

线性代数（甲）期末考试真题全解析

目录

第一板块：行列式	2
第二板块：线性方程组	10
2. 含参线性方程组的求解与讨论	10
3. 解的结构与通解构造	15
4. 基础解系、同解与公共解	17
第三板块：特征值与二次型	20
1. 特征值与特征向量	20
2. 矩阵的相似对角化	24
3. 实对称矩阵与正交对角化	27
4. 二次型及其标准形	29
第四板块：线性空间与欧氏空间	32
1. 线性空间的基、维数与坐标变换	32
2. 子空间的结构与运算	34
3. 欧氏空间与正交化	37
第五板块：抽象线性空间与子空间理论	39
1. 矩阵子空间与交换子空间 ($AX = XA$ 模型)	39
2. 函数与多项式空间（抽象向量）	44
3. 子空间的构造与特殊定义	46
第六板块：经典证明题	48
1. 秩与矩阵多项式（幂等与对合）	48
2. 反对称矩阵与正交矩阵	50
3. 正定性与对称矩阵	52
4. 交换性、反交换性与公共特征向量	54
5. 矩阵代数、秩不等式与线性无关	55

第一板块：行列式

1. 【2019–2020 秋冬】设有 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \sin(i+j), \forall i, j = 1, 2, \dots, n$, 求行列式 $|A|$ 的值。

解:

【破题思路】

思路: 看到 $\sin(i+j)$ 这种形式, 第一时间应利用三角函数的加法公式展开: $\sin(i+j) = \sin i \cos j + \cos i \sin j$ 。这表明矩阵的元素可以写成两组因子的乘积之和, 进而判断列向量组的线性相关性。

由公式 $\sin(i+j) = \sin i \cos j + \cos i \sin j$, 矩阵 A 的第 j 列向量 \mathbf{c}_j 可以写为:

$$\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} \sin(1+j) \\ \sin(2+j) \\ \vdots \\ \sin(n+j) \end{pmatrix} = \cos j \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \sin 2 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix} + \sin j \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \cos 2 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}$$

记向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\sin 1, \dots, \sin n)^T, \boldsymbol{\beta} = (\cos 1, \dots, \cos n)^T$, 则第 j 列 $\mathbf{c}_j = \cos j \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sin j \cdot \boldsymbol{\beta}$ 。这说明矩阵 A 的所有列向量 $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ 均可由向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性表示。

- 当 $n \geq 3$ 时: 列向量组的秩 $\text{rank}(A) \leq 2 < n$, 矩阵不满秩, 故行列式 $|A| = 0$ 。
- 当 $n = 1$ 时: $|A| = a_{11} = \sin(1+1) = \sin 2$ 。
- 当 $n = 2$ 时:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} = \sin 2 \sin 4 - \sin^2 3$$

利用积化和差公式 $\sin A \sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)]$:

$$\sin 2 \sin 4 = -\frac{1}{2}(\cos 6 - \cos 2), \quad \sin^2 3 = \frac{1 - \cos 6}{2}$$

$$|A| = \frac{\cos 2 - \cos 6}{2} - \frac{1 - \cos 6}{2} = \frac{\cos 2 - 1}{2} = -\sin^2 1$$

综上所述: 当 $n = 1$ 时 $|A| = \sin 2$; 当 $n = 2$ 时 $|A| = -\sin^2 1$; 当 $n \geq 3$ 时 $|A| = 0$ 。

2. 【2020–2021 秋冬】设 x, a, b 为实常数满足 $a \neq b$, 计算 $n(n \geq 2)$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：

【破题思路】

思路：这是一个“爪形”或“海森堡形”行列式。特点是主对角线下方全为 b ，上方全为 a 。**策略：**利用行变换 $r_i - r_{i+1}$ 消去上方的大量 a ，构造递推式；或者将最后一行拆分。

方法一：拆分法(推荐)将最后一行 (b, b, \dots, b, x) 拆分为 $(b, b, \dots, b, b) + (0, 0, \dots, 0, x - b)$ 。

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - b \end{vmatrix}$$

第一部分（记为 $D^{(1)}$ ）：最后一行全为 b ，各列提取 b 后可利用 $c_i - c_{i-1}$ 简化，或观察到其值为 $b(x - a)^{n-1}$ （前 $n - 1$ 行减去最后一行后变成上三角）。第二部分（记为 $D^{(2)}$ ）：按最后一行展开，等于 $(x - b)D_{n-1}$ 。

更通用的递推公式法：对 D_n 执行 $r_i - r_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n - 1$)：

$$D_n = \begin{vmatrix} x - b & a - x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x - b & a - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - b & a - x \\ b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

按第一列展开：

$$D_n = (x - b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}b \cdot \det(M_{n1})$$

其中 $\det(M_{n1})$ 是一个主对角线为 $a - x$ ，上方全为 0 的下三角矩阵，值为 $(a - x)^{n-1}$ 。故递推式为：

$$D_n = (x - b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}b(a - x)^{n-1} = (x - b)D_{n-1} - b(x - a)^{n-1}$$

利用待定系数法或累加法求解该一阶线性递推，得到通解：

$$D_n = \frac{b(x - a)^n - a(x - b)^n}{b - a}$$

【避坑指南】

此题结果对称性很强。如果 $b = a$ ，题目条件失效，此时矩阵除对角线外全相等，利用加边法求解，结果为 $(x - a)^{n-1}[x + (n - 1)a]$ 。

3. 【2021–2022 秋冬】设 n 阶行列式 D ，对角线元素为 $a_i + x$ ，其余元素为 a_i （即第 i 列元素均为 a_i ，仅对角线多一个 x ）。证明：

$$D = x^n + x^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i$$

证明：

【破题思路】

思路：观察行列式结构，第 i 列的元素除去对角线上的 x 外，其余均为 a_i 。若将每一行的元素相加，会发现和是常数： $\sum_{j=1}^n a_j + x$ 。**策略：**将第 $2, 3, \dots, n$ 列全部加到第 1 列上，提取公因子，然后将第 1 行乘 -1 加到其余各行，化为上三角行列式。

写出行列式的具体形式：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$$

第一步：将第 $2, 3, \dots, n$ 列全部加到第 1 列上。此时第 1 列的每个元素都变为 $\sum_{i=1}^n a_i + x$ 。

$$D = \begin{vmatrix} \sum a_i + x & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum a_i + x & a_2 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_i + x & a_2 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$$

第二步：从第 1 列提取公因子 $(\sum_{i=1}^n a_i + x)$ 。

$$D = \left(\sum_{i=1}^n a_i + x \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$$

第三步：将第 1 行乘以 -1 分别加到第 $2, 3, \dots, n$ 行上。这一步操作旨在消去第 1 列下方的 1，同时简化其余元素（ $a_j - a_j = 0$ ， $(a_j + x) - a_j = x$ ）。

$$D = \left(\sum_{i=1}^n a_i + x \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

第四步：计算结果。此时行列式变为上三角行列式（除第一行外，主对角线元素为 x ）。行列式的值等于对角线元素的乘积：

$$\det = 1 \cdot x \cdot x \cdots x = x^{n-1}$$

代回原式：

$$D = \left(\sum_{i=1}^n a_i + x \right) \cdot x^{n-1} = x^n + x^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i$$

得证。

4. 【2022–2023 秋冬】设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = |i - j|$ ，求 A 的行列式 D_n 。

解：

【破题思路】

思路：写出 $n = 4$ 时的矩阵观察规律：
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
。利用差分思想， $r_i - r_{i-1}$

可以消除等差数列的增长，连续做两次差分通常能使矩阵变稀疏。

步骤 1：从最后一行开始，依次执行 $r_i - r_{i-1}$ ($i = n, n-1, \dots, 2$)。

- 第 1 行不变：0, 1, 2, ..., $n-1$
- 第 2 行变：1, -1, -1, ..., -1
- 第 k 行 ($k \geq 3$)：元素 $|k-j| - |k-1-j|$ 。
 - 当 $j < k-1$ 时， $(k-j) - (k-1-j) = 1$ 。
 - 当 $j = k-1$ 时， $1 - 0 = 1$ 。
 - 当 $j = k$ 时， $0 - 1 = -1$ 。
 - 当 $j > k$ 时， $(j-k) - (j-k+1) = -1$ 。

所以第 k 行变为：1, 1, ..., 1, -1, -1, ... (第 k 个位置变成 -1)。

步骤 2：再次执行 $r_i - r_{i-1}$ ($i = n, n-1, \dots, 3$)。保留第 1、2 行不动。

- 第 3 行减第 2 行：(1-1, 1-(-1), -1-(-1), ...) = (0, 2, 0, ..., 0)。
- 第 k 行减第 $k-1$ 行 ($k > 3$)：(0, ..., 0, 2, 0, ...)，其中 2 位于第 $k-1$ 列（即对角线左侧）。

- 第 n 行减第 $n-1$ 行: $(0, \dots, 0, 2, -2)$ —— **注意:** 此处最后一列是 $(-1) - (-1) = 0$, 倒数第二列是 $(-1) - 1 = -2$, 倒数第三列是 $1 - 1 = 0 \dots$ 让我们重新检查最后一行。

修正步骤 2 计算细节: 经过步骤 1 后, 矩阵形如:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

做 $r_i - r_{i-1}$ ($i = 3 \dots n$): $r_3 - r_2 = (0, 2, 0, \dots, 0)$ 。 $r_4 - r_3 = (0, 0, 2, 0, \dots, 0)$ 。 ... $r_n - r_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 2)$ 。

此时矩阵变为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

除去前两行, 剩下的 $n-2$ 行构成了一个对角阵 $\text{diag}(2, 2, \dots, 2)$, 但位置错开了一列。

展开计算: 按第 n 行展开 $\rightarrow 2 \cdot A_{n,n}$ 。按第 $n-1$ 行展开 $\rightarrow 2 \cdot A_{n-1,n-1}$ 。... 依次展开 $n-2$ 次 (提取 $n-2$ 个 2), 最后剩余左上角的 2 阶子式:

$$\det = 2^{n-2} \cdot (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

此处符号需判定。观察非零元素排列, 这是一个准上三角阵的变形。更直接地, 按

第 1 列展开: $1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots \\ 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & \cdots \end{vmatrix}$ 。

结论公式:

$$D_n = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$$

【避坑指南】

此题符号极易出错。建议代入 $n = 3$ 验证: $|A|_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(0-2) + 2(1-0) = 4$ 。公式: $(-1)^2(2)2^1 = 4$ 。吻合。

5. 【2023–2024 秋冬】已知 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ii} = 2 \cdot i!$, 且当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = j!$. 计算 n 阶行列式 $D = |A|$ 的值。

解:

【破题思路】

思路: 观察每一列的元素, 发现第 j 列的元素大致都是 $j!$. 对角线是 $2 \cdot j! = j! + j!$, 非对角线是 $j!$. 这强烈暗示我们可以提取公因子。

第一步: 从第 j 列提取公因子 $j!$ ($j = 1, \dots, n$)。

$$D = (1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n!) \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

第二步: 计算剩余的矩阵 B 。

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} = E + J$$

其中 J 是全 1 矩阵。

第三步: 利用特征值计算行列式。 J 的特征值为 n (重数 1) 和 0 (重数 $n-1$)。 $B = E + J$ 的特征值为 $n+1$ (重数 1) 和 1 (重数 $n-1$)。故 $|B| = (n+1) \cdot 1^{n-1} = n+1$ 。

结果:

$$D = (n+1) \prod_{k=1}^n k!$$

6. 【2019–2020 春夏】设 x 为非零实常数, 有 n 阶三对角矩阵 A , 满足 $a_{ii} = 1 + x^2$, 且 $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = x$, 其余元素为 0。试证明 $|A| = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ 。

证明:

【破题思路】

思路: 三对角行列式 D_n 的标准处理方法是按第一行展开, 建立 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 的递推关系。

设 $D_n = |A|$ 。按第一行展开:

$$D_n = (1 + x^2)D_{n-1} - x \cdot \begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots \\ 0 & 1 + x^2 & x & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}_{n-1}$$

对第二个行列式按第一列展开，得 $x \cdot D_{n-2}$ 。故递推关系为：

$$D_n = (1 + x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

特征方程为：

$$\lambda^2 - (1 + x^2)\lambda + x^2 = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda - x^2) = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = x^2$ 。

情形 1: $x^2 \neq 1$ 。通解形式为 $D_n = C_1(1)^n + C_2(x^2)^n = C_1 + C_2 x^{2n}$ 。计算初值：
 $D_1 = 1 + x^2$ 。 $D_2 = (1 + x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$ 。代入解得： $C_1 = \frac{1}{1-x^2}, C_2 = -\frac{x^2}{1-x^2}$ 。
 代回通解并化简（等比数列求和）：

$$D_n = \frac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^n x^{2k}$$

情形 2: $x^2 = 1$ 。特征根重根。 D_n 形式为等差数列，易证 $D_n = n + 1$ 。而 $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$ ，结论依然成立。

证毕。

7. 【2022–2023 春夏】已知 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵，其中 $a_{ii} = 0$ ，当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = j$ 。计算 n 阶行列式 $D_n = |A|$ 的值。

解：

【破题思路】

思路：写出具体的行列式观察规律。

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

每一列的元素（除对角线外）都是相同的，这提示我们可以做行变换，用各行减去最后一行。

步骤 1: 将第 n 行乘以 (-1) 分别加到第 $1, 2, \dots, n-1$ 行上。以 $n = 4$ 为例演示：

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i - r_4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

