微积分（甲）I 期末真题演练本

（配套讲义使用）

目录

第一板块：极限 **3**

1. 极限的定义 $(\varepsilon - N, \varepsilon - \delta)$ 3
2. 泰勒公式与等价无穷小 4
3. Stolz 定理、递推数列与极限理论工具 7
4. 定积分定义（黎曼和） 9
5. 积分性质与周期函数 11
6. 夹逼定理 12

第二板块：微分 **13**

1. 导数的定义 13
2. 求导的计算 14
3. 导数的几何应用与函数性态 18
4. 泰勒公式与高阶导数 21

第三板块：积分计算 **23**

1. 分部积分法 23
2. 换元积分法 24
3. 有理函数与部分分式分解 26
4. 定积分的特殊性质 27
5. 变限积分与交换积分次序 28

第四板块：积分应用 **29**

1. 曲线的弧长与旋转曲面侧面积 29
2. 平面图形的面积与旋转体体积 31
3. 综合优化问题 32

第五板块：证明题 **33**

1. 数列极限与递归数列 33
2. 凸函数与不等式证明 37

3. 微分中值定理与泰勒公式 41
4. 积分不等式与积分中值定理 45

第六板块：其他与查漏补缺 49

第一板块：极限

1. 极限的定义 $(\varepsilon - N, \varepsilon - \delta)$

1. [**2017-2018, 4**] 用 ε–N 语言证明：$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+4}=\frac{2}{3}$。

2. [**2016-2017, 五**] 按定义证明 $\lim_{x\to1}x^2=1$。

3. [**2019-2020, 11**] 试用 ε–δ 语言描述 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$。

2. 泰勒公式与等价无穷小

1. **[2024-2025, 9]** 计算极限 $\lim_{x\to\infty} x\left[e^{1/x} - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$。

2. **[2024-2025, 3]** 设当 $x\to 0$ 时，$ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 x^2 是等价无穷小，求 a,b 的值。

3. **[2023-2024, 9]** 计算极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)-\sin x}{x-\sin x}$。

4. **[2023-2024, 1]** 计算极限：$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$。

5. **[2022-2023, 2]** 求极限：$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$。

6. **[2022-2023, 1]** 求极限：$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^n$。

7. **[2021-2022, 2]** 求极限：$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^7+x^6)^{\frac{1}{7}}-(x^7-x^6)^{\frac{1}{7}}\right]$。

8. **[2020-2021, 2]** 试求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+1)^2}\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$。

9. **[2018-2019, 2]** 求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2x)^x-3^x}{\arcsin(x^2)}$。

10. **[2017-2018, 2]** 计算极限：$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}\right)$。

11. [**2016-2017, 二-1**] 求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$。

12. [**2015-2016, 7**] 求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(e^x+1)\ln(1+x)}$。

13. [**2015-2016, 8**] 求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sqrt{1-x^3}-1}$。

3. Stolz 定理、递推数列与极限理论工具

1. **[2024-2025, 14]** 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n}$，$0<a_n<\dfrac{1}{n^2}$。证明：

   (a) $0<b_n<\dfrac{3a_n^2}{4}$；

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_1}{a_1}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ 存在。

2. **[2023-2024, 14]** 设 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=a_n(1-a_n)$，$n=1,2,3,\ldots$：

   (a) 证明 $a_n<\dfrac{1}{n+1}$；

   (b) 证明数列 $\{na_n\}$ 收敛；

   (c) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n$。

3. [**2019-2020, 1**] 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = 1$，$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$a_{n+1} = \sin a_n$。

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限；

(2) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{6}{(a_n)^2}}$$

4. 定积分定义（黎曼和）

1. **[2023-2024, 10]** 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k(k-1)}$。

2. **[2021-2022, 4]**

   (1) 当 $x>0$ 时，证明
$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

   (2) 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

3. **[2018-2019, 14]** 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}$。

4. **[2016-2017, 一-5]** 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$。

5. [**2015-2016, 9**] 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

5. 积分性质与周期函数

1. [**2020-2021, 9**] 设 f 以 T 为周期。
   - 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$；
   - 计算：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t$。

2. [**2020-2021, 4(2)**] 求极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_1^2 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$。

3. [**2020-2021, 1**] 试求极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-\dfrac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}\right)$。

