线性代数（甲）期末真题演练本

（配套讲义使用）

目录

第一板块：行列式

1.【**2019–2020 秋冬**】设有 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\sin(i+j),\forall i,j=1,2,\ldots,n$，求行列式 $|A|$ 的值。

2.【**2020–2021 秋冬**】设 x,a,b 为实常数满足 $a\neq b$，计算 $n(n\geq 2)$ 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

3. **【2021–2022 秋冬】** 设 n 阶行列式 D，对角线元素为 a_i+x，其余元素为 a_i（即第 i 列元素均为 a_i，仅对角线多一个 x）。证明：

$$D = x^n + x^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

4. **【2022–2023 秋冬】** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $\forall 1\leq i,j\leq n,\ a_{ij}=|i-j|$，求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 D_n。

5.【**2023–2024 秋冬**】已知 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ii} = 2\cdot i!$，且当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = j!$。计算 n 阶行列式 $D = |\boldsymbol{A}|$ 的值。

6.【**2019–2020 春夏**】设 x 为非零实常数，有 n 阶三对角矩阵 A，满足 $a_{ii} = 1 + x^2$，且 $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = x$，其余元素为 0。试证明 $|A| = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$。

7.【**2022–2023 春夏**】已知 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶方阵，其中 $a_{ii}=0$，当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=j$。计算 n 阶行列式 $D_n=|A|$ 的值。

8.【**2023–2024 春夏**】求下列 $n+1$ 阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

第二板块：线性方程组

2. 含参线性方程组的求解与讨论

1.【2020–2021 秋冬】

设 λ, μ 为实常数，试求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \mu x_4 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \mu \end{cases}$$

2.【2021–2022 秋冬】

设 λ 为实参数，求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

3.【2022–2023 春夏】

设 λ 为实常数，求解四元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

4.【2023–2024 秋冬】

设 λ 为实数，求解四元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

3. 解的结构与通解构造

1.【2022–2023 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个解，其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,1)^T$, $2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^T$，求方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解。

2.【2023–2024 春夏】

$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 3×1 列向量，且 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$。求方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3$ 的解。

3.【2024–2025 春夏】

已知 $r(\boldsymbol{A}) = 3, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，线性无关的 5 元列向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 是方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的三个特解，则方程的通解是 ________________。若 $c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + c_3\boldsymbol{X}_3$ 是方程的一个解，则 c_1, c_2, c_3 满足 ____________。

4. 基础解系、同解与公共解

1.【2019–2020 秋冬】

设有实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&b&c\\2&b^2&c+1\end{pmatrix}$，其中 a,b,c 为实常数。已知齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解，试求 a,b,c 的值。

2.【2024–2025 秋冬】

已知四元线性方程组 (I): $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$

1. 求方程组 (I) 的基础解系；

2. 已知方程组 (II) 的基础解系为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T\ (k_1,k_2\in\mathbb{R})$，(I) (II) 是否有非零公共解？若有，求出所有公共解，若无，说明理由。

第三板块：特征值与二次型

1. 特征值与特征向量

1.【2021–2022 秋冬】

实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $6\boldsymbol{A}^3+11\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$。

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

2. 令 $\boldsymbol{M}_k=\boldsymbol{A}^k$，证明 $\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{M}_k$ 存在；

3. 证明极限矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是幂等矩阵。

2.【2024–2025 秋冬】

记 $\boldsymbol{\alpha}$ 为所有分量均为 1 的 n $(n>1)$ 元列向量，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$.

1. 求 $|\boldsymbol{J}-\boldsymbol{E}|$;

2.$\boldsymbol{J}^2=n\boldsymbol{J}$ 是否成立？

3. 求 $(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

3.【2024–2025 春夏】

已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}^{n-1}\neq\boldsymbol{0}^T,\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}^T$. 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的逆是 ________________,
$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征子空间维数是 ________.

4.【2019–2020 秋冬】

设有三阶实方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，其中 a,b 为实常数。求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

5.【2023–2024 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值。

6.【2020–2021 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$。

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量。

7.【2021–2022 秋冬】

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 1, -1$，令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^* + 2\boldsymbol{A}^{-1}$，求 $|\boldsymbol{B}|$。

8.【2022–2023 秋冬】

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, 3$。令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 4\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$，求 $|\boldsymbol{B}|$。

9.【2024–2025 春夏】

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，特征值为 $1, 2, 3$，则 $|\boldsymbol{A}^* - 3\boldsymbol{E}| =$ ______。

2. 矩阵的相似对角化

1.【2019–2020 秋冬】

设有三阶实方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，其中 a,b 为实常数。

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

2. 试问 a,b 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化？

3. 在 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化时，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

2.【2024–2025 秋冬】

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}25&0&t\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$。

t 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化？写出 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形；

3.【2020–2021 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$。

求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$。

4.【2023–2024 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -2, 1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$。

