Notation complexe des grandeurs électriques

Conventions

- A une différence de potentiel sinusoïdale :

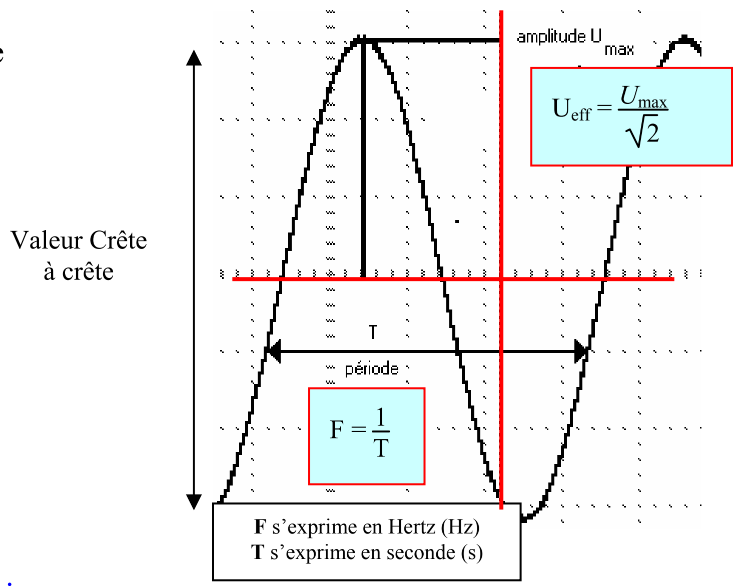
  u(t) = U_{max} × sin(2 π F t + ϕ) est associée le nombre complexe $\underline{U}$

  ou encore

  u(t) = U_{max} × sin(ω t + ϕ) avec **ω = 2 π F**

ω est la pulsation propre du signal ; elle s 'exprime en radian par seconde ($rad.s^{-1}$)

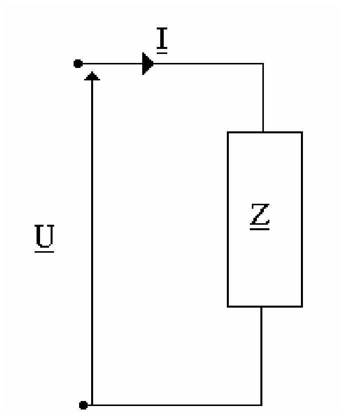
  - $|\underline{U}|$ représente l'amplitude de u(t)
  - Argument de $\underline{U}$ ou Arg $\underline{U}$ représente la phase de u(t) à la date t = 0. Il est noté ϕ.



- A une intensité de courant sinusoïdale :

  i(t) = I_{max} × sin(2 π F t + ϕ) est associée le nombre complexe $\underline{I}$
  - $|\underline{I}|$ représente l'amplitude de i(t)
  - Argument de $\underline{I}$ ou Arg $\underline{I}$ représente la phase de i(t) à la date t = 0.

- L'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle passif est définie par :



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

- Rappels mathématiques sur les nombres complexes :

1) Un nombre complexe **$\underline{Z}$** peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Z} = a + j.b$$

a est la partie réelle du nombre complexe

b est la partie imaginaire du nombre complexe

Pour vous entraîner :

Exercice 1 TD n° 1

RQ : *Cette écriture de Z est appelée l'écriture cartésienne ; il en existe une autre, appelée écriture trigonométrique, notée* $\underline{Z} = |\underline{Z}| \times (\cos\phi + j.\sin\phi) = |\underline{Z}|\, e^{j.\phi}$ *que vous étudierez plus tard. Son intérêt est de simplifier encore les calculs.*

2) module et argument.

a-Module. Le module de $\underline{Z}$ est le nombre Z définit par :

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En électronique
$|\underline{Z}|$ est la valeur maximale du signal sinusoïdal.

b-Argument. L'argument de $\underline{Z}$ est le nombre ϕ définit par :

$$\text{Arg}\,\underline{Z} = \phi \qquad \text{tel que} \qquad \tan\phi = \frac{b}{a}$$

En électronique
Arg$\underline{Z}$ est la phase du signal sinusoïdal.