6. 夹逼定理

1. [**2020-2021, 4(1)**] 设 $a_1, \ldots, a_m$ 是 m 个正实数，试求极限：

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(a_1)^n + \cdots + (a_m)^n}$$

2. [**2021-2022, 4**]

   (a) 当 $x > 0$ 时，证明：$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$；

   (b) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$。

第二板块：微分

1. 导数的定义

1. **[2022-2023, 3]** 设 $f(x)=\frac{x}{\pi}+x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$，$f(0)=0$，求 $f'(0)$。

2. **[2019-2020, 3]** 设 $f(x)=\frac{\arctan x-\sin x}{x^2}\ (x\neq 0)$，$f(0)=0$，求 $f'(0)$。

3. **[2017-2018, 1]** 已知 $f(x)=(2017+x)^x+b\ (x\geq 0)$，$a(1-x)^{1/x}\ (x<0)$ 在 $x=0$ 可导，求 a,b。

4. **[2017-2018, 5]** 设 $f(t)=\sin\frac{1}{t}\ (t\neq 0)$，$f(0)=1$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $x=0$ 处的导数 $F'(0)$。

2. 求导的计算

1. **[2024-2025, 7]** 设函数 $y = y(x)$ 由 $x^2 + xy + y^3 = 1$ 确定，求 $y''(1)$。

2. **[2023-2024, 2]** 已知 $f(2) = 2, f'(2) = 3$，求 $y = f(f(f(x)))$ 在 $x = 2$ 处的导数。

3. **[2023-2024, 4]** 设 $\begin{cases} x = 3t - \sin t \\ y = e^t - \cos t \end{cases}$，求 $t = 0$ 时的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

4. **[2023-2024, 7]** 已知 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$，求 $x = 0$ 时的 y' 和 y''。

5. **[2022-2023, 4]** 由 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x y \sin((t+1)^2) dt$ 确定 $y(x)$，求 $y(0), y'(0), y''(0)$。

6. **[2021-2022, 8]** 设 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

7. **[2019-2020, 7]** 设 $3^y = x + y$，求 $x = 0$ 时的 y'。

8. **[2019-2020, 8]** 设 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \int_0^t \ln(1 + e^u) du \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

9. **[2018-2019, 5]** 设 $f(x) = x^{1/x}(x > 0)$，求 $f(x)$ 的最大值。

10. **[2018-2019, 6]** 设 $y(x)$ 在 $x = 0$ 处一阶可导，且 $\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{y(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{2019}$，求 $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$。

11. [**2018-2019, 7**] 设 $x^3+y^3+3xy=1$，求 $x=1$ 时的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

12. [**2017-2018, 6**] 设 $x^y+y^x=2$，求 $x=1$ 时的 $\mathrm{d}y$。

13. [**2016-2017, 一-3**] 设 $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=(1-\cos t)^2 \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

14. [**2016-2017, 二-4**] 设 $xe^x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$，求 $x=0$ 时的 y' 和 y''。

15. [**2015-2016, 1**] 设 $y=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+\ln 5$，求 $\mathrm{d}y$。

16. [**2015-2016, 2**] 设 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2} \\ y=\int_1^{t^2}\frac{3^u}{\sqrt{1+u}}du \end{cases}$ ，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

3. 导数的几何应用与函数性态

1. **[2024-2025, 1]** 求曲线 $y = x + x\ln(1+\frac{1}{x})$ 的斜渐近线方程。

2. **[2024-2025, 2]** 求曲线 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程。

3. **[2023-2024, 3]** 求曲线 $y = x\arctan x$ 在 $x \to -\infty$ 时的渐近线方程。

4. **[2021-2022, 7]** 求函数 $f(x) = -3x^5 + 5x^3 + 2$ 的极值。

5. **[2020-2021, 7]** 求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上到直线 $3x + 5y = 15$ 距离最短的点。

6. [**2020-2021，8**] 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\begin{cases} x=t-\sin t, & t\in(0,2\pi), \\ y=1-\cos t, & t\in(0,2\pi), \end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，并求函数 $y=y(x)$ 的极值。

7. [**2019-2020，2**] 求曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的拐点坐标。

8. [**2019-2020，5**] 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的所有极值点及极值。

9. [**2017-2018，9**] 求函数 $y=x^3-3|x|+1$ 的极值。

10. [**2017-2018，11**] 求扇形剪裁漏斗容积最大时的中心角（几何最值）。

11. **[2016-2017, 一-4]** 求 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ 的拐点。