通式为：第 i 行 ($i < n$) 变为 $(0, \dots, -a_{ii}, \dots, n)$ ，其中 $-a_{ii}$ 实际上是 $-i$ （注意题目的 $a_{ij} = j$ 定义，第 i 列的对角线元素原本是 0，被减数是 i ，所以是 $-i$ ）。更正：仔细看题， $a_{ij} = j$ ，所以第 j 列全是 j 。

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

第 j 列元素均为 j （除对角线）。先从第 j 列提出公因子 j ：

$$D_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n! \cdot D'$$

其中 D' 是对角线为 0，其余全为 1 的行列式。

步骤 2： 计算 D' 。将第 $2, \dots, n$ 列全加到第 1 列：

$$D' = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

第 1 行乘 (-1) 加到其余各行：

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

结果：

$$D_n = n!(n-1)(-1)^{n-1}$$

8. 【2023–2024 春夏】求下列 $n+1$ 阶行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解：

【破题思路】

思路：不使用公式，直接利用行列式按行（列）展开定理。观察第一列，除 a_0 外全是 1；观察第一行，除 a_0 外全是 1。其余部分是对角阵。按第一列展开是最自然的方法。

按第一列展开：

$$D = a_0 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{21} + 1 \cdot M_{31} - \cdots + (-1)^{n+2} \cdot 1 \cdot M_{n+1,1}$$

1. 计算 M_{11} ：去掉第一行第一列，剩下一个对角矩阵 $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

$$M_{11} = \prod_{i=1}^n a_i$$

2. 计算 $M_{k+1,1}$ ($k \geq 1$)：去掉第 $k+1$ 行和第 1 列。得到的矩阵第一列是 $(1, 1, \dots, 1)^T$ (来自原矩阵的第一行)。主对角线上是 a_1, a_2, \dots 但缺了 a_k 。这是一个“准对角

阵”。例如 $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 0 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^n a_j$ 。同理 $M_{k+1,1}$ 的值为 $\prod_{j \neq k} a_j$ (注意符号，

展开时实际上只需交换列即可变成上三角，这里直接看非零元素的乘积项)。该项对应的代数余子式 $A_{k+1,1} = (-1)^{k+2} M_{k+1,1}$ 。实际上，直接观察原行列式的展开项：
- 主对角线乘积： $a_0 a_1 \cdots a_n$ 。
- 含两个非对角元素的项：选 $a_{k+1,1} = 1$ 和 $a_{1,k+1} = 1$ ，其余选对角线 a_j ($j \neq k$)。符号为 -1 。这样的项共有 n 个，即 $-\prod_{j \neq k} a_j$ 。

综合结果：

$$D = a_0 \prod_{i=1}^n a_i - \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j \neq k} a_j \right)$$

第二板块：线性方程组

2. 含参线性方程组的求解与讨论

1. 【2020—2021 秋冬】设 λ, μ 为实常数，试求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \mu x_4 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \mu \end{cases}$$

解：

【破题思路】

思路：含参方程组求解的核心是对增广矩阵进行初等行变换，化为行阶梯形。本题系数矩阵是对称结构破坏后的形式，注意观察列之间的关系。在消元过程中，要特别留意主元是否为 0（即 $\lambda - 1$ 是否为 0），这将决定分类讨论的节点。

对增广矩阵 \bar{A} 进行初等行变换：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \mu & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-\lambda r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

交换 r_2, r_3 以调整阶梯型：

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

继续消元， $r_4 + r_2$ ：

$$\xrightarrow{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \mu-\lambda & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

最后 $r_4 + r_3$ ：

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-\lambda-2 & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

分类讨论：

- 情形 1：当 $\lambda \neq 1$ 且 $\mu \neq \lambda + 2$ 时， $R(A) = R(\bar{A}) = 4 = n$ ，方程组有唯一解。由回代法解得：

$$\begin{cases} x_4 = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-2} \\ x_3 = \frac{2x_4}{\lambda-1} \\ x_2 = -\frac{\mu-1}{\lambda-1}x_4 \\ x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

- **情形 2:** 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\mu = \lambda + 2$ 时, 最后一行变为 $(0, 0, 0, 0, 2)$, 此时 $0 = 2$ 矛盾。 $R(A) = 3 \neq R(\bar{A}) = 4$, 方程组**无解**。
- **情形 3:** 当 $\lambda = 1$ 时, 矩阵化为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix}$$

由第 3 行知 $-2x_4 = 0 \implies x_4 = 0$ 。由第 4 行知 $0 = \mu - 1$ 。

- 若 $\mu \neq 1$, 无解。
- 若 $\mu = 1$, 则 $x_4 = 0$ 。矩阵秩为 1 (实际上只有第一行有效, 第 2, 4 行全零, 第 3 行提供 $x_4 = 0$)。方程组等价于 $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_4 = 0$ 。**无穷多解**, 通解为:

$$\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T + k_1(-1, 1, 0, 0)^T + k_2(-1, 0, 1, 0)^T \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

【避坑指南】

易错点: 在最后一步消元 $r_4 + r_3$ 时, 务必注意 r_4 的第四个元素变化: $(\mu - \lambda) + (-2) = \mu - \lambda - 2$, 右端项变化: $(\mu - \lambda) + 0 = \mu - \lambda$ 。许多同学容易在此处算错导致讨论条件出错。

2. 【2021–2022 秋冬】设 λ 为实参数, 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

解: 系数行列式为:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1, r_3 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot [4 - (\lambda - 1)(\lambda + 2)] = 4 - (\lambda^2 + \lambda - 2) = -(\lambda^2 + \lambda - 6) = -(\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

分类讨论:

- **情形 1:** 当 $\lambda \neq 2$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有**唯一解**。由克拉默法则或高斯消元可解得 (过程略)。

- 情形 2: 当 $\lambda = 2$ 时, 增广矩阵化简:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 3$, 有无穷多解。通解为: $\boldsymbol{x} = (0, 1, 0)^T + k(5, -4, 1)^T$ 。

- 情形 3: 当 $\lambda = -3$ 时, 增广矩阵化简:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

出现 $0 = 5$, 矛盾。故方程组无解。

3. 【2022–2023 春夏】设 λ 为实常数, 求解四元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

解:

【破题思路】

思路: 这是一个 3 个方程、4 个未知数的方程组。观察方程结构, 如果直接高斯消元较为繁琐。注意到系数的高度对称性, 可以尝试将三个方程相加。

将三个方程相加得:

$$(\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 2)x_2 + (\lambda + 2)x_3 + (\lambda + 2)x_4 = 1 + (1 + \lambda) + \lambda = 2(\lambda + 1)$$

即:

$$(\lambda + 2)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 2(\lambda + 1)$$

记 $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 。

情形 1: 当 $\lambda = -2$ 时, 上式左边为 0, 右边为 $2(-1) = -2$, 矛盾。方程组无解。

情形 2: 当 $\lambda \neq -2$ 时,

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2}$$

利用 S 简化原方程组:

- 方程 1 可写为: $(\lambda-1)x_1 + (\lambda-1)x_4 + S = 1 \implies (\lambda-1)(x_1 + x_4) = 1 - S = 1 - \frac{2\lambda+2}{\lambda+2} = \frac{-\lambda}{\lambda+2}$
- 方程 2 可写为: $(\lambda-1)x_2 + S = 1 + \lambda \implies (\lambda-1)x_2 = 1 + \lambda - S = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)-2(\lambda+1)}{\lambda+2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda+2}$
- 方程 3 可写为: $(\lambda-1)x_3 + S = \lambda \implies (\lambda-1)x_3 = \lambda - S = \frac{\lambda(\lambda+2)-2(\lambda+1)}{\lambda+2} = \frac{\lambda^2-2}{\lambda+2}$

继续讨论 λ :

- 若 $\lambda = 1$: 方程 2 变为 $0 \cdot x_2 = \frac{1(2)}{3} \neq 0$, 矛盾。方程组**无解**。(注: 此时增广矩阵各行完全相同但右端项为 1, 2, 1, 显然矛盾)。
- 若 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$: 由上述化简式可得:

$$x_2 = \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+2)}, \quad x_3 = \frac{\lambda^2-2}{(\lambda-1)(\lambda+2)}$$

对于 x_1 和 x_4 , 满足 $x_1 + x_4 = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)(\lambda+2)}$ 。令 $x_4 = k$ (自由未知量), 则 $x_1 = \frac{-\lambda}{(\lambda-1)(\lambda+2)} - k$ 。方程组有**无穷多解**。

4. 【2023–2024 秋冬】设 λ 为实数, 求解四元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \cdots (1) \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \cdots (2) \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 2 & \cdots (3) \end{cases}$$

解:

【破题思路】

思路: 同样是 3 个方程 4 个未知数。观察 (1) 和 (2) 式, 除了 x_1, x_2 的系数互换, 其余完全相同, 右端项也相同。这暗示 x_1, x_2 关系密切。

(1) - (2) 得:

$$(\lambda-1)x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \implies (\lambda-1)(x_1 - x_2) = 0$$

情形 1: 当 $\lambda = 1$ 时, 方程变为 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ 且 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, 显然 $1 = 2$ 矛盾。方程组**无解**。

情形 2: 当 $\lambda \neq 1$ 时, 必有 $x_1 = x_2$ 。将 $x_2 = x_1$ 代入 (2) 和 (3):

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_3 + x_4 = 1 & \cdots (2') \\ 2x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 2 & \cdots (3') \end{cases}$$

(2') - (3') 消去 x_4 :

$$(\lambda - 1)x_1 + (1 - \lambda)x_3 = -1 \implies (\lambda - 1)(x_1 - x_3) = -1$$

从而 $x_1 - x_3 = -\frac{1}{\lambda - 1} \implies x_3 = x_1 + \frac{1}{\lambda - 1}$ 。

将 x_3 代回 (2') 求 x_4 :

$$(1 + \lambda)x_1 + \left(x_1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) + x_4 = 1$$

$$(\lambda + 2)x_1 + x_4 = 1 - \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$$

此时需讨论 $\lambda + 2$ 是否为 0:

- 若 $\lambda = -2$: 上式变为 $0 \cdot x_1 + x_4 = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$, 即 $x_4 = \frac{4}{3}$ 。解得:

$$x_3 = x_1 + \frac{1}{-3} = x_1 - \frac{1}{3}, \quad x_2 = x_1, \quad x_4 = \frac{4}{3}$$

令 $x_1 = k$, 解为 $\mathbf{x} = (k, k, k - \frac{1}{3}, \frac{4}{3})^T$ 。

- 若 $\lambda \neq -2$ (且 $\lambda \neq 1$): $x_4 = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} - (\lambda + 2)x_1$ 。令 $x_1 = k$, 解为:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k + \frac{1}{\lambda - 1} \\ \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} - (\lambda + 2)k \end{pmatrix}$$

总结: $\lambda = 1$ 时无解; $\lambda \neq 1$ 时有无穷多解 (均为单参数解系)。

3. 解的结构与通解构造

1. 【2022-2023 秋冬】已知 α_1, α_2 为三元非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个解, 其中系数矩阵 A 的秩为 2, 且满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 1)^T$, $2\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, 求方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解。

解:

【破题思路】

思路: 1. 通解结构 = 齐次通解 + 特解。2. 已知 $n = 3, r(A) = 2$, 故齐次方程组的基础解系含 $3 - 2 = 1$ 个向量。3. 利用非齐次解的差是齐次解, 求出 η ; 利用已知条件解出 α_1 作为特解。

联立已知条件:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 1)^T & \cdots (1) \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0, 1)^T & \cdots (2) \end{cases}$$

(2) - (1) 得特解 α_1 :

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T - (1, 1, 1)^T = (0, -1, 0)^T$$

将 α_1 代入 (1) 得 α_2 :

$$\alpha_2 = (1, 1, 1)^T - (0, -1, 0)^T = (1, 2, 1)^T$$

构造齐次方程组 $Ax = 0$ 的解: 由于 α_1, α_2 均为非齐次方程组的解, 故其差 $\eta = \alpha_2 - \alpha_1$ 为导出组的解。

$$\eta = (1, 2, 1)^T - (0, -1, 0)^T = (1, 3, 1)^T$$

因 $\eta \neq 0$, 且基础解系所含向量个数为 $n - r(A) = 3 - 2 = 1$, 故 $k\eta$ 即为齐次方程组的通解。

最终结果: 方程 $Ax = b$ 的通解为:

$$x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(注: 特解也可以取 α_2 , 形式不同但本质等价)。

2. 【2023-2024 春夏】 A 是 3 阶矩阵, 秩 $r(A) = 2$, β_1, β_2 是 3×1 列向量, 且 $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$ 。求方程 $Ax = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ 的解。

解:

【破题思路】

思路: 利用线性方程组右端项的叠加原理。将右端项统一表示, 利用 β_3 简化方程形式。

方程的右端项为 $b = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ 。已知 $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, 故:

$$b = \beta_3 + \beta_3 = 2\beta_3$$

原方程等价于求解 $Ax = 2\beta_3$ 。

设 $Ax = \beta_3$ 的特解为 η^* , 导出组 $Ax = 0$ 的基础解系为 ξ (因 $n = 3, r = 2$, 基础解系含 1 个向量)。则原方程的通解结构为:

$$x = k\xi + 2\eta^* \quad (k \in \mathbb{R})$$

【避坑指南】

注: 如果题目隐含已知 $Ax = \beta_1$ 的解为 x_1 , $Ax = \beta_2$ 的解为 x_2 , 则本题的特解可具体写为 $2(x_1 + x_2)$ 。

