# Mathématiques du signal

Patrick

ING1 2014

Sources disponibles sur http://ing1.nemunai.re/ ou ing1@nemunai.re

# Table des matières

# Chapitre 1

# Mathématique du signal

| Domaine temporel | Domaine fréquentiel traitements divers | Domaine temporel |
|---|---|---|
| $t$ <br> $(k.T)$ | | |

## 1.1 Signal continu

### 1.1.1 Outils mathématiques

#### Équations différentielles

Équation linéaires à coefficients constants.
$u(t)$ | système | $y(t)$

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t + 20$$

Résoudre l'équation différentielle $\rightarrow y(t)$

#### Méthode classique en deux étapes

1. Solution générale de l'ESSM (l'éuation sans second membre) :

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 0$$

Cherchons les solution de la forme $y(t) = e^{r.t}$.

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) & = r^2.e^{r.t} \\ \dot{y}(t) & = r.e^{rt} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ équation différentielle

$$(r^2 + r - 6).e^{r.t} = 0$$
$$r^2 + r - 6 = 0$$
$$(r-2)(r+3) = 0$$
$$\Rightarrow r_1 = 2etr_2 = -3$$

Solution générale de l'ESSM :

$$y(t) = A.e^{2t} + B.e^{-3t}$$
$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 6y(t) = 12t + 20$$

$\Rightarrow$ résoudre l'équation différentielle $\rightarrow y(t)$ ?

2. **Solution particulière de l'équation EASM (équation avec second membre)**
   On cherche les solutions particulière de la même forme que le deuxième membre.
$$y(t) = a.t + b \qquad (a, b)?$$
$$\dot{y}(t) = a \qquad \ddot{y}(t) = 0$$
$$a - 6.a.t - 6.b = 12.t + 20$$

$$\begin{cases} a - 6.b & = 20 \\ -6.a & = 12 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = \frac{-11}{3}$$

   $A$ et $B$ fixés par $(I)$.
3. La solution générale de l'EASM s'obtient en additionnant la solution générale de l'ESSM et la solution particulière de l'EASM $\rightarrow$
$$y(t) = A.e^{2.t} + B.e^{-3t} - 2t - \frac{11}{3}$$

**Produit de convolution**

Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ :

$$2(t) \times y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t-\tau)d\tau$$

On appel cette équation *l'unité de convolution*.

**Produit classique :** $1.x = x.1 = x$

$$x(t) \times \delta(t) = x(t)$$
$$\delta(t) \times x(t) = x(t)$$

$\delta(t) =$ ≪impulsion≫ de DIRAC
SHÉMA ICI

**Fonction complexe d'une variable complexe**

$f(t) \mapsto F(p)$ avec $F$ un nombre complexe et $p$ un nombre complexe.

**Définition de la transformation complexe**

$$x(t) \mapsto^{\mathcal{L}} X(p)$$

$$X(p) = \int_0^\infty x(t).e^{-p.t}dt$$

$X(p) =$ nombre complexe $p =$ nombre complexe $= \sigma + j.\omega$ où $\omega$ est la pulsion.

$\omega$ est lié à la fréquence $f$ par $\omega = 2.\pi.f$

$$x(t) \mapsto^{\mathcal{L}} X(p)$$

$x(t)$ le domaine temporel et $X(p)$ le domaine fréquentiel.

**Propriétés :**

1. **Convergence :** existance dans $X(p)$.
   $x(t) =$ signal réel (ou signal existant physiquement) $\rightarrow X(p)$ existe.
2. **Linéarité :**

   $$\mathcal{L}[a.f(t) + b.g(t)] = a.F(p) + b.G(p) \qquad \forall a, b = \text{constantes}$$

3. **Théorèmes du retard :**

   $$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau.p}.F(p) \qquad \tau \text{ le retard}$$

   **Remarque :** ICI SCHEMA 2
4. **Convergence :**

   $$\mathcal{L}\left[x(t) \times y(t) = X(p).Y(p)\right]$$

   $\mathcal{L}[*] = \cdot$ très facile de faire un produit de convolution dans l'espace de Laplace.
5. **Dérivation/Intégration**

   $$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt} = p.X(p) - x(t=0)\right]$$

   Avec $x(t=0)$ la condition initiale.
   En automatique : on suppose que toutes les conditions initales sont nulles.
   **Remarque :** si une condition initiale n'est pas nulle, on considère la nouvelle variable : $x(t=0) \neq 0$

| | |
|---|---|
| $t$ | $p$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| échelon de Heaviside | $\frac{1}{p}$ |
| $k^{-a.t}.u(t)$ | $\frac{1}{p+a}$ avec $a$ réel ou complexe |
| $t.u(t)$ | $\frac{1}{p^2}$ |

FIGURE 1.1 – Tableau des transformation de Laplace usuelles

$$y(t) = x(t) - x(t = 0)$$

$y(t = 0) = 0$ On peut toujours se ramener à des variables avec des conditions initiales nulles.