12. **[2015-2016, 3]** 求曲线 $y^3+xy^2+x^2y-3=0$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率。

4. 泰勒公式与高阶导数

1. **[2024-2025, 8]** 设 $f(x) = x^2(e^x + 1)$，求 $f^{(5)}(1)$。

2. **[2022-2023, 5]** 设 $f(x) = e^{(1+x/2)^2} = \sum a_k x^k$，求 a_2, a_3, a_4。

3. **[2021-2022, 6]** 设 $f(x) = \ln(\cos x) = \sum a_k x^k$，求 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4。

4. **[2019-2020, 4]** 设 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$，$f(0) = e$。若 $x \to 0$ 时 $f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3 + o(x^3)$，求 M_1, M_2, M_3。

5. **[2018-2019, 4]** 设 $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$，利用泰勒展开计算前三项系数 B_0, B_1, B_2。

6. [**2018-2019, 3**] 设 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}$，求 $f^{(2019)}(0)$。

7. [**2017-2018, 3**] 设 $f(x) = \arctan x$，求 $f^{(2018)}(0)$。

8. [**2016-2017, 一-1**] 设 $f(x) = x^2e^x$，求 $f^{(10)}(0)$。

第三板块：积分计算

1. 分部积分法

1. **[2024-2025, 11]** 求不定积分 $\int x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$。

2. **[2023-2024, 5]** 已知 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$，求 $\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$。

3. **[2020-2021, 6]** 求反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$。

4. **[2018-2019, 8]** 求不定积分 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$。

5. **[2017-2018, 10]** 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$。

2. 换元积分法

1. [**2022-2023, 6**] 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x$。

2. [**2022-2023, 8**] 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{t}{2}}(\cos t-\sin t)}{\sqrt{\cos t}}\,\mathrm{d}t$。

3. [**2021-2022, 1**] 求反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$。

4. [**2021-2022, 3**] 求不定积分（$x \in (0, \frac{\pi}{2})$）：$\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$。

5. [**2020-2021, 3**] 求不定积分 $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$。

6. **[2019-2020, 9]** 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^4}}$。

7. **[2017-2018, 8]** 求不定积分（$x \in (-1,1)$）：$\int \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$。

8. **[2016-2017, 二-2]** 求不定积分 $\int \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$。

9. **[2015-2016, 4]** 求积分 $\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$。

10. **[2015-2016, 5]** 求广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(\sqrt{1+x^2})^3}\,\mathrm{d}x$。

3. 有理函数与部分分式分解

1. **[2024-2025, 6]** 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$。

2. **[2023-2024, 11]** 求不定积分 $\int \frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$。

3. **[2019-2020, 10]** 求不定积分 $\int \left(\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} + \frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x$。

4. **[2016-2017, 二-3]** 求广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$。

4. 定积分的特殊性质

1. **[2019-2020, 12]** 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+2x+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$。

2. **[2018-2019, 9]** 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}dx$。

3. **[2016-2017, 一-2]** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$。

4. **[2016-2017, 一-6]** 已知 $f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)dx=1$，求 $\int_1^3 f(x)dx$。

5. **[2016-2017, 四]** 求 $F(t)=\int_0^{\pi} |\sin x - t|\,\mathrm{d}x$ 的最小值。

5. 变限积分与交换积分次序

1. [**2024-2025, 12**] 已知 $f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

2. [**2023-2024, 5**] 已知 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$，求 $\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$。

3. [**2015-2016, 6**] 已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$。

第四板块：积分应用

1. 曲线的弧长与旋转曲面侧面积

1. **[2024-2025, 10]** 求曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长。

2. **[2023-2024, 8]** 求曲线 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长。

3. **[2022-2023, 7]** 求极坐标曲线 $r = 2^\theta$ $(\theta \in [e, \pi])$ 的弧长。

4. **[2021-2022, 5]** 求曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的长度。

5. **[2020-2021, 5]** 求极坐标曲线 $r = 1 + \cos\theta$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ 的弧长。

6. **[2019-2020, 6]** 求曲线 $y = 2e^{x/2}$ 在 $x \in [\ln 3, 3\ln 2]$ 上的弧长。

7. **[2018-2019, 10]** 求参数曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (t \in [0, 1])$ 的弧长。