3) propriétés des opérations entre nombres complexes

a- L'addition.

Soient $\underline{Z_1} = a_1 + j.b_1$ et $\underline{Z_2} = a_2 + j.b_2$

alors

$$\underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$$

Pour vous entraîner :
Exercice 2 ; 3 TD n°1

Pour additionner deux nombres complexes , on:

-additionne les parties réelles

-additionne les parties imaginaires.

b- La multiplication.

- On utilise les propriétés du développement d'un produit par rapport à une somme ou une différence établies dans ℝ. (à éviter en électronique)
- On utilise les propriétés du module et de l'argument suivantes :

$$|\underline{Z_1} \times \underline{Z_2}| = |\underline{Z_1}| \times |\underline{Z_2}|$$
$$\textbf{Arg}\,(\underline{Z_1} \times \underline{Z_2}) = \text{Arg}\,(\underline{Z_1}) + \text{Arg}\,(\underline{Z_2})$$

Pour vous entraîner :
Exercice 4 ; 5 TD n°1

c- La division.

On utilise les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe

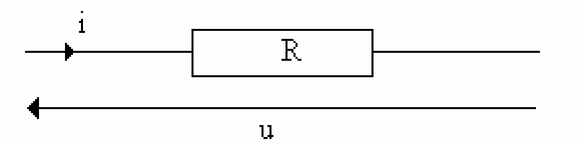
$$\left|\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\right| = \frac{|\underline{Z_1}|}{|\underline{Z_2}|}$$
$$\textbf{Arg}\left(\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\right) = \text{Arg}\,(\underline{Z_1}) - \text{Arg}\,(\underline{Z_2})$$

Pour vous entraîner :
Exercice 6 , 7 TD n°1

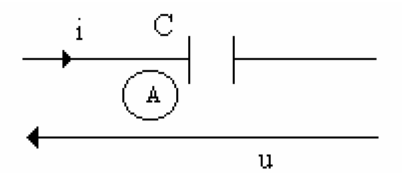
I- Introduction.

Tant que les circuits ne comprennent que des éléments résistifs, les relations entre différences de potentiel et intensités de courant sont linéaires ou affines.

Il n'en est plus de même quand ils comportent des éléments capacitifs ou des éléments inductifs. Rappelons à cet effet, les définitions suivantes (qui ne sont pas à connaître au niveau du B.E.P):

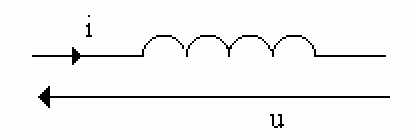
- 

$$\boxed{u = + R \times i}$$

- 

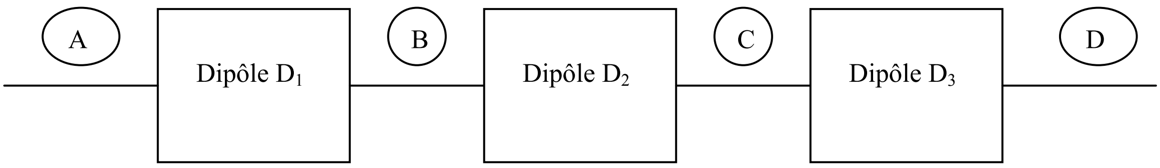
$$\boxed{u = + \frac{1}{C} \int i \, dt}$$

