1 基准模型

首先我们考虑最简单的情况。而在这之前我们需要对一些前提进行明确：我们假设在 F 大学中，每个学生的成绩用加权平均绩点来衡量。对于每个学生，他的总成绩 $g \in (0, 4]$，而每门课程的成绩按照等级制评分。其中 A 和 A^- 档分别记作 4 和 3.7 的成绩，并且对于每门课都存在相同的优秀率上限 $\bar{a}$，所有拿 A 或 A^- 成绩的学生数量不超过这门课程选课人数的 30%(即优秀率不超过 30%)。出于简化的目的，我们假设除了拿到优秀评价的学生，余下的所有学生都会拿到 $B+$ 的评价，即所谓" 被无限"，记作 3.3 的成绩。

现在假设存在一门选修课程 l，面向全校所有专业开课，因此假设其选课人数无限，且每个学生都可以选择进入与否 (而必修课就不存在此类选择，相应院系的学生必须选相应课程)。对于任意选课的学生来说，由于我们假设在 F 大学中就读的学生都是经历了高考的选拔，作为其中的佼佼者进入 F 大学，因此其总体能力应当大致都相等。但是对于不同的课程，由于其不同的兴趣和知识背景，相应的学生可能是高天赋的，也可能是低天赋的，分别被记作 t_H, t_L。我们假设对于所有代表性选课人来说，其可能有 $p > \bar{a}$[1]的概率作为高天赋选课人，即 $P(t_H) = p$。而为了控制个人努力的不同，我们假设所有选课者的目标都是为了获取更好的成绩，因此其努力程度全都相同，努力带给其的负效用也都一致。这样，学生最终得到的成绩完全是其处于高天赋者概率的函数。

而同时，我们假设不同天赋者得到的成绩分布如下：

$$P(s_H = A) = \frac{\bar{a}}{3p}, P(s_H = A^-) = \frac{\bar{a}}{3p}, P(s_H = B^+) = \frac{3p - 2\bar{a}}{3p} \tag{1}$$

$$P(s_H = A) = \frac{\bar{a}}{6p}, P(s_H = A^-) = \frac{\bar{a}}{6p}, P(s_H = B^+) = \frac{3p - \bar{a}}{3p} \tag{2}$$

这样，我们选择代表性的学生 i，其成绩为 $g^i = 3.5$。这是一个位于中上水平，且集中人数较多的成绩，我们认为相应成绩选课决策能够代表整体学生的选择情况。而对于其是否选择这门通选课，前提条件是其能够通过选择这门课程提升其成绩。因此我们可以写出课程 l 的进入约束如式(3)：

$$\mathbb{E}s_i^l \geq g_i \tag{3}$$

我们进一步假设此处优秀率给到上限 $\bar{a} = 0.3$，即所谓“给满 A”。这样，i 作为高、低天赋者在这门课程得到的期望成绩分别是：

$$\begin{cases} \mathbb{E}(s_H) = 3.3 + \frac{0.11}{p} \\ \mathbb{E}(s_L) = 3.3 + \frac{0.055}{p} \end{cases} \tag{4}$$

[1] 此处大于是为了引入竞争：如果高天赋者的比例没有超过优秀率上限，则高天赋者不通过努力也能获得好成绩。这虽然在极少数条件下是成立的，但是不符合更广泛的现实情况。

根据上面的假设，为了确保竞争，在这门课的选择中，高天赋的同学比例是要高于 0.3 的。因此，$\mathbb{E}(s_H) < 3.67, \mathbb{E}(s_L) < 3.485$。此时，对于绩点处于 3.5 的理性代表性选课者来说，若其观察到自己的禀赋属于低天赋，则不论竞争对手的情况如何，其都不会选择相应的课程，因为此时，在有限的优秀率下，其预期得到的成绩会劣于当下的情况。则此时，不论这门课程中高天赋者有多少，成绩在 3.48 以上的低天赋选课者都会退出相应课程的选择，转向其他个人更加擅长的课程。

但这带来了一个问题：当部分选课者被挤出竞争时，不同天赋种类中的人数也会发生改变。而在式(1)定义的分布中，我们仅仅假设了天赋高者拿到 A 和 A-的概率都是低天赋者的两倍。一旦低天赋者中，成绩较好的一部分因为优秀率上限的限制退出课程后，低天赋者中得到优秀成绩的比例也应当进一步下降。因此下一步，我们在模型中考虑这部分挤出带来的影响。

