Les Suite Feuille exo 8

Exercice 1 :

$$S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{19}{3} + 7$$

Rappel $U_{n+1} = U_n + r$; r = raison

$U_n = U_0 + r.n$

$$S = \sum_{k=0}^{n} U_p = (U_0 + U_n) \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

ici, $S =$

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} U_n = U_0 + rn \\ n = \frac{U_n - U_0}{r} = \frac{7 - \frac{1}{3}}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{60}{6} = 10 \end{cases}$$

$$S = \left(\frac{1}{3} + \frac{21}{3}\right) \times \left(\frac{11}{2}\right) = \frac{242}{6} = \frac{121}{3} \simeq 40,333$$

Exercice 2 :

$$S = 18 + 54 + 162 + \dots + 39366$$

$U_{n+1} = U_n \times 3$ $\qquad q = 3 \qquad U_0 = 18$

$U_n = q^n \times U_0$

$$S = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$\frac{39366}{18} = 3^n$

$2187 = 3^n$

$2187 = e^{n \ln(3)}$

$\ln(2187) = n \ln(3)$

$\frac{\ln(2187)}{\ln(3)} = n$

$n = 7$

$S = 18 \times \left(\frac{1-3^8}{1-3}\right)$

$= 9 \times 6560$

$= 59040$

Exercice 3 :

Rappel :

$S = U_{n_0} + \dots + U_n$

$= (U_{n_0} + U_n) \times \left(\frac{n - n_0 + 1}{2}\right)$

$n_0 < n$

(U_n) AR $\quad r = 2 \quad U_0 = 1$

$\sum_{i=3}^{n} U_i = 91 = U_3 + U_4 + \dots + U_n$

Determiner n

$U_n = U_0 + rn$

$\frac{U_n - U_0}{r} = n = \frac{91-1}{2} = 45$

$91 = \cancel{(U_0 + U_n) \times \left(\frac{n+1}{2}\right)}$

$91 = (U_{n_3} + U_n) \times \left(\frac{n-3+1}{2}\right)$

$91 = (7 + U_n) \times \left(\frac{n-2}{2}\right)$

$91 = (7 + U_0 + rn) \times \left(\frac{n-2}{2}\right)$

$91 = (8 + 2n) \times \left(\frac{n-2}{2}\right)$

$91 = 4n - 8 + n^2 - 2n$

$91 = 2n + n^2 - 8$

$n^2 + 2n - 99 = 0$

$\Delta = 400 > 0$

$n_1 = 9$

Exercice 4 :

(U_n) : $U_0 = 5$ $\quad U_{n+1} = 2U_n + 3$

(V_n) : $V_0 = 1$ $\quad V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{4}$

S.A.G.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\ell = f(\ell)$

$\ell = 2\ell + 3$

$\ell = -3$

Soit $V_n = U_n + 3$

$V_{n+1} = U_{n+1} + 3$

$= 2U_n + 3 + 3 = 2U_n + 6$

$= 2(U_n + 3) = 2V_n$

$\Rightarrow$ (V_n) géométrique de raison $q = 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2^n V_0$

$= 2^n(U_0 + 3)$

$= 2^n(5+3) = 8 \cdot 2^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n - 3$

$= 2^n \cdot 8 - 3 = 2^n \cdot 2^3 - 3$

$V_n = 2^{n+3} - 3$

$\rightarrow$ Même principe sur V_n.

Exercice 5 :

1/ Soit (u_n) une suite à termes > 0 vérifiant

$$\exists (k,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \ , k > 1 \ ; \forall n \geq p ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$$

Mq $(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\forall n \geq p$:

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} \geq k \Rightarrow \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \geq k \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{u_{p+1}}{u_p} \geq k$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \times \cdots \times \frac{u_{p+1}}{u_p} \geq k^{(n-p)} \rightarrow \begin{pmatrix} n-p-1+1 \\ = n-p \end{pmatrix}$$

(produit terme à terme)

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_p} \geq k^{(n-p)}$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq u_p \cdot k^{(n-p)}$$

or : $k > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} k^{n-p} = +\infty$$

car $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} k^{(n-p)} \cdot u_p = +\infty$

et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2)

$$\exists (k,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ 0<k<1\ \forall n \geq p$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{p+1}}{u_p} \leq k^{(n-p)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_p} \leq k^{(n-p)}$$

$$\Leftrightarrow u_n \leq u_p \cdot k^{(n-p)}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (k^n) = 0$ quand $0<k<1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_p \cdot k^{(n-p)} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ Car (u_n) suite à termes >0.