Où : $\begin{cases} q_a = C \times u \\ I = C \dfrac{du}{dt} \end{cases}$

- 

$$\boxed{u = + L \times \frac{di}{dt}}$$

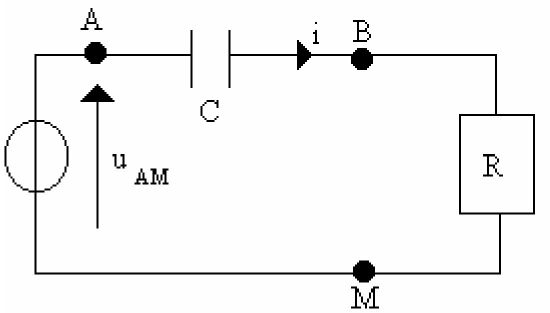
- Pour tout régime de fonctionnement, à chaque valeur de la date :



$$\boxed{u_{AD} = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD}}$$

Toutes ses relations sont toujours vraies en valeurs instantanées quelque soit la nature du régime de fonctionnement considéré.

Considérons à titre d'exemple, le circuit suivant :



- u_{AM} peut toujours s'écrire : $\quad u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$

ou $\quad u_{AM} = \frac{1}{C} \int i \, dt + R.i$

- En régime sinusoïdal, si le repère est tel que : $\quad i(t) = I_{MAX} \times \sin 2 \pi F t$

u_{AM} s 'écrit : $\quad u_{AM} = \frac{1}{2 \pi F C} I_{MAX} \times \sin(2 \pi F t - \frac{\pi}{2}) + R \times I_{MAX} \times \sin 2 \pi F t$

- u_{AM} , somme de 2 fonctions sinusoïdales, de même fréquence, F, est une fonction sinusoïdale de fréquence F.
- u_{AM} est de la forme : $u_{AM} = U_{MAX} \times \sin(2 \pi F t + \phi)$

Par conséquent, il faudrait effectuer la somme des 2 termes : $\frac{1}{2 \pi F C} \times \sin(2 \pi F t - \frac{\pi}{2})$ et $R \times \sin 2 \pi F t$ pour pouvoir déterminer U_{MAX} et ϕ

Afin d'éviter d'avoir à effectuer une telle somme de fonctions sinusoïdales, on fait correspondre à une grandeur sinusoïdale un nombre complexe ; à une somme de grandeurs sinusoïdales est donc substituée une somme de nombres complexes.

II- Définitions

1- Grandeurs sinusoïdales

- A la grandeur sinusoïdale écrite sous la forme générale :

$$u(t) = U_{MAX} \times \sin(2 \pi F t + \phi)$$

est associé le nombre complexe :

$$\underline{U}$$

- L'amplitude de u(t) est représentée par le module de $\underline{U}$: $|\underline{U}|$
- La phase ϕ de u, à la date t égale à o est représentée par l'argument de $\underline{U}$.

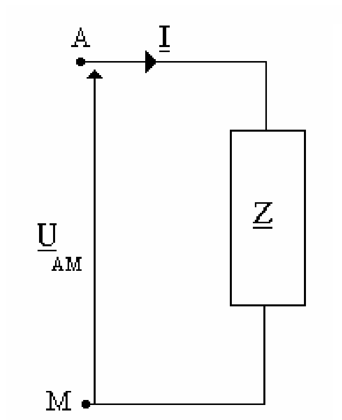
à	$u(t) = U_{MAX} \times \sin(2 \pi F t + \phi)$	est associé :	$\underline{U}$
à	U_{MAX}	correspond :	$|\underline{U}|$
à	ϕ	correspond :	argument de $\underline{U}$

On note :

$$u(t) = U_{MAX} \times \sin(2 \pi F t + \phi) \qquad \underline{U}(|\underline{U}| ; \phi)$$

- A la somme des différences de potentiel sinusoïdales : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BC} + u_{Cm}$
  Correspond la somme des nombres complexes : $\underline{U}_{AM} = \underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CM}$