求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$。

3. 实对称矩阵与正交对角化

1.【2024–2025 秋冬】

用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形，并求正、负惯性指数。

2.【2024–2025 秋冬】

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}25&0&t\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$。

t 取何值时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 正定？

3.【2019–2020 秋冬】

设有三阶实方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，其中 a,b 为实常数。

在 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化时，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

4. 二次型及其标准形

1.【2024–2025 秋冬】

用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形，并求正、负惯性指数。

2.【2024–2025 秋冬】

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}25&0&t\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$。$t$ 取何值时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 正定？

3.【2023–2024 秋冬】 设 t 为实常数，问当 t 取何值时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 是正定二次型？

4.【2024–2025 春夏】

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，特征值为 $1,2,3$，则 $\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=$ ______。

第四板块：线性空间与欧氏空间

1. 线性空间的基、维数与坐标变换

1.【2024–2025 春夏】

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (a,1,2a-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,2)^T, \boldsymbol{\beta} = (3,4,3)^T$。当 a 满足 ________ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以构成一组基。用这组基线性表示 $\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\beta} =$ ____________。

2.【2023–2024 秋冬】

设 $V = \mathbb{R}[x]_3$，已知向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1 = x^2, \boldsymbol{\alpha}_2 = x, \boldsymbol{\alpha}_3 = 1$ 和向量组 (II): $\boldsymbol{\beta}_1 = 3x^2 + 2x + 1, \boldsymbol{\beta}_2 = 2x + 1, \boldsymbol{\beta}_3 = 3x + 4$ 都是 V 的基。求向量 $\boldsymbol{\gamma} = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 7\boldsymbol{\alpha}_2 + 6\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 (II) 下的坐标。

3.【2022–2023 秋冬】

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (6,4,1,-1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,2,3,-4)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (7,4,3,2,-2)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (5,4,-1,-4,6)^T$。设 L 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 构成的向量空间，且已知 (I) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 和 (II) $\{\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是 L 的两组基，求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$。

2. 子空间的结构与运算

1.【2024–2025 秋冬】

设 $\mathbb{R}^4$ 中集合 $S = \{(a,a,a,b)^T, (a,a,b,a)^T, (a,b,a,a)^T, (b,a,a,a)^T\}$，$a, b$ 为不全为 0 的实数。$L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$，并给出一组基。

2.【2022–2023 秋冬】

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (6,4,1,-1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,2,3,-4)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (7,4,3,2,-2)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (5,4,-1,-4,6)^T$。

1. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩；

2. 设 L 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 构成的向量空间，且已知 (I) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 和 (II) $\{\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是 L 的两组基，求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$。

3.【2019–2020 秋冬】

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,4,3,4)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,1,2,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_5 = (4,5,6,4)^T$ 是实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中的一个向量组，L 是该向量组生成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

1. 试证明：$\boldsymbol{\beta}_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5\}$ 分别是 L 的两组基；

2. 求从基 $\boldsymbol{\beta}_1$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵。

3. 欧氏空间与正交化

1.【2020–2021 秋冬】

设 m, n, p 为正整数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $p \times n$ 实矩阵，并设 $W = \{\boldsymbol{AX} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{BX} = \mathbf{0}_p\}$，其中 $\mathbf{0}_p$ 是一个 p 维零列向量。

1. 证明 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间；
2. 若 $r\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right) = r_1, r(\boldsymbol{B}) = r_2$，试求 W 的维数。

2.【2019–2020 春夏】

设 V 是一个 n 维实线性空间，(I): $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$，(II): $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的两组基，设 $W = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \boldsymbol{\alpha}$ 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标$\}$。

1. 证明 W 是 V 的子空间；
2. 若设向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\eta}_n$ 的秩为 r，试求 W 的维数。

3.【2024–2025 秋冬】

设 $\mathbb{R}^4$ 中集合 $S = \{(a,a,a,b)^T, (a,a,b,a)^T, (a,b,a,a)^T, (b,a,a,a)^T\}$，$a, b$ 为不全为 0 的实数。$L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$，并给出一组基。

第五板块：抽象线性空间与子空间理论

1. 矩阵子空间与交换子空间 ($AX = XA$ 模型)

1.【2023–2024 春夏】

定义集合 $W = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{AX}\}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。1. 证明 W 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间；2. 求 W 的维数。

2.【2022–2023 春夏】

已知 $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$，设 $A \in V$，令 $W_A = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XA\}$ 。

1. 证明：W_A 是 V 的子空间；2. 证明：当 A 为实对称矩阵时，$\dim W_A \geq 2$；3. 当 A 为实对称矩阵且 $\dim W_A = 2$ 时，写出 W_A 的一组基。

3.【2023–2024 秋冬】

设 $R^{3\times3}$ 是所有三阶实方阵构成的实线性空间。已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，令 $W=\{\boldsymbol{X}\in R^{3\times3}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$ 。

1. 证明 W 是 $R^{3\times3}$ 的子空间；
2. 假设矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{3\times3}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，证明 $\boldsymbol{B}=b_{11}\boldsymbol{E}+b_{21}\boldsymbol{A}+b_{31}\boldsymbol{A}^2$；
3. 求 W 的维数 $\dim W$。

4.【2022–2023 秋冬】

线性空间 $W=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&c\\-c&b\end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ 。

1. 证明 W 是 V 的子空间；

2.$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 是 W 的一组基；

5.【2024–2025 春夏】

已知矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}5&1\\5&7\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}$. $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\},\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 分别是空间 M 的一组基，则从 $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\}$ 到 $\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 的过渡矩阵为 ____________. 矩阵组 $\{\boldsymbol{A}_1,2\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{A}_4\}$ 的维数是 ________.