Exercice 6 :

1) $u_n = 100 + 10n$

2) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_n$

3) 2 janvier 2008 $\Rightarrow n = 2008 - 1990 = 18$

$$S_{18} = 100 + \sum_{k=1}^{18} u_n = (u_0 + u_n) \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= (100 + 100 + 18 \times 10) \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= 380 \times \frac{19}{2} = 9{,}5 \times 380$$

$$= 3610\ €$$

4/ a)

$$\cancel{C_n = C_0 (1{,}04)^n + 200n}$$

$$\cancel{C_n = 3000 (1{,}04)^n + 200n}$$

b) $\cancel{C_n \geq 6000 \ ?}$

$$\cancel{3000 (1{,}04)^n + 200n \geq 6000}$$

$$\cancel{15 (1{,}04)^n + n \geq 30}$$

$$\cancel{15 e^{n \ln(1{,}04)} + e^{\ln(n)} \geq 30}$$

c) a) $\ell = (1{,}04)\ell + 200$

$$\ell = \frac{-200}{1{,}04} = -5000$$

Soit $V_n = C_n + 5000$

$V_{n+1} = C_{n+1} + 5000$

$= (1{,}04)\, C_n + 5200$

$= (1{,}04)\, V_n$

Suite géo : $q = 1{,}04$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = (1{,}04)^n \times V_0$

$= (1{,}04)^n \times 8000$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $C_n = V_n - 5000$

$C_n = (1{,}04)^n \times 8000 - 5000$

b) $C_n \geq 6000$

$(1{,}04)^n \times 8000 - 5000 = 6000$

$(1{,}04)^n \times 8000 = 11000$

$e^{n\ln(1{,}04)} = \frac{11}{8} = \ln(11) - \ln(8)$

$n = \frac{\ln(11) - \ln(8)}{\ln(1{,}04)} = 9$

Exo 7 :

$(a_n)_n \geq 0$

1) $P_n = 4a_n$

$S_n = (a_n)^2$

$a_n \to$ géométrique

$a_n = a_0 . q^n$

$\to P_n = (4a_0) . q^n \to$ suite géo.

$= P_0 . q^n$ raison : q

$\to S_n = a_0^2 . q^{2n} \to$ suite géo.

$= S_0^2 . q^{2n}$ raison q^2

2) $a_n = a_0 + rn$

$P_n = 4a_n = 4a_0 + 4rn$ raison $4r$

donc P_n est arithmétique

$S_n = (a_n)^2 = a_0^2 + 2a_0rn + r^2n^2$

$\to$ ni SAR ni SG

Exercice 8 :

1) U_n : portion ~~initiale~~ de ^{14}C au bout de n siècles

$U_0 = 1$

$U_{n+1} = (1 - 0{,}0124) \cdot U_n$

$= 0{,}9876\ U_n$

Donc $U_n = (0{,}9876)^n$

$U_{1000} = \ldots$

2) $k.10^3$ années ? $k.10^3 = 10k$ siècles

$U_{10k} = (0{,}9876)^{10k}$

$\simeq (0{,}8827)^k$

3) n tq $U_n = 0{,}1$

$(0{,}9876)^n = 0{,}1$

$n = \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}9876)} \simeq 18500$ années

Exercice 9 :

$C_0 = 16000$ € $+3,5\%/an$

1)