2 进阶模型 1：绩点进入约束与选课挤出

首先在考虑这部分选课人时，假设我们的选课对象为绩点在 $[3.25, 3.75]$ 中均匀分布的选课人。且其都以提高自己的成绩为最终目标。对于同一门课程，我们假设其天赋也是均匀分布的，与其初始成绩无关。做出以上假设的依据有如下几点：

- 按照当前经院的成绩分布，这个范围内包括了全院近 60% 的学生，且其中的成绩分布较为均匀，基本每 0.01 的绩点变化中都包含了两到三名学生，符合我们假设的均匀分布特征，包含的样本量也很充足，能够反应不同成绩区间的学生的选课决策。

- 这个区间内的学生往往被认为是需要去“卷”的学生，即有能力，也有必要通过成绩的提升改变自己的境遇。对于成绩过于高，或者过于低的学生，其都不存在相应的激励去进一步提升自己的绩点。而适中的成绩范围选择有助于我们分析实际收到优秀率上限影响的学生的行为决策变化。

- 在学生的成绩衡量中，专业课程无疑占据更高的比重。而在此我们研究的是通选课程，此时绩点高低并不能反应学生在相应非专业领域上的天赋。

在此假设下，我们仍然将此时任课教师给出的优秀率记作 $\bar{a}$。而考虑选课者被挤出的同时，留在这门课程中的选课者获得优秀成绩的概率也就相应得到了提高。而我们假设这种获得优秀成绩概率的提升随着与退出选课者比例是反比例变化的。则此时，对于占比为 p 高天赋者来说，将其能够参与选课的上限绩点记作 g_H^*，低天赋的上限记作 g_L^*，则此时参与选课的高天赋者比例为：$\frac{g_H^*-3.25}{0.5}$，低天赋者比例为 $\frac{g_L^*-3.25}{0.5}$。总选课人数变为之前的：$w = \frac{g_H^*-3.25}{0.5}p + \frac{g_L^*-3.25}{0.5}(1-p)$。

相应的，低天赋和高天赋者得到优秀成绩的几率也乘以相应的比率，则此时有

$$\begin{cases} \mathbb{E}(s_H) = 4\frac{\bar{a}}{3pw} + 3.7\frac{\bar{a}}{3pw} + 3.3\frac{3pw-2\bar{a}}{3pw} = g_H^* \\ \mathbb{E}(s_H) = 4\frac{\bar{a}}{6pw} + 3.7\frac{\bar{a}}{6pw} + 3.3\frac{3pw-\bar{a}}{3pw} = g_L^* \end{cases} \tag{5}$$

如此可以求解出相应的 g_H^* 和 g_L^* 的解析形式：

$$\begin{cases} g_H^*(\bar{a}, p) \approx \frac{\sqrt{2(1+p)\frac{1.1\bar{a}}{3p}} - 0.1}{1+p} + 3.3 \\ g_L^*(\bar{a}, p) \approx \frac{\sqrt{2(1+p)\frac{1.1\bar{a}}{3p}} - 0.1}{2(1+p)} + 3.3 \end{cases} \tag{6}$$