$\Rightarrow_{CInulles}$ La dérivation est une simple *multiplication* par $p$. L'intégration est une simple *division* par $p$.

$\rightarrow$ C'est très facile de dériver et d integrer dans l'espace de Laplace.

6. **Théorème de la valeur initiale/Théorème de la valeur finale**

$\begin{cases} \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to +\infty}[p.F(p)] \\ \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0}[p.F(p)] \text{¡- régime permannent en automtique} \end{cases}$

**Remarque :** régime permanent : SCHEMA 3

**Remarque :** la multiplication par $u(t)$ rend le signal CAUSAL (nul, $t \leq 0$).

$$f(t) = sin(\omega.t).u(t)$$

SCHEMA 4

**Exercice :** La définition de L sous forme d'intégrale est rarement utilisée. On se sert des propriétés et des transofrmation de Laplce usuelles.

**Formule d'Euler :** $sin(\theta) = \frac{e^{j.\theta - j.\theta}}{2j}$, $j^2 = -1$.

$$\mathcal{L}[(sin(\omega.t)).u(t)] = \mathcal{L}[\frac{e^{j.\omega.t - j.\omega.t}}{2j}.u(t)]$$

$$= \frac{1}{2j}[\mathcal{L}[e^{j.\omega.t}.u(t)] - \mathcal{L}[e^{-j.\omega.t}.u(t)]] \qquad a = -j.\omega$$

$$= \frac{1}{2j}[\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}] \qquad formule3dutableau$$

$$= \frac{1}{2j}[\frac{p + j\omega - p + j\omega}{p^2 + \omega^2}]$$

$$= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

**Transformation de Laplace inverse**

$$X(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p+2)(p+3)} \longmapsto^{\mathcal{L}} ?$$

On décompose $X(p)$ en élément simples :

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

**Multiplication par $p$ des deux membres, puis $p = 0$** $\quad 1 = A$

**Multiplication par $p+2$ des deux membres, puis $p = -2$** $\quad \frac{8-24+6}{-2(1)} = B = \frac{-10}{-2} = 5$

**Multiplication par $p+3$ des deux membres, puis $p = -3$** $\quad \frac{18-36+6}{(-3)(-1)} = C = \frac{-12}{3} = -4$

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$$

$$x(t) = (1 + 5.e^{-2t} - 4.e^{-3.t}).u(t) \qquad ligne 2 et 3 du tableau$$

**Résolution d'équation différentielle linéaire et à coefficients constants**

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) - 12t = 12t + 20$$

**Hypothese :** les conditions initiales sont nulles.
$\Rightarrow$ pas de problème avec les dérivées.

$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-6y(t) = (12t+20).u(t)$ on suppose que le deuxième membre n'existe que pour$t \geq 0$

$$(p^2 + p - 6).Y(p) = \mathcal{L}\left[(12t+20).u(t)\right] = 12.\mathcal{L}\left(t.u(t)\right) + 20.\mathcal{L}\left(u(t)\right)$$

$$(p^2 + p - 6).Y(p) = \frac{12}{p^2} + \frac{20}{p} \Rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{12 + 20p}{p^2(p^2 + p - 6)} \mapsto^{\mathcal{L}^{-1}} ?$$

**On décompose $Y(p)$ en éléments simples :** $Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+3} + \frac{D}{p-2} = \frac{12+20p}{p^2(p+3)(p-2)}$

**Multiplication par $p^2$ des deux membres, puis $p = 0$** $\quad A = -2$

**Multiplication par** $p+3$ **des deux membres, puis** $p=-3$ $\quad C=\frac{-48}{-45}=\frac{16}{15}$

**Multiplication par** $p-2$ **des deux membres, puis** $p=2$ $\quad D=\frac{52}{20}=\frac{13}{5}$

**Multiplication par** $p$ **des deux membres, puis** $p\to+\infty$ $\quad B+C+D=0$ $\Rightarrow B=\frac{-16}{15}-\frac{13}{5}=\frac{-55}{15}=\frac{-11}{3}$

$$Y(p)=\frac{-2}{p^2}-\frac{11}{3}\times\frac{1}{p}+\frac{16}{15}\times\frac{1}{p+3}+\frac{13}{5}\times\frac{1}{p-2}$$

$$y(t)=-2t-\frac{11}{3}+A.e^{2t}+B.e^{-3t}$$

$$\begin{cases} y(0)=0\to-\frac{11}{3}+A+B=0 \\ \dot{y}(0)=0 \qquad \dot{y}(t)=-2+2A.e^{2t}-3B.e^{-3t} \end{cases}$$

