深蓝学院
shenlanxueyuan.com

传感器数据处理I：里程计运动模型及标定

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

597457483@qq.com

课程内容

里程计模型

- 1、两轮差分底盘的运动学模型
- 2、三轮全向底盘的运动学模型
- 3、航迹推算(Dead Reckoning)

里程计标定

- 1、线性最小二乘的基本原理
- 2、最小二乘的直线拟合
- 3、最小二乘在里程计标定中的应用

里程计模型

里程计模型

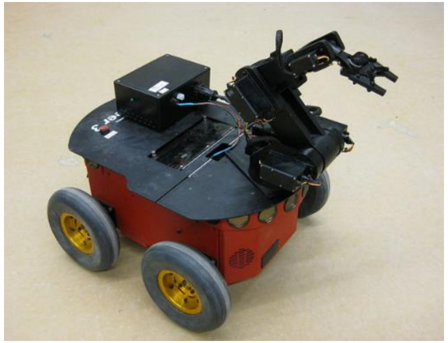
1、两轮差分底盘的运动学模型

2、三轮全向底盘的运动学模型

3、航迹推算(Dead Reckoning)

两轮差速底盘的运动学模型

应用实例

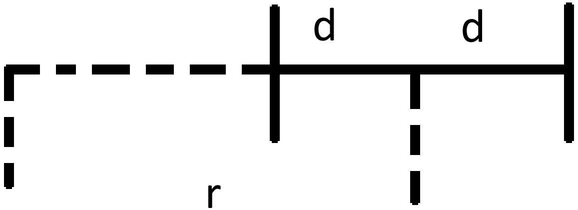


优点

- 结构简单
- 便宜(2个电机)
- 模型简单

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

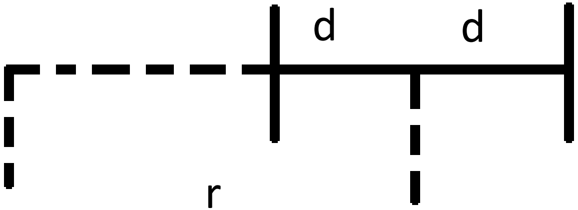
- v, ω为底盘中心线速度和角速度
- v_L, v_R为左右两轮的速度
- d为轮子离底盘中心的距离

$$\mathrm{v} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

$$\omega = \frac{(v_R - v_L)}{2d}$$

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



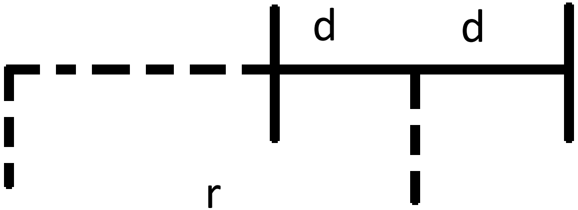
运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r底盘中心圆弧运动的半径

$$\frac{v_L}{r-d}=\frac{v_R}{r+d}$$
$$v_L(\mathrm{r}+\mathrm{d})=v_R(r-d)$$
$$(v_R-v_L)\mathrm{r}=(v_R+v_L)\mathrm{d}$$
$$\mathrm{r}=\frac{(v_R+v_L)\mathrm{d}}{(v_R-v_L)}$$

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r底盘中心圆弧运动的半径

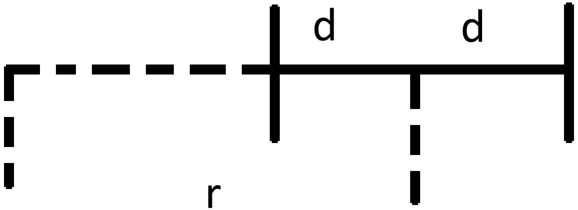
$$\omega = \frac{v_R}{r+d}$$

$$\mathrm{r+d} = \frac{(v_R + v_L)\mathrm{d}}{(v_R - v_L)} + \frac{(v_R - v_L)d}{(v_R - v_L)} = 2\frac{v_R d}{(v_R - v_L)}$$

$$\omega = \frac{(v_R - v_L)}{2d}$$

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r底盘中心圆弧运动的半径

$$\mathrm{v} = \omega * \mathrm{r} = \frac{(v_R - v_L)}{2d}\frac{(v_R + v_L)\mathrm{d}}{(v_R - v_L)} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

$$\mathrm{v} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

里程计模型

1、两轮差分底盘的运动学模型

2、三轮全向底盘的运动学模型

3、航迹推算(Dead Reckoning)