3. 【2024–2025 春夏】已知 $r(\mathbf{A}) = 3, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 线性无关的 5 元列向量 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ 是方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 的三个特解, 则方程的通解是 _____. 若 $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$ 是方程的一个解, 则 c_1, c_2, c_3 满足 _____。

解:

【破题思路】

思路: 1. 确定基础解系包含的向量个数 $S = n - r(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2$ 。2. 利用特解之差构造齐次解。由于 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ 线性无关, 它们的差向量线性无关且非零。3. 利用解的性质判断线性组合何时仍为解。

第一空（通解）：基础解系含有 $5 - 3 = 2$ 个线性无关的解向量。由特解差的性质, $\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1$ 是 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的解。验证无关性: 设 $k_1(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + k_2(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1) = \mathbf{0}$, 即 $-(k_1 + k_2)\mathbf{X}_1 + k_1\mathbf{X}_2 + k_2\mathbf{X}_3 = \mathbf{0}$ 。因 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ 线性无关, 系数全为 0, 故 $k_1 = k_2 = 0$ 。所以 $\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1$ 构成基础解系。

通解为:

$$\mathbf{x} = k_1(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + k_2(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1) + \mathbf{X}_1 \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

或者写成对称形式: $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$, 其中 $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ 。

第二空（参数条件）：代入方程验证:

$$\mathbf{A}(c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3) = c_1\mathbf{b} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{b} = (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{b}$$

要使该向量为解, 需满足 $(c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{b} = \mathbf{b}$ 。因 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 故必须满足:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

答案: 1. $k_1(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + k_2(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1) + \mathbf{X}_1$; 2. $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ 。

4. 基础解系、同解与公共解

1. 【2019–2020 秋冬】设有实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c

为实常数。已知齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解, 试求 a, b, c 的值。

解:

【破题思路】

思路：“同解”意味着两个方程组的解空间完全相同。1. 必要条件： n 阶矩阵的解空间维数必须相等，即 $n - r(A) = n - r(B) \implies r(A) = r(B)$ 。2. 充分条件：在满足秩相等的前提下，若 $AX = 0$ 的解满足 $BX = 0$ （或反之），则两方程组同解。**策略：**先处理 A （它是方阵，信息较多），确定 a 和 $r(A)$ ，求出通解，代入 B 求 b, c ，最后回代验证 $r(B)$ 。

第一步：分析 A 的秩并求通解。对 A 进行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1, r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

因 B 为 2×3 矩阵，其秩 $r(B) \leq 2$ 。若 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解，则必有 $r(A) = r(B) \leq 2$ 。故 $a - 2 = 0 \implies a = 2$ 。

此时 $r(A) = 2$ ，化简后的行最简形为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AX = 0$ 的基础解系为 $\xi = (-1, -1, 1)^T$ 。

第二步：利用解的包含关系求 b, c 。由于 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解，则 ξ 必为 $BX = 0$ 的解。即 $B\xi = 0$ 。

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-b+c \\ -2-b^2+c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得到方程组：

$$\begin{cases} c = b + 1 & \cdots (1) \\ c = b^2 + 1 & \cdots (2) \end{cases}$$

联立解得 $b^2 + 1 = b + 1 \implies b^2 - b = 0$ ，故 $b = 0$ 或 $b = 1$ 。

第三步：验证秩条件 $r(B) = r(A) = 2$ 。

- 当 $b = 0$ 时，代入 (1) 得 $c = 1$ 。此时 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，显然两行成比例， $r(B) = 1 \neq r(A)$ 。舍去。

- 当 $b = 1$ 时, 代入 (1) 得 $c = 2$ 。此时 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$r(B) = 2 = r(A)$, 符合题意。

综上所述: $a = 2, b = 1, c = 2$ 。

2. 【2024-2025 秋冬】已知四元线性方程组 (I): $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

(a) 求方程组 (I) 的基础解系;

(b) 已知方程组 (II) 的基础解系为 $\eta_1 = (0, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-1, 2, 2, 1)^T$, (I) (II) 是否有非零公共解? 若有, 求出所有公共解; 若无, 说明理由。

解: 1. 求 (I) 的基础解系方程组 (I) 可写为:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

选定自由未知量为 x_3, x_4 。令 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 得解向量 $\xi_1 = (-1, 0, 1, 0)^T$ 。令 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 得解向量 $\xi_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ 。故 (I) 的基础解系为 $\xi_1 = (-1, 0, 1, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ 。

2. 求公共解

【破题思路】

思路: 求两个解空间的交集。方法: 设向量 x 属于 (II) 的解空间, 即 $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 然后将其代入方程组 (I) 的约束条件中, 求出 k_1, k_2 的关系。

设 x 是公共解, 则 x 可由 (II) 的基础解系线性表示:

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 + 2k_2 \\ k_1 + 2k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

将 x 的分量代入方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} (-k_2) + (k_1 + 2k_2) = 0 \implies k_1 + k_2 = 0 \\ (k_1 + 2k_2) - k_2 = 0 \implies k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

两式相同，得条件 $k_1 = -k_2$ 。

这说明存在非零解（只要 $k_2 \neq 0$ ）。令 $k_2 = k$ ($k \in \mathbb{R}$)，则 $k_1 = -k$ 。代回 \mathbf{x} 的表达式：

$$\mathbf{x} = -k\boldsymbol{\eta}_1 + k\boldsymbol{\eta}_2 = k(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) = k \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \\ 2-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

结论：(I) 和 (II) 有非零公共解。所有公共解为：

$$\mathbf{x} = k(-1, 1, 1, 1)^T \quad (k \in \mathbb{R})$$

第三板块：特征值与二次型

1. 特征值与特征向量

1. 【2021–2022 秋冬】实矩阵 \mathbf{A} 满足 $6\mathbf{A}^3 + 11\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + \mathbf{E} = \mathbf{O}$ 。

- (a) 求 \mathbf{A} 的特征值；
- (b) 令 $\mathbf{M}_k = \mathbf{A}^k$ ，证明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{M}_k$ 存在；
- (c) 证明极限矩阵 \mathbf{M} 是幂等矩阵。

解：

【避坑指南】

题目勘误提示：若按原题系数 $6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 求解，其根的模可能大于 1，导致第 2 问极限不存在。此题为经典题目的变体，通常正确形式为 $6\mathbf{A}^3 - 11\mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{O}$ （特征值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ）。下文按题目有解的逻辑（即经典参数）进行演示，方法通用于此类多项式题型。

1. 求特征值 设 λ 是 \mathbf{A} 的特征值，则 λ 满足方程：

$$6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$$

因式分解得：

$$(\lambda - 1)(2\lambda - 1)(3\lambda - 1) = 0$$

解得特征值为 $\lambda \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ 。（注：若原题系数确实为 $+11, -6, +1$ ，则需解对应方程，判断 $|\lambda| < 1$ 是否成立）。

2. 证明极限存在

【破题思路】

思路：矩阵序列 A^k 收敛的充要条件是其所有特征值 λ_i 满足 $|\lambda_i| < 1$ 或 $\lambda_i = 1$ （且对应的 Jordan 块为 1 阶）。

由 1 知 A 的特征值均在区间 $(-1, 1]$ 内。对 A 进行 Jordan 分解（或若特征值互异可对角化），设 $A = PJP^{-1}$ 。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = P \left(\lim_{k \rightarrow \infty} J^k \right) P^{-1}$$

由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} (1)^k = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{3})^k = 0$, 故对角线上元素的极限均存在，所以极限矩阵 M 存在。

3. 证明 M 是幂等矩阵 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。极限矩阵 $M = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ 的特征值 μ_i 为原特征值极限：

$$\mu_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = \begin{cases} 1, & \text{若 } \lambda_i = 1 \\ 0, & \text{若 } |\lambda_i| < 1 \end{cases}$$

即 M 的特征值只能是 1 或 0。对于可对角化矩阵，这意味着 M 相似于对角阵 $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ，显然满足 $M^2 = M$ 。（即使有 Jordan 块，当 $|\lambda| < 1$ 时块趋于 0，当 $\lambda = 1$ 时块只能是 1 阶才能收敛，故结论仍成立）。故 M 是幂等矩阵。

2. 【2024–2025 秋冬】 记 α 为所有分量均为 1 的 n ($n > 1$) 元列向量， $J = \alpha\alpha^T$ 。

(a) 求 $|J - E|$;

(b) $J^2 = nJ$ 是否成立？

(c) 求 $(J - E)^{-1}$ 。

解：1. 求行列式 J 为秩 1 矩阵，特征值为 $\text{tr}(J) = \alpha^T \alpha = n$ (1 重) 和 0 ($n-1$ 重)。矩阵 $J - E$ 的特征值为 $n-1$ (1 重) 和 -1 ($n-1$ 重)。故 $|J - E| = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}$ 。

2. 验证等式

$$J^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T \alpha)\alpha^T$$

因 α 分量全为 1, $\alpha^T \alpha = \sum_{i=1}^n 1^2 = n$ (常数)。

$$J^2 = \alpha(n)\alpha^T = n(\alpha\alpha^T) = nJ$$

故等式成立。

3. 求逆矩阵

【破题思路】

思路：利用待定系数法。设 $(J - E)^{-1} = aJ + bE$ 。或者利用多项式除法。由 $J^2 - nJ = O$ ，构造 $J - E$ 的关系式。

由 $J^2 = nJ$, 得 $J^2 - nJ = O$ 。变形为涉及 $J - E$ 的形式:

$$J(J - E) - (n - 1)J = O \quad (\text{此路不通, 换思路})$$

直接设逆为 $xJ - E$ (因常数项需为 E):

$$(J - E)(xJ - E) = xJ^2 - J - xJ + E = x(nJ) - (1 + x)J + E$$

令 J 的系数为 0: $nx - 1 - x = 0 \implies x(n - 1) = 1 \implies x = \frac{1}{n-1}$ 。故 $(J - E)^{-1} = \frac{1}{n-1}J - E$ 。

3. 【2024-2025 春夏】已知 n 阶方阵 A 满足 $\alpha A^{n-1} \neq 0^T, \alpha A^n = 0^T$ 。则矩阵 $E - A$ 的逆是 _____, A 的属于特征值 0 的特征子空间维数是 _____。

解:

【破题思路】

思路: 条件 $\alpha A^n = 0$ 且 $\alpha A^{n-1} \neq 0$ 说明 A 是幂零矩阵, 且幂零指数为 n (因为是 n 阶方阵, 最高次幂不超过 n)。这意味着 $A^n = O$, 且 A 的最小多项式为 λ^n 。

第一空: 由 $A^n = O$, 利用公式 $(E - A)(E + A + \cdots + A^{n-1}) = E - A^n = E$ 。故逆矩阵为 $E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ 。

第二空: 特征值 0 的特征子空间维数即 $n - r(A)$ (几何重数)。因最小多项式为 λ^n , 说明 A 的 Jordan 标准型由一个 n 阶 Jordan 块 $J_n(0)$ 组成。 $J_n(0)$ 的秩为 $n - 1$ 。故 A 的秩为 $n - 1$ 。特征子空间维数 $= n - (n - 1) = 1$ 。

答案: $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$; 1。

4. 【2019-2020 秋冬】设有三阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 a, b 为实常数。求出 A 的特征值。

解: 计算特征多项式 $|\lambda E - A|$:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

按第二列展开:

$$\begin{aligned} &= (\lambda - 1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + 0 + 0 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

令 $|\lambda E - A| = 0$, 解得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 。(注: 结果与 a, b 无关)。

5. 【2023–2024 秋冬】已知 $\alpha = (1, -2, 1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, 求 A 的非零特征值。

解：矩阵 A 是秩 1 矩阵。其特征值分别为 $\text{tr}(A)$ 和 0（重数为 $n-1$ ）。非零特征值即为迹：

$$\lambda = \text{tr}(\alpha\alpha^T) = \alpha^T\alpha = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$$

6. 【2020–2021 秋冬】已知 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$ 。求 A 的特征值与特征向量。

解：1. 求特征值令 $B = \alpha\alpha^T$ 。 B 的特征值为 $\alpha^T\alpha = 1 + 4 + 1 = 6$ 和 $0, 0$ 。 $A = E - B$ 的特征值为 $1 - \lambda(B)$ 。故 A 的特征值为：

$$\lambda_1 = 1 - 6 = -5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 - 0 = 1$$

2. 求特征向量

- 对于 $\lambda_1 = -5$ ：对应 B 的特征值 6。特征向量即为 α 本身。 $p_1 = (1, 2, 1)^T$ 。
- 对于 $\lambda_{2,3} = 1$ ：对应 B 的特征值 0。特征向量满足 $\alpha\alpha^T x = 0 \implies \alpha^T x = 0$ （即与 α 正交）。方程为 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ 。取基础解系：令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \implies x_1 = -2$, 得 $p_2 = (-2, 1, 0)^T$ 。令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \implies x_1 = -1$, 得 $p_3 = (-1, 0, 1)^T$ 。

7. 【2021–2022 秋冬】设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -1$, 令 $B = A^* + 2A^{-1}$, 求 $|B|$ 。

解：

【破题思路】

思路：利用特征值性质。若 λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值。需先找出 A^* 和 A^{-1} 与 λ 的关系。

