线性代数（甲）期末考试高频考点与备考策略

目录

前言

编写这份讲义的初衷，并非仅仅是对期末考题的简单堆砌，而是希望能从整体去理解线性代数这门学科。线性代数其实只讲了一件事：**如何用代数的方法解决几何问题，又如何用几何的直观去理解代数运算。**

整体的脉络是非常清晰的“三步走”：

- **第一阶段：工具箱的构建（第一、二板块）。**无论是行列式还是矩阵，本质上都是为了解决**线性方程组**而发明的“容器”。我们关心解的存在性、唯一性以及解的结构，这是所有后续理论的基石。而单独把行列式拿出来，是因为行列式计算本身的技巧性强，需要一整个章节来介绍。

- **第二阶段：动态的跃迁（第三板块）。**当矩阵不再仅仅被视为静态的数据表格，而是被看作对空间的**线性变换**时，特征值与特征向量便应运而生。它们揭示了变换中“不变”的本质（伸缩方向与因子），并最终导向了**二次型**的标准化——将复杂的曲面在合适的坐标系下看清真面目。

- **第三阶段：空间的升华（第四、五板块）。**这是最抽象的一步。我们将具体的数组推广为一般的**线性空间**，将点积推广为**内积**（欧氏空间）。这一步虽然抽象，却是通往现代数学的必经之路，它教会我们如何在一个更广阔的框架下讨论“基”、“维数”与“正交”。

在这份讲义的最后，我特别增加了一个**“第七板块：线性代数的威力——跨学科应用”**。需要特别说明的是，**这一板块并不属于期末考试的直接考察范围**，但我依然希望当你结束繁忙的期末周之后重新来看看这一个章节，你会发现原来线性代数可以这么美！

第一板块：行列式

本板块整理了求解行列式的八种核心方法，结合历年期末试题进行归纳。

0. 前言

在正式开始复习行列式的计算方法前，建议同学们明确复习的优先级以提高效率。

本板块整理的八种方法中，**前六种方法**是线性代数课程的核心基础，能够解决绝大多数标准考题，属于**必修内容**，请务必熟练掌握。

而**第七种（矩阵乘法与秩分析法）**与**第八种（特征值法）**则属于**高阶技巧**。它们虽然在处理特定结构的复杂矩阵时极其高效，但技巧性较强且对综合能力要求较高。对于应对常规期末考试，这两者属于“选学内容”，大家可根据自身的复习进度和精力酌情掌握，不必强求。

1. 化三角形法

通过初等变换将行列式化为上（下）三角形。这是最基础的方法，重点在于观察行与行、列与列之间的倍数关系，或通过第一行（列）消去下方（侧方）元素。

（1）核心知识点

- **变换性质**：行列式的行（列）对换改变符号；某行（列）乘以非零常数 k，行列式变为原来的 k 倍；某行（列）的 k 倍加至另一行（列），行列式值不变。
- **目标形式**：最终目标是构造主对角线下方（或上方）全为 0 的矩阵。此时，行列式的值等于主对角线元素的乘积，即 $D = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$。
- **参照元选取**：在消元过程中，选取的“参照元”应当尽量简单（如 1 或 -1）。若当前位置为 0，需先进行行（列）交换。

（2）破题策略

- **全部加总法**：若观察到每一行（或每一列）的元素之和均相等，可先将所有列加至第一列（或所有行加至第一行），提取公因式后，剩余的一行（列）全为 1，极易进行消元。
- **逐行相减法**：若行列式各行元素呈等差数列或具有某种递增规律，可依次进行 $r_i - r_{i-1}$ 操作，迅速制造出大量的零元素。
- **统一消元法**：利用第一行第一列的非零元素作为枢轴，将同列下方的元素全部化为 0。

（3）例题讲解

例题：计算 n 阶行列式 D_n，其中对角线元素为 a，其余元素均为 b（$a \neq b$）：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解题过程：

第一步：观察规律与列变换观察发现每一列的元素之和均为 $a + (n-1)b$。将第 $2, 3, \ldots, n$ 列全部加到第 1 列（即 $c_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j$）：

$$D_n = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

第二步：提取公因式将第一列的公因子 $[a + (n-1)b]$ 提至行列式符号外，此时第一列全为 1，构成了最理想的消元基础：

$$D_n = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

第三步：行变换化为上三角形固定第 1 行，将下方各行依次减去第 1 行（即 $r_i - r_1, i = 2, \ldots, n$），消去第一列下方的所有 1：

$$D_n = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

第四步：计算结果此时行列式已化为上三角形，其值等于主对角线元素的乘积：

$$D_n = [a + (n-1)b] \cdot 1 \cdot \underbrace{(a-b) \cdot (a-b) \cdots (a-b)}_{n-1 \text{ 个}}$$

$$\therefore D_n = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

2. 降阶法 (Laplace Expansion)

利用行列式按行（列）展开定理，将 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式的线性组合。此方法的核心在于“用空间换时间”，通过降低阶数来简化计算。

（1）核心知识点

- **代数余子式**：元素 a_{ij} 的代数余子式定义为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，其中 M_{ij} 是划去第 i 行和第 j 列后剩下的 $n-1$ 阶行列式。
- **展开定理**：行列式等于任意一行（或列）的各元素与其对应代数余子式乘积之和。

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad (\text{按第}i\text{ 行展开})$$

- **广义降阶**：对于特殊结构的行列式（如中心对称或双边对称），可尝试同时按第一行和最后一行展开，或者建立递推关系。

（2）破题策略

- **先造零，后展开**：切忌直接对满元素的行列式进行展开。务必先利用初等行（列）变换，将某一行（列）化简为仅剩 1 至 2 个非零元素。
- **寻找递推关系**：对于 n 阶与 $n-1$ 阶（或 $n-2$ 阶）结构完全相同的行列式，降阶的目的往往不是直接算出数字，而是建立 D_n 与 D_{n-1} 或 D_{n-2} 的函数关系（递推公式）。

（3）例题讲解

例题 1：箭形行列式（单行直接展开）计算 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}x&1&1&1\\1&x&0&0\\1&0&x&0\\1&0&0&x\end{vmatrix}$。

解题简述：

1. **选行展开**：观察第 4 行仅有 1 和 x 两个非零元素，按第 4 行展开得：

$$D_4=1\cdot A_{41}+x\cdot A_{44}=-1\cdot M_{41}+x\cdot M_{44}$$

2. **计算余子式：**
   - M_{41} 为箭形结构的 3 阶行列式，计算得 x^2。
   - M_{44} 为三对角结构的 3 阶行列式，计算得 x^3-2x。
3. **合并结果**：代回原式得 $D_4=-x^2+x(x^3-2x)=x^4-3x^2$。

例题 2：X 型行列式（双边递归展开） 计算 $2n$ 阶行列式 D_{2n}：

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解题简述：

1. **选行展开：**第一行仅有首尾元素 a, b，按第一行展开：

$$D_{2n} = aM_{1,1} - bM_{1,2n} \quad (\text{注：}(-1)^{1+2n} = -1)$$

2. **二次展开：**
   - 对 $M_{1,1}$ 按其最后一行展开，可得 aD_{2n-2}。
   - 对 $M_{1,2n}$ 按其最后一行展开，可得 bD_{2n-2}。

3. **建立递推：**

$$D_{2n} = a(aD_{2n-2}) - b(bD_{2n-2}) = (a^2 - b^2)D_{2n-2}$$

4. **得出通项：**这是一个公比为 $(a^2 - b^2)$ 的等比数列，故 $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$。

3. 拆分法

拆分法是利用行列式的线性性质或矩阵的结构特征，将复杂行列式分解为若干简单行列式之和的方法。在实际解题中，可分为针对单行（列）的“小拆分”和针对全矩阵结构的“大拆分”。

3.1 小拆分法

这是行列式性质的直接应用，适用于某一行（列）元素可以明显写成两项之和的情况。

- **核心逻辑：**$D(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{x}) = D(\boldsymbol{r}_1) + D(\boldsymbol{x})$。
- **策略：**通常用于消去行列式中的“干扰项”。当某一行包含常数与变量的和（如 $a + x$）时，将其拆分，往往能使其中一项因行比例相同而变为 0，从而只需计算另一项。

例题 1：计算 n 阶行列式 D_n。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_2 & \cdots & 1+a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_3 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解题过程：

1. **拆分第一行**：观察第一行元素均为 $1+a_j$ 的形式，且第二行全为 1。利用线性性质将第一行拆开：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

2. **项的消去**：第一个行列式中，第一行与第二行完全相同，故其值为 0。

3. **计算剩余项**：问题转化为计算第二个行列式。由于该行列式第 3 行到第 n 行元素分别全为 x_i，若 $n \geq 3$，则这些行成比例（实际上全是常数行），除非通过进一步变换，否则在一般情况下若存在两行成比例则直接为 0。

4. **结论**：$D_n = 0$（当 $n \geq 3$ 且行之间线性相关时）。*注：此例旨在展示如何通过拆分直接消去复杂项。*

3.2 大拆分法

此方法专门解决形如“对角线上各不相同、其余元素相同”的矩阵。这类矩阵本质上是“对角阵 + 全 1 矩阵（的倍数）”。

核心思想：如果矩阵 A 可以写成 $D + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$（其中 D 是对角阵，$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 是秩 1 矩阵），那么行列式的值等于：

$$\text{“基础部分”} + \text{“修正部分”}$$

如果不记忆复杂公式，我们可以通过**拆分第一列**配合**观察法**来快速推导。

例题演示：计算 n 阶行列式 D_n，其中对角线元素为 $a_i + b$，其余所有元素均为 b（假设 $a_i \neq 0$）。

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & b & \cdots & b \\ b & a_2+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

解题过程详解：

第一步：识别结构（宏观视角）这个矩阵可以看作是对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 加上了一个所有元素都是 b 的矩阵。如果我们强行用行变换消元，由于 a_i 各不相同，会产生非常复杂的分数。因此，我们选择**"拆分干扰项"**。

第二步：拆分第一列（手术刀法）将第一列的向量 $(a_1+b, b, \dots, b)^T$ 拆分为"纯净项"$(a_1, 0, \dots, 0)^T$ 和"干扰项"$(b, b, \dots, b)^T$。利用行列式线性性质，原式 D_n 变为两部分之和：

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & a_2+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}}_{\text{第一部分：}D_{\text{base}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a_2+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}}_{\text{第二部分：}D_{\text{rank1}}}$$

第三步：秒杀第一部分观察 D_{base}，第一列只有一个非零元素 a_1。按第一列展开后，剩下的 $n-1$ 阶行列式结构与原题完全一致（只是少了一维）。这意味着 D_{base} 实际上开启了一个递归。但更简单地看，如果我们对 D_{base} 继续拆分第二列、第三列……最终留下的**唯一非零项**就是主对角线的乘积：

$$D_{\text{base}} \to \text{对应的主项} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

第四步：秒杀第二部分观察 D_{rank1}，第一列全为 b。我们可以利用第一列的 b，将后面所有列中的 b 全部消掉（$c_j - c_1$）。注意：第 j 列的对角元是 $a_j + b$，减去 b 后只剩 a_j；非对角元是 b，减去 b 后变为 0。

$$D_{\text{rank1}} = \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

这是一个下三角形行列式！其值 = 对角线乘积 $= b \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = \frac{b}{a_1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$。

第五步：一般化规律（大拆分结论）刚才我们计算的是拆分第一列产生的"修正项"。实际上，由于矩阵的对称性，拆分任何一列 k 都会产生一个类似的项：$b \cdot \prod_{j \neq k} a_j$。将所有部分合起来，结果就是：

$$D_n = \text{基础对角积} + \text{所有单列修正之和}$$

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n} \left(b \cdot \prod_{j \neq k} a_j \right)$$

提公因式整理（假设 $a_i \neq 0$）：

$$D_n = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a_k} \right)$$

4. 数学归纳法

当题目要求计算 n 阶行列式 D_n，且其结果通常含 n 的通项公式时，数学归纳法是强有力的证明工具。它通常与“递推公式”结合使用：先猜想，后证明。

（1）核心知识点

- **归纳基础**：验证当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，命题（或公式）成立。这是多米诺骨牌的第一张。
- **归纳假设**：假设当 $n \le k$ 时命题成立（即假设公式对 D_k 和 D_{k-1} 正确）。
- **归纳递推**：利用行列式展开定理建立 D_{k+1} 与 D_k, D_{k-1} 的关系（通常是 $D_{k+1} = aD_k - bD_{k-1}$），将假设代入，证明 $n=k+1$ 时命题也成立。

（2）破题策略

- **特征方程法**：对于形如 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ 的线性递推关系，若题目未给出结论，可利用特征方程 $x^2 - px - q = 0$ 求出通项，再用归纳法形式化证明。
- **双向归纳**：有些特殊的行列式（如反对称矩阵的行列式），可能需要对奇数阶和偶数阶分别进行归纳。

（3）例题讲解

例题：计算 n 阶三对角行列式 D_n：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

解题过程：

第一步：找规律（归纳猜想） 先计算低阶情形：

- $n=1$: $D_1 = |2| = 2 = 1+1$
- $n=2$: $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 = 2+1$
- $n=3$: 按第一行展开，$D_3 = 2D_2 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(3) - 2 = 4 = 3+1$

猜想：$D_n = n+1$。

第二步：建立递推关系按第一行展开 D_{k+1}：

$$D_{k+1} = 2D_k - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}}_{\text{按第一列展开}} = 2D_k - 1 \cdot (1 \cdot D_{k-1})$$

从而得到递推式：$D_{k+1} = 2D_k - D_{k-1}$。

第三步：归纳证明

1. **基础验证**：已知 $n = 1, 2$ 时，公式 $D_n = n+1$ 成立。
2. **归纳假设**：假设对 $n = k$ 和 $n = k-1$ 时公式成立，即：
$$D_k = k+1, \quad D_{k-1} = (k-1)+1 = k$$
3. **递推证明**：考虑 $n = k+1$ 时：
$$D_{k+1} = 2D_k - D_{k-1}$$
将假设代入：
$$D_{k+1} = 2(k+1) - k = 2k+2-k = k+2$$
而根据猜想公式，$n = k+1$ 时应为 $(k+1)+1 = k+2$。两者一致。

结论：由数学归纳法可知，对于任意 $n \geq 1$，行列式的值为 $D_n = n+1$。

5. 升阶法

也称为“加边法”。这是一种逆向思维技巧：当 n 阶行列式难以直接计算时，通过增加一行一列（通常构造第一行或第一列），将其变形为结构更清晰的 $n+1$ 阶行列式。

