Partiel 2010 – Proposition de correction par Tien THACH (Tackounet ☺)

Exercice 1 :

Soit l'équation différentielle dans le domaine de Laplace :

$p^2Y(p) – pY(p) -2Y(p) = 0$ (étant données les conditions initiales nulles)

=> Y(p) = 0 donc y(t) = 0

Exercice 2 :

Soit

$$X(z) = \frac{z^2\,(3.15z - 3)}{4\,(z-1)(z-0.9)(z-\ 0.5)}$$

Divisions polynomiales :

On met le dénominateur sous la forme $D(z) = a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{-i}$

On divise donc le numérateur et le dénominateur par z^3, soit :

$$X(z) = \frac{3.15 - 3\,z^{-1}}{4 -\ 9.6\,z^{-1} +\ 7.4\,z^{-2} - 1.8\,z^{-3}}$$

(Je hais cette partie)

1	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}	1	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}
5.1	**-3**					**4**	**-9.6**	**7.4**	**-1.8**		
	4.56	-5.8275	1.4175			0.7875	**1.14**	**1.279125**	**1.315275**	**1.30327875**	**1.2702165**
		5.1165	-7.0185	2.052							
			5.2611	7.413525	2.302425						
				5.213115	-7.43061						

- ⇨ $X(0) =\ 0.7875$
- ⇨ $X(T) =\ 1.14$
- ⇨ $X(2T) = 1.279125$
- ⇨ $X(3T) =\ 1.315275$
- ⇨ $X(4T) =\ 1.30327875$
- ⇨ $X(5T) = 1.2702165$

(Ne faîtes pas trop attention à tous ces putains de chiffres significatifs)

On utilise le théorème de la valeur finale pour déterminer $X(nT)$.

$$\lim_{n\to\infty} X(nT) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2(3.15z-3)}{4\,(z-1)\,(z-0.9)\,(z-0.5)}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{0.15}{0.2}\right) = 0.75$$

Division par 'z' puis décomposition :

$$\frac{X\,(z)}{z} = \frac{z\,(3.15z-3)}{4\,(z-1)(z-0.9)(\,z-0.5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.9} + \frac{C}{z-0.5}\right)$$

$$avec\ A = 3\,;B = \frac{297}{80}\ \ et\ C = -\frac{57}{16}$$

(Sacrés fractions de la mort)

On reprend notre fonction X(z) en multipliant par z l'équation ci-dessus, on se reporte au tableau des transformées inverses et on remarque en supposant :

$$A(t) = \frac{3z}{z-1}\ \ ;\ \ B(t) = \frac{297z}{80\,(z-\ 0.9)}\ \ et\ \ C(t) = -\frac{57z}{16\,(z-0.5)}$$

$$Z^{-1}[\mathrm{A(z)}] = 3.u(t)\ \ ;\ \ \ Z^{-1}[\mathrm{B(z)}] = \frac{297}{80}0.9^n.u(t)\ et\,;\ \ \ Z^{-1}[\mathrm{C(z)}] = -\frac{57}{16}0.5^n.u(t)$$

Et donc

$$X(nT) = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{297}{80}0.9^n + \frac{57}{16}0.5^n\right)u(nT)$$

(Vérification de la cohérence)

- ⇨ $X(0) = 0.7875$
- ⇨ $X(T) = 1.14$
- ⇨ $X(2T) = 1.279125$
- ⇨ $X(3T) = 1.315275$
- ⇨ $X(4T) = 1.30327875$
- ⇨ $X(5T) = 1.2702165$

C’est perfect (je vais en faire des cauchemars, du premier coup, c’est rare …)

Le calcul de la limite est identique à précédemment.

Exercice 3:

Soit la fonction suivante :

$$f_1(t) = (2\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\ u(t)$$

J’imagine qu’il parlait de la table des sinus et cosinus, car à ce que je connaisse mes leçons de mathématiques, on ne peut donner la transformée en passant par la somme infinie étant donné que les cosinus et sinus divergent (pas envie de linéariser ce truc de merde pour vérifier, surtout à cette heure-ci).

On utilise les formules d’Euler pour faire apparaître les exponentiels complexes et passer ainsi par Laplace (avec nos tables :D)

$$f_1(t) = \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} - \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2\,i}\right) u(t)$$

On en déduit avec les transformées en z :

$$F_1(z) = \frac{z}{z - e^{i\omega t}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega t}} - \frac{1}{2\,i}\left(\frac{z}{z - e^{i\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega T}}\right)$$

(Incomplet, et pas le temps, faut que j’aille au partiel d’ITIL :o)