8. **[2016-2017, 二-5]** 求曲线 $y = e^x$ 在 $0 \le x \le \ln\sqrt{3}$ 上的弧长。

2. 平面图形的面积与旋转体体积

1. **[2024-2025, 4]** 曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成区域绕 y 轴旋转的体积。

2. **[2024-2025, 5]** 求极坐标曲线 $r=\sin 3\theta$ $(0\le\theta\le\frac{\pi}{3})$ 围成的面积。

3. **[2023-2024, 13]** 求由 $y=\arctan x, x=1, y=0$ 围成区域的面积及绕 y 轴旋转的体积。

3. 综合优化问题

1. **[2024-2025, 13]** 设 D 由 $y = xe^{-2x}, x = t, x = 2t$ 围成，求其面积 $S(t)$ 的最大值。

2. **[2016-2017, 三]** 已知 $f(x) = ax^2 + bx$ 满足 $f(x) \geq 0$ $(x \in [0,1])$。设由 $y = f(x)$、$x = 1$ 及 x 轴围成区域 D 的面积为 $1/3$，求 a, b 的值使 D 绕 x 轴旋转的体积 V_0 最小。

3. **[2015-2016, 13]** 设 l_1 为 $y = x^2$ 在 $A(a, a^2)$ $(a > 0)$ 处的切线，l_2 是另一条与 l_1 垂直的切线。

第五板块：证明题

1．数列极限与递归数列

1. **[2024-2025, 14]** 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n}$，$0<a_n<\dfrac{1}{n^2}$。证明：

   (a) $0<b_n<\dfrac{3a_n^2}{4}$；

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_1}{a_1}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ 存在。

2. **[2023-2024, 14]** 设 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=a_n(1-a_n)$，$n=1,2,3,\ldots$：

   (a) 证明 $a_n<\dfrac{1}{n+1}$；

   (b) 证明数列 $\{na_n\}$ 收敛。

3. **[2021–2022, 11]** 函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有定义，满足差商单调递增（即具有凸函数的差商性质）。对任意 $n \in \mathbb{N}^+$，定义

$$a_n = (n+2)\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n+2}\right)\right]$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

4. **[2019-2020, 1(1)]** 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = 1$，$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$a_{n+1} = \sin a_n$。证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

5. **[2018-2019, 1]** 设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，已知 $\{a_n\}$ 递增、$\{b_n\}$ 递减。试用 ε 定义证明：$\forall n\in\mathbb{Z}^+$, $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$。

6. **[2018-2019, 14]** 对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，设 $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{2}{3}$。

7. [**2017-2018, 14**] 关于 Stirling 公式的证明：

   (a) 设 $a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$，证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减；

   (b) 设 $b_n = a_n e^{-\frac{1}{4n}}$，证明数列 $\{b_n\}$ 单调递增，且 $\lim b_n = \lim a_n = \alpha > 0$；

   (c) 利用 Wallis 公式证明 $\alpha = \sqrt{2\pi}$；

   (d) 证明 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$。

2. 凸函数与不等式证明

1. **[2022-2023, 10]** 设 α 为一给定正实数，$n = 2^{2023}$。证明：当 $0 < x < 1$ 时，

$$nx^n \leq e^{-\alpha} x^{-\alpha} (-\ln x)^{-\alpha}$$

2. **[2021-2022, 4(1)]** 当 $x > 0$ 时，证明：

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

3. **[2020-2021, 11]** 设函数 f 在 $(0,1)$ 上连续，且满足 $\forall x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$，$x_1 < x_2 < x_3$，有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$（即差商单调增）。若 $a < b$ 且 $[a,b] \subset (0,1)$，证明：存在 $L > 0$，使得 $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$，$|f(t_2) - f(t_1)| \leq L|t_2 - t_1|$。

4. **[2018-2019, 1]** 试用 ε 的定义证明不等式：$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$。

5. **[2018-2019, 12]** 设 f 在 $(0,1)$ 上满足对任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 成立 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$。现取 $(0,1)$ 中一点 x_0，证明 f 在点 x_0 处右连续。

6. **[2018-2019, 13]** **(Young 不等式)** 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续导数，严格单调增加，$f(0)=0$。证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \geq ab$$

7. **[2017-2018, 12]** **(Hermite-Hadamard 型)** 设 $f''(x)>0$。证明：$\forall x_1<x_2$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

8. **[2016-2017, 六]** 证明：对任意 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，有 $\tan x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}$。