（1）核心知识点

- **基本原理**：$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & D_n & \\ * & & & \end{vmatrix}_{n+1}$。即原行列式 D_n 可以看作是一个 $n+1$ 阶行列式按第一行展开后的代数余子式（只要第一行首元为 1，其余为 0）。
- **构造方向**：
  - **造爪形**：将满元素的矩阵转化为“爪形（Arrowhead）”或“箭形”矩阵，利用其稀疏性求解。
  - **造对称**：对于非对称矩阵，通过加边使其变为对称矩阵，便于利用对称性质。

（2）破题策略

- **识别背景常数**：当观察到行列式中大量元素为同一个常数 c（例如全 1 矩阵背景），只有对角线元素不同时，是升阶法的最佳使用场景。
- **加边技巧**：
  - 在左上角添加元素 1（作为枢轴）。
  - 在第一行其余位置填入背景常数（如 1）。
  - 在第一列其余位置填入 0（保持原值不变）或特定数值（用于构造差分）。
- **转化逻辑**：通过新加的"边"，对原矩阵进行"整行相减"操作，迅速将复杂的全矩阵消为对角矩阵或爪形矩阵。

（3）例题讲解

例题：计算 n 阶行列式 D_n，其中对角线元素为 a_i+1，其余所有元素均为 1。

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

解题过程：

第一步：加边升阶（构造 $n+1$ 阶）为了利用第一行全是 1 的特点，我们构造一个 $n+1$ 阶行列式。在左上角加 1，第一行其余补 1，第一列其余补 0。根据按第一列展开的性质，新行列式的值等于原行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_2+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

第二步：行变换（化为爪形）利用新加的第一行（全是 1），将下方所有行减去第一行（$r_i - r_1, i = 2, \ldots, n+1$）。这一步操作瞬间消去了原矩阵中所有的背景"1"，只保留了对角线变量和第一列的负号：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

这是一个标准的**“爪形行列式”**，但方向是向左的。

第三步：求解爪形行列式为了计算这个稀疏矩阵，我们将第 2 列到第 $n+1$ 列分别乘以 $\frac{1}{a_i}$ 加到第 1 列（假设 $a_i \neq 0$），目的是消去第一列的 -1：

- $c_1 \leftarrow c_1 + \frac{1}{a_1}c_2 + \frac{1}{a_2}c_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}c_{n+1}$

变换后，左上角元素变为：$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$。第一列其余元素变为 0。此时矩阵变为上三角矩阵（除第一列外），也可以直接按第一列展开：

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$$

整理后得最终结果：

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j\neq k} a_j\right)$$

6. 降阶公式法

对于结构具有高度重复性的行列式（特别是三对角矩阵），直接展开计算量过大，而利用展开定理建立 D_n 与低阶行列式（D_{n-1}, D_{n-2}）的函数关系，将其转化为数列问题求解，是最高效的手段。

（1）核心知识点

- **三对角行列式**：只有主对角线 (a_i)、上方次对角线 (b_i) 和下方次对角线 (c_i) 有非零元素，其余位置全为 0。
- **标准递推式**：对此类矩阵按第一行展开，必能得到形如 $D_n = a_nD_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}$ 的二阶线性递推关系。
- **特征方程解法**：若递推系数为常数（即 $D_n - pD_{n-1} + qD_{n-2} = 0$），可设 $D_n = x^n$，解特征方程 $x^2 - px + q = 0$：
  - 若有两个不等实根 α, β，则 $D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$。
  - 若有重根 α，则 $D_n = (C_1 + C_2n)\alpha^n$。

（2）破题策略

- **“两步展开”法**：
  1. 按第一行展开，得到第一项 $a_{11}D_{n-1}$。
  2. 剩余的余子式 M_{12} 并非标准形式，需对其按**第一列**再次展开，从而得到与 D_{n-2} 相关的项。
- **定初值**：解出通项公式后，必须准确计算 D_1（1 阶）和 D_2（2 阶）的值，代入以确定常数 C_1, C_2。

（3）例题讲解

例题： 计算 n 阶行列式 D_n：

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$$

解题过程：

第一步：建立递推关系按第一行展开：

$$D_n = 3 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} = 3D_{n-1} - 1 \cdot M_{12}$$

分析余子式 M_{12}：

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 1 & \cdots \\ 0 & 2 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}_{n-1}$$

注意 M_{12} 的第一列只有元素 2，其余为 0。按第一列展开：

$$M_{12} = 2 \cdot D_{n-2}$$

代回原式，得到递推公式：

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

第二步：求解特征方程将递推式移项得 $D_n - 3D_{n-1} + 2D_{n-2} = 0$。对应的特征方程为：

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies (x-1)(x-2) = 0$$

解得特征根为 $\alpha = 1, \beta = 2$。故 D_n 的通项公式形式为：

$$D_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$$

第三步：确定常数并写出通项计算基础值：

- $D_1 = 3$
- $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$

建立方程组：

$$\begin{cases} n = 1: \quad C_1 + 2C_2 = 3 \\ n = 2: \quad C_1 + 4C_2 = 7 \end{cases}$$

解得 $C_2 = 2, C_1 = -1$。将常数代入通项公式：

$$D_n = -1 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 1$$

7. 矩阵乘法与秩分析法

当行列式的元素 a_{ij} 并非具体的数值，而是由复杂的函数关系（如 $\sin(i+j)$、$(a_i+b_j)^2$ 等）定义时，直接计算往往陷入泥潭。此时，通过将矩阵 A 分解为两个低维矩阵的乘积，利用秩的性质判定行列式为 0，是最高效的策略。

（1）核心知识点

- **乘积行列式性质**：若 n 阶方阵 A 可分解为两个矩阵的乘积 $A = B_{n\times k} \cdot C_{k\times n}$。
- **秩的控制**：根据秩的不等式，Reference Rank Inequality：$R(A) \le \min(R(B), R(C))$。
- **降维打击**：显然 $R(B) \le k$ 且 $R(C) \le k$。如果中间维度 $k < n$，则 $R(A) \le k < n$。
- **结论**：若 $k < n$，则 A 必为奇异矩阵，其行列式 $D_n = |A| = 0$。

（2）破题策略

- **识别"和式结构"**：观察元素 a_{ij} 是否可以展开为有限项之和，例如 $a_{ij} = f_1(i)g_1(j) + f_2(i)g_2(j) + \cdots + f_k(i)g_k(j)$。
- **判定项数**：数一下展开后的项数 k。如果 k 小于行列式的阶数 n，则直接断定答案为 0。
- **典型信号**：
  - 三角函数加法公式：$\cos(i-j) = \cos i \cos j + \sin i \sin j$（2 项）。
  - 平方差公式：$(x_i - y_j)^2 = x_i^2 - 2x_iy_j + y_j^2$（3 项）。

（3）例题讲解

例题：计算 n 阶行列式 D_n $(n \ge 3)$，其中元素 $a_{ij} = \cos(i-j)$。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(1-2) & \cdots & \cos(1-n) \\ \cos(2-1) & 1 & \cdots & \cos(2-n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n-1) & \cos(n-2) & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解题过程：

第一步：展开通项公式利用三角函数展开公式：

$$a_{ij} = \cos(i-j) = \cos i \cos j + \sin i \sin j$$

这意味着矩阵 A 中的每一个元素都是两项之和。

第二步：构造矩阵乘积我们可以定义两个矩阵 $B_{n\times 2}$ 和 $C_{2\times n}$：

$$B=\begin{pmatrix}\cos 1 & \sin 1\\ \cos 2 & \sin 2\\ \vdots & \vdots\\ \cos n & \sin n\end{pmatrix}_{n\times 2},\quad C=\begin{pmatrix}\cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n\\ \sin 1 & \sin 2 & \cdots & \sin n\end{pmatrix}_{2\times n}$$

验证乘积：$(BC)_{ij}=(\mathrm{row}_i B)\cdot(\mathrm{col}_j C)=\cos i\cos j+\sin i\sin j=\cos(i-j)=a_{ij}$。因此，原矩阵可以表示为 $A=BC$。

第三步：分析秩与行列式由于 B 是 $n\times 2$ 矩阵，C 是 $2\times n$ 矩阵，它们的秩都最大只能是 2。根据矩阵秩的性质：

$$R(A)=R(BC)\le\min(R(B),R(C))\le 2$$

题目给定 $n\ge 3$，这意味着矩阵 A 的秩严格小于其阶数（$R(A)\le 2<n$）。

结论：矩阵 A 线性相关，故行列式的值为 0。

$$D_n=0$$

注：同理可得，若 $a_{ij}=\sin(i+j)$ 或 $a_{ij}=(a_i+b_j)$，当 $n\ge 3$ 时行列式均为 0。

8. 特征值法

利用“行列式等于所有特征值之积”这一基本性质求解。当矩阵具有特殊的代数结构（如 $A=cI+B$，且 B 的特征值易求）时，此方法比行变换快得多。

（1）核心知识点

- **基本定理**：若 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$，则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$。
- **平移性质**：若矩阵 B 的特征值为 μ_i，则矩阵 $A=cI+B$ 的特征值为 $c+\mu_i$。
- **秩 1 矩阵特征值**：对于形如 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 的秩 1 矩阵（如全 1 矩阵），其特征值为：
  - 一个非零特征值 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$。
  - 其余 $n-1$ 个特征值均为 0。

（2）破题策略

- **识别结构**：寻找矩阵是否可以分解为“数量矩阵 + 秩 1 矩阵”的形式，即 $A=kI+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$。常见的信号是对角线元素相同，非对角线元素也相同。
- **三步走流程**：

1. 将矩阵拆解为 $A = cI + B$。
2. 快速写出简单矩阵 B 的特征值 $\mu_1, \ldots, \mu_n$。
3. 计算 A 的特征值 $\lambda_i = c + \mu_i$，并将它们相乘得到结果。

（3）例题讲解

例题：计算 n 阶行列式 D_n，其中对角线元素为 a，其余元素均为 b（$a \neq b$）。

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解题过程：

第一步：矩阵分解观察矩阵结构，对角线为 a，非对角线为 b。这可以看作是对角线为 $a-b$，其余全为 0 的矩阵，加上一个全为 b 的矩阵。令 J 为全 1 矩阵（所有元素均为 1），则原矩阵 A 可表示为：

$$A = (a-b)I + bJ$$

第二步：求 bJ 的特征值首先分析全 1 矩阵 J。

- J 的每一行都相同，秩 $R(J) = 1$，因此它有 $n-1$ 个特征值为 0。
- 根据迹的性质，$\sum \lambda_i(J) = \operatorname{tr}(J) = n$。因为其余特征值为 0，所以剩下的那个非零特征值必为 n。

故 J 的特征值为：$n, 0, 0, \ldots, 0$。矩阵 bJ 的特征值为 J 的特征值的 b 倍：

$$nb, 0, 0, \ldots, 0$$

第三步：求 A 的特征值并计算行列式利用平移性质，矩阵 $A = (a-b)I + bJ$ 的特征值为 bJ 的特征值加上 $(a-b)$：

- $\lambda_1 = (a-b) + nb = a + (n-1)b$
- $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = (a-b) + 0 = a - b$

最后，行列式的值等于所有特征值的乘积：

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{n-1} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

注：此结果与化三角形法所得完全一致，但通过特征值视角，无需进行繁琐的行变换操作。

9. 真题演练

1.【**2019–2020 秋冬**】设有 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\sin(i+j),\forall i,j=1,2,\dots,n$，求行列式 $|A|$ 的值。

2.【**2020–2021 秋冬**】设 x,a,b 为实常数满足 $a\neq b$，计算 $n(n\geq 2)$ 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

3.【**2021–2022 秋冬**】设 n 阶行列式 D，对角线元素为 a_i+x，其余元素为 a_i（即第 i 列元素均为 a_i，仅对角线多一个 x）。证明：

$$D=x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

4.【**2022–2023 秋冬**】设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $\forall 1\leq i,j\leq n,\ a_{ij}=|i-j|$，求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 D_n。

5.【**2023–2024 秋冬**】已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ii}=2\cdot i!$，且当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=j!$。计算 n 阶行列式 $D=|\boldsymbol{A}|$ 的值。

6.【**2019–2020 春夏**】设 x 为非零实常数，有 n 阶三对角矩阵 A，满足 $a_{ii}=1+x^2$，且 $a_{i,i+1}=a_{i,i-1}=x$，其余元素为 0。试证明 $|A|=\sum_{k=0}^{n}x^{2k}$。

7.【**2022–2023 春夏**】已知 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶方阵，其中 $a_{ii}=0$，当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=j$。计算 n 阶行列式 $D_n=|A|$ 的值。

8.【**2023–2024 春夏**】求下列 $n+1$ 阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

第二板块：线性方程组

0. 核心理论框架与等价命题串联

本板块旨在建立线性方程组问题的“全局视野”，将后续三个细分考点的底层逻辑打通。解题的核心在于能够熟练地在“矩阵语言（秩）”、“行列式语言”和“向量语言（解）”之间进行等价转换。

1. “存在性与唯一性”的判别

线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ （A 为 $m \times n$ 矩阵）的解的情况完全由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的秩决定。

- **有解的充要条件**：$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}})$。
- **无解的充要条件**：$r(\boldsymbol{A}) < r(\bar{\boldsymbol{A}})$ （即增广矩阵的秩比系数矩阵多 1）。
- **唯一解的充要条件**：$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = n$ （列满秩，无自由变量）。
- **无穷多解的充要条件**：$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) < n$ （存在自由变量）。

2. n 阶方阵的“非奇异”等价链

当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，以下命题是完全等价的。在考试中，若题目给出其中一个条件，应立即联想到其余所有结论。

命题组 A（“好”的矩阵）：

1. 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解。
2. 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 对任意 $\boldsymbol{b}$ 都有唯一解。
3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆（非奇异）。
4. 行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。
5. 秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$ （满秩）。
6. $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关。
7. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0。

命题组 B（“坏”的矩阵）：

1. 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解。
2. 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 若有解，则必有无穷多解（或无解）。

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆（奇异）。
4. 行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$。
5. 秩 $r(\boldsymbol{A}) < n$ （降秩）。
6. $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性相关。
7. $\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征值为 0。

3. 解的结构与空间维度原理

解的结构本质上是解空间的基（基础解系）的问题。

- **自由度的维度**：齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间维数（即基础解系中包含的向量个数）恒等于 $n - r(\boldsymbol{A})$。
- **解的叠加原理**：
  - 非齐次通解 = 导出齐次通解 + 一个特解。
  - 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解。
  - 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{\alpha} + k_2\boldsymbol{\beta}$ 仍是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解。