$C_0 = 16000$

$C_1 = 1,035 \times 16000$

$C_n = (1,035)^n \times C_0$

2) $C_n \geq 2C_0 \iff (1,035)^n C_0 \geq 2\cancel{C_0}$

$\iff n \ln(1,035) \geq \ln(2)$

$n \geq \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,035)} = 20,148$

$n = 21$

3) $C_n = (1+t)^n \times C_0$

$\Rightarrow (1+t)^{10} . C_0 = 2 . \cancel{C_0}$

$(1+t)^{10} = 2$

$1+t = \sqrt[10]{2}$

$t = \sqrt[10]{2} - 1 \simeq 7,18\%$

Exercice 10 :

1) type 1 : $u_0 = 23000$
$u_1 = 23500$
$u_2 = 24000$

2) type 2 : $u_0 = 21000$
$u_1 = 21840$
$u_2 = 22713,6$

3) $u_n = 23000 + 500n$
$v_n = (1,04)^n \times 21000$

4) ~~$u_8 = 27000$~~

type 1 : $\sum_{i=0}^{7} u_i \ (u_0 + u_7) \times 4$ $4 = \left(\frac{7+1}{2}\right)$

$= 198000$ €

type 2 $\sum_{i=0}^{7} v_i = \frac{1-(1,04)^8}{1-1,04} \times 21000 = 193400$€

type 1 > type 2

Exercice 11 :

1) Croissante $U_{n+1} \geq U_n$

$U_n = n$ $\quad U_n = e^n$ ....

2) decroissante $U_{n+1} < U_n$

$U_n = -n$ $\quad U_n = e^{-n}$

3) periodique

$U_n = \cos(n)$ $\quad U_n = (-1)^n$

4) ni croissante, ni decroissante

$U_n = (-1)^n + n$ $\quad U_n = cste$

5) bornée : $\exists M > 0 ; |U_n| \leq M$

$U_n = \sin(n)$ $\quad U_n = \cos(e^n)$

6) alternée :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

7) bornée non convergente

$U_n = \cos(n+1)$

8) majorée non minorée $\quad U_n \leq M$ ~~$U_n \geq M$~~

$U_n = -n$; $n \geqslant 0$

$-n \leq 0$

$m \leq u_n$ $\quad$ $u_n < M$

9) ni majorée ni minorée : $(-1)^n . n = u_n$

$-n \leq (-1)^n . n \leq n$

$u_n = n\cos(n)$

$u_n = \ln(n)$

10) Convergente ni croissante ni décroissante

$u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ $\quad$ $u_n = cste$

11) rationelle convergente vers irrationel :

$$u_n = \frac{E(10^n . \pi)}{10^n} \simeq \frac{10^n . \pi}{10^n} \simeq \pi$$

12) majorée par 1 et convergente vers 1

$u_n = \frac{n+1}{n+2}$ $\quad$ $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

13 majorée par 1 et non convergente vers 1

$u_n = 1 + e^{-n}$

$u_n = \frac{1}{n}$

14) diverge vers $+\infty$

$u_n = \sqrt{n}$

15) Strictement croissante et bornée

$$U_n = \frac{n}{n+1}$$

16 Croissante et minorée

$U_n = n$ $U_n = e^n$

17 décroissante non minorée

$$U_n = -n^2$$

Exo 12

1) Si une suite n'est pas bornée, elle diverge

→ Vraie car

(U_n) cv $\Rightarrow$ (U_n) bornée

alors (U_n) non bornée $\Rightarrow$ (U_n) dv

2) Si une suite dv, elle n'est pas bornée

→ Faux car :

Cex : $U_n = \cos(n)$

$U_n = (-1)^n$

3) S cv + S dv =? S dv

→ Vraie

Exo 13

Soit a, b 2 réels tq $0 < a < b$
et 2 suites réelles (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \times b_n} \end{cases}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

Initialisation : $n = 0$

$\Rightarrow \quad \underset{①}{0 \leq} a \underset{②}{\leq} a_1 \underset{③}{\leq} b_1 \underset{⑤}{\leq} b$