$\dot{y}(0)=0 \quad -2+2A-3B=0\Rightarrow A=\frac{13}{5},\ B=\frac{16}{15}$

$$\frac{26}{5}-\frac{48}{15}=\frac{26}{5}-\frac{16}{5}=\frac{10}{5}=2$$

**Application en électronique** SCHEMA 5

1. Calculer $\mathcal{L}\left[e(t)\right]=E(p)$.
   On s'intéresse à une seule période (entre $t=0$ et $t=20$). On calcule $\mathcal{L}\left[h(t)\right]$, soit $H(p)$ (on décompose $h(t)$ sous la forme de signaux élémentaire + propriétés de $\mathcal{L}$).
   On en déduit $\mathcal{L}\left[e(t)\right]$, soit $E(p)$. **Ne pas utiliser la définition de $\mathcal{L}$.**

SCHEMA 6

$$H(p)=\frac{1}{10.p^2}\left(1-2.e^{-10.p+e^{-20.p}}\right)=\frac{(1-e^{-10.p})^2}{10.p^2}$$

$$e(t)=h(t)+h(t-20)+h(t-40)+...$$

$$E(p)=H(p)+H(p).e^{-20.p}+H(p).e^{-40p}+...$$

$$E(p)=H(p)\left[1+e^{-20p}+(e^{-20p})^2+(e^{-20p})^3+...\right]$$

$$E(p)=\frac{(1-e^{-10p})^2}{10p^2}\times\frac{1}{1-e^{-20p}}$$

$$1-e^{-20p}=(1-e^{-10p})(1+e^{-10p})$$

$$E(p)=\frac{1-e^{-10p}}{10.p^2.(1+e^{-10p})}$$

SCHEMA 7

FIGURE 1.2 – Pont diviseur de tension

1. Exprimer la fonction de transdert du circuit électrique :

$$\frac{V_S(p)}{E(p)} = \frac{R}{R_g + R + \frac{1}{C_p}} = \frac{R.C.P}{1 + (R + R_g).C_p}$$

$$E(p) = \frac{1 - e^{-10p}}{10.p^2.(1 + e^{-10p})}$$

SCHEMA 8

1. On calcul $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$
2. On calcul $H(p)$
3. On en déduit : $Y(p) = X(p) \times H(p)$

$$V_s(p) = E(p) \times H(p) = \frac{1 - e^{-10p}}{10^{p^2}.(1 + e^{-10p})} \times \frac{RC.p}{1 + (R + R_g).C_p}$$

1. 3. On cherche $V_s(t)$

$$V_S(p) = E(p) \times H(p)$$

On calcul $\mathcal{L}^{-1}[V_S(p)] = V_S(t)$

$$V_S(p) = \frac{RC}{10p} . \frac{1 - e^{-10p}}{[(R + R_g)(p + 1)] \times (1 + e^{-10p})}$$

**Hypothese** $(R + R_g)C = 1\mu s$

$$V_S(p) = \frac{RC}{10} . \frac{1}{p(1 + p)} . \frac{1 - e^{-10p}}{1 + e^{-10p}}$$

Où les deux premières fractions correspondent à $X(p)$.
On cherche $Z^{-1}[X(p)]$ :

$$X(p) = \frac{RC}{10} . \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{1 + p}\right]$$

$$x(t) = \frac{RC}{10} . \left[1 - e^{-t}\right] .u(t)$$

$$V_S(p) = X(p) . \frac{(1 - e^{-10p})(1 - e^{-10p})}{(1 + e^{-10p})(1 - e^{-10p})}$$

$$= X(p) . \frac{1 - 2.e^{-10p} + e^{-20p}}{1 - e^{-20p}}$$

$$x(t) \Rightarrow n(t) \Rightarrow V_S(t)$$

$$N(p) = X(p).\left[1 - 2.e^{-10p} + e^{-20p}\right]$$

Par le théorème du retard :

$$n(t) = x(t) - 2x(t-10) + x(t-20)$$

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}.F(p)$$

SCHEMA 9
SCHEMA 10

$$V_S(p) = \frac{N(p)}{1 - e^{-20p}}$$

$V_S(t)$ est la reproduction, toutes les $20\mu s$ du signal $n(t)$

## 1.2 Signaux discrets (ou échantillionnés)

### 1.2.1 Définitions du signal échantillonné

Soit un signal continue $f(t)$ causal : $f(t) = 0, t \leq 0$.
SCHEMA 11
$f(t)$ est le signal échantilloné : $f(0), f(T), f(2T), ...$, la collection des échantillons.
Problème de cette première définition : $f(t) \mapsto^{\mathcal{L}} ?$, le passage dans le domaine fréquentiel.