4. 方程组之间的关系

考察两个方程组 (I) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 和 (II) $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 之间的深层联系。

- **公共解**：即同时满足两个方程组的解。
  - **计算方法**：等价于求解联立方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。
- **同解**：即方程组 (I) 的解集 S_A 与方程组 (II) 的解集 S_B 完全相等 $(S_A = S_B)$。
  - **判定充要条件**：$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$。
  - **几何解释**：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价（张成相同的行空间）。
  - **特例**：若 (I) 的解也是 (II) 的解（$S_A \subseteq S_B$），则充要条件为 $r(\boldsymbol{A}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$。

1. 矩阵的运算

（1）伴随矩阵

- **核心公式**：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵，k 为常数：

    1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ （逆矩阵推导基础：$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$）
    2. $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$
    3. $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$ （**高频易错点**：系数是 $n-1$ 次方）
    4. $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$
    5. $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

（2）初等矩阵

- **核心逻辑（左行右列）**：
    - 对矩阵做初等**行**变换 $\iff$ **左**乘初等矩阵 $\boldsymbol{P}$。
    - 对矩阵做初等**列**变换 $\iff$ **右**乘初等矩阵 $\boldsymbol{Q}$。
- **求逆矩阵的"初等变换法"**：原理：对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E})$ 进行初等行变换，当左侧变为 $\boldsymbol{E}$ 时，右侧即为 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) \xrightarrow{r} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1})$$

（3）秩 (Rank) 的常用不等式

在处理抽象矩阵的秩或证明题时，以下不等式是推导的关键依据：

- **加法**：$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$
- **乘法**：$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \le \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$
- **Sylvester 不等式（重点）**：若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}, \boldsymbol{B}_{n\times p}$，则 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \ge r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n$。
- **转置与乘积（实矩阵）**：$r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A})$。

（4）分块矩阵

分块矩阵是处理高阶矩阵（特别是特定结构矩阵）求逆、求秩的利器。

分块求逆公式（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆）

- **准对角阵：**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

- **分块三角阵（口诀：主对角求逆，副对角变号夹中间）：**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

分块行列式与秩

- **行列式：**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$$

- **秩：**

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}), \quad r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$$

2. 含参线性方程组的求解与讨论

此类题目是线性方程组板块中计算量最大、分值最高的题型。通常要求考生根据参数 λ 或 μ 的不同取值，判定方程组解的情况（唯一解、无穷多解或无解），并在有解时求出通解。

（1）核心知识点

- **判定定理（Rouché-Capelli 定理）：** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 系数矩阵，$\bar{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为增广矩阵：
  - **无解** $\iff r(\boldsymbol{A}) < r(\bar{\boldsymbol{A}})$（即增广矩阵的秩由常数项列增加）。
  - **有解** $\iff r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}})$。
    - **唯一解** $\iff r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = n$（列满秩，无自由未知量）。
    - **无穷多解** $\iff r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) < n$（存在 $n - r(\boldsymbol{A})$ 个自由未知量）。
- **Cramer 法则（仅适用于 $m = n$）：** 若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则方程组有唯一解。若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则方程组无解或有无穷多解（需进一步讨论）。

（2）破题策略

针对含参方程组，主要有两种通用的解题路径：

- **路径一：行列式优先法（适用于 $m = n$ 的方阵）**
  1. **第一步**：计算系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$。
  2. **第二步**：令 $|\boldsymbol{A}| = 0$，解出参数（如 λ_1, λ_2）的临界值。
  3. **第三步**：
     - 当 $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ 时，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，方程组有唯一解（可用 Cramer 法则或直接消元求解）。
     - 当 $\lambda = \lambda_1$ 或 λ_2 时，代入原方程组，对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 进行初等行变换，判定是无解还是无穷多解。
- **路径二：增广矩阵行变换法（适用于 $m \neq n$ 或行列式极难算）**
  1. **第一步**：直接写出增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$。
  2. **第二步**：对其进行初等行变换，化为行阶梯形矩阵。注意在消元过程中，若作为分母的元素含有参数，需讨论该元素是否为零。
  3. **第三步**：观察阶梯形矩阵的“台阶数”（秩），根据判定定理讨论参数取值与解的关系。

（3）真题演练

1.【2020–2021 秋冬】
设 λ, μ 为实常数，试求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \mu x_4 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \mu \end{cases}$$

2.【2021–2022 秋冬】
设 λ 为实参数，求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

3.【2022–2023 春夏】
设 λ 为实常数，求解四元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

4.【2023–2024 秋冬】
设 λ 为实数，求解四元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

3. 解的结构与通解构造

此板块主要考察在未给出具体数值矩阵的情况下，利用解的性质、基础解系与秩的关系来构造通解。题目通常给出部分特解或秩的信息。

（1）核心知识点

- **解的结构定理**：非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解结构为：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_p$$

  其中 $\boldsymbol{x}_h$ 是导出齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解（包含 $n - r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量），$\boldsymbol{x}_p$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的某一个特解。

- **解的线性性质（叠加原理）**：
  - 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2$ 仍是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解。
  - 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解（**差为齐次解**）。
  - 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解。

- **线性组合的解判定**：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，令 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{\alpha}_s$。
  - $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解 $\iff \sum_{i=1}^{s} c_i = 1$。
  - $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解 $\iff \sum_{i=1}^{s} c_i = 0$。

（2）破题策略

- **构造基础解系法**：当题目给出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个特解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 时：
  1. **确定自由度**：根据 n（未知数个数）和 $r(\boldsymbol{A})$ 确定基础解系中向量的个数 $k=n-r(\boldsymbol{A})$。
  2. **构造齐次解**：利用“特解之差”构造齐次方程组的解，如 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 等。
  3. **验证无关性**：确保构造出的 $\boldsymbol{\eta}_i$ 线性无关。
  4. **写出通解**：$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_k\boldsymbol{\eta}_k+\boldsymbol{\alpha}_1$。
- **向量反求法**：若已知解的线性组合关系（如 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}$），先解出具体的 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 向量，再利用上述方法构造。

（3）真题演练

1.【2022–2023 秋冬】
已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^T$, $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$，求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

2.【2023–2024 春夏】
$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 3×1 列向量，且 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$。求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$ 的解。

3.【2024–2025 春夏】
已知 $r(\boldsymbol{A})=3,\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，线性无关的 5 元列向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 是方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个特解，则方程的通解是 ________________。若 $c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+c_3\boldsymbol{X}_3$ 是方程的一个解，则 c_1,c_2,c_3 满足 ____________。

4. 基础解系、同解与公共解

此板块考察线性方程组解空间的几何关系，题目通常涉及两个方程组，要求判断它们解集是否相同（同解）或寻找它们的交集（公共解）。

（1）核心知识点

- **基础解系的判定**：向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_s$ 构成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的充要条件：
  1. $\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_s$ 均是方程组的解。
  2. $\boldsymbol{\xi}_1,\dots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关。
  3. $s=n-r(\boldsymbol{A})$（解向量个数等于自由度）。

- **公共解**：向量 $\boldsymbol{x}$ 是方程组 (I) $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 (II) $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的公共解，等价于 $\boldsymbol{x}$ 满足联立方程组：
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$
- **同解)**：方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解 $\iff$ 它们的解空间相同。
  - **秩判据**：$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$。
  - **代数判据**：(I) 的解全是 (II) 的解，且 (II) 的解全是 (I) 的解。

（2）破题策略

- **求公共解的"代入降维法"**：当两个方程组变量较多或其中一个已给出通解时：
  1. **第一步**：求出方程组 (I) 的通解 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$。
  2. **第二步**：将该通解代入方程组 (II) $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$。
  3. **第三步**：得到关于 k_i 的齐次线性方程组，解出 k_i 之间的关系。
  4. **第四步**：将 k_i 回代，得到公共解。
- **同解反求参数法**：若已知 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解，且其中一个（如 $\boldsymbol{A}$）无参数：
  1. **第一步**：先求出已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系。
  2. **第二步**：将基础解系代入含参方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$，得到关于参数的方程。
  3. **第三步**：结合 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 排除增根，确定参数值。

（3）真题演练

1.【2019–2020 秋冬】

设有实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&b&c\\2&b^2&c+1\end{pmatrix}$，其中 a,b,c 为实常数。已知齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解，试求 a,b,c 的值。

2.【2024–2025 秋冬】

已知四元线性方程组 (I): $\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2-x_4=0\end{cases}$

(1) 求方程组 (I) 的基础解系；

(2) 已知方程组 (II) 的基础解系为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$ $(k_1,k_2\in\mathbb{R})$，(I) (II) 是否有非零公共解？若有，求出所有公共解，若无，说明理由。

5. 线性相关性的"七大判定法则"

（1）"维数压制"类

- **定理 1（个数多于维数必相关）**：在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中，任意 $n+1$ 个向量构成的向量组**必线性相关**。*直观理解*：三维空间里塞不下 4 个线性无关的向量。
- **定理 2（零向量法则）**：若向量组中包含零向量 $\mathbf{0}$，则该向量组**必线性相关**。

（2）"整体与局部"类

- **定理 3（部分相关 $\implies$ 整体相关）**：若向量组的一部分线性相关，则整个向量组必线性相关。
- **定理 4（整体无关 $\implies$ 部分无关）**：若整个向量组线性无关，则其任一部分必线性无关。

（3）"延长与截短"类

设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 n 维向量，将其"延长"得到 $n+1$ 维向量 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$（增加分量）；反之称为"截短"。

- **定理 5（无关能延长）**：若原向量组 **线性无关**，则"延长"后的向量组 **仍线性无关**。*口诀：原本就不在同一平面，增加维度后更不可能在同一平面。*
- **定理 6（相关能截短）**：若原向量组 **线性相关**，则"截短"后的向量组（若维数仍足够）通常 **仍线性相关**？**修正结论**：这一条要反过来说——若"延长"后线性相关，则原向量组必相关；若"截短"后线性无关，则原向量组必无关。
- 高频考点总结：
  - **线性无关** $\xrightarrow{\text{加长}}$ **线性无关**
  - **线性相关** $\xrightarrow{\text{截短}}$ **线性相关**（注：这是指若高维向量组相关，去掉某个分量后往往仍相关，严格表述为：若 n 维线性无关，则 $n-1$ 维必线性无关的逆否命题）。

（4）"方程组联系"类

- **定理 7**：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\iff$ 齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 有**非零解**。

6. 极大线性无关组与秩的求法

（1）核心概念

- **极大线性无关组**：向量组中“最精简”的代表，满足两个条件：(1) 自身线性无关；(2) 原向量组中任一向量都能被它们线性表示。
- **秩 (Rank)**：极大线性无关组中向量的**个数**。记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$。
- **重要结论：向量组的秩 = 构成矩阵的秩**。

（2）标准求法算法（行变换法）

题目：求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组。
步骤：

1. **拼矩阵**：将向量**按列**拼成矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$。
2. **化阶梯**：对 $\boldsymbol{A}$ 仅作**初等行变换**，化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$。注意：千万不要做列变换，否则会打乱向量之间的线性组合关系！
3. **找主元**：观察 $\boldsymbol{B}$ 中**主元（台阶角上的元素）所在的列**。假设主元在第 1、第 3 列。
4. **定结果**：
   - **极大无关组**：原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第 1、第 3 列（即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$）。警示：选的是原向量，不是变换后的向量！
   - **表示系数**：阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 2、4 列（非主元列）的数值，直接给出了 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 如何由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的系数。

第三板块：特征值与二次型

本板块主要考察矩阵的对角化理论、实对称矩阵的特殊性质以及二次型的标准化与正定性判定。

0. 核心理论框架

本板块是线性代数中最抽象但也最精彩的部分。它完成了从“静态的阵列（矩阵）”到“动态的变换（特征值）”的跨越，并将代数问题（二次型）转化为几何标准形。解题的核心在于抓住**“不变量”**。

（1）矩阵的三张“身份证”

一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的性质可以通过三套语言描述，它们在**相似变换**下保持不变（守恒量）：

- **多项式语言**：特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$。
- **数值语言**：
  - 迹（Trace）：$\sum \lambda_i = \sum a_{ii} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$。
  - 行列式（Determinant）：$\prod \lambda_i = |\boldsymbol{A}|$。
- **几何语言**：特征值 λ（伸缩因子）与特征向量 $\boldsymbol{\xi}$（伸缩方向）。

（2）可对角化的逻辑判定树

判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化（即是否存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$）是核心考点。

判定流程：

1. **第一眼：看对称性**
   - 若 $\boldsymbol{A}$ 是**实对称矩阵** $(\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}) \implies$ **必可对角化**。且必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$（这是最高级的对角化）。
2. **第二眼：看特征值**
   - 若 n 个特征值**互不相同** $\implies$ **必可对角化**。
   - 若有重特征值（设 λ_i 是 k 重根）$\implies$ 需进一步检验。
3. **第三步：算秩（几何重数检验）**
   - 对于 k 重特征值 λ_i，计算 $r(\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$。

- **充要条件**：$n - r(\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = k$（即线性无关特征向量的个数 = 特征值的重数）。

（3）相似 ($\sim$) 与合同 ($\simeq$) 的辨析

这是考研和期末考试中最易混淆的概念，必须严格区分：

- **相似 ($\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$)**：侧重于**线性变换**。
  - **核心不变量**：特征值相同、行列式相同、迹相同、秩相同。
  - **应用**：求矩阵高次幂、求解微分方程组。
- **合同 ($\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$)**：侧重于**二次型**。
  - **核心不变量**：正负惯性指数相同（即正、负特征值的个数分别相同）、秩相同。
  - **注意**：合同变换**不改变**特征值的符号，但**改变**特征值的具体数值。
- **特殊的交集——正交变换**：若 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵（$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$），则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$。
  - 此时变换**既是相似又是合同**。
  - 结论：实对称矩阵可以通过正交变换化为对角阵，且对角线元素即为特征值。

（4）正定矩阵的“全家桶”等价命题

对于 n 阶**实对称**矩阵 $\boldsymbol{A}$，以下命题互为充要条件（等价）：

1. **定义法**：对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$。
2. **特征值法**：$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全大于 0 ($\lambda_i > 0$)。
3. **顺序主子式法**：$\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于 0。
4. **惯性指数法**：$\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $p = n$（即标准形中平方项系数全为正）。
5. **合同分解法**：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$。