3. 微分中值定理与泰勒公式

1. **[2024-2025, 15]** 已知 $f \in C^2[0,1]$，$f'' < 0$，$f(0) = f(1) = 0$。

   (a) 证明 f' 在 $(0,1)$ 内存在唯一零点 x_0，且 $x \in (0,1)$ 时 $f(x) > 0$；

   (b) 证明存在 $x_1 \in (0, x_0), x_2 \in (x_0, 1)$,使得 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{f(x_0)}{2}$,且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < f(x_0)(x_2 - x_1)$。

2. **[2023-2024, 15]** 已知 $f \in C^2[0,1]$，$f'' > 0$，$f(0) = \int_0^1 f(x)dx = 0$。证明：

   (a) f 在 $(0,1)$ 内存在唯一零点 c；

   (b) 当 $x \in (0, c)$ 时，$f(x) < 0$；

   (c) $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x > 0$。

3. **[2022-2023, 3(2)]** 设 $f(x)=\frac{x}{\pi}+x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0), f(0)=0$。是否存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内严格单调递增。

4. **[2021-2022, 9]** 已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有唯一极值点 x_0。若 x_0 为极大值点，证明 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的最大值。

5. **[2021-2022, 10]** 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导，$f(0)<0$，且对任意 $x>0$，有 $f'(x)>1$。证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有唯一零点。

6. **[2020-2021, 12]** 设函数 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且满足 $f(0)=0=f(1)$, $\min_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，证明存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f''(x_0)\geq 8$。

7. **[2019-2020, 14]** 设 f 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f'_+(0) < f'_-(1)$。又设 $\lambda \in \left(f'_+(0), f'_-(1)\right)$，证明存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f'(x_0) = \lambda$。

8. **[2015-2016, 14]** 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1) = 1$。证明存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 1$；并证明存在 $\eta \in (-1,1)$，使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$。

4. 积分不等式与积分中值定理

1. **[2022-2023, 11]** 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意 $x \in [0,1]$ 都有 $g(x) \geq 0$。证明：存在 $x_0 \in [0,1]$，使得

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. **[2022-2023, 12]** 已知 $f(x)$ 在 $(-1,2)$ 上连续，$g(x)$ 在 $(-1,2)$ 上单调递增且导函数连续。证明：存在 $\xi \in [0,1]$，使得

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(1)\int_{\xi}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. **[2021-2022, 12]** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意 $x\in[0,1]$，有 $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1-x^3}{2}$。求证：

$$\int_0^1 [f(t)]^2\,\mathrm{d}t \geq \frac{5}{12}$$

4. **[2020-2021, 9]** 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且以 $T>0$ 为周期。证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$$

5. **[2020-2021, 10]** 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续且取值恒正。证明：存在唯一的 $c \in (0,1)$，使得

$$\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

6. **[2019-2020, 13]** 设 f 在 $(-1,2)$ 上有一阶连续导数，且满足 $f(0)=0, f(1)=1$。试证明：

$$\int_0^1 \big[f(x)-f'(x)\big]\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{e}$$

7. **[2018-2019, 13]** 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导函数，且严格单调增加，$f(0)=0$。设 $a>0, b>0$，证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \geq ab$$

8. **[2017-2018, 13]** 关于 $I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$：

   (a) 证明 $I_n=\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n dx$；

   (b) 证明 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，并求 I_{2n}, I_{2n+1} 的表达式；

   (c) 证明 Wallis 公式：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$。

第六板块：其他与查漏补缺

1. **[2023-2024, 6]** 设反常积分 $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，求 p 的取值范围。

2. **[2023-2024, 12]** 设 n 为正整数且 $n\neq 7$，比较 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n}+1}$ 与 $(\sqrt{n}+1)^{\sqrt{n}}$ 的大小。

3. **[2018-2019, 11]** 设 $\{a_n\}$ 是一个实数列，a 是一个实数。

   (a) 试用 ε–N 语言描述 $\{a_n\}$ 收敛于 a；

   (b) 试用 ε–N 语言描述 $\{a_n\}$ **不收敛**于 a。

4. **[2017-2018, 11]** 从半径为 $R>0$ 的圆形铁皮中剪去一个顶点在圆心的扇形，使剪去后所得的漏斗（圆锥面）具有最大的容积，问此时应剪去的扇形的中心角为

多少？

5. **[2015-2016, 10]** 已知 $f(x)=\int_x^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{x^2} \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 零点的个数。