**Problème** La transformée de Laplace $\mathcal{L}$ d'une suite de nombres n'est pas définie $\ldots \Rightarrow$

**Deuxième définition**

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).\delta(t - n.T) \tag{1.1}$$

$\delta(t)$ : pic de Dirac : SCHEMA 12
$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - n.T)$ : peigne de Dirac SCHEMA 13

> Les échantillons $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, $\ldots$ prennent le train. Chaque échantillon s'installe dans un wagon différent, dont il occupe toute la surface.

Intérêt de la définition 2 : on peut calculer $\mathcal{L}$ de $f^*(t)$.

$$\mathcal{L}\left[f^*(t)\right] = F^*(t) = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).\delta(t-n.T)\right]$$

<u>$\mathcal{L}$ linéaire :</u>

$$\mathcal{L}(\text{somme}) = \text{Somme}(\mathcal{L})$$

$$\mathcal{L}\left(f^*(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}\left[f(n.T).\delta(t-n.T)\right]$$

$$\mathcal{L}\left(f^*(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^*(t).\mathcal{L}\left[\delta(t-n.T)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[f^*(t)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).e^{-n.T.p}.\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]$$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).e^{-n.T.p} \tag{1.2}$$

Transfert de Laplace du signal échantillonné équivaut à la représentation fréquentielle.

$F^*(p)$ devient $\mathcal{F}(z)$ par le changement de variable éliminant l'exponentielle $z = e^{T.p}$.

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).z^{-n} \tag{1.3}$$

$F^*(p)$ est la *transformation de Laplace* échantillonnée *du signal* $f(t)$ ou la transformation de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$

### Transformation en $\gamma$

$$\gamma = e^{-T.p} \quad \text{peu utilisé}$$

$$\mathcal{F}(\gamma) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).\gamma^n$$

#### Échantillonnage idéal/échantillonnage réel

SCHEMA 14

$$F_h^*(p) \approx h.F^*(p) \quad \text{si } h \ll T$$

SCHEMA 15
On suppose l'échantillonnage idéal.

Si on veut tenir compte de la durée $h$ de prélèvement, on peut le faire après coup en multipliant par $h$ le résultat final.

### 1.2.2 Reconstitution du signal continu, théorème de Shannon

SCHEMA 16

- La reconstitution exacte de $f(t)$ à partir de $f^*(t)$ peut être possible si $T$ avait été *bien choisi* lors de l'échantillonnage.
- Y a-t-il eu *perte d'information* lors de l'échantillonnage ?
- Comment mesurer la *quantité d'information* contenue dans le signal ?

$$f(t) \mapsto^{\mathcal{F}} F(\mathcal{L})$$

$$\text{spectre de Fourier} \to |F(\nu)|$$

SCHEMA 17

FIGURE 1.3 – Spectre de Fourier

#### Spectre de Fourier de $f^*(t)$

Transformation de Fourier de $f^*(t)$ (admis).

$$F^*(\nu) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

SCHEMA 18
L'échantillonnage se traduit par la recopie de l'information *une infinité de fois* le long de l'axe fréquentiel.

**Théorème de Shannon** Lorsque l'on échantillonne un signal continu à spectre fréquentiel borné $[-N; +N]$ on ne perd aucune information si la fréquence d'échantillonnage $f_e$ est supérieure au *double* de la plus haute fréquence $N$ contenu dans le signal continu.

Si le théorème de Shannon ($N < \frac{1}{2T}$) n'est pas respecté, la composante latérale chevauche partiellement la composante centrale. Il est donc impossible de reconstituer le signal continu.

**Reconstitution du signal continu**

On a vu que si, lors de l'échantillonnage, la condition de Shannon ($T < \frac{1}{2N}$) a été respecté, on peut reconstituer le signal continu de manière exacte.

**Problème** le filtre en $\pi$ idéal n'existe pas, c'est un concept abstrait. Dans la réalité, on le remplace par un filtre approché : *un bloqueur d'ordre 0.*
SCHEMA 19

**Comportement fréquentiel de B** SCHEMA 20

**Calcul de** $\mathcal{L}\left[f_{B_0}(t)\right]$

$$\begin{cases} f_{B_0}(t) = f(0) & 0 \leq t < T \\ f_{B_0}(t) = f(T) & T \leq t < 2T \\ f_{B_0}(t) = f(2T) & 2T \leq t < 3T \\ \quad \vdots & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{B_0}(t) = & \quad f(0).\left[u(t) - u(t-T)\right] \\ & + \quad f(T).\left[u(t-T) - u(t-2T)\right] \\ & + \quad f(2T).\left[u(t-2T) - u(t-3T)\right] \\ & + \quad \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{B_0} = \mathcal{L}\left[f_{B_0}(t)\right] = & \quad f(0).\left[\mathcal{L}\left(u(t)\right) - \mathcal{L}\left(u(t-T)\right)\right] \\ & + \quad f(T).\left[\mathcal{L}\left(u(t-T)\right) - \mathcal{L}\left(u(t-2T)\right)\right] \\ & + \quad f(T).\left[\mathcal{L}\left(u(t-2T)\right) - \mathcal{L}\left(u(t-3T)\right)\right] \\ & + \quad \dots \end{aligned}$$