1. 特征值与特征向量

特征值是矩阵“身份”的核心标识，它是将矩阵运算转化为数值运算的桥梁。无论是具体的数值矩阵还是抽象的代数结构，特征值的求解都是解题的第一步。

（1）核心知识点

- **定义与计算方程**：非零向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，则 λ 为特征值。
- **特征多项式**： $f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$。特征值即为特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 的根。
- **韦达定理（三大守恒量）**：设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则：
  1. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ （迹）。
  2. $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\boldsymbol{A}|$ （行列式）。
  3. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $1/\lambda_i$；$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $|\boldsymbol{A}|/\lambda_i$。
- **谱映射定理**：若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，则多项式矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)$。例如 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 λ^k。

（2）抽象矩阵特征值的分析策略

处理抽象矩阵特征值问题时，核心在于识别矩阵的**结构特征**（如是否为秩 1 矩阵、是否为多项式关系），进而利用**秩**与**迹**的性质“秒杀”特征值，避免复杂的行列式计算。

- **1. 秩 1 矩阵（Rank-1 Matrix）模型**

  识别特征：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行（或列）都是第一行（或列）的倍数，或者可以直接写成 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 的形式（其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量）。

  具体例子：设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$。

  - **观察**：$r(\boldsymbol{A}) = 1$（行向量成比例），且 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$。
  - **0 特征值**：因为 $r(\boldsymbol{A}) = 1 < 3$，所以齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有 $3 - 1 = 2$ 个线性无关的解。这意味着 $\lambda = 0$ 是二重特征值。
  - **非 0 特征值**：利用迹（Trace）的性质，$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 1 + 2 + 3 = 6$。因为已有两个 0，所以第三个特征值必为 6。
  - **结论**：$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $6, 0, 0$。

推广结论：对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，其特征值为 $\lambda_1=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$。

- **2. “秩 1 修正”矩阵模型（位移变换）**

  识别特征：矩阵的形式为“数量矩阵 + 秩 1 矩阵”，即 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}+m\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$。最典型的例子是全 1 矩阵的变形。

  具体例子：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$。

  - **分解**：观察发现 $\boldsymbol{A}$ 可以拆解为

    $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}$$

    其中 $\boldsymbol{J}$ 是秩 1 矩阵（全 1 矩阵）。
  - **中间步**：先求 $\boldsymbol{J}$ 的特征值。$\operatorname{tr}(\boldsymbol{J})=3$，故 $\boldsymbol{J}$ 的特征值为 $3,0,0$。
  - **位移**：根据谱映射原理，$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}$ 的特征值即为 $\boldsymbol{J}$ 的特征值统一加上 2。
  - **结论**：$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3+2=5,\ 0+2=2,\ 0+2=2$。

  推广结论：形如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$ 的矩阵，特征值为 $a-b+nb$（1 个）和 $a-b$（$n-1$ 个）。

- **3. 矩阵多项式（零化多项式）**

  识别特征：题目不给出矩阵的具体元素，而是给出一个关于 $\boldsymbol{A}$ 的等式，如 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$。

  具体例子：设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{E}$。

  - **原理**：若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ 必须满足题目给出的代数关系。
  - **计算**：由 $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{E}$ 可得 $\lambda^2=4$，解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-2$。
  - **结论**：$\boldsymbol{A}$ 的实特征值只能是 2 或 -2。（注意：这并不意味着 2 和 -2 一定同时存在，例如 $2\boldsymbol{E}$ 满足条件但特征值全为 2）。

  常见模型速查：

  - **幂等矩阵** $(\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A})$：特征值只能是 1 或 0。

- **幂零矩阵** ($\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$)：特征值全为 0。
- **正交矩阵** ($\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$)：实特征值只能是 1 或 -1（复特征值模为 1）。

（3）真题演练

【2021–2022 秋冬】
实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $6\boldsymbol{A}^3+11\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$。

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 令 $\boldsymbol{M}_k=\boldsymbol{A}^k$，证明 $\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{M}_k$ 存在；

(3) 证明极限矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是幂等矩阵。

【2024–2025 秋冬】
记 $\boldsymbol{\alpha}$ 为所有分量均为 1 的 n $(n>1)$ 元列向量，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$.

(1) 求 $|\boldsymbol{J}-\boldsymbol{E}|$;

(2) $\boldsymbol{J}^2=n\boldsymbol{J}$ 是否成立？

(3) 求 $(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

【2024–2025 春夏】
已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}^{n-1}\neq\boldsymbol{0}^T,\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}^T$. 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的逆是 ________________，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征子空间维数是 ________.

【2019–2020 秋冬】
设有三阶实方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，其中 a,b 为实常数。

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

【2023–2024 秋冬】
已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值。

【2020–2021 秋冬】
已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$。

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量。

【2021–2022 秋冬】
设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,-1$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{A}^{-1}$，求 $|\boldsymbol{B}|$。

【2022–2023 秋冬】
已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$。令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，求 $|\boldsymbol{B}|$。

【2024–2025 春夏】
已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，特征值为 $1,2,3$，则 $|\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{E}|=$ ______。

2. 矩阵的相似对角化

矩阵的相似对角化是连接“矩阵特征值”与“解线性方程组”的枢纽，也是考研和期末考试中计算量较大、步骤分较多的大题考点。

（1）核心知识点

- **定义**：若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$（其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵），则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。
- **判定充要条件（核心判据）**：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。
- **几何重数判定法（代数判据）**：对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个 k_i 重特征值 λ_i，其对应的线性无关特征向量的个数（即几何重数）必须等于 k_i。

$$n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=k_i$$

- **充分条件**：
  1. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个**互不相同**的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化。
  2. 若 $\boldsymbol{A}$ 是**实对称矩阵**（$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$），则 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化。

（2）破题策略

- **求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的标准步骤**：
  1. **求特征值**：解方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得到 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$。
  2. **求特征向量**：对每个互异的 λ_i，求解齐次方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\dots,\boldsymbol{\xi}_{ik}$。
  3. **构造矩阵**：令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_{11},\dots,\boldsymbol{\xi}_{mk})$（将所有基础解系拼成列向量），$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$（注意对角元顺序需与 $\boldsymbol{P}$ 中列向量对应）。

- **含参矩阵对角化的讨论策略**：当矩阵含有参数时，通常在两个地方出现“分叉点”：
    1. **特征值重合点**：当参数取特定值导致 $\lambda_i = \lambda_j$ 时，此时不再满足“互异”的充分条件，必须检验 $n - r(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ 是否等于重数。
    2. **特征值为常数时**：若算出 $\lambda_1 = 1$（二重），直接建立方程 $n - r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$，即 $r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - 2$，利用秩的性质反解参数。

（3）真题演练

1.【2019–2020 秋冬】

设有三阶实方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 a, b 为实常数。

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 试问 a, b 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化？

(3) 在 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化时，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

2.【2024–2025 秋冬】

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，$t \in \mathbb{R}$。

(1) t 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化？写出 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形；

3.【2020–2021 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$。

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$。

4.【2023–2024 秋冬】

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -2, 1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$。

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$。

3. 实对称矩阵与正交对角化

实对称矩阵是线性代数中最完美的矩阵类，它保证了“正交对角化”的必然性，是解决二次型标准化问题的理论基础。

（1）核心知识点

- **谱定理**：对于任意 n 阶**实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$**（即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$）：
  1. $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ **全为实数**。
  2. $\boldsymbol{A}$ 属于不同特征值的特征向量**天然正交**（即若 $\lambda_i\neq\lambda_j$，则 $\boldsymbol{\xi}_i^T\boldsymbol{\xi}_j=0$）。
  3. **$\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化**，且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$（满足 $\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}$），使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$。
- **正交矩阵的性质**：若 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，则其列向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基（两两正交且长度为 1）。

（2）破题策略

题目通常要求求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 对角化，或要求通过正交变换化简二次型。
标准计算五步法：

1. **求特征值**：解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求出 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$。
2. **求基础解系**：对每个 λ_i，求出齐次方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关特征向量。
3. **施密特正交化（关键步骤）**：
   - 对于**单重特征值**，无需正交化，直接进行下一步。
   - 对于**重特征值**（如 k 重根），若求出的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 不正交，必须使用施密特正交化公式将其化为正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$。

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots$$

4. **单位化**：将所有正交后的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 归一化，令 $\boldsymbol{e}_i=\frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}$。
5. **构造矩阵**：令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 即为所求正交矩阵。

（3）真题演练

1.【2024–2025 秋冬】
用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形，并求正、负惯性指数。

2.【2024–2025 秋冬】
已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}25&0&t\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$。

(2) t 取何值时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 正定？

3.【2019–2020 秋冬】

设有三阶实方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，其中 a,b 为实常数。

(3) 在 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化时，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

4. 二次型及其标准形

二次型是特征值理论在几何与代数上的直接应用，考查重点在于“化标准形”的两种方法（配方法与正交变换法）及其区别，以及正定性的判定。

（1）核心知识点

二次型理论的核心在于将代数多项式问题转化为矩阵问题，通过坐标变换简化结构，最后根据简化后的特征判定性质。

- **1. 二次型的矩阵表示（一一对应原理）**
  - **定义**：n 元二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 可以唯一地表示为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。
  - **构造法则（易错点）**：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必须是**实对称矩阵**。具体构造方法如下：
    * **对角元** a_{ii}：直接等于平方项 x_i^2 的系数。
    * **非对角元** a_{ij} $(i\neq j)$：等于交叉项 x_ix_j 系数的**一半**。

    例如：$f=x_1^2+4x_1x_2$，则 $a_{11}=1,a_{12}=a_{21}=2$，即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$。
- **2. 合同变换与惯性定律（几何本质）**
  - **坐标变换**：令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵），代入原式得 $f=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$。
  - **合同关系**：若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **合同**（记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$）。
    * 对比：相似变换是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，研究线性变换；合同变换是 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，研究二次型。
    * 注意：正交变换（$\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}$）既是相似又是合同。
  - **惯性定律（The Law of Inertia）**：任意二次型都可以通过非退化的线性变换化为标准形 $d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$。虽然标准形不唯一（系数 d_i 的值依赖于变换方法），但其中**正系数的个数** p（正惯性指数）和**负系数的个数** q（负惯性指数）是唯一确定的。

  - **规范形**：若进一步将系数化为 $1,-1,0$，则称为规范形，它是唯一的。

- **3. 正定二次型的判定（核心判据）**正定性描述了二次型函数图像的“凹凸性”（类似抛物线开口向上）。

  - **定义法**：对任意非零向量 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，都有 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$。
  - **数值判据（特征值）**：$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 λ_i **全大于 0**。
  - **代数判据（Sylvester 定理）**：$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的所有**顺序主子式**全大于 0（即 $D_1 > 0, D_2 > 0, \ldots, D_n > 0$）。
  - **必要条件（用于快速排除）**：若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则对角线元素 $a_{ii} > 0$ 且 $|\boldsymbol{A}| > 0$。

（2）经典例题详解

通过以下三道典型例题，分别演示配方法、正交变换法及正定性判定的具体操作流程。

例题 1：配方法化标准形（关注惯性指数）

题目：将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$ 化为标准形，并求正惯性指数。

1. **解析：**使用配方法，核心思想是“消灭交叉项”。

$$
\begin{aligned}
f &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3) + 6x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 4x_3^2 + 6x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + 2x_3^2
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$。

2. **结论：**标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$，正惯性指数 $p = 3$（正定）。

例题 2：正交变换化标准形（关注特征向量正交化）

题目：设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}$ 为对角阵。

1. **步骤一（求特征值）：**$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$，特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$。

2. **步骤二（求特征向量）：**

- 对于 $\lambda_1=2$，解方程组得基向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$。
- 对于 $\lambda_{2,3}=-1$，解方程组得基向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^T$。

3. **步骤三（正交化与单位化）**：$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{2,3}$ 天然正交（实对称矩阵性质），但 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不正交，需施密特正交化：

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\cdots=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T$$

单位化后得 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$。

4. **结论**：$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，标准形为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$。

例题 3：含参正定性判定（关注顺序主子式）
题目：设二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ 正定，求 a 的范围。

1. **矩阵构造**：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&1\\0&1&2\end{pmatrix}$。
2. **使用主子式判据**：
   - 1 阶：$D_1=1>0$。
   - 2 阶：$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&a\end{vmatrix}=a-1>0\implies a>1$。
   - 3 阶：$D_3=|\boldsymbol{A}|=1(2a-1)-1(2)=2a-3>0\implies a>1.5$。
3. **结论**：$a>1.5$。

（3）破题策略

- **策略一：化标准形的方法选择**
  1. **正交变换法（$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$）**：
     - **适用场景**：题目明确要求“用正交变换”，或涉及几何形状（旋转不改变形状），或需要求具体的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$。
     - **核心难点**：必须进行施密特正交化。
     - **结果**：标准形系数完全等于特征值。
  2. **配方法（$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$）**：
     - **适用场景**：仅要求“化为标准形”或求惯性指数，不限制变换类型。此法计算量通常远小于正交变换。

  – **结果**：标准形系数**不一定**是特征值，但符号个数与特征值一致。

- **策略二：正定性判定的"双轨制"**
  - **具体数字矩阵**：首选 **顺序主子式**，如例题 3 所示，计算简单直接。
  - **抽象/含参矩阵**：首选 **特征值**，结合迹（$\sum \lambda_i$）和行列式（$\prod \lambda_i$）性质讨论，避免复杂的行列式展开。

（4）真题演练

1.【2024–2025 秋冬】
用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形，并求正、负惯性指数。

2.【2024–2025 秋冬】
已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}25&0&t\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$。

(2) t 取何值时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 正定？

【2023–2024 秋冬】设 t 为实常数，问当 t 取何值时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 是正定二次型？

4.【2024–2025 春夏】
已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，特征值为 $1,2,3$，则 $\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=$ ______。

第四板块：线性空间与欧氏空间

本板块主要考察抽象线性空间的结构（基、维数）、子空间的运算（交与和）、线性变换的矩阵表示以及欧氏空间中的几何度量（内积、正交化）。

0. 核心理论框架

本板块是线性代数**抽象程度最高**的部分。它并非引入新的计算工具，而是将前三板块的"矩阵与向量计算"升华为一种通用的"空间结构观"。解题的核心在于**"坐标化"**——将抽象问题转化为我们熟悉的 $\mathbb{P}^n$（数组）问题。

（1）三层空间的进阶逻辑

线性代数的空间理论遵循"具体 $\to$ 抽象 $\to$ 几何"的构建路径：

1. **算术模型——$\mathbb{P}^n$**

- **对象**：具体的 n 元数组（列向量），如 $(1,2,3)^T$。
- **地位**：这是所有计算的基础“母版”。所有的抽象空间问题，最终都要落地到 $\mathbb{P}^n$ 中进行数值计算。