2- Impédance complexe d'un dipôle passif



- Quelle que soit la nature du dipôle passif (résistif, capacitif, inductif,….), on appelle impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle le quotient de $\underline{U}_{AM}$ par $\underline{I}$, si $\underline{I}$ est le complexe associé à l'intensité sinusoïdale i, du courant circulant de A vers B, dans le dipôle passif.
- $\underline{Z}$ peut s'écrire :
  - Sous forme trigonométrique : $\underline{Z} = |\underline{Z}| (\cos \phi + j \sin \phi)$
  - Sous forme algébrique : $\underline{Z} = a + j.b$
- $\underline{Z}$ valant $\frac{\underline{U}_{AM}}{\underline{I}}$, le module de $\underline{Z}$ est le quotient des modules de $\underline{U}_{AM}$ et de $\underline{I}$

- $\underline{Z}$ valant $\frac{\underline{U}_{AM}}{\underline{I}}$, le module de $\underline{Z}$ est le quotient des modules de $\underline{U}_{AM}$ et de $\underline{I}$:

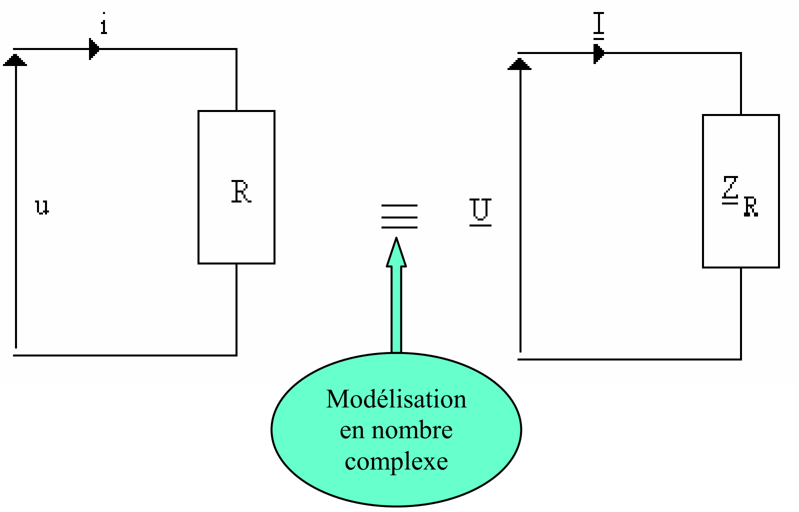
$$\boxed{\left|\underline{Z}\right| = \frac{\left|\underline{U}_{AM}\right|}{\left|\underline{I}\right|}}$$

- L'argument de $\underline{Z}$ est la différence des arguments de $\underline{U}_{AB}$ et de $\underline{I}$:

$$\boxed{\text{Arg } \underline{Z} = \text{Arg } \underline{U}_{AM} - \text{Arg } \underline{I}}$$

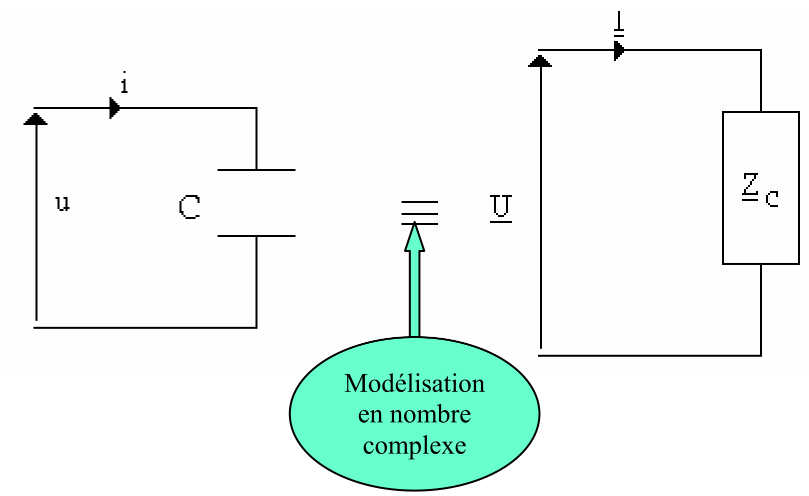
3-Impédance complexe d'un dipôle passif

a- Le dipôle résistif.