① $0 < a < b$ OK

② $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$

$2a_1 = a + b$ avec $a < b$

donc $a_1 \geq a$ OK

mq $a_1 \leq b_1$

③ $b_1 = \sqrt{a_1 \times b}$ or $b > a$ et $a_1 \geq a$

$b_1^2 = a_1 \times b$

$a_1 \times b = \frac{ba + b^2}{2}$

$b_1^2 > a_1 \times a > a^2$

$b_1 > \sqrt{a_1 \times a} > a$

$b_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a+b) \times b}$

$b_1 = \sqrt{\quad}$

$a_1 = \frac{1}{2}(a+b) = \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2}$

$a_1 \leq \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)(b+b)}$

$a_1 \leq \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)2b}$

$a_1 \leq \sqrt{\frac{1}{2}(a+b)b} = b_1$

④ $b_1 \leq b$

$b_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a+b) \cdot b} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(b+b)b}$

$\leq \sqrt{\frac{1}{2} 2b^2}$

$\leq b$

donc $0 \leq a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ à l'ordre 0

Hérédité : Supp $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \underset{①}{\leq} a_{n+1} \underset{②}{\leq} a_{n+2} \underset{③}{\leq} b_{n+2} \underset{④}{\leq} b_{n+1}$

① on a $0 \leq a_{n+1}$ OK.

② $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$

$a_{n+2} \geq \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n+1})$

$a_{n+2} \geq a_{n+1}$

3) Mq $a_{n+2} \le b_{n+2}$:

$$\cancel{a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1}) = \sqrt{\frac{1}{4}(a_{n+1} + b_{n+1})^2}}$$

$$\cancel{b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2} \times b_{n+1}}}$$

$$\cancel{b_{n+2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1}) \times b_{n+1}}}$$

$$\cancel{b_{n+2} \ge \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\cancel{a_{n+2} \le \sqrt{\frac{1}{4}(b_{n+1} + b_{n+1})^2}}$$

$$\cancel{\le b_{n+2}}$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$$

$$b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2} \times b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1}) \times b_{n+1}}$$

Or $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(a_{n+1} + b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1})}$$

or par HR on a

$$a_{n+2} \le \sqrt{\frac{1}{4}(a_{n+1} + b_{n+1})(b_{n+1} + b_{n+1})}$$

$$a_{n+2} \le \sqrt{\frac{1}{4}(a_{n+1} + b_{n+1})\, 2b_{n+1}}$$

$$a_{n+2} \le \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})\, b_{n+1}}$$

$$a_{n+2} \le b_{n+2}$$

(4)

$b_{n+2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}+b_{n+1})b_{n+1}}$

$b_{n+2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}+b_{n+1})b_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(b_{n+1}+b_{n+1})b_{n+1}}$

$\leq b_{n+1}$

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}$

- $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
- $(a_n) \nearrow$ et $(b_n) \searrow$
- $0 \leq a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0 = b$

$(a_n) \nearrow$ et majorée par b

$\Rightarrow$ ~~lim~~ Thm ~~de~~ convergence monotone

- (a_n) est cste
- $(b_n) \searrow$ et minorée par $a_0 = a$

$\Rightarrow (b_n)$ est cste.

$\begin{cases} a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \\ b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l' \end{cases}$

Or $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$ par passage à la lim :

$a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ la limite $l = \frac{1}{2}(l+l')$

$2l = l + l'$

$l = l'$

3/ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$

$(a_1, b_1, a_2, b_2) \longrightarrow \alpha$ et b

$a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ $\qquad a = a_0 = b\cos(\alpha)$

$b_1 = \sqrt{a_1 \times b_0}$

$b_2 = \sqrt{a_2 \times b_1}$

$a_1 = \frac{1}{2}(b\cos(\alpha) + b)$

$a_1 = \frac{1}{2}((\cos(\alpha))(b+1)$

$a_1 = b\frac{1}{2}(\cos(\alpha))$

$a_1 = b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) b}$

$= \sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$= |b| \, |\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|$ or $b > 0$

$= b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\qquad \frac{\alpha}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + b_1\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)$$

$$a_2 = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$b_2 = \sqrt{b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) \times b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$b_2 = \sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}$$

$$b_2 = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) + b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\left(1 + \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)$$

$$a_3 = b\cos^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$b_3 = \sqrt{a_3 b_2}$$

$$b_3 = \sqrt{\left(b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right) \times \left(b\cos^2\left(\frac{\alpha}{8}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)}$$

$$b_3 = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)$$

4)

$$a_n = b\cos\left(\frac{\alpha}{2^1}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) \times \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$b_n = b\cos\left(\frac{\alpha}{2^1}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

