# Feuille d'exercices n°1

## Révisions

*(du lundi 24 septembre 2012 au vendredi 28 septembre 2012)*

## Exercice 1

Rappeler les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 6 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$
2. $g(x) = \ln(1+x)$
3. $h(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$
4. $i(x) = \sin(x)$
5. $j(x) = \cos(x)$

## Exercice 2

Déterminer, au voisinage de 0, les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)e^x$ à l'ordre 4
2. $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3
3. $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
4. $i(x) = \ln\big(1+\cos(x)\big)$ à l'ordre 4
5. $j(x) = e^{\cos(x)}$ à l'ordre 4
6. $k(x) = \dfrac{xe^x}{1-x^2}$ à l'ordre 3
7. $\ell(x) = \big(\cos(x)\big)^{\sin(x)}$ à l'ordre 4

# Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\big(1 + \sin(x)\big) - \sin\big(\ln(1+x)\big)}{x^2 \sin(x^2)}$

# Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On note $e^f$ l'application $x \mapsto e^{f(x)}$ et $\ln(f)$ l'application $x \mapsto \ln\big(f(x)\big)$.

1. Montrer que :
$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ et $g$ pour que $e^f \underset{a}{\sim} e^g$
3. On suppose $f$ et $g$ strictement positives. Montrer que :
$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$$
4. On suppose $f$ et $g$ strictement positives telles que $f \underset{a}{\sim} g$. On suppose de plus que $g$ admet en $a$ une limite $\ell$ dans $\big(\mathbb{R}_*^+ - \{1\}\big) \cup \{+\infty\}$. Montrer qu'alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$. On distinguera le cas $\ell = +\infty$ du cas $\ell \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$.