Feuille d'exercices n°5

Intégrales impropres

(du lundi 10 décembre 2012 au vendredi 25 janvier 2013)

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sqrt[3]{t^3+1} - \sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\alpha t} t^\beta\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. Montrer par un changement de variable que
$$\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3

Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

1. a. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\displaystyle\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \to +\infty$?

   b. Montrer que I converge.

2. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $F_\varepsilon(x)$ par intégration par partie en fonction de x et ε.

   b. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en fonction de x.

   c. En déduire la valeur de I.

Exercice 4

Soient $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ et $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ où $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

1. Étudier la nature de $\Gamma(\alpha)$ en fonction de α.
2. Former une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+1)$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Étudier la nature de $\beta(x,y)$ en fonction de x et y.
5. Montrer que $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.
6. Montrer que $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\,\beta(x,y)$.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer via une intégration par parties que

$$I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$

3. On pose $J_n = nI_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Calculer J_1.

   b. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

Exercice 6

Considérons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I converge et que $I = J$.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 7

1. Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

   c. Par une démarche similaire, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$?

3. Posons $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ et $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\cos^2(x)}{x}$.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

   b. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x)$.

   c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ sont-elles de même nature ?

   Expliquer pourquoi le critère de comparaison ne s'applique pas.

Exercice 8

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

1. Montrer que I est une intégrale impropre convergente.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$
3. En déduire la valeur de I.
4. Retrouver la valeur de I en utilisant le changement de variable $u = 1/x$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n(1+nx)}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n(1+nx)}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$

   (on pourra utiliser le changement de variable $y = 1 + x$).