5) $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\cos(u) = \frac{\sin(2u)}{2\sin(u)}$$

mq $$b_n = \frac{b\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

$$b_n = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$b_n = b\frac{\sin(\alpha)}{2\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}} \times \frac{\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{\sin\frac{\alpha}{n}}} \times \dots \times \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}}{2\sin\cancel{\frac{\alpha}{2^{n-1}}}} \times \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

$$b_n = b\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

6) On a :

$$b_n = \frac{b\sin\alpha}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{b\sin\alpha}{\alpha} \times \frac{\alpha}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{b\sin\alpha}{\alpha} \times \frac{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$:

$$\frac{\alpha}{2^n} \longrightarrow 0 \qquad \text{donc} \quad \frac{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b \sin\alpha}{\alpha}$$

Exo 15 Soit (u_n) : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

mq (u_n) est convergente et préciser sa limite :

On a

$$1 \leq k \leq n$$

$$1+n^2 \leq k+n^2 \leq n+n^2$$

$$\frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\left(\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+n^2} \to 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} \to 0 \end{array} \right\} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k+n^2} \to 0 \text{ par gendarmes} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n^2} = \frac{1}{n^2+n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2+n}\, n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} = 0$$

et $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} = 0$$

donc par Th des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

2) mq (nu_n) est convergente et precisons la limite

on a

$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n^2} \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n^2} \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq n u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Exo 16)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{n+n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{2n+2} > 0$$

$$\Rightarrow (u_n) \nearrow$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Th gendarmes

donc (u_n) est majorée et croissante donc elle converge.

Cjolh

1) $u_n = \dfrac{C_{2n}^n}{4^n} = \dfrac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{4^n} = \dfrac{(2n)!}{4^n n!n!}$

$u_{n+1} = \dfrac{C_{2n+2}^{n+1}}{4^{n+1}} = \dfrac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{4^{n+1}} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!4^{n+1}}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!4^{n+1}} \times \dfrac{4^n n!n!}{(2n)!}$

avec $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

et $(n+1)!(n+1)! = (n+1)^2 n!n!$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cancel{n!n!} 4\times\cancel{4^n}} = \dfrac{\cancel{4^n n!n!}}{\cancel{(2n)!}}$

$= \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc u_n est décroissante

$\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right)^2 = \left(\dfrac{u_{n+1}\sqrt{n+1}}{u_n\sqrt{n}}\right)^2 = \dfrac{(2n+1)^2(n+1)}{(2n+2)^2 n}$

$= \dfrac{4n^3+8n^2+5n+1}{4n^3+8n^2+4n}$

$4n^3+8n^2+5n+1 > 4n^3+8n^2+4n$

donc $\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right)^2 > 1$ donc V_n croissante.

2) mq par récurrence $\forall n \geq 1$:

$$V_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

initialisation

$$V_1 = u_1 \sqrt{1} = \frac{C_2^1}{4^1} \times 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{2}$$

OK

hérédité (HR) supposons que $V_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ et

$\boxed{HR}$ mq $V_{n+1} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$

on a $V_{n+1} = u_{n+1} \times \sqrt{n+1}$

$$= \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \times u_n \times \sqrt{n+1} \quad (\text{d'après } 1))$$

or $u_n = \frac{V_n}{\sqrt{n}}$ donc

$$V_{n+1} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \times \frac{V_n}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n+1}$$

d'après l'(HR)

$$V_{n+1} \leq \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \times \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$

$$V_{n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{1}$$

$$V_{n+} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \times \sqrt{n+1}$$

montrons alors que $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2n+2}} \leq \sqrt{\dfrac{1}{2n+3}}$