On peut factoriser $F_{B_0}(p)$ :

$$F_{B_0}(p) = \left(\frac{1 - e^{-T.p}}{p}\right) \times \left[f(0) + f(T).e^{-T.p} + f(2T).e^{-2T.p} + \dots\right]$$

$$B_0 = \frac{\mathcal{L}\left[f_{B_0}(t)\right]}{\mathcal{L}\left[f^*(t)\right]}$$

$$F_{B_0}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \times \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).e^{-nTp}$$

$$\Rightarrow B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad \text{L'approximation du filtre passe-bas idéal ?}$$

**On trace le diagramme de Bode de** $B_0(p)$

$$\begin{cases} |B_0(j\omega)| \\ \angle B_0(j\omega) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |B_0(j\omega)| = |\frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega}| &= |\frac{1-\cos(T\omega)+j\omega T\omega}{j\omega}| \\ &= \frac{\sqrt{(1-\cos(T\omega)^2+\sin^2(T\omega))}}{\omega} \\ &= \frac{\sqrt{2-2\cos(T\omega)}}{\omega} = |B_0(j\omega)| \end{aligned}$$

SCHEMA 23

**Remarque** avec $B_1, B_2, \ldots$ (des bloqueurs d'ordre plus élevés), le profil fréquentiel $|B_1(j\omega)|$, $|B_2(j\omega)|$, … ressemble de plus en plus au signal rectangulaire idéal.

### 1.2.3 Transformée en Z et transformée en Z inverse

**Calcul pratique d'une transformée en Z**

SCHEMA 24

**Voie 1** Calcul de $\mathcal{F}(z)$ à partir de $f(t)$

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n.T).z^{-n} \tag{1.4}$$

**Voie 2** Calcul de $\mathcal{F}(z)$ à partir de $F(p)$
! Ce n'est pas le changement de variable $z = e^{Tp}$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{\text{sur les pôles}} (\text{résidus de } \frac{F(p)}{1-e^{Tp}.z^{-1}}) \tag{1.5}$$

Figure 1.4 – Formule des résidus

**En pratique** $F(p) =$ fraction rationelle en $p = \frac{N(p)}{D(p)}$
– pôles $p_i$ simples
– pôles $p_i$ multiples d'ordre $n$

**Exemple**

$$F(p) = \frac{(2p-3)(p+7)}{p^2(1+5p)^5(3p+1)}$$

$F(p)$ a :
- 2 zéros : $p_1 = \frac{3}{2}$ simple et $p_2 = -7$ multiple d'ordre 3.
- 3 pôles : $p_1 = 0$ multiple d'ordre 2 ; $p_2 = -\frac{1}{5}$ multiple d'ordre 5 ; $p_3 = 1\frac{1}{3}$ simple

La voie 2 devient $\mathcal{F}(z) = \sum_i$ résidu $r_i$
- résidus $r_i$ associé à un pôle simple $p_i$ de $F(p)$.

$$r_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \times \frac{1}{1 - e^{T.p_i}.z^{-1}} \tag{1.6}$$

  en posant $D'(p) = \frac{d.D(p)}{dp}$
- résidu $r_i$ associé à un pôle multiple $p_i$ d'ordre $n$ de $F(p)$

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \times \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[ (p-p_i)^n \times \frac{F(p)}{1 - e^{Tp}.z^{-1}} \right] \tag{1.7}$$

### 1.2.4 Exemples

**Exemple 1**

Calcul de transformée en Z usuelles par les deux voies.

$$\begin{cases} f(t) = u(t) = \text{échelon unitaire} \\ F(p) = \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).z^{-n}$$

**Voie 1** SCHEMA 25

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

FIGURE 1.5 – sommation d'une série géométrique de « raison » $x$

On admet que la sommation de la série est *convergente* (raison $\in \mathbb{C}$), $Z[u(t)] = \frac{z}{z-1}$.

$$Z[u(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + (z^{-1})^2 + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).z^{-n}$$

