(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u + \kappa \, | x |^2, \quad | x | < R, \; t > 0, \; \kappa = const, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^3 \, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u + \kappa, \quad | x | < R, \; t > 0, \; \kappa = const, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } | x | = R, \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y \, J_0(y)\, dy = x \, J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u + \kappa \sin(\omega t), \quad | x | < R, \; t > 0, \; \kappa = const, \; \omega = const, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } | x | = R, \\ u\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где ω не совпадает ни с одной из собственных частот (отсутствие резонанса).

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y \, J_0(y)\, dy = x \, J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(4)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u + \kappa\,|x|^2, \quad |x|<R,\ t>0,\ \kappa = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(5)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u, \quad |x|<R,\ t>0, \\ \left.u\right|_{|x|=R} = 0, \\ \left.u\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формул

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x), \qquad \int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(6)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u, \quad |x|<R,\ t>0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формул

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x), \qquad \int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(7)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u - 2\nu^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \nu^2 = const < \dfrac{a\mu_0}{R}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = Ax_2, \quad A = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где μ_0 - наименьший положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^2 J_1(y)\, dy = x^2 J_2(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(8)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u - 2\nu^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \nu^2 = const < \dfrac{a\mu_0}{R}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Ax_2, \quad A = const, \end{cases}$$

где μ_0 - наименьший положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^2 J_1(y)\, dy = x^2 J_2(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(9)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u, \quad |x| < R,\ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = Ax_1, \quad A = const. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^2 J_1(y)\, dy = x^2 J_2(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(10)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u, \quad |x|< R,\ t>0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ u\big|_{t=0} = Ax_2, \quad A = const. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^2 J_1(y)\,dy = x^2 J_2(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(11)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u + \kappa, \quad |x|< R,\ t>0,\ \kappa = const, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y\,J_0(y)\,dy = x\,J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(12)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u + \kappa\sin(\omega t), \quad |x|< R,\ t>0,\ \kappa = const,\ \omega = const, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где ω не совпадает ни с одной из собственных частот (отсутствие резонанса).

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y\,J_0(y)\,dy = x\,J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(13) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u, \quad |x| < R,\ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формул

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x)\,, \qquad \int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(14) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u - 2\nu^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \nu^2 = const < \dfrac{a\mu_0}{R}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Ax_1, \quad A = const, \end{cases}$$

где μ_0 - наименьший положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.
Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^2 J_1(y)\, dy = x^2 J_2(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(15) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u - 2\nu^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \nu^2 = const < \dfrac{a\mu_0}{R}, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const, \end{cases}$$

где μ_0 - наименьший положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.
Указание: установить справедливость формул

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x)\,, \qquad \int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(16)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u, \quad |x| < R,\ t > 0, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формул
$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x), \qquad \int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$
и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(17)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u - 2\nu^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \nu^2 = const < \dfrac{a\mu_0}{R}, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где μ_0 - наименьший положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание: установить справедливость формул
$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x), \qquad \int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$
и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(18)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u - 2\nu^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \nu^2 = const < \dfrac{a\mu_0}{R}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ u\big|_{t=0} = Ax_1, \quad A = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где μ_0 - наименьший положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание: установить справедливость формулы
$$\int_0^x y^2 J_1(y)\, dy = x^2 J_2(x)$$
и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(19) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + \kappa\, |x|^2, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \kappa = const, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y^3\, J_0(y)\, dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(20) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + \kappa, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \kappa = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \text{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(21) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + \kappa \sin(\omega t), \quad |x| < R,\ t > 0,\ \kappa = const,\ \omega = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \text{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где ω не совпадает ни с одной из собственных частот (отсутствие резонанса).

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(22)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + \kappa |x|^2, \quad |x| < R,\ t > 0,\ \kappa = const, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формулы
$$\int_0^x y^3 J_0(y)\,dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$
и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(23)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u, \quad |x| < R,\ t > 0, \\ \left.u\right|_{|x|=R} = 0, \\ \left.u\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формул
$$\int_0^x y\, J_0(y)\,dy = x\, J_1(x), \qquad \int_0^x y^3 J_0(y)\,dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$
и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(24)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u, \quad |x| < R,\ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = 0, \quad n - \textit{внешняя нормаль к } |x| = R, \\ \left.u\right|_{t=0} = A\left(1 - \dfrac{|x|^2}{R^2}\right), \quad A = const \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: установить справедливость формул
$$\int_0^x y\, J_0(y)\,dy = x\, J_1(x), \qquad \int_0^x y^3 J_0(y)\,dy = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$
и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.

---

(25) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + \kappa \sin(\omega t), \quad |x| < R,\ t > 0,\ \kappa = const,\ \omega = const, \\ u\big|_{|x|=R} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где ω не совпадает ни с одной из собственных частот (отсутствие резонанса).

Указание: установить справедливость формулы

$$\int_0^x y\, J_0(y)\, dy = x\, J_1(x)$$

и воспользоваться ею при вычислении коэффициентов ряда Фурье.