1. $|A| = 1 \times 1 \times (-1) = -1$ 。2. A 的特征值 $\lambda_i \in \{1, 1, -1\}$ 。3. $A^* = |A|A^{-1} = -A^{-1}$ 。4. 代入 B 的表达式：

$$B = -A^{-1} + 2A^{-1} = A^{-1}$$

5. B 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_i}$, 即 $1, 1, -1$ 。6. $|B| = 1 \times 1 \times (-1) = -1$ 。

8. 【2022–2023 秋冬】已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$ 。令 $B = A^3 - 4A + 2E$, 求 $|B|$ 。

解：设 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda + 2$ 。 B 的特征值为 $\varphi(\lambda_i)$, 其中 $\lambda_i \in \{1, 2, 3\}$ 。

- $\mu_1 = \varphi(1) = 1 - 4 + 2 = -1$

- $\mu_2 = \varphi(2) = 8 - 8 + 2 = 2$
- $\mu_3 = \varphi(3) = 27 - 12 + 2 = 17$

$$|B| = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = (-1) \times 2 \times 17 = -34$$

9. 【2024–2025 春夏】已知 A 是 3 阶矩阵，特征值为 1, 2, 3，则 $|A^* - 3E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：1. $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$ 。2. A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_i}$ ，即 $\frac{6}{1} = 6, \frac{6}{2} = 3, \frac{6}{3} = 2$ 。3. 矩阵 $A^* - 3E$ 的特征值为 A^* 的特征值减去 3：

$$6 - 3 = 3, \quad 3 - 3 = 0, \quad 2 - 3 = -1$$

4. 行列式等于特征值之积：

$$|A^* - 3E| = 3 \times 0 \times (-1) = 0$$

答案：0。

2. 矩阵的相似对角化

1. 【2019–2020 秋冬】设有三阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，其中 a, b 为实常数。

- 求出 A 的特征值；
- 试问 a, b 满足什么条件时， A 可以相似对角化？
- 在 A 可以相似对角化时，求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解：1. 求特征值

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{按 } C_2 \text{ 展开}}{=} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 。

2. 判定对角化条件

【破题思路】

思路：矩阵可对角化的充要条件是：对于每个特征值，其几何重数（特征子空间维数）等于代数重数。此处 $\lambda = 1$ 是二重根，必须满足 $3 - r(A - E) = 2$ ，即 $r(A - E) = 1$ 。

计算 $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1, r_2+ar_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

要使 $r(A - E) = 1$, 必须 $a + b = 0$ 。此时 $\lambda = -1$ 为单根, 自动满足条件。故当 $a + b = 0$ 时, A 可相似对角化。

3. 求可逆矩阵 P 当 $a + b = 0$ 即 $b = -a$ 时:

- 对于 $\lambda_{1,2} = 1$: 解方程 $(A - E)x = 0$, 即 $-x_1 + x_3 = 0$ 。选取基础解系: $\xi_1 = (0, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 1)^T$ 。
- 对于 $\lambda_3 = -1$: 解方程 $(A + E)x = 0$ 。

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & -a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $x_1 + x_3 = 0$ 和 $2x_2 - 2ax_3 = 0 \implies x_2 = ax_3$ 。令 $x_3 = 1$, 得 $\xi_3 = (-1, a, 1)^T$ 。

$$\text{令 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}。 \text{ 则 } P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, -1)。$$

2. 【2024-2025 秋冬】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ 。 t 取何值时, A 可相似对角化? 写出 A 的相似标准形。

解:

【破题思路】

思路: 观察矩阵结构, 虽然不是对角阵, 但根据特征方程的定义, 特征值即为对角线元素。判断三个特征值是否互异。若互异, 则必可对角化。

1. 求特征值 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = (\lambda - 25)(\lambda - 1)(\lambda - 6)$ 。特征值为 $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 6$ 。

2. 判断对角化由于 $25, 1, 6$ 是三个互不相等的实数, 矩阵 A 具有 n 个互异特征值。根据充分条件, A 必可相似对角化。这与 t 的取值无关。故 t 可取任意实数 ($t \in \mathbb{R}$)。

3. 相似标准形

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(注：对角线元素顺序可交换)。

【避坑指南】

易错警示：很多同学看到 t 就会惯性思维去求特征向量并讨论秩。其实只要特征值互异，就无需计算特征向量即可判定可对角化。

3. 【2020—2021 秋冬】已知 $\alpha = (1, 2, 1)^T$ ，矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$ 。求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

解：1. 分析特征值 令 $B = \alpha\alpha^T$ 。 B 是秩 1 矩阵。 B 的特征值为 $\text{tr}(B) = \alpha^T\alpha = 6$ (1 重) 和 0 (2 重)。 $A = E - B$ 的特征值为 $\lambda(A) = 1 - \lambda(B)$ 。即： $\lambda_1 = 1 - 6 = -5$ ， $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 - 0 = 1$ 。故 $\Lambda = \text{diag}(-5, 1, 1)$ 。

2. 求特征向量

- 对于 $\lambda_1 = -5$ ：对应 B 的特征值 6 的特征向量，即 α 本身。 $p_1 = (1, 2, 1)^T$ 。
- 对于 $\lambda_{2,3} = 1$ ：对应 B 的特征值 0，即解 $\alpha\alpha^T x = 0 \iff \alpha^T x = 0$ 。方程为 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ 。选取基础解系： $p_2 = (-2, 1, 0)^T, p_3 = (-1, 0, 1)^T$ 。

3. 构造 P

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 【2023—2024 秋冬】已知 $\alpha = (1, -2, 1)^T$ ，矩阵 $A = \alpha\alpha^T$ 。求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

解：1. 分析特征值 A 是秩 1 矩阵，特征值为 $\text{tr}(A)$ 和 0。 $\text{tr}(A) = \alpha^T\alpha = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$ 。故 $\Lambda = \text{diag}(6, 0, 0)$ 。

2. 求特征向量

- 对于 $\lambda_1 = 6$ ：特征向量为 $\alpha = (1, -2, 1)^T$ 。
- 对于 $\lambda_{2,3} = 0$ ：解方程 $Ax = 0 \iff \alpha^T x = 0$ 。方程为 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ 。选取基础解系：令 $x_2 = 1, x_3 = 0 \implies x_1 = 2$ ，得 $p_2 = (2, 1, 0)^T$ 。令 $x_2 = 0, x_3 = 1 \implies x_1 = -1$ ，得 $p_3 = (-1, 0, 1)^T$ 。

3. 结论

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 实对称矩阵与正交对角化

1. 【2024–2025 秋冬】用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 为标准形，并求正、负惯性指数。

解：

【破题思路】

思路：正交变换化标准形的核心是求出二次型矩阵 A 的特征值。标准形即为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ 。注意矩阵 A 的元素， a_{ij} 对应 $x_i x_j$ 的系数，若 $i \neq j$ 需除以 2。

二次型的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 求特征值计算特征多项式：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

按第一行展开：

$$\begin{aligned} &= (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 1) - 4] - 2[2\lambda - 0] \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 4) - 4\lambda \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda + 8 - 4\lambda \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 \end{aligned}$$

试根发现 $\lambda = 1$ 是方程的根 ($1 - 3 - 6 + 8 = 0$)。进行因式分解：

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

故特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ 。

2. 写出标准形与惯性指数标准形为：

$$f = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$$

正惯性指数 $p = 2$ （正特征值个数），负惯性指数 $q = 1$ （负特征值个数）。

2. 【2024–2025 秋冬】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. t 取何值时, $A + A^T$ 正定?

解:

【破题思路】

思路: 矩阵正定的充要条件是其各阶顺序主子式均大于 0。首先计算 $S = A + A^T$ 。

计算对称矩阵 S :

$$S = A + A^T = \begin{pmatrix} 25 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

利用赫尔维茨定理（顺序主子式大于 0）:

- 一阶顺序主子式: $D_1 = 50 > 0$, 恒成立。
- 二阶顺序主子式: $D_2 = \begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 100 > 0$, 恒成立。
- 三阶顺序主子式:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 50 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 12 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 50 & t \\ t & 12 \end{vmatrix} = 2(600 - t^2)$$

要使矩阵正定, 需 $D_3 > 0$, 即 $600 - t^2 > 0 \implies t^2 < 600$ 。

结论: t 的取值范围为 $-\sqrt{600} < t < \sqrt{600}$, 即 $-10\sqrt{6} < t < 10\sqrt{6}$ 。

3. 【2019–2020 秋冬】设有三阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 a, b 为实常数。在 A

可以相似对角化时, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解:

【避坑指南】

注: 本题与“矩阵的相似对角化”板块中第 1 题完全相同。虽然置于“实对称矩阵”板块下, 但 A 并不一定是对称矩阵 (除非 $a = b = 0$)。题目仅要求求“可逆矩阵 P ”而非“正交矩阵 Q ”, 故按一般相似对角化步骤求解。

1. 求特征值 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$ 。特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 。
2. 对角化条件 \mathbf{A} 可对角化的条件是 $\lambda = 1$ 的几何重数为 2, 即 $r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1$ 。计算得条件为 $a + b = 0$ 。
3. 求特征向量与矩阵 \mathbf{P} 设 $b = -a$ 。
 - $\lambda = 1$ 时, 求解 $-x_1 + x_3 = 0$, 取 $\xi_1 = (0, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 1)^T$ 。
 - $\lambda = -1$ 时, 求解 $x_1 + x_3 = 0, x_2 - ax_3 = 0$, 取 $\xi_3 = (-1, a, 1)^T$ 。

故所求可逆矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

此时 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, -1)$ 。

4. 二次型及其标准形

1. 【2024-2025 秋冬】用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 为标准形, 并求正、负惯性指数。

解:

【破题思路】

思路: 利用正交变换化标准形, 实质是求二次型矩阵的特征值。标准形的形式为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ 。**注意:** 写出矩阵时, 混合项 $x_i x_j$ 的系数要除以 2 填入 a_{ij} 和 a_{ji} 位置。

二次型的矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 求特征值计算特征多项式:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

按第一行展开:

$$\begin{aligned} &= (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 1) - 4] - 2(2\lambda) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 4) - 4\lambda \end{aligned}$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$$

观察易知 $\lambda = 1$ 是根 ($1 - 3 - 6 + 8 = 0$)。因式分解得:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ 。

2. 结论标准形为:

$$f = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$$

正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 1$ 。

2. 【2024-2025 秋冬】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ 。 t 取何值时, $A + A^T$ 正定?

解:

解:

【破题思路】

思路: 利用 Sylvester 判别法 (顺序主子式全大于 0)。注意先计算对称矩阵 $S = A + A^T$ 。

计算对称化矩阵:

$$S = A + A^T = \begin{pmatrix} 50 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

计算顺序主子式:

- $D_1 = 50 > 0$ 。
- $D_2 = \begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 100 > 0$ 。
- $D_3 = 2 \times (50 \times 12 - t^2) = 2(600 - t^2)$ 。

正定需满足 $D_3 > 0$, 即 $t^2 < 600$ 。故 t 的取值范围为 $-10\sqrt{6} < t < 10\sqrt{6}$ 。

3. 【2023-2024 秋冬】设 t 为实常数, 问当 t 取何值时, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 是正定二次型?

解:

【破题思路】

思路: 写出二次型矩阵 A , 利用顺序主子式判定正定性。注意非对角线元素的符号。

二次型矩阵为（注意 x_2x_3 系数为 -2，故 $a_{23} = a_{32} = -1$ ）：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

计算顺序主子式：

- $D_1 = t > 0$ 。
- $D_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0 \implies t > 1$ （结合 D_1 ）。
- $D_3 = |\mathbf{A}| = t(t^2 - 1) - 1(t + 1) + 1(-1 - t)$

$$= t^3 - t - t - 1 - 1 - t = t^3 - 3t - 2$$

求解 $D_3 > 0$ ：观察 $t = -1$ 是根（ $-1 + 3 - 2 = 0$ ）。利用多项式除法分解：

$$t^3 - 3t - 2 = (t + 1)(t^2 - t - 2) = (t + 1)^2(t - 2)$$

要使 $D_3 > 0$ ，需 $(t + 1)^2(t - 2) > 0$ 。因为 $(t + 1)^2 \geq 0$ ，且 $t \neq -1$ （已由 $t > 1$ 满足），故只需 $t - 2 > 0$ ，即 $t > 2$ 。

综上所述：当 $t > 2$ 时，二次型正定。

4. 【2024–2025 春夏】已知 \mathbf{A} 是 3 阶矩阵，特征值为 1, 2, 3，则 $\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} =$ _____。

解：

【破题思路】

思路：该式 $\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 被称为广义瑞利商（Rayleigh Quotient）。对于实对称矩阵 \mathbf{A} ，其最大值为最大特征值，最小值为最小特征值。题目虽未明示 \mathbf{A} 对称，但在讨论二次型极值问题时，通常默认指代对应的实对称矩阵或 \mathbf{A} 本身即为对称阵。

设 \mathbf{A} 为实对称矩阵（或取其对称部分，特征值亦由实对称阵性质决定）。瑞利商的性质：

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \leq \lambda_{\max}$$

已知特征值为 1, 2, 3，则 $\lambda_{\max} = 3$ 。

答案：3。

第四板块：线性空间与欧氏空间

1. 线性空间的基、维数与坐标变换

1. 【2024-2025 春夏】已知向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (a, 1, 2a-1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 2)^T$, $\beta = (3, 4, 3)^T$. 当 a 满足 _____ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以构成一组基. 用这组基线性表示 β , 则 $\beta =$ _____.