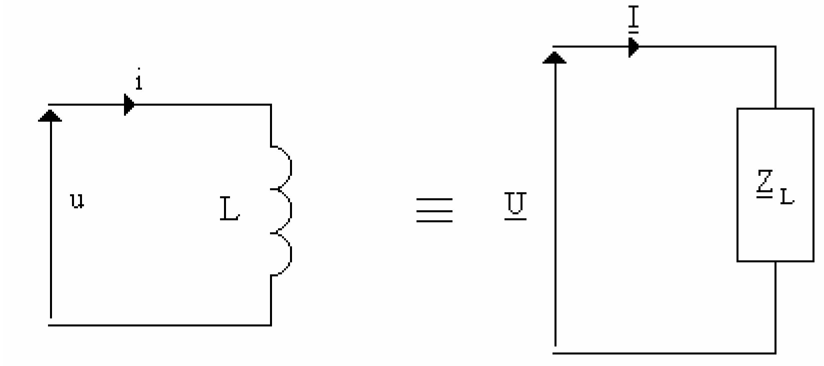
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R \\ \phi_R &= 0° \end{aligned}}$$

b- Le dipôle capacitif.



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{Z}_C &= \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega} \\ \phi_C &= -90° = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

c- Le dipôle inductif.



$\underline{Z}_L = jL\omega$

$\phi_L = 90° = \frac{\pi}{2}$

III- Associations de dipôles

1- Dipôles résistif et capacitif :

Les deux éléments sont associés en série.

(Schéma page suivante)

- L'impédance $\underline{Z}$ de ce dipôle est définie par la relation : …………………………………..
- Le module de $\underline{Z}$, exprimé en ohms, vaut : ……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

Le module de l'impédance d'un tel dipôle varie en fonction de ……………………………

- L'argument de $\underline{Z}$ est tel que la tangente de l'argument de $\underline{Z}$ est égale à : …………………
Soit tan (Arg $\underline{Z}$) =……

3- Dipôles résistif et capacitif :

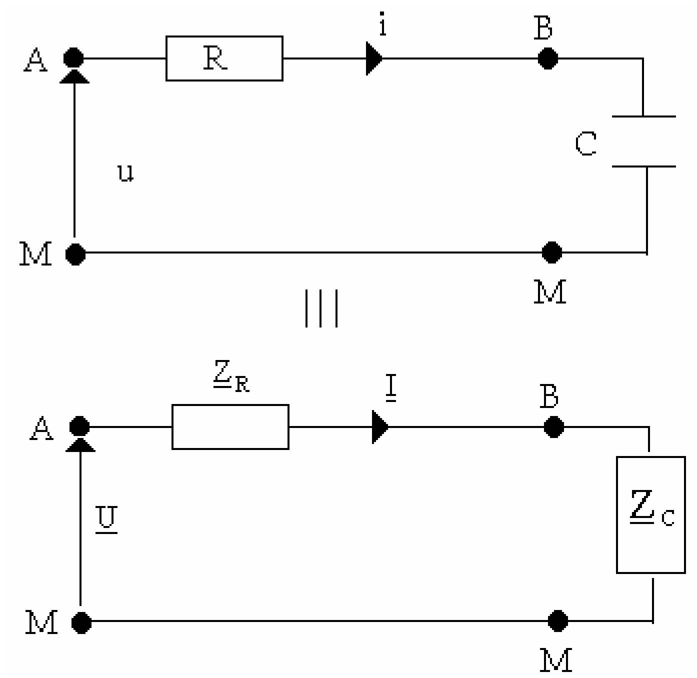
Les deux éléments sont associés en dérivation.