三轮全向底盘的运动学模型

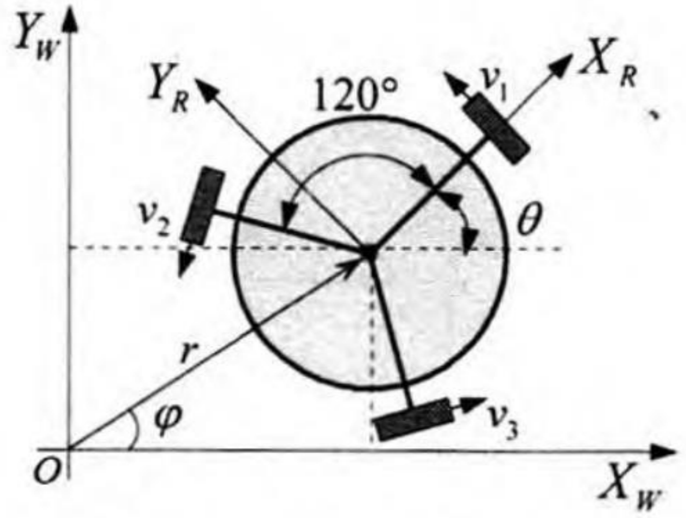
应用实例

优点

- 任何方向平移
- 结构简单
- 全驱动系统
- 可以进行运动学分解

三轮全向底盘的运动学模型

全向模型



运动分解—平移X

- $v_x \neq 0, v_y = 0, v_\theta = 0$

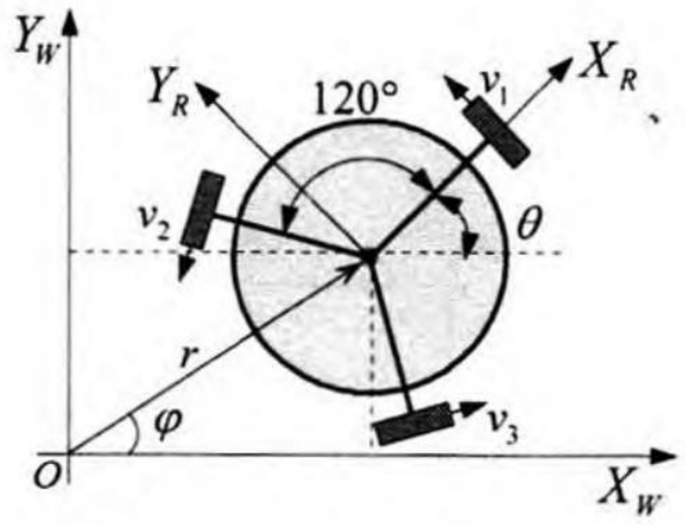
$$V_1 = 0 * v_x$$

$$V_2 = -sin\,60\,v_x$$

$$V_3 = sin\,60\,v_x$$

三轮全向底盘的运动学模型

全向模型



运动分解—平移Y

- $v_x = 0, v_y \neq 0, v_\theta = 0$

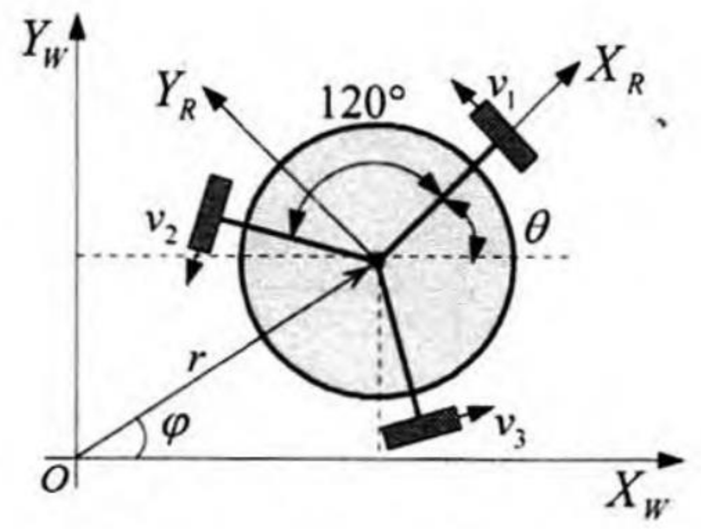
$$V_1 = v_y$$

$$V_2 = -\cos 60\, v_y$$

$$V_3 = -\cos 60\, v_y$$

三轮全向底盘的运动学模型

全向模型



运动分解—旋转

- $v_x = 0, v_y = 0, v_\theta \neq 0$

$$\boldsymbol{V_1 = v_\theta d}$$

$$\boldsymbol{V_2 = v_\theta d}$$

$$\boldsymbol{V_3 = v_\theta d}$$

三轮全向底盘的运动学模型

合成

$$V_1 = 0 * v_x$$
$$V_2 = -sin\,60\,v_x$$
$$V_3 = sin\,60\,v_x$$

- $v_x \neq 0, v_y = 0, v_\theta = 0$

$$V_1 = v_y$$
$$V_2 = -cos\,60\,v_y$$
$$V_3 = cos\,60\,v_y$$

- $v_x = 0, v_y \neq 0, v_\theta = 0$