2. **代数模型——线性空间 V**

- **对象**：任意满足“加法”与“数乘”八条公理的集合。
- **典型例子**：多项式空间 $P[x]_n$、矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$、连续函数空间 $C[a,b]$。
- **核心思想**：**去特殊化**。不再关心元素“长什么样”（是数组、多项式还是函数），只关心它们“怎么算”。

3. **几何模型——欧氏空间 E**

- **对象**：定义了“内积”的实线性空间。
- **核心增量**：在线性空间 V 的基础上增加了**“度量”**（Metric）。
- **解决问题**：线性空间只能谈“线性相关/无关”，欧氏空间可以谈“长度”、“夹角”和“垂直（正交）”。

（2）解题的总纲：同构原理

这是贯穿本板块的灵魂定理：**任何 n 维数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V，都与 n 元向量空间 $\mathbb{P}^n$ 同构。**

这意味着：

- **坐标化**：一旦在 n 维空间 V 中选取了一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，任一抽象向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 就唯一对应一个坐标向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^T\in\mathbb{P}^n$。
- **运算迁移**：
  - 抽象向量的**线性运算** $\Longleftrightarrow$ 坐标向量的**矩阵运算**。
  - 抽象向量的**线性无关** $\Longleftrightarrow$ 坐标向量构成的矩阵**秩满**。
  - 抽象空间的**过渡矩阵** $\Longleftrightarrow$ 基向量坐标之间的**转换关系**。

（3）结构的演化：从基到标准正交基

从代数结构向几何结构的进化，本质上是坐标系的“提纯”过程。

- **1. 一般线性空间的“基”（斜坐标系）：**
  - **定义**：仅要求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。

  - **几何直观**：基向量之间的夹角任意，长度也任意。这导致了一个“歪斜”的坐标网格。
  - **计算困境**：在此基下，若向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标为 $(x_1,\ldots,x_n)^T$，其长度（范数）**不等于** $\sqrt{\sum x_i^2}$。
  - **度量矩阵**：必须引入 Gram 矩阵 $\boldsymbol{G}=((\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j))_{n\times n}$，此时内积计算公式为复杂形式：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}$。

- **2. 欧氏空间的“标准正交基”（直角坐标系）**：
  - **定义**：基向量满足 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\delta_{ij}$（即两两垂直，且模长为 1）。
  - **优越性**：在此基下，Gram 矩阵退化为单位矩阵 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}$。
  - **计算回归**：此时抽象的内积运算回归到了高中熟悉的“点积”形式：

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

    这使得我们可以直接用坐标的平方和来度量长度（Parseval 等式）。

- **3. 施密特 (Schmidt) 正交化**：
  - **本质**：这是一个“去相关”与“归一化”的算法。
  - **几何操作**：
    1. **投影与扣除**：$\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{\alpha}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j$。即：将 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 在前面所有基向量上的投影扣除，剩下的部分必然垂直于前面的空间。
    2. **单位化**：$\boldsymbol{\varepsilon}_k=\frac{\boldsymbol{\beta}_k}{\|\boldsymbol{\beta}_k\|}$。统一标度，消除长度差异。

1. 线性空间的基、维数与坐标变换

这一板块考察如何将抽象的代数对象（如多项式、矩阵）“数值化”。解题的关键在于利用同构思想，将一切问题转化为我们熟悉的列向量与矩阵运算。

（1）核心知识点

- **基与维数**：在线性空间 V 中，若存在 n 个向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，且 V 中任一向量均可由其线性表示，则称这组向量为 V 的一组**基**，数 n 为 V 的**维数** $(\dim V=n)$。

- **坐标**：若 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则称列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的**坐标**。

- **过渡矩阵**：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ （旧基）和 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ （新基）是 V 的两组基，且满足

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

  则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为从旧基到新基的**过渡矩阵**。

- **坐标变换公式（易错点）**：设向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在旧基下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，在新基下的坐标为 $\boldsymbol{y}$，则：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$$

  记忆口诀：旧坐标 $=$ 过渡矩阵 $\times$ 新坐标。

（2）破题策略

- **策略一：抽象空间的“坐标化”**对于多项式空间 $P[x]_n$ 或矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$，解题第一步通常是选取一组“自然基”，写出各个向量的坐标，从而转化为 $\mathbb{R}^n$ 中的秩与线性相关性问题。
  - 多项式 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \longrightarrow$ 坐标 $(a_0, a_1, \dots, a_n)^T$。
  - 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow$ 坐标 $(a, b, c, d)^T$。

- **策略二：过渡矩阵的求法**若已知两组基的坐标形式（列向量组）分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$（即 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_n)$），根据定义 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

  计算技巧：对增广矩阵 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换，当左边变为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 时，右边即为过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$。即 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \xrightarrow{r} (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$。

（3）真题演练

1.【2024–2025 春夏】
已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (a,1,2a-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,2)^T, \boldsymbol{\beta} = (3,4,3)^T$。当 a 满足 ________ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以构成一组基。用这组基线性表示 $\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\beta} =$ ____________。

2.【2023–2024 秋冬】
设 $V = \mathbb{R}[x]_3$，已知向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1 = x^2, \boldsymbol{\alpha}_2 = x, \boldsymbol{\alpha}_3 = 1$ 和向量组 (II): $\boldsymbol{\beta}_1 = 3x^2 + 2x + 1, \boldsymbol{\beta}_2 = 2x + 1, \boldsymbol{\beta}_3 = 3x + 4$ 都是 V 的基。求向量 $\boldsymbol{\gamma} = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 7\boldsymbol{\alpha}_2 + 6\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 (II) 下的坐标。

3.【2022–2023 秋冬】
已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (6,4,1,-1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,2,3,-4)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (7,4,3,2,-2)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (5,4,-1,-4,6)^T$。设 L 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 构成的向量空间，且已知 (I) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 和 (II) $\{\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是 L 的两组基，求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$。

2. 子空间的结构与运算

子空间是线性空间中最活跃的成分。考试的焦点往往不在于验证“是否为子空间”（定义验证），而在于计算两个子空间“叠加”（和）与“重叠”（交）后的结构特征（基与维数）。

（1）核心知识点

- **子空间的生成（Span）**：由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 包含了这些向量的所有线性组合。其维数等于该向量组的秩。
- **维数公式（Grassmann 公式）**：设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则：

  $$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

  这是联系“和”与“交”的桥梁，通常用于已知其中三项求第四项。
- **和空间 ($V_1 + V_2$)**：构成：$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2\}$。性质：若 $V_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_i)$，$V_2 = L(\boldsymbol{\beta}_j)$，则 $V_1 + V_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_t)$。即两组基合并后的生成空间。
- **交空间 ($V_1 \cap V_2$)**：构成：同时属于 V_1 和 V_2 的向量集合。

（2）破题策略

- **策略一：求“和空间” $V_1 + V_2$ 的基与维数**
  1. **合并**：将 V_1 的基与 V_2 的基放在一起，构成大向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m)$。
  2. **求秩**：对该矩阵求秩，秩即为 $\dim(V_1 + V_2)$。
  3. **找基**：矩阵的极大线性无关组即为 $V_1 + V_2$ 的基。
- **策略二：求“交空间” $V_1 \cap V_2$ 的基与维数**
  - **方法 A（利用公式求维数）**：先分别求出 V_1, V_2 和 $V_1 + V_2$ 的维数，利用 Grassmann 公式间接得出 $\dim(V_1 \cap V_2)$。
  - **方法 B（定义法求基）**：设 $\boldsymbol{\xi} \in V_1 \cap V_2$，则 $\boldsymbol{\xi}$ 既可由 V_1 的基表示，也可由 V_2 的基表示：

    $$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{\beta}_m$$

    移项得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots - y_1\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots = \mathbf{0}$。求解这个齐次线性方程组，找出系数关系，代回即可得到 $\boldsymbol{\xi}$ 的通式，进而提取出基。

（3）真题演练

1.【2024–2025 秋冬】
设 $\mathbb{R}^4$ 中集合 $S=\{(a,a,a,b)^T,(a,a,b,a)^T,(a,b,a,a)^T,(b,a,a,a)^T\}$，$a,b$ 为不全为 0 的实数。$L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$，并给出一组基。

2.【2022–2023 秋冬】
已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(7,4,3,2,-2)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(5,4,-1,-4,6)^T$。

(1) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩；

(2) 设 L 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 构成的向量空间，且已知 (I) $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 和 (II) $\{\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是 L 的两组基，求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$。

3.【2019–2020 秋冬】
设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,3,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(4,5,6,4)^T$ 是实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中的一个向量组，L 是该向量组生成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间。

(1) 试证明：$\boldsymbol{\beta}_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5\}$ 分别是 L 的两组基；

(2) 求从基 $\boldsymbol{\beta}_1$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵。

3. 欧氏空间与正交化

欧氏空间是在线性空间的基础上引入了**“度量”**（内积），使得我们能够讨论长度、夹角和垂直（正交）。这一部分的解题核心在于“算”——无论是施密特正交化还是积分内积，都对计算的准确性提出了极高要求。

（1）核心知识点

- **内积的定义与性质**：内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是一个实数，满足对称性、线性性和**正定性**（$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，等号当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 成立）。
  - **常见模型**：
    1. **标准内积**（$\mathbb{R}^n$）：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=\sum x_iy_i$。
    2. **积分内积**（多项式空间）：$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。
    3. **矩阵内积**：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$。
- **施密特 (Schmidt) 正交化**：将线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 转化为标准正交向量组 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_s$ 的算法。

1. **正交化**（核心公式）：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\
&\cdots \\
\boldsymbol{\beta}_k &= \boldsymbol{\alpha}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j
\end{aligned}$$

2. **单位化**：$\boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{\beta}_k}{\|\boldsymbol{\beta}_k\|}$，其中 $\|\boldsymbol{\beta}_k\| = \sqrt{(\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\beta}_k)}$。

- **正交补空间 ($V^{\perp}$)**：设 W 是欧氏空间 V 的子空间，则 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \forall \boldsymbol{\beta} \in W, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0\}$。
  - **维数公式**：$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V = n$。
  - **性质**：$V = W \oplus W^{\perp}$（直和分解）。

（2）破题策略

- **策略一：积分内积的计算技巧**遇到涉及 $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 的题目，务必注意利用**奇偶性**简化计算。
  - 若积分区间对称（如 $[-1, 1]$），奇函数积分为 0。
  - 常见的正交多项式结论（勒让德多项式）：在 $[-1, 1]$ 上，$\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ 是正交的（未单位化）。
- **策略二：正交补空间 $W^{\perp}$ 的求法**将抽象定义转化为具体的齐次线性方程组求解。
  1. 求出子空间 W 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$。
  2. 设 $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$，则 $\boldsymbol{x}$ 与 W 的基向量均正交。建立方程组：

  $$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{x}) = 0 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

  若为 $\mathbb{R}^n$ 标准内积，这等价于解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_i^T$。
  3. 该方程组的基础解系即为 $W^{\perp}$ 的基。

（3）真题演练

1.【2020–2021 秋冬】

设 m, n, p 为正整数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $p \times n$ 实矩阵，并设 $W = \{\boldsymbol{AX} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}_p\}$，其中 $\boldsymbol{0}_p$ 是一个 p 维零列向量。

(1) 证明 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间；

(2) 若 $r\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right)=r_1, r(\boldsymbol{B})=r_2$，试求 W 的维数。

2.【2019–2020 春夏】
设 V 是一个 n 维实线性空间，(I): $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，(II): $\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的两组基，设 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid\boldsymbol{\alpha}$ 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标$\}$。

(1) 证明 W 是 V 的子空间；

(2) 若设向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{\eta}_n$ 的秩为 r，试求 W 的维数。

3.【2024–2025 秋冬】
设 $\mathbb{R}^4$ 中集合 $S=\{(a,a,a,b)^T,(a,a,b,a)^T,(a,b,a,a)^T,(b,a,a,a)^T\}$，$a,b$ 为不全为 0 的实数。$L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$，并给出一组基。

4. 线性变换及其矩阵表示

这是将“几何映射”转化为“代数计算”的关键步骤。核心在于理解：选定基之后，线性变换 σ 就变成了一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，向量的变化就变成了坐标的乘法 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。

（1）核心知识点

- **线性变换的定义**：设 V 是线性空间，变换 $\sigma: V\to V$ 满足 $\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$，则称 σ 为线性变换。
- **像与核**：
  - **核 (Kerσ)**：所有被映射为 **0** 的向量集合。$\dim(\mathrm{Ker}\sigma)=n-r(\boldsymbol{A})$。
  - **像 (Imσ)**：所有象向量组成的集合。$\dim(\mathrm{Im}\sigma)=r(\boldsymbol{A})$。
  - **维数公式**：$\dim(\mathrm{Ker}\sigma)+\dim(\mathrm{Im}\sigma)=\dim V=n$。
- **矩阵表示（核心公式）**：设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，若

  $$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$$

  则 $\boldsymbol{A}$ 称为 σ 在该基下的**矩阵**。
- **相似关系**：同一个线性变换在不同基下的矩阵是**相似**的。即若基 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。

（2）破题策略

- **策略一：求线性变换矩阵的“三步法”**

  1. **作用**：将变换 σ 作用于每一个基向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_j$，得到 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_j)$。
  2. **表示**：将结果 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_j)$ 用基向量线性表示，即 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{\varepsilon}_n$。
  3. **竖写**：系数 $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$ 即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j **列**。

- **策略二：求核与像的基**转化为矩阵问题求解：

  – **求核**：计算 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，还原为 V 中的向量。
  – **求像**：找出 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组，还原为 V 中的向量。

第五板块：抽象线性空间与子空间理论

本板块是线性代数从“计算”走向“概念”的分水岭。对象不再是简单的 $\mathbb{R}^n$ 列向量，而是矩阵 $\boldsymbol{X}$、多项式 $f(x)$ 或定义了特殊运算的抽象集合。核心考法集中在“验证子空间”、“求抽象空间的维数与基”以及高频考点“交换子空间 $(AX = XA)$”。

1. 矩阵子空间与交换子空间 ($AX = XA$ 模型)

矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 同构于 $\mathbb{R}^{n^2}$，因此矩阵问题本质上还是向量问题。本考点核心在于寻找“与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 交换的所有矩阵 $\boldsymbol{X}$”这一集合的结构特征。

