Feuille d'exercices n°1

Révisions

(du lundi 28 septembre 2009 au vendredi 2 octobre 2009)

Exercice 1

Rappeler les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 6 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$
2. $g(x) = \ln(1+x)$
3. $h(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$
4. $i(x) = \sin(x)$
5. $j(x) = \cos(x)$

Exercice 2

Déterminer, au voisinage de 0, les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)e^x$ à l'ordre 4
2. $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3
3. $h(x) = \ln\big(1+\cos(x)\big)$ à l'ordre 4
4. $i(x) = e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3
5. $j(x) = e^{\cos(x)}$ à l'ordre 4
6. $k(x) = \big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-x^2$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-x}{x-\ln(1+x)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(1+\sin(x)\big)-\sin\big(\ln(1+x)\big)}{x^2\sin(x^2)}$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, (u_n) est une suite réelle et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = a$$
2. Montrer que si
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n-u_{n-1}) = a$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{n}\right) = a$$
3. Supposons $u_n > 0$. Montrer que si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$$

Exercice 5

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On note e^f l'application $x \mapsto e^{f(x)}$ et $\ln(f)$ l'application $x \mapsto \ln\big(f(x)\big)$.

1. Montrer que :
$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour que $e^f \underset{a}{\sim} e^g$
3. On suppose f et g stritement positives. Montrer que :
$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$$
4. On suppose f et g strictement positives telles que $f \underset{a}{\sim} g$. On suppose de plus que g admet en a une limite l dans $\big(\mathbb{R}_*^+ - \{1\}\big) \cup \{+\infty\}$. Montrer qu'alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$. On distinguera le cas $l = +\infty$ du cas $l \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$.