$$V_1 = v_\theta d$$
$$V_2 = v_\theta d$$
$$V_3 = v_\theta d$$

- $v_x = 0, v_y = 0, v_\theta \neq 0$

$$V_1 = 0 * v_x + 1 * v_y + d * v_\theta$$
$$V_2 = -\sin 60 * v_x - \cos 60 * v_y + d * v_\theta$$
$$V_3 = \sin 60 * v_x - \cos 60 * v_y + d * v_\theta$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & d \\ -\sin 60 & -\cos 60 & d \\ \sin 60 & -\cos 60 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3d} & \frac{1}{3d} & \frac{1}{3d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

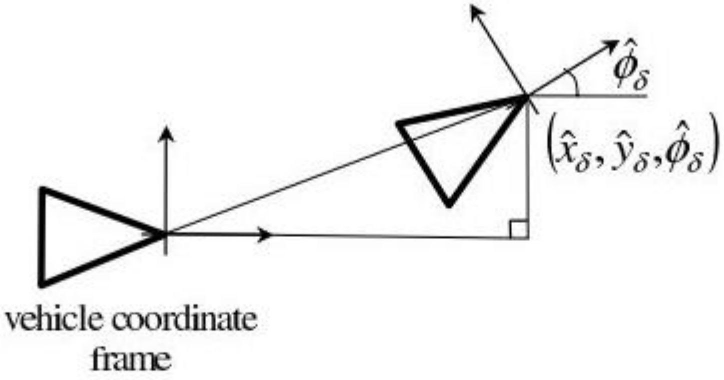
里程计模型

里程计模型

- 1、两轮差分底盘的运动学模型
- 2、三轮全向底盘的运动学模型
- 3、航迹推算(Dead Reckoning)

航迹推算

示意图



递推公式

- (x, y, θ)为底盘当前位姿
- $(dx, dy, d\theta)$为运动学解算增量

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx + \varepsilon_x \\ dy + \varepsilon_y \\ d\theta + \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$