（1）核心知识点详解

- **1. 矩阵子空间的判定标准**：集合 $W \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ 是子空间，需满足三点：

  – **非空性**：零矩阵 $\boldsymbol{O} \in W$。
  – **加法封闭**：$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in W \implies \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \in W$。
  – **数乘封闭**：$\forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{X} \in W \implies k\boldsymbol{X} \in W$。

- **2. 交换子空间的性质**：记 $C(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}\}$。

  – **多项式包含性**：$\boldsymbol{A}$ 的任意多项式 $f(\boldsymbol{A}) = a_k\boldsymbol{A}^k + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{E}$ 均属于 $C(\boldsymbol{A})$。
  – **维数下界**：$\dim C(\boldsymbol{A}) \geq n$ （当特征多项式等于最小多项式时取等号，例如特征值互异时）。
  – **特殊情况**：若 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{E}$（数量矩阵），则 $C(\boldsymbol{A}) = \mathbb{R}^{n\times n}$，维数为 n^2。

- **3. 同构思想：**将 n 阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 看作 n^2 维向量。方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{O}$ 实际上是一个包含 n^2 个未知数、n^2 个方程的齐次线性方程组。求解 W 的维数等价于求该方程组解空间的维数。

（2）破题策略与技巧

- **策略一：暴力设元法（适用于 $n=2$ 或 $\boldsymbol{A}$ 稀疏时）**

  1. 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$。
  2. 计算 $\boldsymbol{AX}$ 和 $\boldsymbol{XA}$，对应元素相等建立方程组。
  3. 这是一个关于 $x_1,\dots,x_4$ 的齐次方程组，写出系数矩阵，求基础解系。
  4. 基础解系的个数即为维数，将解向量还原为矩阵即为基。

- **策略二：对角化简化法（适用于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时）**若 $\boldsymbol{A}$ 较复杂但特征值清晰，利用相似变换简化：

  1. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$。
  2. 令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XP}$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\iff\boldsymbol{\Lambda Y}=\boldsymbol{Y\Lambda}$。
  3. 考察对角阵交换条件：$(\boldsymbol{\Lambda Y})_{ij}=\lambda_i y_{ij}$，$(\boldsymbol{Y\Lambda})_{ij}=y_{ij}\lambda_j$。

  $$y_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=0$$

     - 若 $\lambda_i\neq\lambda_j$，则必须 $y_{ij}=0$。
     - 若 $\lambda_i=\lambda_j$，则 y_{ij} 可取任意值。
  4. 求出 $\boldsymbol{Y}$ 的结构及其维数（即自由变量个数），$C(\boldsymbol{A})$ 的维数与 $C(\boldsymbol{\Lambda})$ 相同。

- **策略三：特征值互异的秒杀结论**若 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值**互不相同**：
  - 结论 1：$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 交换 $\iff$ $\boldsymbol{X}$ 可以对角化，且与 $\boldsymbol{A}$ 拥有相同的特征向量。
  - 结论 2：与 $\boldsymbol{A}$ 交换的矩阵 $\boldsymbol{X}$ 必可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，即 $\boldsymbol{X}=c_0\boldsymbol{E}+c_1\boldsymbol{A}+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}$。
  - 结论 3：W 的维数严格为 n，基可以选为 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\dots,\boldsymbol{A}^{n-1}$。

（3）典型例题解析（$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 示例）

题目模型：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $W=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$ 的维数与基。

- **方法：**特征值 $1\neq 2$，互异。

- **直接结论**：维数为 2。基为 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$。
- **验证**：任意 $\boldsymbol{X}$ 必为对角阵 $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$。注意：基的选择不唯一，$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 或 (E_{11},E_{22}) 均可。

（4）真题演练

1.【2023–2024 春夏】

定义集合 $W=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}\}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$。

(1) 证明 W 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的子空间；

(2) 求 W 的维数。

2.【2022–2023 春夏】

已知 $V=\mathbb{R}^{2\times2}$，设 $A\in V$，令 $W_A=\{X\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid AX=XA\}$ 。

(1) 证明：W_A 是 V 的子空间；

(2) 证明：当 A 为实对称矩阵时，$\dim W_A\geq 2$；

(3) 当 A 为实对称矩阵且 $\dim W_A=2$ 时，写出 W_A 的一组基。

3.【2023–2024 秋冬】

设 $R^{3\times3}$ 是所有三阶实方阵构成的实线性空间。已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，令 $W=\{\boldsymbol{X}\in R^{3\times3}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$ 。

(1) 证明 W 是 $R^{3\times3}$ 的子空间；

(2) 假设矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{3\times3}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，证明 $\boldsymbol{B}=b_{11}\boldsymbol{E}+b_{21}\boldsymbol{A}+b_{31}\boldsymbol{A}^2$；

(3) 求 W 的维数 $\dim W$。

4.【2022–2023 秋冬】

线性空间 $W=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&c\\-c&b\end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ 。

(1) 证明 W 是 V 的子空间；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 是 W 的一组基；

5.【2024–2025 春夏】
已知矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}5&1\\5&7\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}$. $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\},\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 分别是空间 M 的一组基，则从 $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\}$ 到 $\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 的过渡矩阵为 ____________. 矩阵组 $\{\boldsymbol{A}_1,2\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{A}_4\}$ 的维数是 ________.

2. 函数与多项式空间（抽象向量）

此类题目考察同构思想，即如何将“函数”看作“向量”。解题核心是将 $1,x,x^2,\dots$ 或 e^x 等视为基向量，利用待定系数法提取坐标，或者利用解析性质（如求导、取值）来处理线性无关性。

（1）核心知识点

- **非标准线性空间**：当题目重新定义加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$（如 $a\oplus b=ab$）时，需注意零向量 $\boldsymbol{\theta}$ 和负向量的变化。
  - **零向量**：满足 $a\oplus\boldsymbol{\theta}=a$ 的元素（通常对应乘法中的 1）。
  - **同构**：此类空间往往与 $\mathbb{R}^1$ 或 $\mathbb{R}^n$ 同构，利用 $\ln x$ 等映射可转化为标准空间。
- **函数线性无关的判定**：
  - **定义法**：$k_1f_1(x)+\cdots+k_nf_n(x)\equiv 0\implies k_i=0$。可通过代入特定的 x 值建立方程组求解。
  - **朗斯基行列式**：若 $W(x)=\det(f_i^{(j-1)}(x))\neq 0$，则函数组线性无关。
- **多项式子空间的约束**：$W=\{f(x)\in P_n[x]\mid f(a)=0\}$ 是一个子空间（维数为 n），而 $f(a)=1$ 不是子空间（不含零多项式）。

（2）真题演练

1.【2019–2020 秋冬】
设 R_+ 为所有正实数组成的集合，加法和数乘定义如下：$\forall a,b\in R_+,k\in\mathbb{R},a\oplus b=ab,k\odot a=a^k$，已知 R_+ 关于加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$ 构成一个实线性空间，试求 R_+ 的一组基和维数。

2.【2021–2022 秋冬】
对于 $x\in(0,1)$ 的函数空间 V，定义加法 $\forall f,g\in V,f+g\triangleq f(x)+g(x)$，定义数乘法 $\forall k,f\in V,kf\triangleq kf(x)$。

(1) 证明：由 $f(x)=ax+be^x$ 能构成子空间；

(2) 证明：向量 $f(x)=x, g(x)=x+e^x$ 两个向量线性无关；

(3) 把 $f(x)=x, g(x)=x+e^x$ 化为欧氏空间一组标准正交基 η_1,η_2（注：题目隐含内积未给出，通常默认为积分内积或题目上下文中定义的内积，此处需关注正交化流程）。

3.【2024–2025 春夏】

已知 $\mathbb{P}=\{f(x)\mid f(x)$是次数不超过 3 次的一元多项式$\}$。当 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, f(-1)=$ ________ 时，$\mathbb{P}$ 的满足该条件的子集是一个子空间，该子空间的维数是 ________，它的一组基是 ________________。定义该空间的内积 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 则它的一组标准正交基是 ________________。

3. 子空间的构造与特殊定义

本板块聚焦于由“特殊条件”约束生成的子空间。这类题目通常不直接给出生成向量，而是通过矩阵运算方程（核与像的结合）、坐标性质或对称性条件来定义子空间。解题关键在于读懂定义的代数含义，并将其转化为齐次线性方程组的解空间问题。

（1）核心知识点详解

- **1. 核空间与像空间的复合结构**：对于集合 $W=\{\boldsymbol{Ay}\mid \boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}\}$，其几何意义是：
  - 先找到 $\boldsymbol{B}$ 的**核空间**（零空间）$N(\boldsymbol{B})=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}\}$。
  - 再求这个核空间在线性变换 $\boldsymbol{A}$ 下的**像**。即 $W=\boldsymbol{A}(N(\boldsymbol{B}))$。
  - **维数计算公式**：利用线性映射的维数公式，$\dim W=\dim N(\boldsymbol{B})-\dim(N(\boldsymbol{B})\cap N(\boldsymbol{A}))$。在考试中，通常利用分块矩阵的秩来处理：$\dim W=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}-r(\boldsymbol{B})$。

- **2. 同坐标子空间问题**：若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 下具有相同的坐标 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^T$，则意味着：

  $$\boldsymbol{\alpha}=\sum x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i=\sum x_i\boldsymbol{\eta}_i \implies \sum x_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i-\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{0}$$

  这等价于坐标向量 $\boldsymbol{x}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i-\boldsymbol{\eta}_i\}$ 的齐次线性方程组的解。

  - W 的维数 = 该齐次方程组解空间的维数 $=n-r(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{\eta}_n)$。

- **3. 对称结构生成的子空间**：对于形如 $S=\{(a,b,a,b)^T\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ 的集合，解题策略是**分离参数**。将向量写为 $a\boldsymbol{\xi}_1+b\boldsymbol{\xi}_2$ 的形式，则 $L(S)$ 即为由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 生成的子空间。其维数等于生成向量组的秩。

（2）真题演练

1.【2020–2021 秋冬】
设 m,n,p 为正整数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $p\times n$ 实矩阵，并设 $W=\{\boldsymbol{AX}\in\mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}_p\}$，其中 $\boldsymbol{0}_p$ 是一个 p 维 (元) 零列向量。

(1) 证明 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间；

(2) 若 $r\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right)=r_1, r(\boldsymbol{B})=r_2$，试求 W 的维数。

2.【2019–2020 春夏】
设 V 是一个 n 维实线性空间，(I): $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，(II): $\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的两组基，设 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V \mid \boldsymbol{\alpha}$ 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标$\}$。

(1) 证明 W 是 V 的子空间；

(2) 若设向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{\eta}_n$ 的秩为 r，试求 W 的维数。

3.【2024–2025 秋冬】
设 $\mathbb{R}^4$ 中集合 $S=\{(a,a,a,b)^T,(a,a,b,a)^T,(a,b,a,a)^T,(b,a,a,a)^T\}$，$a,b$ 为不全为 0 的实数。$L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$，并给出一组基。

4. 过渡矩阵的理论分析

（1）核心知识点

- **标准正交基与正交矩阵**：若 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 均是 n 维欧氏空间 V 的**标准正交基**，且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha M}$，则过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$ 必为**正交矩阵**。
- **正交矩阵的特征值性质（关键）**：设 $\boldsymbol{M}$ 是正交矩阵（$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}$），$\lambda$ 是其特征值（可能是复数），则：
$$|\lambda|=1$$
即特征值在复平面的单位圆上（如 ±1 或 $\cos\theta\pm i\sin\theta$）。
- **谱映射定理**：若 $\boldsymbol{C}=f(\boldsymbol{M})$（如 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{M}$），则 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $f(\lambda)$。行列式 $|\boldsymbol{C}|=\prod f(\lambda_i)$。

（2）思路解析

此类题目通常给出一组由旧基 $\boldsymbol{\alpha}$ 和新基 $\boldsymbol{\beta}$ 线性组合而成的新向量组（如 $\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\beta}_i$），询问其性质。

通解三步法：

1. **第一步：矩阵化表示**将向量组的关系转化为矩阵乘积。利用 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha M}$ 将所有向量统一表示在基 $\boldsymbol{\alpha}$ 下。
$$(\dots)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{M})$$
2. **第二步：特征值分析**设 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为 λ，则目标矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{M}$ 的特征值为 $1+k\lambda$。
3. **第三步：利用模长不等式判别可逆性**要证明构成基 $\iff$ 证明 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$ $\iff$ 证明所有特征值 $1+k\lambda\neq 0$。利用 $|\lambda|=1$ 的性质，通常通过三角不等式或几何意义证明 $1+k\lambda$ 模长恒大于 0。

（3）真题演练

1.【2024–2025 秋冬】
设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为线性空间 V 中的 2 组标准正交基，$\boldsymbol{M}$ 为基 $\boldsymbol{\alpha}$ 至基 $\boldsymbol{\beta}$ 的过渡矩阵，且已知 $\boldsymbol{M}$ 的特征值均为实数。

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+2\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$；

(2) $\boldsymbol{M}$ 特征值的绝对值是否为 1？说明理由；

(3) 若 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，求矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值；

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+2\boldsymbol{\beta}_n$ 是否为 V 的一组基？

(5) 若 $|\boldsymbol{M}|>0$，问是否有 $|\boldsymbol{C}|>0$？

【深度解析】

(1) **矩阵构造**：由定义 $(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{M}$。则待求向量组可写为：
$$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha M}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{M})$$
故 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{M}$。

(2) **正交阵性质**：因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为标准正交基，所以过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为正交矩阵。正交矩阵保持向量长度不变，其特征值满足 $|\lambda|=1$。（注：题目已知特征值为实数，故 $\lambda_i\in\{1,-1\}$）。

(3) **谱映射**：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{M}$ 的特征值为 $\mu_i=1+2\lambda_i$。

(4) **基的判定**：构成基 $\iff$ $\boldsymbol{C}$ 可逆 $\iff$ 0 不是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值。由 (2) 知 $\lambda_i\in\{1,-1\}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的特征值只能是 $1+2(1)=3$ 或 $1+2(-1)=-1$。显然 $\mu_i\neq 0$，故 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$，构成一组基。

(5) **行列式符号讨论**：$|\boldsymbol{M}| = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n > 0$。由于 $\lambda_i \in \{1,-1\}$，说明 -1 的个数必须是**偶数个**（设为 $2k$ 个）。此时 $\boldsymbol{C}$ 的特征值中有 $2k$ 个 -1（来自 $1+2(-1)$）和 $n-2k$ 个 3（来自 $1+2(1)$）。