解:

【破题思路】

思路: 1. 构成基 \iff 向量组线性无关 \iff 行列式非零. 2. 线性表示即解非齐次线性方程组 $AX = \beta$, 利用增广矩阵行变换求解系数.

第一空 (条件): 计算行列式:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - ac_1, c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-a) \cdot 1 = 1-a$$

要构成基, 行列式不为 0, 故 $1-a \neq 0 \implies a \neq 1$.

第二空 (表示式): 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$. 对增广矩阵进行行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2a-1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - r_1, r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

由第二行得: $(1-a)x_2 = 1 \implies x_2 = \frac{1}{1-a}$. 由第三行得: $(a-1)x_2 + x_3 = 0 \implies x_3 = -(a-1)x_2 = (1-a)\frac{1}{1-a} = 1$. 由第一行得: $x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \implies x_1 = 2 - ax_2 = 2 - \frac{a}{1-a} = \frac{2-3a}{1-a}$.

答案: $a \neq 1$; $\frac{2-3a}{1-a}\alpha_1 + \frac{1}{1-a}\alpha_2 + \alpha_3$.

2. 【2023-2024 秋冬】设 $V = \mathbb{R}[x]_3$, 已知向量组 (I): $\alpha_1 = x^2, \alpha_2 = x, \alpha_3 = 1$ 和向量组 (II): $\beta_1 = 3x^2 + 2x + 1, \beta_2 = 2x + 1, \beta_3 = 3x + 4$ 都是 V 的基. 求向量 $\gamma = 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + 6\alpha_3$ 在基 (II) 下的坐标.

解:

【破题思路】

思路: 已知 γ 的具体形式为多项式, 设其在基 (II) 下的坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^T$, 即 $\gamma = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3$. 通过比较 $x^2, x, 1$ 的系数列方程组求解.

首先写出 γ 的多项式形式:

$$\gamma = 3x^2 + 7x + 6$$

设 $\gamma = y_1(3x^2 + 2x + 1) + y_2(2x + 1) + y_3(3x + 4)$ 。整理右边:

$$\gamma = 3y_1x^2 + (2y_1 + 2y_2 + 3y_3)x + (y_1 + y_2 + 4y_3)$$

比较系数得线性方程组:

$$\begin{cases} 3y_1 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 7 \\ y_1 + y_2 + 4y_3 = 6 \end{cases}$$

解之: 由 (1) 得 $y_1 = 1$ 。代入 (2)(3) 得: $\begin{cases} 2y_2 + 3y_3 = 5 \\ y_2 + 4y_3 = 5 \end{cases}$ 。解得 $y_2 = 1, y_3 = 1$ 。

答案: 坐标为 $(1, 1, 1)^T$ 。

3. 【2022-2023 秋冬】已知向量 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)^T, \alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)^T, \alpha_3 = (7, 4, 3, 2, -2)^T, \alpha_4 = (5, 4, -1, -4, 6)^T$ 。设 L 是由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 构成的向量空间, 且已知 (I) $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 (II) $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 是 L 的两组基, 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 M 。

解:

【破题思路】

思路: 根据过渡矩阵定义 $(\alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2)M$ 。我们需要找到 α_3 和 α_4 如何用 α_1, α_2 线性表示。观察向量分量, 尝试直接加减组合。

观察 α_3 : 比较 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的第一个分量: $6 + 1 = 7$, 第二个分量 $4 + 0 = 4$, 第三个 $1 + 2 = 3 \dots$ 发现 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 。

观察 α_4 : 比较 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 的第一个分量: $6 - 1 = 5$, 第二个分量 $4 - 0 = 4$, 第三个 $1 - 2 = -1 \dots$ 发现 $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$ 。

于是有:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 \\ \alpha_4 = 1 \cdot \alpha_1 - 1 \cdot \alpha_2 \end{cases} \implies (\alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

答案: 过渡矩阵 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

2. 子空间的结构与运算

1. 【2024-2025 秋冬】设 \mathbb{R}^4 中集合 $S = \{(a, a, a, b)^T, (a, a, b, a)^T, (a, b, a, a)^T, (b, a, a, a)^T\}$, a, b 为不全为 0 的实数。 $L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间, 求 $\dim L(S)$, 并给出一组基。

解:

【破题思路】

思路: 求子空间的维数即求向量组的秩。将 4 个向量构成矩阵 A , 计算其行列式 $|A|$ 。根据 a, b 的关系讨论秩的情况。

$$\text{记 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}.$$

计算行列式: 将第 2, 3, 4 行都加到第 1 行:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} = (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$$

将第 1 行乘以 $-a$ 加到第 2, 3 行, 乘以 $-b$ 加到第 4 行:

$$= (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & a-b & a-b & a-b \end{vmatrix}$$

展开计算得 (注意符号和零的位置):

$$|A| = -(3a+b)(a-b)^3$$

分类讨论:

- 情形 1: 当 $a \neq b$ 且 $b \neq -3a$ 时, $|A| \neq 0$, 秩为 4。 $\dim L(S) = 4$, 基为 S 中这 4 个向量 (或标准基 e_1, e_2, e_3, e_4)。
- 情形 2: 当 $a = b \neq 0$ 时, A 中所有元素均为 a 。秩为 1。 $\dim L(S) = 1$, 基为 $(1, 1, 1, 1)^T$ 。

- **情形 3:** 当 $b = -3a$ ($a \neq 0$) 时, 此时 $|\mathbf{A}| = 0$ 但 $a \neq b$ 。所有行之和为 $3a + b = 0$, 说明向量线性相关。考察前 3 列的子式:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & -3a \\ a & -3a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1, r_3-r_1} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & -4a \\ 0 & -4a & 0 \end{vmatrix} = -16a^3 \neq 0$$

故秩为 3。 $\dim L(S) = 3$, 基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。

2. 【2022–2023 秋冬】 已知向量 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)^T$, $\alpha_3 = (7, 4, 3, 2, -2)^T$, $\alpha_4 = (5, 4, -1, -4, 6)^T$ 。

- (a) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩;
 (b) 设 L 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 构成的向量空间, 且已知 (I) $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 (II) $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 是 L 的两组基, 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 M 。

解: 1. 求秩 观察向量: $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)^T$, $\alpha_3 = (7, 4, 3, 2, -2)^T$
 易见 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 。且 α_1, α_2 不成比例 (分量 4 与 0), 故线性无关。所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2。

2. 求过渡矩阵 由上一问观察知:

$$\alpha_3 = 1\alpha_1 + 1\alpha_2$$

同理观察 α_4 与 α_1, α_2 的关系: $\alpha_1 - \alpha_2 = (6-1, 4-0, 1-2, \dots)^T = (5, 4, -1, -4, 6)^T = \alpha_4$ 。即:

$$\alpha_4 = 1\alpha_1 - 1\alpha_2$$

写成矩阵形式:

$$(\alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

故过渡矩阵 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

3. 【2019–2020 秋冬】 设 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 4, 3, 4)^T$, $\alpha_4 = (1, 1, 2, 1)^T$, $\alpha_5 = (4, 5, 6, 4)^T$ 是实向量空间 \mathbb{R}^4 中的一个向量组, L 是该向量组生成的 \mathbb{R}^4 的子空间。

- (a) 试证明: $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 和 $\beta_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 分别是 L 的两组基;
 (b) 求从基 β_1 到基 β_2 的过渡矩阵。

证明与解：

【破题思路】

思路：若死算两个矩阵的秩比较费时。最优策略是先找出向量间的线性表示关系。利用线性表示关系不仅能证明基，还能直接写出过渡矩阵。

1. 寻找线性关系与证明基观察向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ：

- 观察 α_3 ： $(3, 4, 3, 4) = (1, 2, 1, 0) + 2(1, 1, 1, 2)$ 。即 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 。
- 观察 α_5 ： $(4, 5, 6, 4) = (1, 2, 1, 0) + (1, 1, 1, 2) + 2(1, 1, 2, 1)$ 。即 $\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4$ 。

证明 β_1 是基：构成 β_1 的矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。经初等行变换易知其

秩为 3，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关。又因 α_3, α_5 可由 β_1 线性表示，故 L 的维数为 3，且 β_1 为一组基。

证明 β_2 是基： $\beta_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 。由关系式知： $\alpha_1 = \alpha_3 - 2\alpha_2$ 。 $\alpha_5 = (\alpha_3 - 2\alpha_2) + \alpha_2 + 2\alpha_4 \implies 2\alpha_4 = \alpha_5 - \alpha_3 + \alpha_2$ 。这意味着基 β_1 可以由 β_2 线性表示，故 $L(\beta_1) \subseteq L(\beta_2)$ 。结合维数一致性，只需证 β_2 线性无关。 $\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4$ 显然线性无关（由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 无关及变换矩阵行列式非零可得）。故 β_2 也是基。

2. 求过渡矩阵由第一问得出的关系式：

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_4 \\ \alpha_3 = 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_4 \\ \alpha_5 = 1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_4 \end{cases}$$

按基的排列顺序 $\beta_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 和 $\beta_2 = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5)$ 。即 $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)P$ 。

注意列的对应系数：

- 第 1 列对应 α_2 ：在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 下坐标为 $(0, 1, 0)^T$ 。
- 第 2 列对应 α_3 ：在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 下坐标为 $(1, 2, 0)^T$ 。
- 第 3 列对应 α_5 ：在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 下坐标为 $(1, 1, 2)^T$ 。

故过渡矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. 欧氏空间与正交化

1. 【2020—2021 秋冬】设 m, n, p 为正整数, A 是一个 $m \times n$ 实矩阵, B 是一个 $p \times n$ 实矩阵, 并设 $W = \{AX \in \mathbb{R}^m \mid BX = 0_p\}$, 其中 0_p 是一个 p 维零列向量。

(a) 证明 W 是 \mathbb{R}^m 的子空间;

(b) 若 $r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = r_1, r(B) = r_2$, 试求 W 的维数。

证明与解:

【破题思路】

思路: 1. 子空间证明: 验证加法封闭性和数乘封闭性。2. 维数求解: W 实际上是矩阵 A 将 B 的零空间 ($N(B)$) 映射得到的像空间。利用维数公式: $\dim(\text{Im} f) = \dim V - \dim(\text{Ker} f)$ 。

1. 证明 W 是子空间 显然 $0 \in W$ (当 $X = 0$ 时), 故 W 非空。设 $y_1, y_2 \in W$, 则存在 X_1, X_2 满足 $y_1 = AX_1, y_2 = AX_2$, 且 $BX_1 = 0, BX_2 = 0$ 。

- 加法封闭性: $y_1 + y_2 = A(X_1 + X_2)$ 。验证条件: $B(X_1 + X_2) = BX_1 + BX_2 = 0 + 0 = 0$ 。故 $y_1 + y_2 \in W$ 。
- 数乘封闭性: 设 $k \in \mathbb{R}$, $ky_1 = A(kX_1)$ 。验证条件: $B(kX_1) = k(BX_1) = 0$ 。故 $ky_1 \in W$ 。

综上, W 是 \mathbb{R}^m 的子空间。

2. 求 W 的维数 设齐次方程组 $BX = 0$ 的解空间为 V_B (即 B 的零空间)。已知 $r(B) = r_2$, 则 $\dim V_B = n - r_2$ 。 W 可以看作是线性变换 $T: X \mapsto AX$ 限制在定义域 V_B 上的像空间。

考虑限制映射 $T|_{V_B}: V_B \rightarrow W$ 。其核空间为 $\text{Ker}(T|_{V_B}) = \{X \in V_B \mid AX = 0\} = \{X \mid BX = 0 \text{ 且 } AX = 0\}$ 。这意味着 X 是方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 的解。故

$$\dim(\text{Ker}(T|_{V_B})) = n - r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = n - r_1。$$

由线性映射维数定理 (秩-零化度定理):

$$\dim W = \dim(\text{Im}(T|_{V_B})) = \dim V_B - \dim(\text{Ker}(T|_{V_B}))$$

代入得:

$$\dim W = (n - r_2) - (n - r_1) = r_1 - r_2$$

2. 【2019–2020 春夏】设 V 是一个 n 维实线性空间, (I): $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, (II): η_1, \dots, η_n 是 V 的两组基, 设 $W = \{\alpha \in V \mid \alpha \text{ 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标}\}$.

(a) 证明 W 是 V 的子空间;

(b) 若设向量 $\varepsilon_1 - \eta_1, \dots, \varepsilon_n - \eta_n$ 的秩为 r , 试求 W 的维数.

证明与解:

【破题思路】

思路: 1. 子空间判定: 验证 W 对加法和数乘封闭. 利用坐标映射的线性性质即可快速得证. 2. 维数计算: 关键在于将抽象的向量等式 $\sum x_i \varepsilon_i = \sum x_i \eta_i$ 移项变形为 $\sum x_i (\varepsilon_i - \eta_i) = \mathbf{0}$. 这表明 W 中的向量与齐次线性方程组的非零解一一对应. 利用“解空间维数 = 未知数个数 - 系数矩阵的秩”这一核心定理求解.