课程内容

里程计标定

1、线性最小二乘的基本原理

2、最小二乘的直线拟合

3、最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

线性方程组Ax=b

- A为$m \times n$的矩阵。
- x为$n \times 1$的向量

- 当m=n时，适定方程组，方程组有唯一解
- 当m<n时，欠定方程组，方程组有无穷多解
- 当m>n时，超定方程组，方程组有通常无解

最小二乘解

- 绝大多数情况为m>n，超定方程组
- 无解，可以寻找最靠近真实解的解
- 无解但是有最小二乘解
- 通解: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

- Ax表示A的列向量空间S
- 无解意味着向量b不在S中
- 最近的解即为：向量b在S中的投影

- 设Ax^*为向量b在空间S中的投影，显然$(b-Ax^*)$垂直于空间S。
- $(b-Ax^*)$跟矩阵A的每一个列向量都垂直

设：

$$A=[a_1,a_2,\cdots a_n]$$

a_i表示矩阵A的第i个列向量

则：

$$a_i^T(b-Ax^*)=0$$

可得：

$$A^T(b-Ax^*)=0$$

$$A^Tb=A^TAx^*$$

$$x^*=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

课程内容

里程计标定

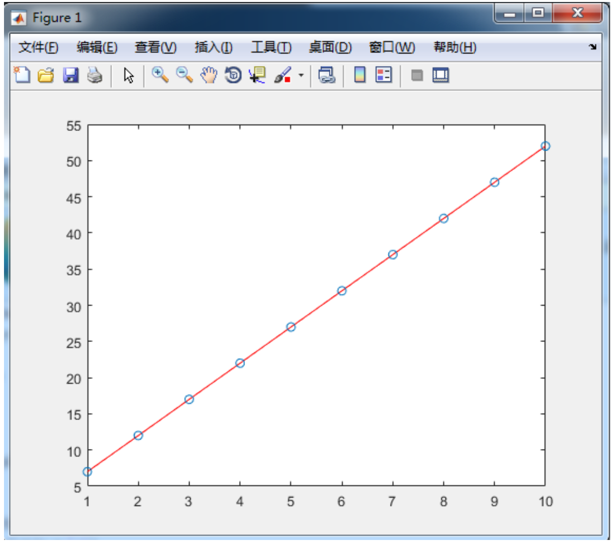
1、线性最小二乘的基本原理

2、最小二乘的直线拟合

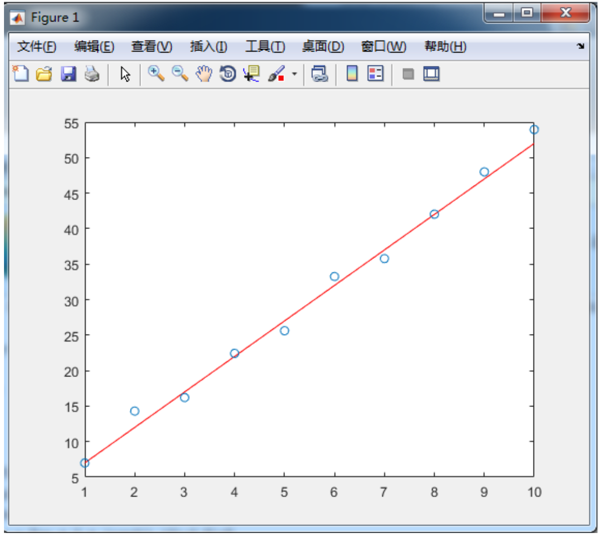
3、最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