(Schéma page suivante)

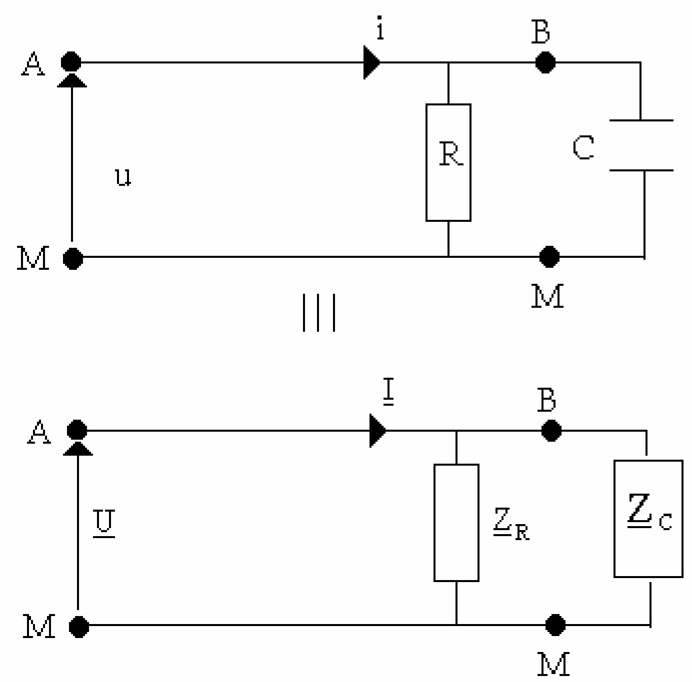
- L'impédance $\underline{Z}$ de ce dipôle est définie par la relation : …………………………………..
…………………………………..
……………………………………
- Le module de $\underline{Z}$, exprimé en ohms, vaut : ……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

Le module de l'impédance d'un tel dipôle varie en fonction de ……………………………

- L'argument de $\underline{Z}$ est tel que la tangente de l'argument de $\underline{Z}$ est égale à : …………………
Soit tan (Arg $\underline{Z}$) =……

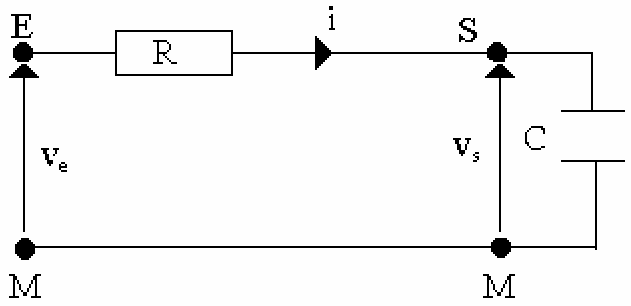


Association série



Association en dérivation

4- Exercice d'applications



Nous nous proposons de démontrer que :
-L'amplitude et la phase ϕ de v_s pout t = 0 dépendent de la fréquence.

- Nous **élaborerons** ensuite l'expression de la relation entre les dates t et v_s pour les valeurs suivantes de la fréquence ; F_1 = 3200Hz ; F_2 = 320 Hz ; F_3 = 32Hz
  Et **tracerons**, dans un même repère, les représentations graphiques des relations qui, à la date t, associent v_e et v_s.

- Le repère est tel que v_e est égal à $10 \times \sin 2 \pi F t$ (en volts) :
  - L'amplitude de v_e est de 10 volts ; elle est indépendante de la fréquence ;
  - La fréquence, F de v_e varie ; F prend, entre autres, les valeurs F_1 , F_2 et F_3.
  - R vaut 5 kilo ohms.
  - C vaut 0,1 microfarad

- A l'amplitude de v_s est associée le module de $\underline{V}_s$.
- A la phase de v_s, à la date t égale à 0, est associée l'argument de $\underline{V}_s$.
- Avant de déterminer $|\underline{V}_s|$ et argument de $\underline{V}_s$, il est nécessaire d'exprimer $\underline{V}_s$ en fonction de $\underline{V}_e$ dont les caractéristiques sont données.