**Voie 2**

$$F(p) = \frac{1}{p}$$

- 1 seul pôle : $p_1 = 0$ simple.
  1 seul résidu $r_1$ $\mathcal{F}(z) = r_1$
  Par 1.6 : $N(p) = 1$ et $D(p) = p \to D'(p) = 1$

$$\begin{array}{rlcl} r_1 = & \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} & \times & \frac{1}{1-e^{T.p_1}.z^{-1}} \\ & \frac{1}{1} & \times & \frac{1}{1-e^{T.0}.z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \end{array}$$

$$\mathcal{F}(z) = r1 = \frac{z}{z-1}$$

**Exemple 2**

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(t) = e^{-at}.u(t) \\ F(p) = \frac{1}{p+a} \end{cases}$$

**Voie 1**

$$f(t) = e^{-at}.u(t)$$

$$f(nT) = e^{-anT}.u(nT) = e^{-anT} \quad n \geq 0$$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-aT}.z^{-1})^n$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}.z^{-1}}$$

**Voie 2**

$$F(p) = \frac{1}{p+a} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- 1 seul pôle : $p_1 = a$ simple
  $D'(p) = 1$

$$r_1 = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1 - e^{T.p_1}.z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} = \mathcal{F}(z)$$

**Exemple 3**

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(t) = t.u(t) \\ F(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

**Voie 2**

– 1 seul pôle $p_1 = 0$ multiple d'ordre $n = 2$, $\mathcal{F} = r_1$

$$r_1 = \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dp}\left[p^2 \times \frac{\frac{1}{p^2}}{1 - e^{Tp}.z^{-1}}\right]\right) = \left(\frac{1}{1 - e^{Tp}.z^{-1}}\right)_{p=0} = \frac{+T.e^{Tp}.z^{-1}}{(1 - e^{Tp}.z^{-1})^2}$$

$$r_1 = \frac{T.z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Z\left[t.u(t)\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

**Voie 1**

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-1}$$

$$f(t) = t.u(t)$$

$$f(nT) = nT.u(nT) = nT$$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nT.z^{-n} = T.\sum_{n=0}^{+\infty} n.z^{-n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-n).z^{n-1} = \frac{z^{-1} - z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow Z\left[t.u(t)\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Z\left[t.u(t)\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

**Exemple 4**

$$\text{Soit } f(t) : F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

On ne peut pas utiliser la voie 1 car on ne connait pas $f(t)$. On a cependant toujours deux méthodes : la voie deux par la méthode directe et par la méthode indirecte (on peut décomposer $F(p)$ en éléments simples).

| $t$ | $p$ | $z$ |
|---|---|---|
| $u(t)$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $t.u(t)$ | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| $e^{-at}.u(t)$ | $\frac{1}{p+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |

**Voie 2 : méthode directe**

– 2 pôles simples : $p_1 = -a \longrightarrow r_1$ et $p_2 = -b \longrightarrow r_2$

$$r_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} \times \frac{1}{1 - e^{Tp_1}.z^{-1}}$$

$$D(p) = (p+a)(p+b) \mapsto D'(p) = 2p + a + b$$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{b-a} \times \frac{1}{1-e^{-aT}.z^{-1}} \\ r_2 = \frac{1}{a-b} \times \frac{1}{1-e^{-bT}.z^{-1}} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{1-e^{-aT}.z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}.z^{-1}}\right]$$

**Méthode indirecte**

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}$$

On multiplie par $(p+a)$, considérant $p = -a$ :

$$A = \frac{1}{b-a}$$

On multiplie par $(p+b)$, considérant $p = -b$ :

$$B = \frac{1}{a-b}$$

Donc :

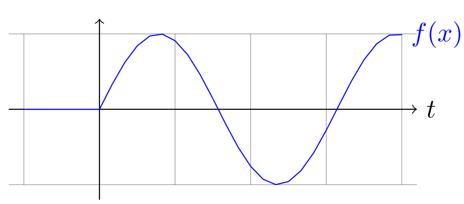
$$F(p) = \frac{1}{b-a} \times \frac{1}{p+a} + \frac{1}{a-b} \times \frac{1}{p+b}$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{b-a} \times \frac{z}{z-e^{-aT}} + \frac{1}{a-b} \times \frac{z}{z-e^{-bT}}$$

### 1.2.5 Méthode trigonométrique

**Exemple**

$$f(t) = \sin(\omega_0.t).u(t)$$



**Calcul de $\mathcal{F}(z)$** On utilise les formules d'Euler :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{j\theta + e^{-j\theta}}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{j\theta - e^{-j\theta}}}{2j} \end{cases}$$

$$Z\left[f(t)\right] = Z\left[\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.u(t)\right] = \frac{1}{2j} \times \left[Z(e^{j\omega_0 t}.u(t)) - Z(e^{-j\omega_0 t}.u(t))\right]$$

$$a = -j\omega_0 \qquad a = +j\omega_0$$

$$Z\left[f(t)\right] = \frac{1}{2j}.\left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}} - \frac{z}{j - e^{-j\omega_0 T}}\right]$$

$$= \frac{z}{2j}\left[\frac{z - e^{-j\omega_0 T} - z + e^{j\omega_0 T}}{z^2 - (e^{j\omega_0 T} + e^{-j\omega_0 T})z + 1}\right]$$

$$= \frac{z.\sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T)z + 1} = Z\left[(\sin(\omega_0 T).u(t))\right]$$

