

Feuille d'exercices n°2

Séries numériques

(du lundi 1^{er} octobre 2012 au vendredi 19 octobre 2012)

Exercice 1

Etudier la nature des séries de terme général

1. $u_n = \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right)$

2. $u_n = (\ln(n))^{-\sqrt{n}}$

3. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

4. $u_n = \sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + n - 1}$

5. $u_n = \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$

6. $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

7. $u_n = \left(\frac{n}{n+a} \right)^{n^2}$ où $a \in \mathbb{R}$

8. $u_n = \frac{2 + \cos(n)}{n^p}$ où $p \in \mathbb{R}$

9. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} a^n$ où $a \in \mathbb{R}_+$

10. $u_n = \frac{n^{n^2}}{2^{n!}}$

11. $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$

12. $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$

13. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

14. $u_n = \frac{n^4 2^{-n^2} + (-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \left(\frac{k}{k+1} \right)^\alpha$$

où $\alpha > 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{u_n}{u_1} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

3. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{1}{2n+1}$$

- a. La règle de d'Alembert permet-elle de conclure sur la nature de $\sum u_n$?

- b. Montrer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{2n}\right)}$$

- c. En déduire que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{5}{4}}$$

- b. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \ln((n-1)!) - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$$

1. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

2. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

3. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.

4. Montrer que

$$e^{u_n} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et en déduire que

$$n! \underset{+\infty}{\sim} e^l n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Exercice 4

On considère la série de terme général

$$u_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^a}$$

où $a \in \mathbb{R}$

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge pour une valeur de a donnée, elle converge pour un réel b tel que $b \geq a$. (Indication : $\forall x \in]0, \pi[, \sin(x) < x$)
2. Montrer que $a \leq 2 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
3. Montrer que si $a = 2 + \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
4. En déduire la condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \right)^\beta$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on a

$$\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

2. Montrer que

$$\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{3n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$$

3. En déduire que

$$\left(\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta} \left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$$

et que

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} \left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$$

4. Montrer que si $\beta \leq \alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.

5. Etude du cas $\beta > \alpha$.

a. Montrer que

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n \quad \text{avec} \quad v_n = (-1)^n \frac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right).$$

b. Montrer que $\sum v_n$ est absolument convergente.

c. Montrer que la série de terme général $w_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$ est convergente.

d. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 6

1. Donner une condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha})$ converge.

2. Etudier la nature de $\sum y_n$ où

$$y_n = \ln \left(n \ln \left(1 + \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right)$$

3. Soient (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et (w_n) définie par $w_n = \ln(1 + v_n) - v_n$.

Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\sum \ln(1 + v_n)$ diverge.

4. Soit (x_n) définie par $x_n = e^{v_n} - 1$. Montrer que $\sum x_n$ diverge et $\sum \ln(1 + x_n)$ converge.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. a. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$?

b. Quelle est la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie pour tout $n \geq 2$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + a_n}$$

a. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{a_n} - \frac{1}{a_n^2} + o\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$$

b. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

c. En déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

e. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq a_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

f. En déduire la limite de $\frac{a_n}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de a_n en $+\infty$.

g. En déduire la nature de la série $\sum \left(-\frac{1}{a_n^2} + o\left(\frac{1}{a_n^2}\right)\right)$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 8

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Montrer que $\sum (u_n - u_{n-1})$ est convergente.

2. En déduire que (u_n) est convergente.