$$\frac{2n+1}{(2n+2)^2} \leq \frac{(\ \ 1)}{(2n+3)}$$

$$\frac{2n+1}{4n^2+8n+4} \leq \frac{1}{2n+3} \quad (*)$$

etudions le signe de

$$\frac{2n+1}{4n^2+8n+4} - \frac{1}{2n+3} = \frac{(2n+1)(2n+3) - (2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)^2}$$

$$= \frac{4n^2+6n+2n+3-4n^2-8n-4}{(2n+3)(2n+2)^2}$$

$$= -\frac{1}{(2n+3)(2n+2)^2} \leq 0$$

d'où $\left(\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}\right)^2 \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}\right)^2$

d'où $(*)$
ainsi

$$v_{n+} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \ \& \ \sqrt{n+2}$$

3/ On a (V_n) est ↗ d'après 1) :

$$V_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

par la limite : $0 \leq V_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc (V_n) est majorée

. Donc elle est convergente,

Donc par passage à la limite, on obtient :

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} V_n = l \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• D'après 1) (U_n) ↘

Or (U_n) est positive d'après son expression donc

(U_n) minorée $0 \leq U_n$

Th convergente monotone : (U_n) cv

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l'$

or $V_n = U_n \sqrt{n}$

Donc $U_n = \frac{V_n}{\sqrt{n}} = V_n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \longrightarrow 0$

Exo 17

1) Soient $a \in]1, +\infty[$ et (U_n) définie par $U_0 = a$

et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$$

Soit (V_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V_n = V_{n-1}^2$

$$V_{n-1} = \frac{U_{n-1} - \sqrt{a}}{U_{n-1} + \sqrt{a}}$$

$$(V_{n-1})^2 = \frac{(U_{n-1} - \sqrt{a})^2}{(U_{n-1} + \sqrt{a})^2} = \frac{(U_{n-1})^2 - 2(U_{n-1})\sqrt{a} + a}{(U_{n-1})^2 + 2(U_{n-1})\sqrt{a} + a}$$

$$= \frac{(U_{n-1})(U_{n-1} - 2\sqrt{a}) + a}{(U_{n-1})(U_{n-1} + 2\sqrt{a}) + a}$$

$$= \frac{U_{n-1} - 2\sqrt{a} + \frac{a}{U_{n-1}}}{U_{n-1} + 2\sqrt{a} + \frac{a}{U_{n-1}}}$$

$$= \frac{2U_n - 2\sqrt{a}}{2U_n + 2\sqrt{a}}$$

$= V_n$

2) En déduire V_n en fonction de n.

pour $n = 1$

on a $V_1 = V_0^2$

$V_2 = V_1^2 = V_0^4$

$V_3 = V_2^2 = V_0^8$

$\vdots$

$V_n = V_0^{2^n}$ par itération.

3) Limite (V_n) :

On a $V_n = (V_0^2)^{n+1} = \left(\dfrac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

or $U_0 = a$

$0 < V_0 = \dfrac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$.

4) Limite (U_n) :

On a $V_n = \dfrac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$

$V_n U_n + V_n \sqrt{a} = U_n - \sqrt{a}$

$U_n = \sqrt{a} \cdot \dfrac{1 + V_n}{1 - V_n}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n \longrightarrow \sqrt{a}$?

Q18:

Soit (U_n) une suite et $(U_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (U_n) ~~mq~~

Mq toute suite extraite de $U_{\varphi(n)}$ est extraite de (U_n)

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗

et on pose : $x_n = U_{\varphi(n)}$

$x_{\psi(n)}$ est une suite extraite de x_n

$$x_{\psi(n)} = U_{\varphi(\psi(n))}$$
$$= U_{\varphi \circ \psi}$$

et $\varphi \circ \psi \, \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
est ↗

Donc $(x_{\psi(n)})$ est extraite de (U_n).