**Propriétés de la transformée en $z$**

**Linéarité**

$$Z\left[\lambda.(f(t) + \mu.g(t))\right] = \lambda.\mathcal{F}(z) + \mu.g(z)\forall\lambda, \mu \text{ constants}$$

**Théorème du retard** Rappel dans le cas continu :

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{\tau.p}.F(p)$$

$$Z\left[f(t - k.T)\right] = z^{-k}.\mathcal{F}(z)$$

**Théorème de la valeur initiale/finale** Rappel dans le cas continu :

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty}\left[p.F(p)\right] \\ \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0}\left[p.F(p)\right] \end{cases}$$

$$\lim_{k\to 0} f(k.T) = \lim_{z\to+\infty}\left[\mathcal{F}(z)\right]$$

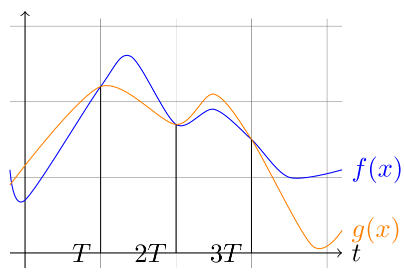
$$\lim_{k\to+\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}.\mathcal{F}(z)\right]$$

$\Rightarrow$ régime permabebt en automatique

### 1.2.6 Transformée en $z$ inverse

**Définition**

$$Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right] = \{f(kT)\}$$




**Remarque** Il existe une infinité de fonctions continues du temps qui possèdent la même transformée en $z$ :

$f(t) \neq g(t)$ mais $f(kT) = g(kT) \quad \forall k$

$\mathcal{F}(z) = g(z)$

$$\begin{aligned} Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right] &= Z^{-1}\left[g(z)\right] \neq f(t) \neq g(t) \\ &= \{f(kT)\} = g\{kT\} \end{aligned}$$

**Remarque sur les notations**

$$Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right] = \{f(kT)\}_{k=0,1,\ldots}$$

$$Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right] = \{f(kT)\}$$

À éviter :

$$Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right] = f(kT)$$

La transformée en $Z$ inverse est une collection de nombres. Ce n'est pas un seul nombre ou une fonction continue.

**Quatre méthodes de calcul de $Z^{-1}$**

- **Deux méthodes analytiques :** (cas simples) $f(kT)$ = fonction de $k$ et de $T$.
- **Deux méthodes numériques :** (cas général) $f(0) = \ldots$, $f(T) = \ldots$, $f(2T) = \ldots$, $\ldots$, pour les 50 premiers échantillons par exemple.

**Méthode des résidus**

$$f(nT) = \sum \text{résidus de } \mathcal{F}(z).z^{n-1}$$

**Cas particulier** $\mathcal{F}(z)$ est une fraction rationnelle en $z$ n'ayant que des pôles simples $z_i$.

$\rightarrow$ fonction auxiliaire :

$$g(z) = \mathcal{F}(z).z^{n-1} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

On pose $D'(z) = \frac{dD(z)}{dz}$.

La formule d'inversion devient :

$$f(nT) = \sum_i \frac{N(z_i)}{D'(z_i)}$$

**Exemple**

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}$$

Calculer la transformée en $z$ inverse de $\mathcal{F}(z)$, soit $Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right]$.

Ici : $\mathcal{F}(z)$ a deux pôles simples : $z_1 = a$ et $z_2 = b$ (méthode 1 applicable).

$\rightarrow$ fonction auxiliaire :

$$g(z) = \mathcal{F}(z).z^{n-1} = \frac{z^n(z+1)}{(z-a)(z-b)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$D(z) = (z-a)(z-b) \Rightarrow D'(z) = 2z - a - b$$

$$f(nT) = \sum_i \frac{N(z_i)}{D'(z_i)} = \frac{N(a)}{D'(a)} + \frac{N(b)}{D'(b)} = \frac{a^n(a+1)}{a-b} + \frac{b^n(b+1)}{b-a}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}\right] = \left\{\frac{a+1}{a-b}a^n + \frac{b+1}{b-a}.b^n\right\} = \left\{1; \frac{a+1}{a-b}.a + \frac{b+1}{b-a}.b; \ldots\right\}$$

**Développement en fractions élémentaires** Cette méthode s'inspire de la méthode classique de calcul de $\mathcal{L}^{-1}$.