很明显，g_H^* 和 g_L^* 都是 $\bar{a}$ 的单调增函数，而当 $\bar{a} = 0.3$ 时，其与 p 之间的关系如图 1所示：

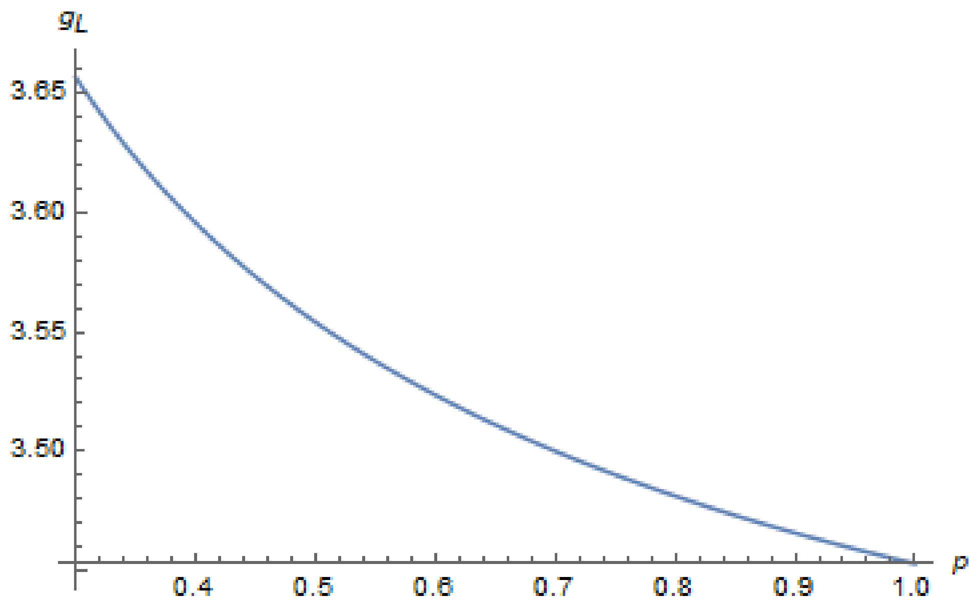

图 1: $\bar{a} = 0.3$ 时,p 与 g_L^* 的变化关系

此时，不论本门课程中高天赋者的比例是多少，都会有一部分成绩较好的低天赋者不愿自身绩点降低而被挤出课程。而对于高天赋者来说，当高天赋者比例较低、竞争较为不激烈时，挤出的低天赋者已经足够让其得到较好的期望成绩。但当高天赋者的比例升高，高天赋者之间的竞争逐渐变得激烈时，仍有部分高天赋者会被挤出课程的选择。而这个高天赋者的比例，$\bar{p}$ 我们同样可以计算出来。带入 $\bar{a} = 0.3$ 的情况，可以得到 $\bar{p} \approx 0.54$。这样我们可以得到下面的推论：

- **推论 1:** 在现行的优秀率上限下，即便不考虑学生的努力程度带来的负效用，对于成绩较好的学生不论天赋如何，总会因为期望成绩的限制而退出相应课程的选择。

至此，我们明确了优秀率上限对于不同天赋学生选课决策的影响。但在此，我们没有考虑到学生除了选课之外的另一决策，即在课程中付出的努力。因此，再次我们需进一步将个人努力对成绩的影响纳入模型的考量中。

3 进阶模型 2：努力程度与最优化条件

由于选课者的数量是无限，因此在此模型中无法准确对每个个体的努力选择进行精确度量。我们考虑一门课中选课学生的平均努力程度 $\bar{e}$。由于努力程度与高天赋比例无关，却能够在不同届的学生之间进行横向比较，教师能够通过考试以及平时作业情况观察到学生的平均努力程度，进而选择最终优秀评级的比例。因此，我们考虑学生联合起来选择标准化后的平均努力程度，$\bar{e} \in (0,1]$。教师观察到学生的努力程度，线性地调整过最终的优秀率，$\bar{e}\bar{a}$。

但是，学生的努力程度提高后，也会相应带来更高的负效用。我们考虑一个负效用函数 $d(\bar{e})$，其具有边际负效用递增的性质，即 $d'(\bar{e}) > 0, d''(\bar{e}) > 0$[2]。这样，我们可以考虑学生的最优化问题如式(7)所示：

$$u(\bar{e};\bar{a},p,t,g) = \Delta g(\bar{e};\bar{a},p,t,g) - d(\bar{e}) \tag{7}$$

其中，根据第二部分中求出的有挤出条件下最优解，可以得到 Δg 的表示如下：

$$\Delta g(\bar{e};\bar{a},p,t,g) \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{2(1+p)\frac{1.1\bar{a}\bar{e}}{3p}}-0.1}{1+p} + 3.3 - g, t = t_H \\ \frac{\sqrt{2(1+p)\frac{1.1\bar{a}\bar{e}}{3p}}-0.1}{2(1+p)} + 3.3 - g, t = t_L \end{cases} \tag{8}$$