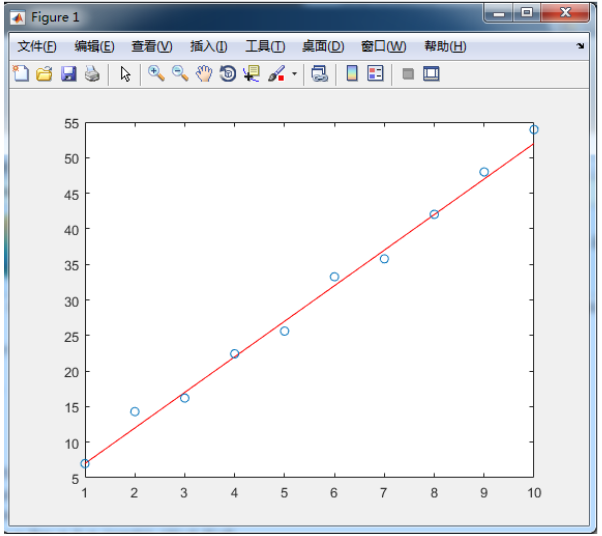
- 理想情况



- 混入采样噪声

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声

- 采样数据：

x=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

y = (6.9918 , 14.2987, 16.2019, 22.4263, 25.6191, 33.2563, 35.7755, 42.0298, 47.9954, 53.9545)

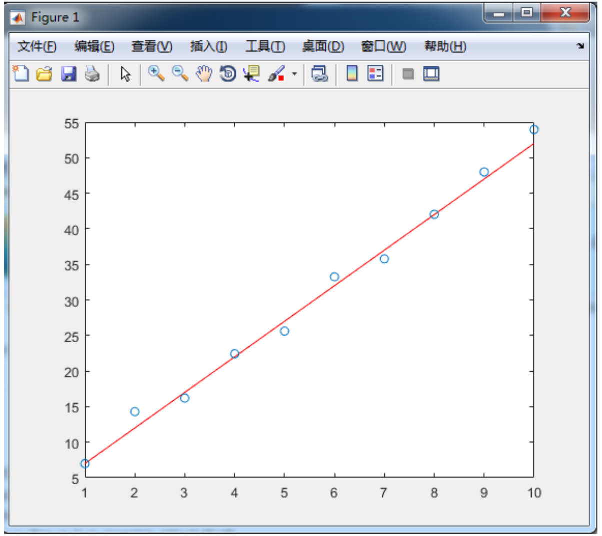
- 构建方程组：

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声

$$A^TA=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \\ 1 & 1 & \cdots 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$$

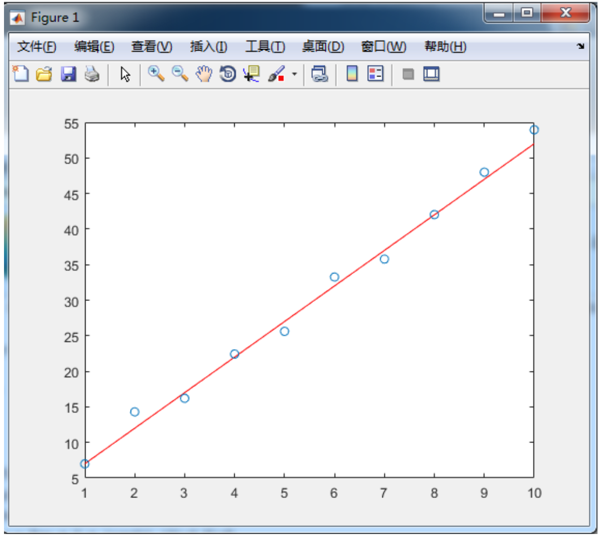
$$(A^TA)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-n}{B} & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{B} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{B} & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{B} \end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} \frac{n\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-\sum x_i\sum x_i} \\ \frac{\sum x_i^2\sum y_i-\sum x_iy_i\sum x_i}{n\sum x_i^2-\sum x_i\sum x_i} \end{bmatrix}$$

$$B=\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i-n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声