Rappel : $F(p)$ est une fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]?$$

On décompose $F(p)$ en éléments simples :

$$F(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \ldots$$

La $\mathcal{L}^{-1}$ s'obtient terme à terme :

$$f(t) = \left[A.e^{-at}.u(t) + B.e^{-bt}.u(t) + \ldots\right]$$

| $t$ | $p$ | $z$ |
|---|---|---|
| $e^{-at}.u(t)$ | $\frac{1}{p+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |

**Bonne méthode**

– Fonction auxiliaire :

$$g(z) = \frac{\mathcal{F}(z)}{z}$$

– On décompose $g(z)$ en éléments simples :

$$g(z) = \frac{A}{z+a} + \frac{B}{z+b}$$

– On multiplie les deux membres par $z$ :

$$\mathcal{F}(z) = \frac{A.z}{z+a} + \frac{B.z}{z+b} + \dots$$

**Exemple**

$$\mathcal{F}(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0,5)}$$

Calculer $Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right]$ par la méthode 2 de développement en fractions élémentaires.

– fonction auxiliaire :

$$g(z) = \frac{\mathcal{F}(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{4}{z-1} - \frac{4}{z-0,5}$$

– on revient à $\mathcal{F}(z)$ :

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{4z}{z-0,5}$$

On recheche les solutions dans la table, via $a$ : $0,5 = e^{-aT}$, $f(nT) = 4(1-e^{-anT})$

$$f(nT) = 4.u(nT) - 4.e^{-anT}.u(nT)$$

Maintenant, on doit éliminer $a$.

$$f(nT) = 4\left[1-(0,5)^n\right]$$

$$Z^{-1}\left[\frac{2z}{(z-1)(z-0,5)} = \{4\left[1-(0,5)^n\right]\}\right] = \{0; 2; 3; 3,5; \dots\}$$

**Méthode 3 : Division selon les puissances croissantes de $z^{-1}$** Cette méthode se base sur la définition de la transformée en $z$ :

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).z^{-n}$$

**Problème inverse**

- On recherche un développement de $\mathcal{F}(z)$ sous la forme d'un polynome en $z^{-1}$.
- $f(nT)$ est le coefficient dans ce polynôme de $z^{-1}$
- ce développement peut s'obtenir par division polynomiale

**Exemple**

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 0,4.z + 0,1)}$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z^2}{z^3 + 1,4z^2 + 0,5z - 0,1}$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1,4z^{-1} + 0,5z^{-2} - 0,1z^{-3}}$$

On divise haut et bas par $z^3$ pour n'avoir que des puissances de $z^{-1}$

**Méthode 4 : Méthode de l'équation aux différences** Théoriquement, *l'équation aux différences* est la transposition au cas discret de l'équation différentielle/

**Exemple**

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{0,3.z}{z - 0,2}$$

- On suppose connue $Z^{-1}\left[Y(z)\right]$ soit $\{y(nT)\}$.
- On cherche $Z^{-1}\left[X(z)\right]$ soit $\{x(nT)\}$.

Propriété (théorème du retard) :

$$Z\left[f(t-kT)\right] = z^{-k}.\mathcal{F}(z) \qquad k \text{ entier}$$

$$Z\left[z^{-k}.\mathcal{F}(z)\right] = f\left[(n-k)T\right]$$

$$Z^{-1}\left[\mathcal{F}(z)\right] = f(nT)$$

On divise haut et bas par $z$ :

$$0,3.Y(z) = X(z) - 0,2z^{-1}.X(z)$$

On applique $Z^{-1}$ :

$$0,3.y(nT) = x(nT) - 0,2z.x\left[(n-1)T\right]$$

On a donc une équation aux différences du 1^er^ ordre.

On pose : $y(nT) = y_n$ et $x(nT) = z_n$

Équation aux différences : $x_n = 0,3.y_n + 0,2.x_{n-1}$

$$Z^{-1}\left[X(z)\right] = \{0,3; 0,36; 0,372; \ldots\}$$

Critère d'arrêt

| $n$ | $0,3.y_n$ | $0,2.x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $0,3$ | 0 | $0,3$ |
| 1 | $0,3$ | $0,06$ | $0,36$ |
| 2 | $0,3$ | $0,072$ | $0,372$ |

1. Nombre d'échantillons
2. Convergence : $x_n \longrightarrow_{n\to+\infty} L$

Si $L$ existe : $L = 0,3 + 0,2L \Rightarrow L = \frac{0,3}{0,8} = \frac{3}{8} = 0,375$.
C'est la méthode la plus utilisée car facile à programmée.