由于我们在此选择的是学生的平均努力程度，而对于学生的初始绩点 g，在效用函数中以线性形式分布，因此我们仍然可以用代表性选课人 $g_r = 3.5$ 的最优化问题代替总体的最优化问题。同时，对于其不同的天赋分布，我们考虑其加权平均的效用最大化。即求解下面的最优化问题：

$$\max_{\bar{e}} u(\bar{e};\bar{a},p,t,3.5) = p\Delta g(\bar{e};\bar{a},p,t_H,3.5) + (1-p)\Delta g(\bar{e};\bar{a},p,t_L,3.5) \tag{9}$$

$$= \frac{\sqrt{2(1+p)\frac{1.1\bar{a}\bar{e}}{3p}}}{2} - 0.25 - d(\bar{e}) \tag{10}$$

[2]在正常边际效用递减的效用函数中，其三阶导数大于 0 代表“谨慎性”，即边际效用递减的速度是递减的。而在此处的负效用函数中，我们也可以假设 $d'''(\bar{e}^*) < 0$，代表边际负效用递增的速度也是递减的。

其一阶条件可以表示为：

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2.2(1+p)\bar{a}}{3p\bar{e}}}-d'(\bar{e})=0 \tag{11}$$

对于学生最优的平均努力程度 $\bar{e}^*$，其满足下述性质：

$$\frac{240d'^2(\bar{e}^*)\bar{e}^*p}{11(1+p)}=\bar{a}\Leftrightarrow\frac{240d'^2(\bar{e}^*)\bar{e}^*}{11\bar{a}}=1+\frac{1}{p} \tag{12}$$

至此，在考虑挤出的选课决策和学生平均努力程度的因素后，我们可以进一步研究天赋分布 p 和优秀率上限 $\bar{a}$ 对学生努力程度的影响。则有：

$$\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\bar{a}}=\frac{1}{\frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{e}^*}}=\frac{1}{\frac{240p}{11(1+p)}(d'^3(\bar{e}^*)+2d'(\bar{e}^*)\bar{e}^*d''(\bar{e}))}>0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial p}=\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\frac{1}{p}}\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial p}=-\frac{1}{\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\bar{e}^*}}\frac{1}{p^2}=-\frac{480d''(\bar{e}^*)d'(\bar{e}^*)\bar{e}^*}{11\bar{a}p^2}<0 \tag{14}$$

由于努力程度永远取在 0-1 之间，即 $\bar{e}^*\in(0,1]$，不论 d 的具体形式是什么样子，基于 d 的性质，都有 $d'(\bar{e}^*)>0, d''(\bar{e}^*)>0$。因此，$\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\bar{a}}>0, \frac{\partial\bar{e}^*}{\partial p}<0$。即，随着优秀率上限的升高，学生的平均努力程度会升高；但高天赋者比例的上升，却会因为竞争过于激烈，导致升高的努力程度无法弥补努力带来的负效用，导致学生的努力程度反而下降。由此我们可以得到下面的推论：

- **推论 2**：当老师和学生都是完全理性，且学习的努力程度可以被完全观察到并与最终的实际优秀率呈线性关系时，在边际递增的负效用函数下，学生的平均努力程度与优秀率上限正相关，而与高天赋选课人占比负相关。

但此处仍有一个问题需要考虑：在现实给分情况中，老师往往不会完全按照横向的努力程度线性调整优秀率。这是因为选课并非是所谓“一锤子买卖”。尽管学生只选一次课，但是在考试结束后，学生会根据对这次选课中老师的给分情况进行总结，得到该老师“是否给分好”的评价，并通过论坛等途径向之后选课的学生传递信息。而对于更多年轻老师来说，学生评教的评价以及课程的受欢迎程度仍然在一定程度上影响着个人收入和未来发展。因此，即便学生的努力程度不够高，教师依然不会完全按照线性情况来调整优秀率。因此，在下面的模型中我们会进一步对这个因素进行刻画。

4 进阶模型 3：黏性优秀率与教师决策

此处，我们考虑对于课程 j，其任课教师存在自身的偏好 $\gamma_j\in(0,\bar{a})$，其是完全外生的。教师保底会给予 γ_j 的优秀评价，而在 $(\gamma_j,\bar{a}]$ 的部分，则随着平均努力程度 $\bar{e}$ 的变化线性调整。