- 代入数据可得：

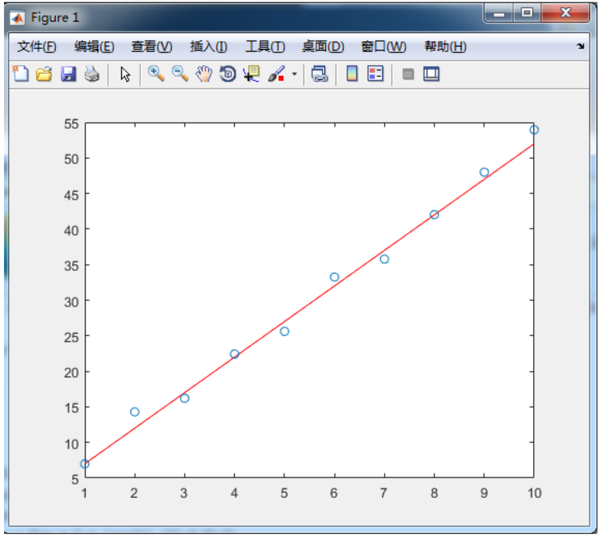
$$\sum x_i^2 = 385$$
$$\sum x_i = 55$$
$$\sum x_i y_i = 2059.7039$$
$$\sum y_i = 298.5494$$

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{2059.7039 * 10 - 298.5494 * 55}{385 * 10 - 55 * 55} = 5.063$$

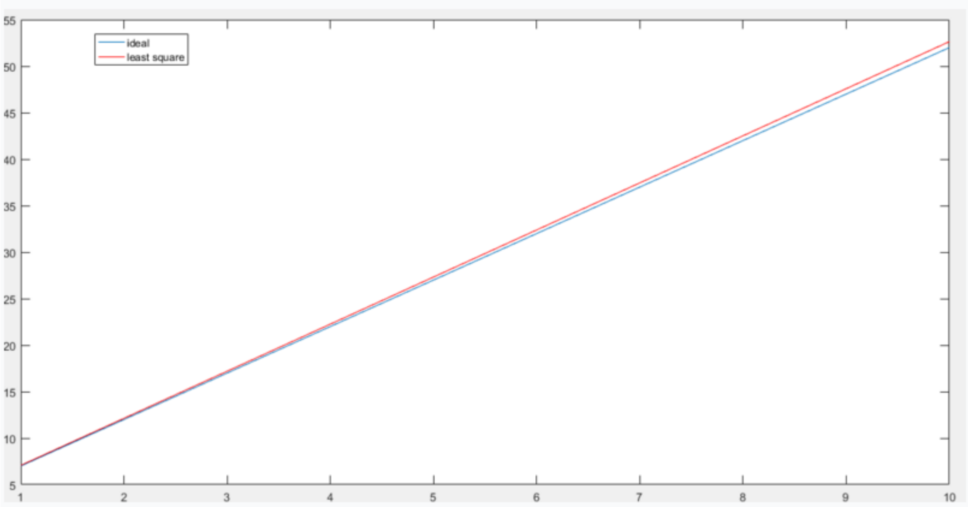
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{385 * 298.5494 - 2059.7039 * 55}{385 * 10 - 55 * 55} = 2.009$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声



- 拟合对比

课程内容

里程计标定

- 1、线性最小二乘的基本原理
- 2、最小二乘的直线拟合
- 3、最小二乘在里程计标定中的应用

里程计标定

直接线性方法

- 通用性强
- 实现简单
- 精度不高

基于模型的方法

- 精度高
- 实现复杂
- 特异性高

里程计标定

直接线性方法

- 用激光雷达的scan-match数据作为真值u_i^*
- 里程计测量得到的数据为u_i
- 假设成线性关系$u_i^* = X * u_i$

其中：

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

对于每一组数据，可得：

$$u_{ix} * x_{11} + u_{iy} * x_{12} + u_{i\theta} * x_{13} = u_{ix}^*$$
$$u_{ix} * x_{21} + u_{iy} * x_{22} + u_{i\theta} * x_{23} = u_{iy}^*$$
$$u_{ix} * x_{31} + u_{iy} * x_{32} + u_{i\theta} * x_{33} = u_{i\theta}^*$$

$$\begin{bmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \\ u_{i\theta}^* \end{bmatrix}$$

$$A_i \vec{X} = b_i$$

$$A = \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \qquad \vec{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

作业

实现一个直接线性方法的里程计标定模块

感谢各位聆听!

Thanks for Listening