2. 函数与多项式空间（抽象向量）

1.【2019–2020 秋冬】

设 R_+ 为所有正实数组成的集合，加法和数乘定义如下：$\forall a, b \in R_+, k \in \mathbb{R}, a \oplus b = ab, k \odot a = a^k$，已知 R_+ 关于加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$ 构成一个实线性空间，试求 R_+ 的一组基和维数。

2.【2021–2022 秋冬】

对于 $x \in (0,1)$ 的函数空间 V，定义加法 $\forall f, g \in V, f + g \triangleq f(x) + g(x)$，定义数乘法 $\forall k, f \in V, kf \triangleq kf(x)$。

1. 证明：由 $f(x) = ax + be^x$ 能构成子空间；

2. 证明：向量 $f(x) = x, g(x) = x + e^x$ 两个向量线性无关；

3. 把 $f(x) = x, g(x) = x + e^x$ 化为欧氏空间一组标准正交基 η_1, η_2（注：题目隐含内积未给出，通常默认为积分内积或题目上下文中定义的内积，此处需关注正交化流程）。

3.【2024–2025 春夏】

已知 $\mathbb{P}=\{f(x)\mid f(x)$是次数不超过 3 次的一元多项式$\}$。当 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, f(-1)=$ ________ 时，$\mathbb{P}$ 的满足该条件的子集是一个子空间，该子空间的维数是 ________，它的一组基是 ________________。定义该空间的内积 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 则它的一组标准正交基是 ________________。

3. 子空间的构造与特殊定义

1.【2020–2021 秋冬】

设 m, n, p 为正整数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $p \times n$ 实矩阵，并设 $W = \{\boldsymbol{AX} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}_p\}$，其中 $\boldsymbol{0}_p$ 是一个 p 维 (元) 零列向量。

1. 证明 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间；

2. 若 $r\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\right) = r_1, r(\boldsymbol{B}) = r_2$，试求 W 的维数。

2.【2019–2020 春夏】

设 V 是一个 n 维实线性空间，(I): $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$，(II): $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的两组基，设 $W = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \boldsymbol{\alpha}$ 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标$\}$。

1. 证明 W 是 V 的子空间；2. 若设向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\eta}_n$ 的秩为 r，试求 W 的维数。

3.【2024–2025 秋冬】

设 $\mathbb{R}^4$ 中集合 $S = \{(a,a,a,b)^T, (a,a,b,a)^T, (a,b,a,a)^T, (b,a,a,a)^T\}$，$a, b$ 为不全为 0 的实数。$L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$，并给出一组基。

第六板块：经典证明题

1. 秩与矩阵多项式（幂等与对合）

1.【2019–2020 春夏】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$。

1. 证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 -1；
2. 证明：$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$

2.【2022–2023 春夏】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$。

1. 证明：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$；
2. 证明：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}).$

2. 反对称矩阵与正交矩阵

1.【2023–2024 秋冬】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实反对称矩阵（即 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$）。

1. 证明：对于任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$；

2. 证明：$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 均可逆。

2.【2019–2020 春夏】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$，证明：$\det(\boldsymbol{A}) \geq 0$.

3.【2021–2022 秋冬】

设 3 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=1$。证明：$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$.

3. 正定性与对称矩阵

1.【2019–2020 秋冬】

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵。

2.【2020–2021 秋冬】

判断题：若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是否也是正定矩阵？若是，请给出证明；若不是，请举出反例。

3.【2020–2021 秋冬】

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为实反对称矩阵。若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，能否推出 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换（即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$）？证明或举反例。

4. 交换性、反交换性与公共特征向量

1.【2023–2024 春夏】

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有公共特征向量。

2.【2023–2024 春夏】

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶实方阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$。证明：$n$ 是偶数。

5. 矩阵代数、秩不等式与线性无关

1.【2024–2025 秋冬】

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个互不相同的 n 阶实矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{B}^3, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$。证明：$\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 不可逆。

2.【2024–2025 秋冬】

设 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{YX}$。证明：$r(\boldsymbol{X}) + r(\boldsymbol{Y}) \geq r(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) + r(\boldsymbol{XY}) - n$。（注：此题结论可能需核对真题原始条件，此处按常见 Sylvester 推广形式列出）。

3.【2022–2023 秋冬】

设向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ 线性无关。