则最优化问题变为：

$$\max_{\bar{e}} u(\bar{e};\bar{a},p,t,3.5)=\frac{\sqrt{2(1+p)\frac{1.1(\gamma_j(1-\bar{e})+\bar{a}\bar{e})}{3p}}}{2}-0.25-d(\bar{e}) \tag{15}$$

其一阶条件为：

$$\frac{\bar{a}-\gamma_j}{4}\sqrt{\frac{2.2(1+p)}{3p[\gamma_j+(\bar{a}-\gamma_j)\bar{e}^*]}}-d'(\bar{e}^*)=0\Rightarrow\gamma_j+(\bar{a}-\gamma_j)\bar{e}^*=\frac{2.2(1+p)}{48pd'^2(\bar{e}^*)}(\bar{a}-\gamma_j)^2 \tag{16}$$

对(16)的隐函数求导，可以得出 $\bar{e}^*$ 与 γ_j 之间的关系：

$$\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\gamma_j}=-\frac{[2(\bar{a}-\gamma_j)+(1-\bar{e}^*)d'^2(\bar{e}^*)]d'(\bar{e}^*)}{(\bar{a}-\gamma_j)[d'^3(\bar{e}^*)+2d''(\bar{e}^*)]} \tag{17}$$

基于对各数值的假设，可以得到 $\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\gamma_j}<0$。这说明，老师给分“越好”，学生越容易用更低的努力程度得到较好的成绩。因此，学生会在一定程度上失去努力学习的激励，进而降低平均努力程度。而这也与我们的直觉相吻合。这样我们可以得到下面的推论：

- **推论 3**：在一定的优秀率上限下，教师的给分“越好”，而学生又能通过过去信息对此完全观察到的话，则学生的平均努力程度与教师给分的好坏程度负相关。

而在此，我们更重要的是考虑，教师的决策应当如何刻画，以为优秀率设置标准上限的改革提出相应的建议。因此我们考虑下面一种情况：

在增加 γ_j 之后，平均努力程度对优秀率上限的求导表示为：

$$\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\bar{a}}=\frac{t(\bar{e}^*,\bar{a})d'^2(\bar{e}^*)-\bar{e}^*}{t(\bar{e}^*,\bar{a})\bar{e}^*d'(\bar{e}^*)d''(\bar{e}^*)+1} \tag{18}$$

其中，

$$t(\bar{e}^*,\bar{a})=\frac{11(1+p)(\bar{a}-\gamma_j)}{120pd'^4(\bar{e}^*)} \tag{19}$$

出于简化，下面假设 γ_j 随着 $\bar{a}$ 调整，而优秀率上限一半的初始优秀率我们认为是合理的，即 $\gamma_j=\frac{1}{2}\bar{a}$。则此时有：

$$\frac{480pd'^2(\bar{e}^*)}{11(1+p)}(\bar{e}^*+1)=\bar{a} \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2\bar{e}^*}{\partial\bar{a}^2}=\frac{\partial\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\bar{a}}}{\partial\bar{a}}=\frac{\partial(\frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{e}^*})^{-1}}{\partial\bar{e}^*}\frac{\partial\bar{e}^*}{\partial\bar{a}}=\frac{\partial(\frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{e}^*})^{-1}}{\partial\bar{e}^*}\frac{1}{\frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{e}^*}} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}^*} = \frac{480p}{11(1+p)}(2d'(\bar{e}^*)d''(\bar{e}^*)(\bar{e}^*+1) + d'^2(\bar{e}^*)) \tag{22}$$

当(21)≥ 0 时，其存在一个充分不必要条件，需要同时满足两个关系如下：

$$\begin{cases} d''(\bar{e}^*)(e-1) + d'(\bar{e}^*) > 0 \\ d''^2(\bar{e}) + d'''(\bar{e}^*)d'(\bar{e}^*) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'(\bar{e}^*) > d''(\bar{e}^*)(1-\bar{e}^*) \\ d'(\bar{e}^*) < d'''(\bar{e}^*)(1-\bar{e}^*)^2 \end{cases} \tag{23}$$

即此时，若有 $\frac{\partial^2 \bar{e}^*}{\partial \bar{a}^2} > 0$，要求负效用函数 d 的二阶导数足够小，而三阶导数的绝对值足够小。在学生学习的边际负效用增加比较慢，增速也在不断放缓，即学生有相对多的内在动力去投入更多的时间进行学习时，平均努力程度与优秀率上限之间的关系是一个凸函数。