1. 证明 W 是子空间 设 $\alpha, \beta \in W$, 且它们在基 (I)、(II) 下的坐标分别为 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$. 即:

$$\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\mathbf{x} = (\eta_1, \dots, \eta_n)\mathbf{x}$$

$$\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\mathbf{y} = (\eta_1, \dots, \eta_n)\mathbf{y}$$

考察向量 $\alpha + \beta$:

$$\alpha + \beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

$$\alpha + \beta = (\eta_1, \dots, \eta_n)(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

说明 $\alpha + \beta$ 在两组基下的坐标均为 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, 故 $\alpha + \beta \in W$.

同理, 对于 $k \in \mathbb{R}$, 考察 $k\alpha$:

$$k\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(k\mathbf{x}) = (\eta_1, \dots, \eta_n)(k\mathbf{x})$$

说明 $k\alpha$ 在两组基下的坐标均为 $k\mathbf{x}$, 故 $k\alpha \in W$. 综上, W 是 V 的子空间.

2. 求 W 的维数 设 $\alpha \in W$, 且其坐标为 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. 则满足:

$$\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$$

移项整理得:

$$\sum_{i=1}^n x_i (\varepsilon_i - \eta_i) = \mathbf{0} \quad \cdots (*)$$

记向量 $\gamma_i = \varepsilon_i - \eta_i$ ($i = 1, \dots, n$). 方程 (*) 实质上是寻找系数 x_1, \dots, x_n , 使得向量组 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 的线性组合为零向量. 这等价于求解齐次线性方程组.

令 S 为满足方程 (*) 的所有坐标向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 构成的解空间。由于确定了坐标 \boldsymbol{x} 也就唯一确定了向量 $\boldsymbol{\alpha}$ ，故 W 的维数等于解空间 S 的维数。

根据线性方程组的基础理论：

$$\dim S = n - \text{rank}(\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_n)$$

即：

$$\text{解空间维数} = \text{未知数个数} - \text{向量组的秩}$$

已知向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\eta}_n$ 的秩为 r 。故：

$$\dim W = \dim S = n - r$$

3. 【2024-2025 秋冬】设 \mathbb{R}^4 中集合 $S = \{(a, a, a, b)^T, (a, a, b, a)^T, (a, b, a, a)^T, (b, a, a, a)^T\}$, a, b 为不全为 0 的实数。 $L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间，求 $\dim L(S)$ ，并给出一组基。

解：

【避坑指南】

注：本题与上一小节题目完全相同，为保持板块完整性，此处重复给出解析。

记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$ 。计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$ ：利用行变换（所有行加到第一行提取 $3a+b$ ），化简得：

$$|\boldsymbol{A}| = -(3a+b)(a-b)^3$$

分类讨论：

- 情形 1：当 $a \neq b$ 且 $b \neq -3a$ 时， $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ， $\dim L(S) = 4$ ，基为 S 本身。
- 情形 2：当 $a = b \neq 0$ 时，秩为 1， $\dim L(S) = 1$ ，基为 $(1, 1, 1, 1)^T$ 。
- 情形 3：当 $b = -3a$ ($a \neq 0$) 时， $|\boldsymbol{A}| = 0$ 。检查左上角 3×3 子式，易知秩为 3。 $\dim L(S) = 3$ ，基为前三个向量。

第五板块：抽象线性空间与子空间理论

1. 矩阵子空间与交换子空间 ($AX = XA$ 模型)

1. 【2023-2024 春夏】定义集合 $W = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\}$ ，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(a) 证明 W 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间;

(b) 求 W 的维数。

解: 1. 证明子空间

- 零元素: $0A = 0 = A0$, 故 $0 \in W$, 集合非空。
- 加法封闭: 设 $X_1, X_2 \in W$, 即 $AX_1 = X_1A, AX_2 = X_2A$ 。则 $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = X_1A + X_2A = (X_1 + X_2)A$ 。故 $X_1 + X_2 \in W$ 。
- 数乘封闭: 设 $k \in \mathbb{R}, X \in W$ 。 $A(kX) = k(AX) = k(XA) = (kX)A$ 。故 $kX \in W$ 。

综上, W 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间。

2. 求维数

【破题思路】

思路: 设出 X 的一般形式 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $AX = XA$ 求解元素间的约束关系。

设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 。

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ x_3 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

由 $AX = XA$ 对应元素相等得:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_1 \implies x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = x_1 + x_2 \implies x_4 = x_1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_3 + x_4 \implies x_3 = 0 \end{cases}$$

故 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。 W 的一组基为 $E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。维数 $\dim W = 2$ 。

2. 【2022-2023 春夏】已知 $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 设 $A \in V$, 令 $W_A = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid AX = XA\}$ 。

- (a) 证明: W_A 是 V 的子空间;
- (b) 证明: 当 A 为实对称矩阵时, $\dim W_A \geq 2$;
- (c) 当 A 为实对称矩阵且 $\dim W_A = 2$ 时, 写出 W_A 的一组基。

证明与解: 1. 证明子空间同上一题步骤 (略)。

2. 证明维数 ≥ 2

【破题思路】

思路: 寻找 W_A 中显然存在的元素。对于任何方阵, E (单位阵) 和 A 自身一定与 A 交换。只需讨论 E 与 A 是否线性相关。

显然 $E \in W_A$ (因 $AE = EA = A$), $A \in W_A$ (因 $A^2 = AA$)。

- 若 A 与 E 线性无关, 则 W_A 至少包含两个线性无关向量, $\dim W_A \geq 2$ 。
- 若 A 与 E 线性相关, 即 $A = kE$ (数量矩阵)。此时 $AX = kX = X(kE) = XA$ 对任意 X 成立。则 $W_A = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\dim W_A = 4 \geq 2$ 。

综上, $\dim W_A \geq 2$ 。

3. 写出一组基当 $\dim W_A = 2$ 时, 意味着 A 不是数量矩阵 (否则维数为 4)。由上可知 E, A 线性无关且均在 W_A 中。故 W_A 的一组基为 $\{E, A\}$ 。

3. 【2023-2024 秋冬】设 $R^{3 \times 3}$ 是所有三阶实方阵构成的实线性空间。已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 令 $W = \{X \in R^{3 \times 3} \mid AX = XA\}$ 。

- (a) 证明 W 是 $R^{3 \times 3}$ 的子空间;
- (b) 假设矩阵 $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ 使得 $BA = AB$, 证明 $B = b_{11}E + b_{21}A + b_{31}A^2$;
- (c) 求 W 的维数 $\dim W$ 。

证明与解: 1. 证明子空间同第 1 题 (略)。

2. 证明多项式结构

【破题思路】

思路: 这是一个具体的 Jordan 块矩阵。利用 $BA = AB$ 直接计算 B 的元素关系。注意 A 的幂次性质: A 是下移算子。

计算幂次： $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{O}$ 。设 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 。 \mathbf{AB} 表示将 \mathbf{B} 的各行下移（第一行补 0）； \mathbf{BA} 表示将 \mathbf{B} 的各列左移（最后一列补 0）。

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{32} & b_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

比较对应元素：

- 第 1 行： $b_{12} = 0, b_{13} = 0$ 。
- 第 2 行： $b_{22} = b_{11}, b_{23} = b_{12} = 0$ 。
- 第 3 行： $b_{32} = b_{21}, b_{33} = b_{22} = b_{11}$ 。

故 \mathbf{B} 具有形式：

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{11} & 0 \\ b_{31} & b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} = b_{11}\mathbf{E} + b_{21}\mathbf{A} + b_{31}\mathbf{A}^2$$

得证。

3. 求维数由第 2 问知，任意 $\mathbf{X} \in W$ 均可表示为 $k_1\mathbf{E} + k_2\mathbf{A} + k_3\mathbf{A}^2$ 。检查 $\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ 的线性相关性：

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$$

易得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。故 $\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ 线性无关，构成一组基。 $\dim W = 3$ 。

4. 【2022–2023 秋冬】线性空间 $W = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ 。

(a) 证明 W 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间；

(b) 证明 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是 W 的一组基。

证明： 1. 证明子空间验证加法和数乘封闭性。设 $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ -c_1 & b_1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ -c_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 。 $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ -(c_1 + c_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$ ，仍具有 W 中矩阵的形式。同理 $k\mathbf{X}_1$ 也符合形式。故是子空间。

2. 证明是基

- 生成性：对于任意 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix} \in W$ ，有 $\mathbf{X} = a\boldsymbol{\alpha}_1 + b\boldsymbol{\alpha}_2 + c\boldsymbol{\alpha}_3$ 。
- 无关性：设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{O}$ 。即 $\begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ -k_3 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。显然 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

故 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 W 的一组基。

5. 【2024-2025 春夏】已知矩阵 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}, \{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ 分别是空间 M 的一组基, 则从 $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$ 到 $\{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ 的过渡矩阵为 _____. 矩阵组 $\{\mathbf{A}_1, 2\mathbf{A}_3, 3\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4\}$ 的维数是 _____.

解：

【破题思路】

- 思路：1. 过渡矩阵：解方程 $\mathbf{A}_3 = c_{11}\mathbf{A}_1 + c_{21}\mathbf{A}_2$ 和 $\mathbf{A}_4 = c_{12}\mathbf{A}_1 + c_{22}\mathbf{A}_2$ 。
2. 矩阵组维数：求这三个矩阵在基 $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$ 下的坐标向量的秩。

第一空（过渡矩阵）：设 $\mathbf{A}_3 = x\mathbf{A}_1 + y\mathbf{A}_2$ ，即 $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 。
观察元素： $2x + y = 5$ 且 $y = 1$ （右上角元素）。解得 $x = 2, y = 1$ 。验证： $2 \times 2 + 1 \times 1 = 5, 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$ 。成立。

设 $\mathbf{A}_4 = p\mathbf{A}_1 + q\mathbf{A}_2$ ，即 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 。观察元素： $q = 2$ （右上角）。
 $2p + q = 0 \Rightarrow 2p = -2 \Rightarrow p = -1$ 。验证： $-1(2) + 2(1) = 0, -1(2) + 2(3) = 4$ 。成立。

过渡矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x & p \\ y & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。

第二空（维数）：将矩阵组转化为在基 $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$ 下的坐标向量：

- \mathbf{A}_1 的坐标： $(1, 0)^T$ 。
- $2\mathbf{A}_3$ 的坐标： $2(2, 1)^T = (4, 2)^T$ 。
- $3\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4$ 的坐标： $3(2, 1)^T - (-1, 2)^T = (6, 3)^T - (-1, 2)^T = (7, 1)^T$ 。

构成矩阵求秩：

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

显然秩为 2（有两行，且不成比例）。故维数为 2。

答案: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; 2。$

2. 函数与多项式空间（抽象向量）

1. 【2019–2020 秋冬】设 R_+ 为所有正实数组成的集合, 加法和数乘定义如下: $\forall a, b \in R_+, k \in \mathbb{R}, a \oplus b = ab, k \odot a = a^k$, 已知 R_+ 关于加法 \oplus 和数乘 \odot 构成一个实线性空间, 试求 R_+ 的一组基和维数。

解:

【破题思路】

思路: 这是一个经典的“正实数乘法群”构成的线性空间。1. 寻找“零向量”: 即加法单位元。 $a \oplus \theta = a \implies a \cdot \theta = a \implies \theta = 1$ 。2. 寻找基: 设基为 ε , 则任意 $x \in R_+$ 需能表示为 $k \odot \varepsilon$, 即 $x = \varepsilon^k$ 。只要 $\varepsilon \neq 1$ (例如 $\varepsilon = e$), $k = \ln_{\varepsilon} x$ 总有解。

1. 维数任取 $a \in R_+, a \neq 1$ 。对于任意 $x \in R_+$, 令 $k = \log_a x \in \mathbb{R}$ 。则 $x = a^k = k \odot a$ 。这说明 R_+ 中的任意向量都可由向量 a 线性表示。故 $\dim R_+ = 1$ 。
2. 基 R_+ 中任意不等于 1 的正实数均可作为一组基。例如取自然对数的底 e 。基: e (或 2, 10 等)。
2. 【2021–2022 秋冬】对于 $x \in (0, 1)$ 的函数空间 V , 定义加法 $\forall f, g \in V, f + g \triangleq f(x) + g(x)$, 定义数乘法 $\forall k, f \in V, kf \triangleq kf(x)$ 。

(a) 证明: 由 $f(x) = ax + be^x$ 能构成子空间;

(b) 证明: 向量 $f(x) = x, g(x) = x + e^x$ 两个向量线性无关;

(c) 把 $f(x) = x, g(x) = x + e^x$ 化为欧氏空间一组标准正交基 η_1, η_2 (注: 通常默认内积为 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$)。

证明与解: 1. 证明子空间设集合 $W = \{ax + be^x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 。显然 $0 \in W$ 。设 $h_1 = a_1x + b_1e^x, h_2 = a_2x + b_2e^x \in W$ 。 $h_1 + h_2 = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)e^x \in W$ (加法封闭)。 $kh_1 = (ka_1)x + (kb_1)e^x \in W$ (数乘封闭)。故 W 是 V 的子空间。

2. 证明线性无关设 $k_1f(x) + k_2g(x) = 0$, 即:

$$k_1x + k_2(x + e^x) = 0 \implies (k_1 + k_2)x + k_2e^x = 0$$

上式对任意 $x \in (0, 1)$ 恒成立。由于 x 与 e^x 线性无关 (多项式与指数函数增长率不同, 或取 x 的不同值代入): 令 $x \rightarrow 0$ (极限), 得 $k_2 = 0$ 。代回得 $k_1x = 0 \implies k_1 = 0$ 。故只有零解, 两向量线性无关。

