MECANIQUE

Chapitre IV bis

Dynamique des solides

Plan

A. Zellagui

I. Introduction

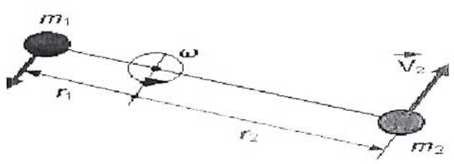
Dans le cas de la dynamique du solide, trois cas de mouvement sont envisageables

- mouvement de translation
- mouvement de rotation
- combinaison des deux mouvements précédents

Le traitement du mouvement de translation pour les solides est similaire à celui d'un point matériel. Nous n'allons donc traiter dans ce chapitre uniquement des mouvements de rotation. On restreindra l'étude à celle du solide ayant une symétrie sphérique ou cylindrique

II. Mise en évidence du moment d'inertie

Considérant deux masses ponctuelles m_1 et m_2 ayant un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante ω, autour d'un axe (Δ) (perpendiculaire au plan de la feuille). Les 2 masses ont respectivement les vitesses linéaires $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



Pour obtenir les propriétés du moment d'inertie du système illustré ci-haut, on se propose d'exprimer son énergie cinétique.

$Ec_{ROT} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{W}$

$Ec = Ec_1 + Ec_2$

$Ec = \frac{1}{2} L_1 W + \frac{1}{2} L_2 \cdot W \quad (L = m r^2 w)$

$Ec = \frac{1}{2} \left[(m_1 r_1^2 w) \cdot w + (m_2 r_2^2 w) w \right]$

$Ec = \frac{1}{2} w^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$

$\boxed{w = \sqrt{\frac{2Ec}{I_\Delta}}}$

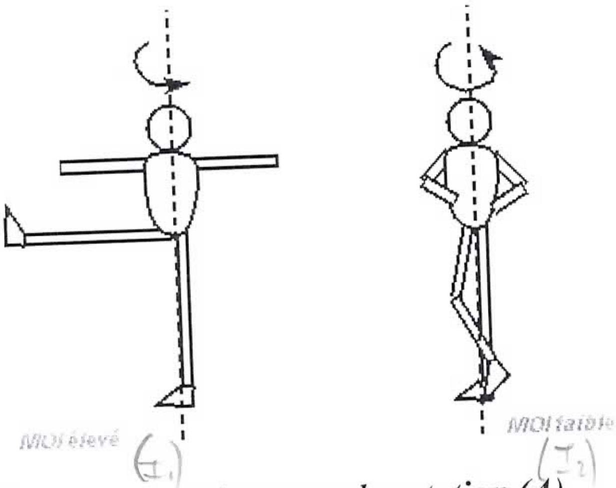
$w = \sqrt{\frac{2Ec}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}$

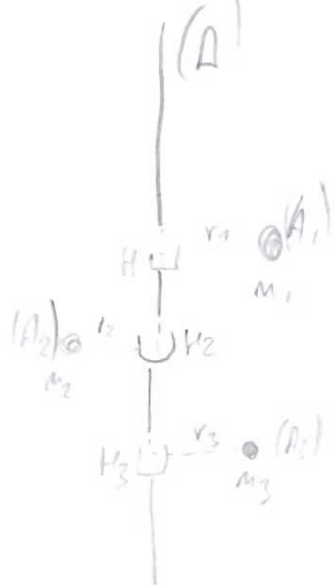
I_Δ = Moment d'inertie du Système (m_1, m_2) par rapport à (Δ)

Cette expression met en évidence l'importance qu'a la distribution de la masse autour de l'axe de rotation. Ainsi, plus la masse est proche de l'axe de rotation, plus l'inertie de rotation (le moment d'inertie) sera petite (et vice-versa bien sûr).

× Si $I_\Delta \nearrow$ $w \searrow$

× Si $I_\Delta \searrow$ $w \nearrow$





1- *Moment d'inertie par rapport à un axe de rotation (Δ)*

- **Si la distribution est discrète**

$$I_\Delta = \sum_i m_i (H_i A_i)^2 = \sum_i m_i (r_i)^2$$

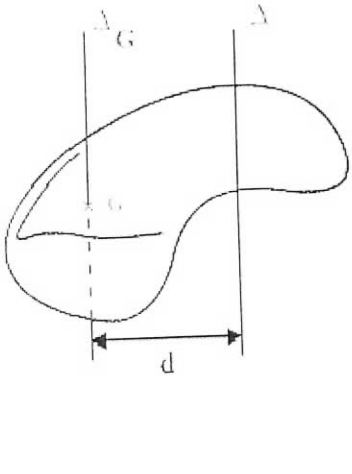
H_iA_i est la projection orthogonale entre la masse m_i et l'axe de rotation : distance minimale entre la masse m_i et l'axe de rotation.