如此看来，提高优秀率上限与学生的平均努力程度之间是严格的正相关关系，那么应该通过将优秀率提到最高来让学生提高努力程度。但是对于校方来说，这样做存在其不合理之处。一方面，过高的优秀率会导致成绩的“通胀”，降低学生成绩在纵向比较时的置信力；另一方面，当 $\bar{a}$ 过高，甚至高过 p 时，(5)中的表示将不再成立，此时提高优秀率反而可能会导致因为竞争压力降低，降低学生的努力程度。

结合推论 2 和推论 3 的观察，可以发现对学生提高更高努力程度的关键在于降低给分中的“黏性”，即不跟据努力程度进行评分的方面。但是教师由于信息不对称的劣势地位，导致其的 γ 有时不得不维持在较高的水平。而在上面的假设和推论下，我们在下一部分中提出我们的政策建议。

5 政策建议：优秀率上限的不确定性与信息不对称

由于 γ_j 与每个老师个人的禀赋，性格等都有关系，因此在校方的角度难以直接通过政策手段对此进行调整。因此我们提出下面一种简单的政策建议：

- **政策建议 1**：设置两档对学生不可观测的优秀率上限，分别记作 $a^d = 0.25, a^u = 0.35$，教师可以根据个人偏好随机选择优秀率上限。

  在这个设定下，我们记在 25% 的优秀率和 35% 优秀率下学生的最优努力程度分别是 e^d 和 e^u。学生只知道优秀率的分布，并不清楚这门课老师在这一年度开设时，优秀率的具体选择。因此，学生分别有 $\frac{1}{2}$ 的概率选择这两种情况下的最优努力程度。

  而此时，学生的平均努力程度为 $\frac{e^d+e^u}{2}$。由于上文的 $\bar{e}^*$ 是在 $\bar{a} = 0.3$ 的条件下算出的，根据凸函数的性质和 Jensen 不等式，此时有 $\frac{e^d+e^u}{2} > \bar{e}^*$。而这个结论对于任意期望优秀率等于 0.3 的情况都成立，不论是否设置为 0.25 和 0.35。则此时，仅仅通过增加信息不对称因素而不改变最终期望得到优秀成绩的人数也能激励学生采取更高的努力程度。

- **政策建议 2：**不设定优秀率上限，而根据学生努力程度设定优秀率区间。

  根据建议 1 中的结论，在努力的负效用函数满足上述假设的条件下，即便我们只是将 30% 的优秀率上限放松到围绕其的一个区间，学生的努力程度仍然可以在期望优秀比例不变的情况下得到提高。如将优秀率设置为在 25-35% 之间的平均值，则学生的信息劣势会使其努力程度进一步提高。

  而优秀率上限变为优秀率区间的设置能通过另一机制进一步提高学生的平均努力程度——在上文的设置中，$\bar{a}$ 是完全外生的，只有 $[\gamma_j, \bar{a}]$ 的部分是由努力程度线性决定的。但当 $a \in [a^d, a^u]$ 时，若能够让 a 成为 $\bar{e}$ 的函数，即 $a(\bar{e})$，且两者之间直接正向决定，那么为了更高的优秀率上限，均衡的平均努力程度就会进一步提高。因此，不设定优秀率上限，而根据学生努力程度弹性设置优秀率区间，能够进一步克服师生之间的信息不对称问题，并进一步增大学生努力学习的激励。

- **政策建议 3：**增开新的通选课程，并增加筛选机制，进一步降低通选课程中高天赋者的比例。

  如同(14)中说明的，一门通选课程中，高天赋选课者比例的升高会增加其挤出效应，在剩下更多高天赋选课者时，又会进一步降低其学习的激励。因此，对于以扩大学生知识面为目标的通选课程，应当尽量控制其中高天赋选课者“刷绩点”的现象，避免没有基础的学生在竞争中处于绝对劣势的地位，使得通识教育无法真正发挥其应有的作用。进一步加强不同专业选择通选课程的进入壁垒，并提供更加广泛的通选课程供学生进行选择和学习，才能真正缓解过度内卷的现状，帮助通识教育健康、有序发展。