Feuille d'exercices n°2

Séries numériques I, II et III

(du lundi 5 octobre 2009 au vendredi 23 octobre 2009)

Exercice 1

Etudier la nature des séries de terme général

1. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$
2. $u_n = \big(\ln(n)\big)^{-\sqrt{n}}$
3. $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1}$
5. $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
6. $u_n = \dfrac{(n!)^\alpha}{n^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
7. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ où $a \in \mathbb{R}$
8. $u_n = \dfrac{2+\cos(n)}{n^p}$ où $p \in \mathbb{R}$
9. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}a^n$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$
10. $u_n = \dfrac{n^{n^2}}{2^{n!}}$
11. $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{\big(\ln(n)\big)^n}$
12. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$
13. $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln(n)}{n}$
14. $u_n = \dfrac{n^4 2^{-n^2} + (-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha$$

où $\alpha > 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\frac{u_n}{u_1} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$
2. En déduire que que $\sum u_n$ converge.
3. On considère la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n} \times \frac{1}{2n+1}$$
   a. La règle de d'Alembert permet-elle de conclure sur la nature de $\sum u_n$?

   b. Montrer que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)}$$
   c. En déduire que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
4. a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{5}{4}}$$
   b. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \ln\big((n-1)!\big) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$$

1. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
2. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

3. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.
4. Montrer que
$$e^{u_n} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$
et en déduire que
$$n! \underset{+\infty}{\sim} e^l n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

Exercice 4

On considère la série de terme général
$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$
où $a \in \mathbb{R}$

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge pour une valeur de a donnée, elle converge pour un réel b tel que $b \geqslant a$. (Indication : $\forall x \in]0, \pi[, \sin(x) < x$)
2. Montrer que $a \leqslant 2 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
3. Montrer que si $a = 2 + \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
4. En déduire la condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général
$$u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta$$
où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on a
$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
2. Montrer que
$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
3. En déduire que
$$\left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
et que
$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

4. Montrer que si $\beta \leqslant \alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.

5. Etude du cas $\beta > \alpha$.

   a. Montrer que

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n \quad \text{avec} \quad v_n = (-1)^n \frac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right).$$

   b. Montrer que $\sum v_n$ est absolument convergente.

   c. Montrer que la série de terme général $w_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$ est convergente.

   d. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 6

1. Donner une condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha})$ converge.
2. Etudier la nature de $\sum y_n$ où

$$y_n = \ln\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

3. Soient (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et (w_n) définie par $w_n = \ln(1 + v_n) - v_n$.

   Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\sum \ln(1 + v_n)$ diverge.
4. Soit (x_n) définie par $x_n = e^{v_n} - 1$. Montrer que $\sum x_n$ diverge et $\sum \ln(1 + x_n)$ converge.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. a. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$?

   b. Quelle est la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ définie pour tout $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + a_n}$$

   a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{a_n} - \frac{1}{a_n^2} + o\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$$

b. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

c. En déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

e. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant a_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1$$

f. En déduire la limite de $\frac{a_n}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de a_n en $+\infty$.

g. En déduire la nature de la série $\sum \left(-\frac{1}{a_n^2} + o\left(\frac{1}{a_n^2}\right)\right)$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 8

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Montrer que $\sum(u_n - u_{n-1})$ est convergente.

2. En déduire que (u_n) est convergente.