Théorème de Huygens

Le moment d'inertie par rapport à un autre axe (D) qui ne passe pas par le centre de masse est

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2}$$

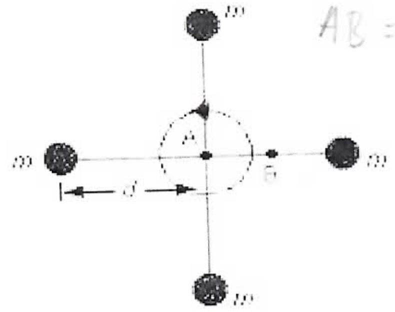
Masse totale du système



Où d est la distance entre les axes (Δ_G) et (Δ)

Application

Quatre masses sont placées aux quatre coins d'un carré et reliées entre elles par deux tiges de masses négligeables.



$AB = \frac{d}{2}$

$I_{\Delta G} = I_A$ car $A = G$ = Centre de masse des 4 objet de masse m

$= \sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{4} m d^2 = 4md^2$

$I_\Delta = I_B$? (B n'est pas le centre de masse)

$I_\Delta = I_{\Delta G} + M(AB)^2$ (on applique la th. de Huygens)

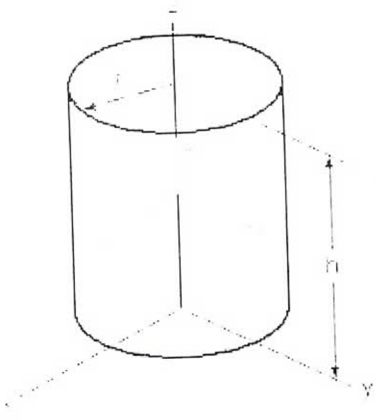
$I_B = 4md^2 + (4m)\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 4md^2 + md^2 = 5md^2$

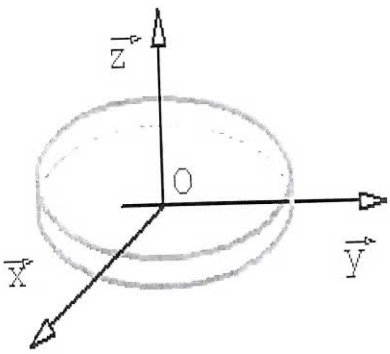
- **Si la distribution de masse est continue**

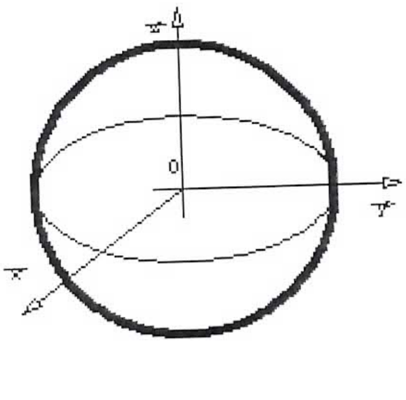
$I_B > I_A$

Exemple: un cylindre, un disque, une sphère, un cône …de volume τ

$\Rightarrow W_B < W_A$

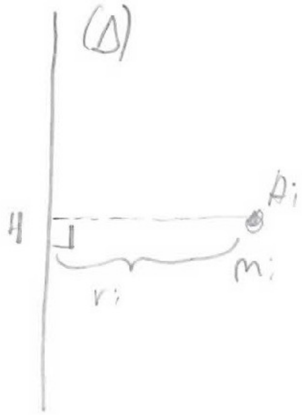






$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

$$r_i = A_i H_i$$



Distribution de masse discrète

* $m_i (m_1, m_2, m_3 \dots m_N)$
* $I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$

$(r_i = H_i A_i)$

Distribution continue de masse

$$dm = \begin{cases} dm = \lambda dl & (\lambda : \text{masse linéaire en kg/m}) \\ dm = \rho_S . dS & (\rho_S : \text{masse surfacique Kg/m}^2 \text{ plans/sphère creuse cylindre creux}) \\ dm = \rho . d\tau & (\rho : \text{masse volumique en kg/m}^3 \text{ cylindre/ sphère pleine}) \end{cases}$$

$$* \; I_\Delta = \begin{cases} \int_l (dm) d^2 = \int_l \lambda . d^2 . dl \\ \iint_S (dm) d^2 = \iint_S \rho_S . d^2 . dS \\ \iiint_\tau (dm) d^2 = \iiint_\tau \rho . d^2 . d\tau \end{cases}$$