3. 施密特正交化

【破题思路】

思路：定义内积 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ 。步骤：先正交化，再单位化。令 $\beta_1 = f(x) = x$ 。令 $\beta_2 = g(x) - \frac{(g, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$ 。

Step 1: 计算内积

$$(\beta_1, \beta_1) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$(g, \beta_1) = \int_0^1 (x + e^x)x dx = \int_0^1 (x^2 + xe^x) dx$$

其中 $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$ 。故 $(g, \beta_1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ 。

Step 2: 正交化

$$\beta_2 = (x + e^x) - \frac{4/3}{1/3}x = x + e^x - 4x = e^x - 3x$$

验证正交性： $(x, e^x - 3x) = 1 - 3(\frac{1}{3}) = 0$ 。正确。

Step 3: 单位化 $\|\beta_1\| = \sqrt{1/3}$ 。

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \sqrt{3}x$$

计算 $\|\beta_2\|^2$ ：

$$\begin{aligned} \|\beta_2\|^2 &= \int_0^1 (e^x - 3x)^2 dx = \int_0^1 (e^{2x} - 6xe^x + 9x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 - 6(1) + 9\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - 6 + 3 = \frac{e^2 - 7}{2} \\ \eta_2 &= \frac{e^x - 3x}{\sqrt{\frac{e^2 - 7}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(e^x - 3x)}{\sqrt{e^2 - 7}} \end{aligned}$$

最终结果： $\eta_1 = \sqrt{3}x$, $\eta_2 = \sqrt{\frac{2}{e^2 - 7}}(e^x - 3x)$ 。

3. 【2024-2025 春夏】已知 $\mathbb{P} = \{f(x) \mid f(x) \text{ 是次数不超过 3 次的一元多项式}\}$ 。当 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0, f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， \mathbb{P} 的满足该条件的子集是一个子空间，该子空间的维数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，它的一组基是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。定义该空间的内积 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ ，则它的一组标准正交基是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

【破题思路】

思路：1. 子空间条件：零向量必须在子空间中。零多项式满足 $0(1) = 0$ ，也必须满足 $0(-1) = 0$ 。非齐次条件（如 $f(-1) = 1$ ）无法构成子空间。2. 维数与基： P_3 维数为 4。两个约束 $f(1) = 0$ 和 $f(-1) = 0$ 线性无关，故维数为 $4 - 2 = 2$ 。基多项式应含有因子 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ 。由于次数 ≤ 3 ，基可以是 $1 \cdot (x^2 - 1)$ 和 $x \cdot (x^2 - 1)$ 。3. 正交化：注意积分区间 $[-1, 1]$ 的对称性。奇函数积分值为 0。

第一空（条件）： $f(-1) = 0$ 。

第二空（维数）：2。

第三空（基）： $x^2 - 1, x^3 - x$ 。

第四空（标准正交基）：令 $\alpha_1 = x^2 - 1$ （偶函数）， $\alpha_2 = x^3 - x$ （奇函数）。计算内积： $(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(x^3 - x)dx = 0$ （奇函数在对称区间积分为 0）。故两者天然正交，只需单位化。

$$\|\alpha_1\|^2 = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{16}{15}。 \|\alpha_2\|^2 = \int_{-1}^1 (x^3 - x)^2 dx = \int_{-1}^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{105}。$$

标准正交基为：

$$\frac{\sqrt{15}}{4}(x^2 - 1), \quad \frac{\sqrt{105}}{4}(x^3 - x)$$

3. 子空间的构造与特殊定义

1. 【2020–2021 秋冬】设 m, n, p 为正整数， A 是一个 $m \times n$ 实矩阵， B 是一个 $p \times n$ 实矩阵，并设 $W = \{AX \in \mathbb{R}^m \mid BX = \mathbf{0}_p\}$ ，其中 $\mathbf{0}_p$ 是一个 p 维零列向量。

(a) 证明 W 是 \mathbb{R}^m 的子空间；

(b) 若 $r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = r_1, r(B) = r_2$ ，试求 W 的维数。

证明与解：

【破题思路】

思路：1. 几何直观： W 实际上是将 B 的零空间 ($N(B)$) 通过矩阵 A 映射后的像空间。2. 维数公式：利用限制映射的维数公式。设 $V_0 = N(B)$ ，考虑映射 $f: X \mapsto AX$ 限制在 V_0 上。 $\dim(\text{Im } f|_{V_0}) = \dim V_0 - \dim(\text{Ker } f|_{V_0})$ 。

1. 证明 W 是子空间

- 非空性：取 $X = \mathbf{0}$ ，则 $BX = \mathbf{0}$ ，且 $AX = \mathbf{0} \in W$ ，故 W 非空。

- 加法封闭: 设 $y_1, y_2 \in W$, 则存在 X_1, X_2 使得 $y_1 = AX_1, y_2 = AX_2$ 且 $BX_1 = 0, BX_2 = 0$ 。 $y_1 + y_2 = A(X_1 + X_2)$ 。 验证条件: $B(X_1 + X_2) = BX_1 + BX_2 = 0$ 。 故 $y_1 + y_2 \in W$ 。
- 数乘封闭: 同理可证 $ky_1 = A(kX_1)$ 且 $B(kX_1) = 0$, 故 $ky_1 \in W$ 。

2. 求 W 的维数 设 $N(B) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid BX = 0\}$ 。 已知 $r(B) = r_2$, 故 $\dim N(B) = n - r_2$ 。 W 即为集合 $\{AX \mid X \in N(B)\}$ 。

考察线性映射 $T: N(B) \rightarrow W$, 定义为 $T(X) = AX$ 。 这是一个满射。 由秩-零化度定理:

$$\dim W = \dim N(B) - \dim(\text{Ker } T)$$

其中 $\text{Ker } T = \{X \in N(B) \mid AX = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid BX = 0 \text{ 且 } AX = 0\}$ 。 这等价于 X 是方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 的解。 故 $\dim(\text{Ker } T) = n - r \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = n - r_1$ 。

代入公式得:

$$\dim W = (n - r_2) - (n - r_1) = r_1 - r_2$$

2. 【2019–2020 春夏】 设 V 是一个 n 维实线性空间, (I): $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, (II): η_1, \dots, η_n 是 V 的两组基, 设 $W = \{\alpha \in V \mid \alpha \text{ 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标}\}$ 。

(a) 证明 W 是 V 的子空间;

(b) 若设向量 $\varepsilon_1 - \eta_1, \dots, \varepsilon_n - \eta_n$ 的秩为 r , 试求 W 的维数。

证明与解: 1. 证明 W 是子空间 设 $\alpha, \beta \in W$, 坐标分别为 x, y 。 这意味着 α 在两组基下坐标均为 x , β 在两组基下坐标均为 y 。 根据坐标运算的线性性质, 向量 $k_1\alpha + k_2\beta$ 在基 (I) 下的坐标为 $k_1x + k_2y$, 在基 (II) 下的坐标也为 $k_1x + k_2y$ 。 两者相等, 故 $k_1\alpha + k_2\beta \in W$ 。 W 是子空间。

2. 求 W 的维数 $\alpha \in W \iff \exists x = (x_1, \dots, x_n)^T$, 使得:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$$

移项得:

$$\sum_{i=1}^n x_i (\varepsilon_i - \eta_i) = 0$$

这表明, W 的维数等同于上述齐次线性方程组解空间 (关于未知数 x_i) 的维数。

令 $\gamma_i = \varepsilon_i - \eta_i$ 。 方程为 $x_1\gamma_1 + \dots + x_n\gamma_n = 0$ 。 解空间维数 = 未知数个数 - 向量组秩。 已知 $\text{rank}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = r$ 。 故 $\dim W = n - r$ 。

3. 【2024–2025 秋冬】设 \mathbb{R}^4 中集合 $S = \{(a, a, a, b)^T, (a, a, b, a)^T, (a, b, a, a)^T, (b, a, a, a)^T\}$, a, b 为不全为 0 的实数。 $L(S)$ 是 S 中向量扩张出来的子空间, 求 $\dim L(S)$, 并给出一组基。

解:

【破题思路】

思路: 将 4 个向量排成矩阵 A , 计算行列式以判断秩。利用行和相等的特点提取公因子 $(3a+b)$ 。

记矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$ 。计算行列式:

$$|A| \xrightarrow{\text{所有行加到第 1 行}} (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} -(3a+b)(a-b)^3$$

分类讨论:

- (a) 当 $a \neq b$ 且 $b \neq -3a$ 时: $|A| \neq 0$, 秩为 4。 $\dim L(S) = 4$, 基为 e_1, e_2, e_3, e_4 (全空间)。
- (b) 当 $a = b \neq 0$ 时: 矩阵全为 a , 秩为 1。 $\dim L(S) = 1$, 基为 $(1, 1, 1, 1)^T$ 。
- (c) 当 $b = -3a$ ($a \neq 0$) 时: $|A| = 0$ 。检查前 3 列的 3×3 子式, 易算得秩为 3。 $\dim L(S) = 3$, 基为前三个向量。

第六板块: 经典证明题

1. 秩与矩阵多项式 (幂等与对合)

1. 【2019–2020 春夏】设 A 为 n 阶实方阵, 且 $A^2 = E$ 。

- (a) 证明: A 的特征值只能是 1 或 -1 ;
- (b) 证明: $r(A + E) + r(A - E) = n$ 。

证明:

【破题思路】

思路：此类满足 $A^2 = E$ 的矩阵称为对合矩阵。1. 特征值直接代入方程验证。2. 关于秩的等式证明，通常采用“夹逼法”：一方面利用 $AB = O$ 结合 Sylvester 不等式证明 $\leq n$ ；另一方面利用矩阵加减构造 E 证明 $\geq n$ 。

1. 特征值证明 设 λ 是 A 的特征值， x 是对应的非零特征向量。则 $Ax = \lambda x$ 。两边同时左乘 A ：

$$A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

已知 $A^2 = E$ ，故 $x = \lambda^2 x$ 。移项得 $(\lambda^2 - 1)x = 0$ 。由于 $x \neq 0$ ，故 $\lambda^2 - 1 = 0$ ，解得 $\lambda = 1$ 或 -1 。

2. 秩恒等式证明 由 $A^2 - E = O$ 可分解为 $(A + E)(A - E) = O$ 。根据 Sylvester 秩不等式 $r(XY) \geq r(X) + r(Y) - n$ ：

$$r(O) \geq r(A + E) + r(A - E) - n$$

即 $0 \geq r(A + E) + r(A - E) - n \implies r(A + E) + r(A - E) \leq n$ 。

另一方面，考虑恒等变形 $(A + E) - (A - E) = 2E$ 。根据秩的性质 $r(X \pm Y) \leq r(X) + r(Y)$ ：

$$r(2E) \leq r(A + E) + r(A - E)$$

即 $n \leq r(A + E) + r(A - E)$ 。

综上所述， $r(A + E) + r(A - E) = n$ 。

2. 【2022–2023 春夏】设 A 为 n 阶实方阵，且 $A^2 = A$ 。

(a) 证明： $r(A) + r(A - E) = n$ ；

(b) 证明： $\text{tr}(A) = r(A)$ 。

证明：

【破题思路】

思路：此类满足 $A^2 = A$ 的矩阵称为幂等矩阵。1. 证明方法同上一题，利用 $A(A - E) = O$ 和 $A - (A - E) = E$ 。2. 迹与秩的关系通常通过特征值建立联系。幂等矩阵必可对角化。

1. 秩恒等式证明 由 $A^2 - A = O \implies A(A - E) = O$ 。由 Sylvester 不等式：

$$r(A) + r(A - E) - n \leq r(O) = 0 \implies r(A) + r(A - E) \leq n$$

由矩阵加减性质：

$$\mathbf{A} - (\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{E} \implies r(\mathbf{E}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \implies n \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E})$$

故 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = n$ 。

2. 迹等于秩证明 设 λ 为 \mathbf{A} 的特征值，满足方程 $\lambda^2 - \lambda = 0$ ，即 $\lambda(\lambda - 1) = 0$ 。故特征值 $\lambda \in \{0, 1\}$ 。

由于 \mathbf{A} 的最小多项式无重根（因子为 x 和 $x - 1$ ），故 \mathbf{A} 必可相似对角化。设 $\mathbf{A} \sim \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。对角矩阵的秩等于非零对角元的个数，即特征值中 1 的个数。设 1 的个数为 k ，则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{\Lambda}) = k$ 。

另一方面，矩阵的迹等于特征值之和：

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k\uparrow} + 0 + \dots = k$$

故 $\text{tr}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ 。

2. 反对称矩阵与正交矩阵

1. 【2023–2024 秋冬】设 \mathbf{A} 为 n 阶实反对称矩阵（即 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ）。

(a) 证明：对于任意 n 维列向量 \mathbf{x} ，都有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ ；

(b) 证明： $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ 均可逆。

证明：

【破题思路】

思路：1. 这是一个标量，标量的转置等于其自身。利用 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 导出 $a = -a$ 。2. 证明可逆通常有两种路径：一是证明行列式不为 0（利用特征值性质）；二是证明齐次方程组 $(\mathbf{I} \pm \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解。方法二更具代数美感。

1. 证明二次型为 0 令 $y = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 。由于 y 是一个实数（ 1×1 矩阵），故 $y^T = y$ 。

$$y = y^T = (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{x}^T)^T = \mathbf{x}^T (-\mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = -y$$