Exo20 :

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$

mq

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \\ \text{et} \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ on d'après cours

$\boxed{\Leftarrow}$ on a

si $\begin{cases} u_{2n} \to \ell \\ \text{et} \\ u_{2n+1} \to \ell \end{cases}$ mq $u_n \to \ell$

Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_1$

$|u_{2p} - \ell| < \varepsilon$ (car $u_{2n} \to \ell$)

$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_2, |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$

Soit $n \geq \text{Max}(2N_1, 2N_2+1)$

Si n pair : $n = 2p$ et $p \geq N_1$

donc on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Si n impair : $n = 2p+1$ et $p \geq N_2$

donc on a : $|u_n - \ell| < \varepsilon$

$|u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow u_n \xrightarrow[\infty]{} \ell$

Ex 19 :

$x_n = U_{2n}$; $y_n = U_{2n+1}$, $z_n = U_{5n}$

$x_n \longrightarrow l$

$y_n \longrightarrow l'$

$z_n \longrightarrow l''$

- $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗

$n \mapsto 5n$

$x_{\varphi_1(n)} = U_{10n}$

$x_n = U_{2n}$

$x_{\varphi_1(n)} = U_{5n}$

$\Rightarrow$ (U_{10n}) est donc convergente vers l.

- $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗

$n \to 2n$

$z_{\varphi_2(n)} = U_{5\varphi_2(n)} = U_{10n}$

(U_{10n}) CV vers l''

Donc $l = l''$

- $\varphi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗

$n \mapsto 5n+2$

$y_{\varphi_3(n)} = U_{2\varphi_3(n)+1}$

$= U_{2(5n+2)+1}$

$= U_{10n+5}$

$\Rightarrow (U_{10n+5})$ cv vers ℓ'

. $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗
$n \mapsto 2n+1$

$\exists \varphi_1(n) = U_{5(2n+1)}$
$= U_{10n+5}$

(U_{10n+5}) CV vers ℓ''

$$\text{donc } \ell' = \ell'' = \ell$$

<u>Exo21 :</u>

Soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$V_n = U_n + \frac{1}{n\,n!}$

1) Mq (U_n) et (V_n) sont adjacente

. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \to U_n$ croissante

. $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n\,n!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)} - \frac{1}{n\,n!}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)\,n n! + n n! - (n+1)(n+1)!}{n.n!\ (n+1)!\ (n+1)}$$

$$= \frac{n!\left((n+1)n + n - (n+1)^2\right)}{n!.n\ (n+1)\ (n+1)!}$$

$$= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)\ (n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Donc (V_n) décroissant

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(U_n - U_n - \frac{1}{n n!} \right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n n!} = 0$

• ccl (U_n) et (V_n) adjacents donc convergents vers la même limite e

• mq $e \notin \mathbb{Q}$ càd mq e irrationnel

Raisonnons par l'absurde et supposons que $e \in \mathbb{Q}$

Càd : Supposons $e = \frac{p}{q}$ avec (p,q) des entiers naturels $\in (\mathbb{N}^*)^2$

On a (U_n) et (V_n) adjacentes donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1} < e < V_{n+1} < V_n$

Donc $U_q < e < V_q$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q q!}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!}$$

$$\text{———} < \frac{p(q-1)!}{q(q-1)!} < \text{———}$$

$$\frac{A}{q!} < \frac{p \cdot (q-1)!}{q!} < \frac{A}{q!} + \frac{1}{q q!}$$

$$A < p \cdot (q-1)! < A + \frac{1}{q}$$

$q \in \mathbb{N}^*$, $q > 1$

$$\Rightarrow \underbrace{A}_{\in \mathbb{N}} < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{N}} < \underbrace{A+1}_{\in \mathbb{N}}$$

or

Absurde . .

Exo 22.

Soient $(U_n)_{n\geq 2}$ et $(V_n)_{n\geq 2}$ 2 suites définies par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{3n^2}$$

mq (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0$$

$(U_n) \nearrow$

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - U_n - \frac{1}{3n^2}$$

$$= U_{n+1} - U_n + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{3n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{3}{3n^2(n+1)^2} + \frac{n^2}{3n^2(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{3n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{3+n^2-(n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} = \frac{3+n^2-n^2-2n-1}{3n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2-2n}{3n^2(n+1)^2} < 0$$

donc $(V_n) \searrow$ donc (U_n) et (V_n) adjacente.

donc ont la même limite donc

$$U_n < U_{n+1} < \ell < V_{n+1} < V_n$$