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^{2k}\cdot 3^{n-2k} = 1\cdot 3^{n-2k} > 0$$

结论：是，$|\boldsymbol{C}| > 0$ 成立。

第六板块：经典证明题

本板块汇集了历年真题中纯理论推导类的题目。证明题的解题核心在于：**回归定义与构造辅助多项式**。

1. 秩与矩阵多项式（幂等与对合）

此类题目的本质是考察**“零化多项式”**对矩阵结构的约束。核心逻辑链条是：

$$\text{矩阵方程} \xrightarrow{\text{因式分解}} \text{特征值性质} \xrightarrow{\text{相似对角化}} \text{秩的恒等式}$$

（1）深度知识图谱

- **1. 对合矩阵**
  - **定义：** $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$。
  - **几何意义：** $\boldsymbol{A}$ 代表一种**反射变换**（如镜像）。
  - **因式分解：** $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$。
  - **特征值：** $\lambda^2 = 1 \implies \lambda \in \{1, -1\}$。
  - **对角化：** 由于零化多项式 $x^2 - 1$ 无重根，$\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化。即 $\boldsymbol{A} \sim \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$。
  - **秩的恒等式（核心）：**

    $$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = n$$

- **2. 幂等矩阵**
  - **定义：** $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$。
  - **几何意义：** $\boldsymbol{A}$ 代表一种**投影变换**。
  - **因式分解：** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$。隐含结论：若 $\boldsymbol{A}$ 是幂等的，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 也是幂等的（互补投影）。
  - **特征值：** $\lambda^2 = \lambda \implies \lambda \in \{0, 1\}$。
  - **对角化：** $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化。$\boldsymbol{A} \sim \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$。
  - **秩与迹的关系（秒杀技）：**

    $$r(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

    推导：秩等于非零特征值的个数，而特征值非 0 即 1，故秩 = 1 的个数 = 特征值之和 = 迹。
  - **秩的恒等式：**

    $$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = n$$

（2）核心破题策略（证明题的“三板斧”）

策略一：利用“秩的互补原理”证明 $r(\boldsymbol{U})+r(\boldsymbol{V})=n$

- **适用场景：** 已知 $\boldsymbol{UV}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}$ 满秩（通常为 $\boldsymbol{E}$ 或 $2\boldsymbol{E}$）。
- **逻辑模板：**
  1. 由 Sylvester 不等式：$\boldsymbol{UV}=\boldsymbol{O} \implies r(\boldsymbol{U})+r(\boldsymbol{V})\le n$。
  2. 由秩的次可加性：$r(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})\le r(\boldsymbol{U})+r(\boldsymbol{V})$。
  3. 构造“和”：
     - 对于对合矩阵：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，满秩。
     - 对于幂等矩阵：$\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，满秩。
  4. 结论：$n=r(\text{和})\le r(\boldsymbol{U})+r(\boldsymbol{V})\le n$，故只能取等号。

策略二：利用“特征值法”求秩

- **适用场景：** 题目涉及 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$ 或具体特征值分布。
- **逻辑模板：**
  1. 证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化（只要零化多项式无重根即可，如 x^2-1, x^2-x）。
  2. 写出相似标准形 $\boldsymbol{\Lambda}$。
  3. 利用 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=$ 非零特征值个数，直接建立等式。

策略三：利用“分块矩阵法”处理抽象关系

- **适用场景：** 构造反例或处理一般多项式 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$。
- **逻辑模板：** 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则空间 V 可分解为像空间 $R(\boldsymbol{A})$ 与核空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的直和。在此基下，线性变换的矩阵为分块对角阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，从而将抽象运算转化为具体矩阵运算。

1.【2019–2020 春夏】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$。

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 -1；

(2) 证明：$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

2.【2022–2023 春夏】

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$。

(1) 证明：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$；

(2) 证明：$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

2. 反对称矩阵与正交矩阵

这两类矩阵是线性代数中“特殊矩阵”的代表。证明题通常考察行列式的奇偶性、特征值的分布规律以及向量长度（范数）的保持性质。

（1）深度知识图谱

- **1. 实反对称矩阵**
  - **定义**：$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$。隐含主对角元 $a_{ii}=0$。
  - **零二次型性质（解题杀手锏）**：对于任意 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$。推导：因为 $y=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一个数，其转置等于自身。$y^T=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-y \implies y=0$。
  - **行列式性质**：$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}^T)=\det(-\boldsymbol{A})=(-1)^n\det(\boldsymbol{A})$。**结论**：奇数阶实反对称矩阵的行列式必为 0（即必不可逆）。
  - **特征值分布**：特征值 λ 只能是**纯虚数**或 0。非零特征值成对出现（$\pm bi$）。
  - **秩的性质**：实反对称矩阵的秩必为**偶数**。
- **2. 正交矩阵**
  - **定义**：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \iff \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T \iff$ 列（行）向量组构成标准正交基。
  - **保范性（几何本质）**：正交变换保持向量长度不变，即 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$。推导：$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|^2$。
  - **特征值性质**：若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\lambda|=1$（即 λ 位于复平面的单位圆上，如 ±1 或 $\cos\theta\pm i\sin\theta$）。
  - **行列式**：$\det(\boldsymbol{A})=\pm1$。

（2）核心破题策略

策略一：利用“构造二次型”证明可逆性

- **适用场景**：涉及 $\boldsymbol{E}\pm\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}^2\pm\boldsymbol{E}$ 的可逆性证明（特别是 $\boldsymbol{A}$ 反对称时）。
- **逻辑模板**（以证明 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆为例）：
  1. 设齐次方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。
  2. 移项得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$。
  3. 左乘 $\boldsymbol{x}^T$，得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=-\|\boldsymbol{x}\|^2$。
  4. 利用反对称性质 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，得 $0=-\|\boldsymbol{x}\|^2$。
  5. 推出 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，故方程组只有零解，矩阵可逆。

策略二：利用“模长法”处理正交矩阵特征值

- **适用场景**：证明涉及正交矩阵特征值的等式（如 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$）。
- **逻辑模板**：
  1. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，取模长。
  2. $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|=\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$。
  3. 由保范性 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$。
  4. 比较得 $(|\lambda|-1)\|\boldsymbol{x}\|=0$。因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故 $|\lambda|=1$。

策略三：利用“凯莱变换”构造反例

- **结论**：若 $\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵，则 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S})^{-1}$ 是正交矩阵（且不含特征值 -1）。
- **用途**：在判断题中，利用此性质可以快速构造正交矩阵与反对称矩阵之间的转换反例。

1.【2023–2024 秋冬】
设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实反对称矩阵（即 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$）。

(1) 证明：对于任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$；

(2) 证明：$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 均可逆。

2.【2019–2020 春夏】
设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，证明：$\det(\boldsymbol{A})\geq 0$.

3.【2021–2022 秋冬】
设 3 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=1$。证明：$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$.

3. 正定性与对称矩阵

正定矩阵被誉为“矩阵世界中的正数”。证明题的核心往往不在于计算具体的特征值，而在于利用定义的代数变形或合同变换来传递正定性。

（1）深度知识图谱

- **1. 定义的严格性**：实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\iff \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。
  - 注：考试中提到“正定矩阵”，默认隐含了“实对称”这一前提。若题目只说 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵且 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 不一定对称，但其对称部分 $\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}$ 必正定。

- **2. 等价判据：**
  - **特征值法：**$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全大于 0 ($\lambda_i > 0$)。
  - **主子式法：**$\boldsymbol{A}$ 的所有**顺序主子式**全大于 0 ($D_k > 0$)。
  - **惯性指数法：**正惯性指数 $p = n$（即标准形中系数全为 1）。
  - **分解法（Gram 矩阵）：**存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$。这是正定矩阵最本质的结构特征。
- **3. 运算封闭性与性质：**设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则：
  - **和：**$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 必正定。
  - **数乘：**$k\boldsymbol{A}$ 必正定 ($k > 0$)。
  - **逆与伴随：**$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 必正定。
  - **幂：**$\boldsymbol{A}^k$ 必正定 ($k \in \mathbb{Z}^+$)。
  - **合同变换：**若 $\boldsymbol{C}$ 可逆，则 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 必正定（**极重要性质**）。
  - **乘积（陷阱）：**$\boldsymbol{AB}$ **不一定**正定，甚至不一定对称。$\boldsymbol{AB}$ 正定 $\iff$ $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。

（2）核心破题策略

策略一：利用“定义法”处理矩阵的和与积分

- **适用场景：**证明形如 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{M} = \int \dots$ 是正定矩阵。
- **逻辑模板：**
  1. 任取 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$。
  2. 计算二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$。
  3. 利用已知条件（$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 正定），得第一项 > 0，第二项 > 0。
  4. 结论：总和 > 0，故 $\boldsymbol{C}$ 正定。

策略二：利用“合同变换法”传递正定性

- **适用场景：**证明形如 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的矩阵性质，或处理分块矩阵。
- **核心逻辑：**合同变换保持正定性。即：若 $\boldsymbol{A}$ 正定且 $\boldsymbol{P}$ 可逆 $\implies$ $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 正定。
  应用举例：证明 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 正定 $\iff$ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别正定。

策略三：利用“同时对角化”处理乘积 $\boldsymbol{AB}$

- **适用场景：**判定 $\boldsymbol{AB}$ 的正定性或特征值符号。

- **逻辑模板：**

  1. 虽然 $\boldsymbol{AB}$ 一般不对称，但若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2$（或者 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$）。
  2. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{CBC})\boldsymbol{C}^{-1}$。
  3. 这说明 $\boldsymbol{AB}$ 相似于 $\boldsymbol{CBC}$。
  4. 因为 $\boldsymbol{B}$ 正定，且 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^T$，所以 $\boldsymbol{CBC}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{BC}$ 是正定的。
  5. **结论：**$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于 0。
  6. *注意：*虽然特征值 >0，但若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 不对称，不能称为“正定矩阵”（正定矩阵定义要求对称）。

（3）经典反例构造库

- **反例 1（正定乘积不对称）：**取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$。则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}$，非对称，故非正定（尽管特征值为 $3\pm\sqrt{7}$ 均 >0）。
- **反例 2（非零向量的平方）：**$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ $(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ 是**半正定**的，而非正定。因为秩为 1，只要 $n>1$，必有 0 特征值。

1.【2019–2020 秋冬】
设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵。

2.【2020–2021 秋冬】
判断题：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是否也是正定矩阵？若是，请给出证明；若不是，请举出反例。

3.【2020–2021 秋冬】
设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为实反对称矩阵。若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，能否推出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换（即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$）？证明或举反例。

4. 交换性、反交换性与公共特征向量

当两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足特定运算关系时，它们的特征空间会产生深刻的联系。证明题通常考察如何从“算术关系”推导出“几何位置关系”。

（1）深度知识图谱

- **1. 交换矩阵 $(AB=BA)$ 的核心性质**
  - **不变子空间原理：**若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{B}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间映射到其自身。*推导：*设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{B}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{Bx})$。这说明：$\boldsymbol{Bx}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量（或为零向量）。

- **公共特征向量定理**：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个公共特征向量（在复数域上）。
- **同时对角化**：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可对角化，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则存在同一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ **同时**为对角阵。

- **2. 反交换矩阵 ($AB=-BA$) 的核心性质**
  - **迹的零化**：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(-\boldsymbol{BA})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) \implies \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=0$。这常用于证明正交性或特定系数为 0。
  - **特征值的对称分布（成对出现）**：若 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$ 且 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax})=-\lambda(\boldsymbol{Bx})$。**结论**：若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $-\lambda$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值（只要 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$）。
  - **行列式与维数**：$\det(\boldsymbol{AB})=\det(-\boldsymbol{BA})=(-1)^n\det(\boldsymbol{BA})$。若 n 为奇数且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $1=-1$，矛盾。故奇数阶反交换矩阵中至少有一个不可逆。

（2）核心破题策略

策略一：证明“公共特征向量”的标准流程

- **适用场景**：已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，求证存在 $\boldsymbol{\xi}$ 同时是两者的特征向量。
- **逻辑模板**：
  1. 取 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ 及其特征子空间 V_λ。
  2. 对于任意 $\boldsymbol{x}\in V_\lambda$，有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax})=\lambda(\boldsymbol{Bx})$，故 $\boldsymbol{Bx}\in V_\lambda$。
  3. 这说明 $\boldsymbol{B}$ 可以看作是定义在子空间 V_λ 上的线性变换。
  4. 在复数域下，限制在 V_λ 上的变换 $\boldsymbol{B}$ 必有特征向量 $\boldsymbol{\xi}\in V_\lambda$。
  5. 此时 $\boldsymbol{\xi}$ 既满足 $\boldsymbol{B\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$，又因 $\boldsymbol{\xi}\in V_\lambda$ 满足 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$。证毕。

策略二：利用“单特征值”简化问题

- **适用场景**：题目已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异（单谱）。
- **逻辑模板**：
  1. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，则其特征子空间维数均为 1。
  2. 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\lambda(\boldsymbol{Bx})$ 知 $\boldsymbol{Bx}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 共线。
  3. 即 $\boldsymbol{Bx}=k\boldsymbol{x}$。
  4. 结论：$\boldsymbol{A}$ 的所有特征向量自动成为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量。

策略三：处理“反交换”导致的奇偶性问题

- **适用场景**：已知 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，讨论 n 的奇偶性或矩阵的可逆性。
- **逻辑模板**：
  1. 两边取行列式：$|\boldsymbol{AB}|=|-\boldsymbol{BA}|=(-1)^n|\boldsymbol{BA}|$。
  2. 化简得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。
  3. 移项：$[1-(-1)^n]|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$。
  4. 讨论：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆（行列式非零），则必有 $1-(-1)^n=0$，即 n 必须为偶数。

（3）典型模型扩展

- **模型 1（秩 1 矩阵的交换性）**：设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^T,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\gamma\delta}^T$。$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\iff(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\alpha\delta}^T=(\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\gamma\beta}^T$。通常意味着向量之间存在共线关系。
- **模型 2（矩阵方程的积）**：若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{E}$。这意味着 $\det((\boldsymbol{AB})^2)=\det(-\boldsymbol{E})=(-1)^n$。又 $(\det(\boldsymbol{AB}))^2\geq 0$，故 $(-1)^n\geq 0\implies n$ 为偶数。

1.【2023–2024 春夏】)
设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。证明：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共特征向量。

2.【2023–2024 春夏】
设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实方阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$。证明：$n$ 是偶数。