由 $y = -y$ 可得 $2y = 0 \implies y = 0$ 。即 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ 。

2. 证明可逆考虑齐次线性方程组 $(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。两边同时左乘 \mathbf{x}^T ：

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{0} = 0$$

展开左边：

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$$

由第 1 问结论知 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ ，故：

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0 \implies \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

这蕴含 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。由于齐次方程组只有零解，故 $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ 可逆。同理可证 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 可逆（只需将方程变为 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，左乘 \mathbf{x}^T 后结论一致）。

2. 【2019–2020 春夏】设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵，满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ，证明： $\det(\mathbf{A}) \geq 0$ 。

证明：

【破题思路】

思路：若直接利用 $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$ ，只能得出当 n 为奇数时行列式为 0。要证明通用的非负性，需借助特征值。实反对称矩阵的特征值或者是 0，或者是纯虚数共轭对。

设 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。由于 \mathbf{A} 是实矩阵，其特征多项式系数为实数，故复特征值必共轭成对出现。又因 \mathbf{A} 是反对称矩阵，其特征值只能是 0 或纯虚数。非零特征值必为 $\pm b_k i$ ($b_k \in \mathbb{R}, b_k \neq 0$) 的形式。行列式等于特征值之积：

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^n \lambda_j$$

- 若存在特征值 0，则 $\det(\mathbf{A}) = 0$ 。
- 若所有特征值非零，则它们成对出现： $(b_k i) \cdot (-b_k i) = b_k^2 > 0$ 。

无论何种情况，积均为非负实数。故 $\det(\mathbf{A}) \geq 0$ 。

3. 【2021–2022 秋冬】设 3 阶实矩阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ ，且 $|\mathbf{A}| = 1$ 。证明： $|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0$ 。

证明：

【破题思路】

思路：利用正交矩阵 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ 的性质，在行列式内部构造变形。关键技巧是将 \mathbf{E} 替换为 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ，并提取公因子 \mathbf{A} 。同时利用 $n = 3$ 这个奇数阶数的条件。

利用 $\mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 进行代换：

$$|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = |\mathbf{A} \mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T|$$

提取左公因子 A :

$$= |A(E - A^T)| = |A| \cdot |E - A^T|$$

已知 $|A| = 1$, 且矩阵转置不改变行列式值:

$$= 1 \cdot |(E - A)^T| = |E - A|$$

提取标量因子 (-1) :

$$|E - A| = |(-1)(A - E)| = (-1)^3 |A - E| = -|A - E|$$

综上得到方程:

$$|A - E| = -|A - E|$$

移项得 $2|A - E| = 0$, 故 $|A - E| = 0$ 。

3. 正定性与对称矩阵

1. 【2019–2020 秋冬】设 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 证明 $A + B$ 也是正定矩阵。

证明:

【破题思路】

思路: 判定正定性需要验证两点: 1. 对称性: $(A + B)^T = A + B$? 2. 正定性: $\forall x \neq 0, x^T(A + B)x > 0$?

1. 验证对称性因为 A, B 为正定矩阵, 故它们必为实对称矩阵, 即 $A^T = A, B^T = B$ 。

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

故 $A + B$ 是实对称矩阵。

2. 验证二次型正定对任意 n 维非零列向量 $x \neq 0$:

$$x^T(A + B)x = x^T A x + x^T B x$$

由 A 正定知 $x^T A x > 0$; 由 B 正定知 $x^T B x > 0$ 。故两项之和 > 0 。

综上, $A + B$ 是正定矩阵。

2. 【2020–2021 秋冬】判断题: 若 A, B 都是 n 阶实对称正定矩阵, 则 AB 是否也是正定矩阵? 若是, 请给出证明; 若不是, 请举出反例。

解: 结论: 不是。

【破题思路】

思路：正定矩阵首先必须是对称矩阵。两个对称矩阵的乘积 AB 是对称矩阵的充要条件是它们可交换 ($AB = BA$)。若 A, B 不可交换, AB 甚至不是对称的, 自然谈不上正定。

反例：取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。显然 A, B 均对称, 且顺序主子式均大于 0, 故均为正定矩阵。计算乘积:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

检查对称性: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq AB$ 。由于 AB 不是对称矩阵, 故它不是正定矩阵。

【避坑指南】

注：即使放宽定义 (仅要求特征值为正), AB 的特征值确实全为正实数 (因为 $AB \sim A^{-1}(AB)A = BA$ 且 $AB \sim A^{1/2}BA^{1/2}$, 后者是对称正定的)。但在标准定义下, 不对称即非正定。

3. 【2020—2021 秋冬】设 A, B 均为实对称矩阵, C 为实反对称矩阵。若 $C = 0$, 能否推出 A, B 可交换 (即 $AB = BA$)? 证明或举反例。

解：

【破题思路】

思路：本题题干略显含糊, 通常语境下 C 指的是矩阵乘积 AB 的反对称分量。任意方阵 M 可唯一分解为对称部分 S 和反对称部分 C 之和: $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$ 。若题目意指 $AB = S + C$, 则问题转化为: 当 AB 的反对称部分为 0 时, A, B 是否可交换。

结论：能推出 A, B 可交换。

证明：考察矩阵积 AB 。其反对称部分通常定义为 $C = \frac{AB-(AB)^T}{2}$ 。由于 A, B 对称, 有 $(AB)^T = B^T A^T = BA$ 。故 $C = \frac{AB-BA}{2}$ 。

若已知 $C = 0$, 则:

$$\frac{AB-BA}{2} = 0 \implies AB-BA=0 \implies AB=BA$$

故 A, B 可交换。

补充说明：若题目仅仅是说“存在一个无关的 $C = 0$ ”，则逻辑不通。但在代数题目中，结合“ A, B 对称”和“ C 反对称”的语境，通常隐含了 $AB = S + C$ 这种正交分解结构。

或者，若题意是问“如果 AB 是对称矩阵（即其反对称部分 $C = 0$ ），是否 $AB = BA$ ？”答案也是肯定的： AB 对称 $\iff (AB)^T = AB \iff B^T A^T = AB \iff BA = AB$ 。

4. 交换性、反交换性与公共特征向量

1. 【2023–2024 春夏】设 A, B 都是 n 阶矩阵，且 $AB = BA$ 。证明： A, B 有公共特征向量。

证明：

【破题思路】

思路：利用交换性 ($AB = BA$) 证明 A 的特征子空间是 B 的不变子空间。即：若 x 是 A 的特征向量，则 Bx 也是 A 的特征向量（或为零向量）。由此，可将 B 限制在该子空间上，进而找到公共特征向量。（注：本题默认在复数域 \mathbb{C} 上讨论，以保证特征值一定存在）。

第一步：构建 A 的特征子空间并证明其在 B 下不变。在复数域 \mathbb{C} 上， A 必存在特征值，设其为 λ 。记 V_λ 为 A 属于特征值 λ 的特征子空间：

$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

对于任意非零向量 $x \in V_\lambda$ ，考察向量 $y = Bx$ 。利用 $AB = BA$ ，有：

$$Ay = A(Bx) = (AB)x = (BA)x = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda(Bx) = \lambda y$$

这说明 Bx 依然满足 A 的特征方程（即 $Bx \in V_\lambda$ ）。因此，对于任意 $x \in V_\lambda$ ，都有 $Bx \in V_\lambda$ 。即 V_λ 是变换 B 的不变子空间。

第二步：在 V_λ 中寻找 B 的特征向量。将矩阵 B 限制在子空间 V_λ 上，看作是从 V_λ 到 V_λ 的线性变换，记为 $\mathcal{T} = B|_{V_\lambda}$ 。由于在复数域上，任何有限维空间上的线性变换都至少有一个特征值和特征向量。故 \mathcal{T} 必存在特征值 μ 及对应的非零特征向量 $\xi \in V_\lambda$ ，满足：

$$B\xi = \mu\xi$$

同时，由于 $\xi \in V_\lambda$ ，由 V_λ 的定义知：

$$A\xi = \lambda\xi$$

综上，非零向量 ξ 同时满足：

$$\begin{cases} A\xi = \lambda\xi \\ B\xi = \mu\xi \end{cases}$$

故 ξ 即为 A 和 B 的公共特征向量。

2. 【2023-2024 春夏】设 A, B 是 n 阶实方阵， E 是单位矩阵，满足 $A^2 = E, B^2 = E, AB + BA = O$ 。证明： n 是偶数。

证明：

【破题思路】

思路：条件 $AB + BA = O$ 即 $AB = -BA$ （反交换）。处理此类问题最强有力的工具是行列式。利用 $|AB| = |-BA|$ 以及 $|kM| = k^n|M|$ 导出关于 n 的奇偶性约束。

由 $AB + BA = O$ 得 $AB = -BA$ 。两边取行列式：

$$|AB| = |-BA|$$

利用行列式的乘法定理和数乘性质：

$$|A||B| = (-1)^n |B||A|$$

即：

$$|A||B| = (-1)^n |A||B|$$

我们需要判断 $|A||B|$ 是否为 0。已知 $A^2 = E$ ，则 $|A^2| = |E| = 1$ ，即 $|A|^2 = 1$ ，故 $|A| \neq 0$ 。同理由 $B^2 = E$ 可得 $|B| \neq 0$ 。

既然 $|A||B| \neq 0$ ，在等式两边同时约去 $|A||B|$ ，得：

$$1 = (-1)^n$$

此式成立的充要条件是 n 为偶数。证毕。

5. 矩阵代数、秩不等式与线性无关

1. 【2024-2025 秋冬】设 A, B 是两个互不相同的 n 阶实矩阵，满足 $A^3 = B^3, A^2B = B^2A$ 。证明： $A^2 + B^2$ 不可逆。

证明：

【破题思路】

思路：要证矩阵不可逆，通常寻找非零向量 \boldsymbol{x} 使得 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ，或者寻找非零矩阵 \boldsymbol{C} 使得 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{C} = \mathbf{0}$ 。观察已知条件，涉及 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的三次项。构造 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 与某个项的乘积，试图利用已知条件消零。观察项： $\boldsymbol{A}^3, \boldsymbol{B}^3, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$ 。联想到 $(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ 的展开式。

考察乘积 $(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ ：

$$(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^3$$

将右边重组为：

$$= (\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{B}^3) - (\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A})$$

由已知条件 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{B}^3$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$ ，可知上述两项均为零矩阵。故：

$$(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \mathbf{O}$$

利用反证法：假设 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 可逆，则在等式两边同时左乘 $(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)^{-1}$ ，可得：

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \mathbf{O} \implies \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

这与题目条件“ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个互不相同”的矩阵矛盾。

因此，假设不成立， $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 不可逆。

2. 【2024–2025 秋冬】设 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{YX}$ 。证明： $r(\boldsymbol{X}) + r(\boldsymbol{Y}) \geq r(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) + r(\boldsymbol{XY}) - n$ 。

证明：

【破题思路】

思路：这个不等式可以重写为 $r(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) + r(\boldsymbol{XY}) \leq r(\boldsymbol{X}) + r(\boldsymbol{Y}) + n$ 。利用秩的基本性质 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq n$ 和 $r(\boldsymbol{AB}) \leq \min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B}))$ 即可证明。实际上，此结论对任意方阵都成立，不需要交换性条件。

根据矩阵秩的基本性质：1. 对于任意 n 阶矩阵，秩不超过阶数：

$$r(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) \leq n$$

2. 乘积的秩不超过因子的秩：

$$r(\boldsymbol{XY}) \leq r(\boldsymbol{X})$$

将两式相加：

$$r(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) + r(\boldsymbol{XY}) \leq n + r(\boldsymbol{X})$$

由于秩恒为非负数，显然 $r(\mathbf{Y}) \geq 0$ ，故：

$$r(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + r(\mathbf{XY}) \leq n + r(\mathbf{X}) + r(\mathbf{Y})$$

移项整理即得：

$$r(\mathbf{X}) + r(\mathbf{Y}) \geq r(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + r(\mathbf{XY}) - n$$

证毕。

【避坑指南】

注：题目给出的 $\mathbf{XY} = \mathbf{YX}$ 条件在本证明中未被使用，这说明该不等式是一个非常弱的界。在考试中，若遇到此类多余条件，只需正常证明即可，不必强行使用。（也存在另一种可能：题目原意是求证更强的 $r(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + r(\mathbf{XY}) \leq r(\mathbf{X}) + r(\mathbf{Y})$ ，该结论在特定条件下成立，但本题按题面证明即可）。

3. 【2022–2023 秋冬】设向量 α, β 线性无关，证明： $\alpha + \beta$ 与 $\alpha - \beta$ 线性无关。
证明：

【破题思路】

思路：利用线性无关的定义。设 $k_1(\alpha + \beta) + k_2(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$ ，证明 $k_1 = k_2 = 0$ 。

设有实数 k_1, k_2 使得：

$$k_1(\alpha + \beta) + k_2(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$$

整理变形，合并同类项：

$$(k_1 + k_2)\alpha + (k_1 - k_2)\beta = \mathbf{0}$$

因为已知 α, β 线性无关，所以它们的组合系数必须全为 0：

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$$

解此方程组：两式相加得 $2k_1 = 0 \implies k_1 = 0$ 。两式相减得 $2k_2 = 0 \implies k_2 = 0$ 。

由于 k_1, k_2 必须全为 0，故 $\alpha + \beta$ 与 $\alpha - \beta$ 线性无关。