, per la qual cosa $I \models S \implies I \models S'$.
  A més a més, com $S \subseteq S'$, tenim també que $S' \models S$.
  Per tant, $S \equiv S'$.
  Per Hipòtesi d'Inducció, com el nombre de passos des de S' a $Res(S)$ és $k-1$, tenim que $I \models Res(S)$. ■

Exercici 18

18. (dificultat 2) La resolució és completa? Demostra-ho.

Completa: qualsevol conseqüència lògica es pot arribar a obtenir mitjançant resolució.

No. Contraexemple: Sigui S el conjunt buit de clàusules.
Llavors $S \models p \vee \neg p$. (perquè $p \vee \neg p$ és una tautologia).

Però NO podem obtenir $p \vee \neg p$ a partir de S mitjançant resolució.
Per tant NO podem obtenir qualsevol conseqüència lògica mitjançant resolució.

Per tant la resolució **NO** és completa.

Exercici 18

18. (dificultat 2) La resolució és completa? Demostra-ho.

Completa: qualsevol conseqüència lògica es pot arribar a obtenir mitjançant resolució.

Un altre contraexemple:
Sigui S qualsevol conjunt de clàusules que conté la clàusula buida.
Llavors S és insatisfactible.
I per tant tenim $S \models p$, on p és un símbol que no apareix en S.

Però NO podem obtenir p a partir de S mitjançant resolució.

Exercici 18

18. (dificultat 2) La resolució és completa? Demostra-ho.

Completa: qualsevol conseqüència lògica es pot arribar a obtenir mitjançant resolució.

Un altre contraexemple: $S = \{p, q\}$

$S \models p \vee q$ però NO podem obtenir $p \vee q$ per resolució a partir del conjunt de clàusules $\{p, q\}$.

Exercicis del capítol `p3.pdf` per al proper dia:

- exercicis fins al 27, i també
- ☞ **el sudoku** (pàg. 8)