5. 矩阵代数、秩不等式与线性无关

本考点考察对矩阵运算规则的严格遵守（特别是**非交换性**），以及利用秩的放缩性质解决存在性问题。

（1）深度知识图谱

- **1. 矩阵代数的"雷区"与正确法则**
  - **非交换性（根本原则）**：一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$。
  - **失效公式**：
    * $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$（除非 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$）。正确展开为 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$。
    * $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2\neq(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$（除非 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$）。

- 有效公式（始终成立）：
  - **幂差公式**：$\boldsymbol{A}^k - \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^{k-1} + \boldsymbol{A}^{k-2} + \cdots + \boldsymbol{E})$。
  - **多项式交换**：若 $f(x), g(x)$ 是多项式，则 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$。

- **2. 秩不等式体系**
  - **基本性质**：$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$。
  - **乘积不等式**：$r(\boldsymbol{AB}) \le \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$。
  - **Sylvester 不等式（重中之重）**：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times p$ 矩阵，则：

$$r(\boldsymbol{AB}) \ge r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n$$

    推导核心：$\dim N(\boldsymbol{AB}) \le \dim N(\boldsymbol{B}) + \dim N(\boldsymbol{A})$。
  - **Frobenius 不等式（进阶）**：

$$r(\boldsymbol{ABC}) \ge r(\boldsymbol{AB}) + r(\boldsymbol{BC}) - r(\boldsymbol{B})$$

- **3. 线性无关的判定与传递**
  - **定义回顾**：$\sum k_i \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{0} \implies k_i \equiv 0$。
  - **过渡矩阵判定法**：设 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 可由线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，即 $(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{C}$。则：$\boldsymbol{\beta}$ 组线性无关 $\iff \det(\boldsymbol{C}) \neq 0$。

（2）核心破题策略

策略一：处理“矩阵多项式”证明题

- **适用场景**：已知 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{B}^3$ 或 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \ldots$ 等高次关系，证明可逆或相等。
- **逻辑模板**：
  1. **移项**：将所有项移到一边，试图提取公因式。
  2. **保序**：提取公因式时严格保持左右顺序。例如 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 只能提为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{BA})$，若无 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 条件则无法继续合并。
  3. **构造**：若要证 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ 可逆，尝试构造 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \times (\ldots) = \boldsymbol{E}$。

策略二：利用“Sylvester 不等式”证明秩的恒等式

- **适用场景**：证明 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) = n$ 类命题，通常已知 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$。
- **逻辑模板**：
  1. 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，利用乘积性质得 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \le n$（因为 $R(\boldsymbol{B}) \subseteq N(\boldsymbol{A})$）。

2. 要证等号，需寻找反向不等式。通常构造 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是满秩矩阵的情况。
3. 若 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=n$，利用次可加性：$n=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$。
4. 夹逼得证 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=n$。

策略三：利用“坐标矩阵”证明抽象向量无关性

- **适用场景**：证明 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 等组合向量的线性无关性。
- **逻辑模板**：
  1. 将目标向量组用已知无关组表示：$(\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$。
  2. 计算过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行列式。
  3. 若 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$，则新向量组线性无关；否则相关。
  4. 例如：证明 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 无关。$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，$\det(\boldsymbol{C})=-2\neq 0$，故无关。

1.【2024–2025 秋冬】
设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个互不相同的 n 阶实矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{B}^3,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$。证明：$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 不可逆。

2.【2024–2025 秋冬】
设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}$。证明：$r(\boldsymbol{X})+r(\boldsymbol{Y})\geq r(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})+r(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y})-n$。（注：此题结论可能需核对真题原始条件，此处按常见 Sylvester 推广形式列出）。

3.【2022–2023 秋冬】
设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。

第七板块：线性代数的威力——跨学科应用

本板块旨在打破“线性代数只是算行列式和矩阵”的刻板印象，当然这列出来的每个部分的学习都需要大量的时间，而列出来的核心目的是想让大家明白原来线性代数也可以这么美！

1. 线性代数与数学的交织

本板块展示线性代数如何作为“语言”描述几何变换与微积分问题，是理解线性代数应用背景的关键。

（1）行列式的几何意义

- **面积与体积**：二阶行列式 $|\det(\boldsymbol{A})|$ 表示由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量构成的平行四边形的面积；三阶行列式则代表平行六面体的体积。若 $\det(\boldsymbol{A})=0$，则意味着图形“塌缩”为低维图形（面积/体积为 0）。
- **克拉默法则的几何解释**：方程组的解 $x_i=\frac{D_i}{D}$ 本质上是两个几何体体积的比值。
- **雅可比行列式 (Jacobian)**：在多元微积分换元积分中，$dxdy=|J|dudv$，这里的 $|J|$ 正是局部线性化后的变换矩阵的行列式，代表面积微元在变换前后的**缩放比例**。

（2）坐标旋转与矩阵处理的优势

在解析几何中，处理旋转问题通常涉及复杂的三角函数和差公式，而引入矩阵后，几何问题被彻底“代数化”。

- **旋转矩阵的构造**:将二维向量逆时针旋转 θ 角的变换矩阵为 $\boldsymbol{R}_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$。

  变换公式简化为矩阵乘法：$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{x}$。
- **矩阵处理的绝对优势**：

  1. **复合变换的代数化**：连续旋转两次（先 α 后 β），在几何上对应矩阵的乘法：

  $$\boldsymbol{R}_\beta\boldsymbol{R}_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}_{\alpha+\beta}$$

  这自动验证了三角函数的两角和公式，避免了繁琐的三角推导。

  2. **二次曲线的标准化（主轴定理）**：二次型 $f=ax^2+2bxy+cy^2$ 中含有交叉项 xy，意味着图形是倾斜的。利用正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 进行合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，几何意义就是**旋转坐标轴**，使新坐标轴与椭圆/双曲线的**主轴**重合，从而消去交叉项，由代数方程直接看清几何形状。

3. **高维推广**：在三维或更高维空间中，直观想象旋转极其困难，但利用正交矩阵（$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$）描述旋转，计算难度几乎不随维数增加而增加。

（3）常微分方程组的解耦

在动力系统和控制理论中，我们常需求解形如 $\frac{dx}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的微分方程组。
解题策略（特征值法）：

1. 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 和特征向量 $\boldsymbol{\xi}_i$。
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则方程组的通解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}\boldsymbol{\xi}_n$$

3. **物理意义**：
   - **解耦原理**：通过基变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将耦合系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 转化为 n 个独立的标量方程 $\dot{y}_i=\lambda_i y_i$。
   - **稳定性判定**：若 $\lambda>0$，解发散（系统不稳定）；若 $\lambda<0$，解收敛（系统稳定）；若 λ 为纯虚数，系统发生等幅振荡。

（4）函数逼近与傅里叶分析

核心思想：函数即向量

在泛函分析中，我们将“函数”看作**无穷维线性空间**中的“向量”。

- **向量空间**：所有在区间 $[a,b]$ 上连续的函数构成一个线性空间 $C[a,b]$。
- **内积**：定义 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$。
- **范数（长度）**：$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$。

最佳逼近与投影

- **问题**：如何用简单的函数（如多项式）近似复杂的函数 $f(x)$？
- **线代解释**：这等价于在子空间 W（如 n 次多项式空间）中寻找一个向量 p，使得距离 $\|f-p\|$ 最小。
- **结论**：最佳逼近就是 f 在子空间 W 上的**正交投影**。

傅里叶级数

- **正交基**：三角函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ 是函数空间中的一组**正交基**。
- **级数展开**：傅里叶级数 $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 本质上就是向量 f 在这组正交基下的**坐标表示**。系数 a_n, b_n 就是坐标投影。

（5）谱图理论

这是**图论**与**线性代数**的交叉领域，广泛应用于网络搜索、社交网络分析和化学分子结构研究。

图的矩阵表示

设图 G 有 n 个顶点，我们可以用矩阵描述其结构：

- **邻接矩阵 (Adjacency Matrix) $\boldsymbol{A}$**：若顶点 i 与 j 相连，则 $a_{ij} = 1$，否则为 0。
- **拉普拉斯矩阵 (Laplacian Matrix) $\boldsymbol{L}$**：$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 是度矩阵（对角线上元素为顶点的度）。

特征值的妙用

矩阵的**特征值**揭示了图的拓扑性质：

- **连通性**：$\boldsymbol{L}$ 的 0 特征值的重数等于图的连通分量个数。
- **代数连通度**：$\boldsymbol{L}$ 的第二小特征值反映了图有多难被切断。
- **随机游走**：Google 的 PageRank 算法本质上是求巨大的“网络转移矩阵”对应于特征值 1 的特征向量。

（6）数值线性代数：SVD 分解

奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 被誉为“线性代数的皇冠”。它将任意矩阵分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^T$。

几何意义

SVD 揭示了线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的本质结构：任何线性变换都可以分解为三个简单的动作：

1. **旋转**（由正交矩阵 $\boldsymbol{V}^T$ 描述）；
2. **伸缩**（由对角矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 描述，奇异值 σ_i 即为伸缩因子）；
3. **再旋转**（由正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 描述）。

应用场景

- **数据降维 (PCA)**：保留最大的几个奇异值，丢弃小的奇异值，实现图像压缩或数据去噪（主成分分析）。
- **推荐系统**：Netflix 等平台利用矩阵分解（类似 SVD）来预测用户对未看过的电影的评分。
- **广义逆矩阵**：当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，利用 SVD 可以求出摩尔-彭若斯广义逆，解决最小二乘问题。

（7）数据拟合与最小二乘法

这是线性代数解决现实世界“矛盾”的神器。当方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解（$r(\boldsymbol{A})\neq r(\bar{\boldsymbol{A}})$，通常因观测数据过多导致方程个数 $m>n$）时，我们寻求一个“最优解”。

核心公式

目标是寻找 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 使得误差向量 $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$ 最小。

- **正规方程 (Normal Equation)**：

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

- **求解步骤**：1. 计算 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$；2. 解这个新的 n 阶线性方程组即可得到最小二乘解 $\hat{\boldsymbol{x}}$。

典型例题：线性回归

已知一组数据点 $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$，欲拟合直线 $y=kx+b$。

- 构造矩阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & 1\\ \vdots & \vdots\\ x_n & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}k\\ b\end{pmatrix}$。
- 代入正规方程求解即可得到最佳的斜率 k 和截距 b。

2. 在计算机科学 (CS) 中的应用

（1）计算机图形学

当你玩 3D 游戏或观看特效电影时，显卡 (GPU) 正在疯狂进行矩阵运算。

- **变换矩阵**：平移、旋转、缩放等操作都通过乘以 4×4 矩阵（引入齐次坐标）来实现。

- **投影变换**：将 3D 场景显示在 2D 屏幕上，本质上是一个线性投影过程。
- **优势**：利用矩阵乘法的结合律，可以将一系列复杂的变换（如“先旋转再平移再缩放”）合并为一个矩阵，极大提高了渲染效率。

（2）PageRank 算法 (Google 搜索)

Google 早期称霸互联网的核心算法，利用了**马尔可夫链**和**特征向量**。

- **模型**：互联网被视为一张巨大的图，转移矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的元素 m_{ij} 代表从网页 j 跳转到网页 i 的概率。
- **原理**：网页排名的本质，是求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应于最大特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}$（即 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$）。
- **含义**：特征向量 $\boldsymbol{v}$ 的分量数值越大，代表该网页在互联网中的“权重”或“地位”越高。

（3）图像压缩与去噪 (SVD 分解)

图像本质上是一个像素矩阵。

- **低秩近似**：利用奇异值分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T = \sum \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$。
- **压缩原理**：大的奇异值 σ_i 承载了图像的轮廓和主要信息，小的奇异值通常对应噪声或人眼难以察觉的细节。只保留前 k 个大的奇异值，就能以极小的存储空间重构出高清图像（如 JPEG 格式的原理）。

3. 在人工智能 (AI) 中的应用

人工智能的爆发式发展，归功于算力的提升和线性代数在处理高维数据上的有效性。

（1）神经网络与深度学习

深度学习模型（如 ChatGPT）的底层计算完全依赖于矩阵乘法。

- **前向传播**：神经元层的计算公式为 $\boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$。其中 $\boldsymbol{x}$ 是输入向量，$\boldsymbol{W}$ 是权重矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是偏置向量。
- **并行计算**：GPU 之所以比 CPU 更适合跑 AI，就是因为 GPU 的架构专门为大规模矩阵并行乘法而设计。

（2）自然语言处理 (NLP) 与词向量

如何让计算机理解语言？答案是将词语映射到向量空间。

- **Word Embedding**：将每个单词表示为一个高维向量（如 512 维）。
- **语义相似度**：利用向量的**内积**（或余弦相似度）来衡量词义的接近程度。例如，$\boldsymbol{v}(\text{King}) - \boldsymbol{v}(\text{Man}) + \boldsymbol{v}(\text{Woman}) \approx \boldsymbol{v}(\text{Queen})$ 这一经典等式就是向量运算的结果。

（3）降维与主成分分析 (PCA)

在处理海量数据时，为了提取关键特征，我们需要进行降维。

- **协方差矩阵**：PCA 的核心是对数据的协方差矩阵进行**特征值分解**。
- **主成分**：最大特征值对应的特征向量方向，就是数据变化最剧烈（信息量最大）的方向。将数据投影到这几个主方向上，即实现了降维。

4. 在物理学中的应用

（1）经典力学：惯性张量与主轴

刚体的转动性质由二次型描述：$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$。

- **惯性张量**：$\boldsymbol{I}$ 是一个实对称矩阵。
- **主轴定理**：通过正交变换将 $\boldsymbol{I}$ 对角化，特征向量的方向就是刚体的**“惯量主轴”**。
- **物理意义**：刚体绕主轴旋转时最稳定，不会产生离心力矩。这就是为什么汽车轮胎需要做“动平衡”（寻找主轴）。

（2）振动与模态分析

多自由度系统（如桥梁、晶格）的振动方程为 $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

- **解耦**:这本质上是求解广义特征值问题。通过基变换求出**正规模态** (Normal Modes)。
- **意义**：复杂的振动可以分解为若干个简单谐振动的叠加，每个特征值对应一个固有频率。这是防止共振灾难的数学基础。

（3）量子力学：算符与状态

- **海森堡绘景**：量子力学可以用矩阵力学来描述。物理量（如能量、动量）对应**线性算符**（厄米矩阵）。
- **薛定谔方程**：定态薛定谔方程 $\hat{H}\psi = E\psi$ 就是一个无限维的**特征值方程**。
- **观测值**：实验能观测到的物理量数值，只能是算符的特征值（谱）。