(d = distance minimale entre "dm" et l'axe de rotation Δ)

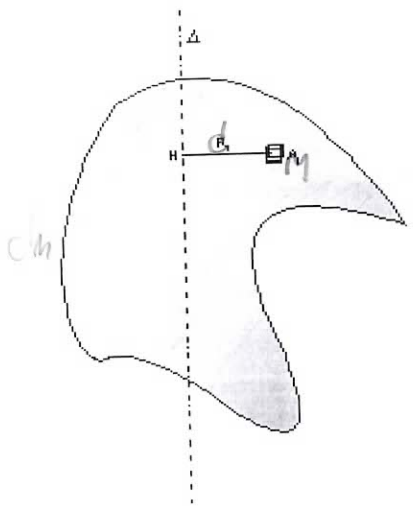
Le moment d'inertie pour ces systèmes s'écrit :

$$\boxed{I_\Delta = \iiint dm.(HM)^2 = \iiint \rho.(HM)^2 d\tau = \iiint \rho.d^2 d\tau} \quad \begin{cases} m = \rho.\tau \\ d = HM \end{cases}$$

ρ étant la masse volumique du système en kg/m^3, ce qui donne : $dm = \rho.d\tau$

HM = distance entre l'élément de masse (dm) (pris quelconque dans le système) et l'axe (Δ)

= Projection orthogonale d'un point M quelconque du solide sur l'axe (Δ).

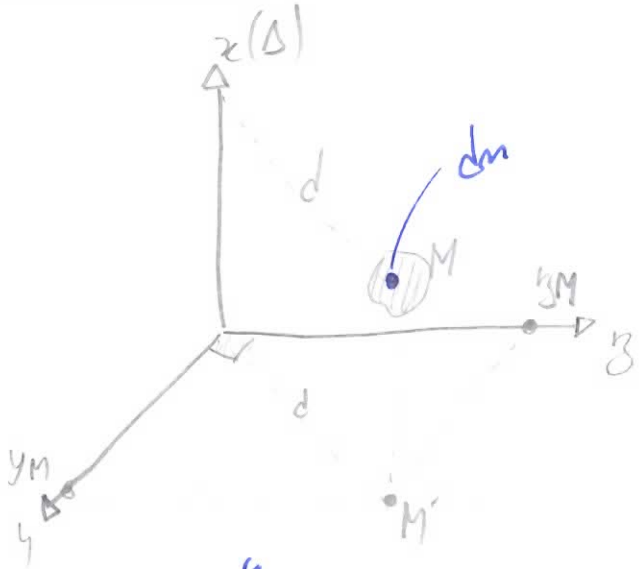


2- Moment d'inertie par rapport aux axes du repère cartésien

$$I_{OX} = \iiint \rho.(y^2 + z^2) d\tau$$

$$I_{OY} = \iiint \rho.(x^2 + z^2) d\tau$$

$$I_{OZ} = \iiint \rho.(x^2 + y^2) d\tau$$



pythagor $d^2 = y^2 + z^2$

$$I_{Ox} = \iiint_\tau \underbrace{\rho \,\underbrace{(y^2+z^2)}_{d^2}\, d\tau}_{dm}$$

3- ***Moment d'inertie par rapport au centre O***

$$I_O = \iiint \rho . r^2 d\tau$$

Où : $r^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$I_O = \iiint \rho . \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{d^2} d\tau$$

$$2I_O = 2\iiint \rho .(x^2 + y^2 + z^2) d\tau = I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}$$

4- Moment d'inertie pour une symétrie sphérique :

$I_{OX} = I_{OY} = I_{OZ} = I_\Delta$

Ce qui donne :

$2I_O = 3I_\Delta$;

Valable uniquement pour des symétries sphériques

$$\boxed{I_\Delta = \frac{2}{3} I_O}$$

On calcule I_O moment par rapport au centre et on en déduit I_Δ

III. Grandeurs dynamiques en fonction du moment d'inertie

a- Moment cinétique

(PFD de rotation)

$$\sum M_{/\Delta}(\vec{F_{ext}}) = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I_\Delta \dot{\theta}) = I_\Delta \times \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

$$\begin{cases} I_\Delta = \iiint \rho . HA^2 d\tau \\ \vec{L} = \iiint \vec{OM} \wedge \rho . \vec{v} . d\tau \end{cases}$$

On montre alors que :

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta . \dot{\theta}}$$

Où $\dot{\theta} = \omega$ vitesse angulaire

$$\sum M_{/\Delta}(\vec{F_{ext}}) = I_\Delta \ddot{\theta}$$

b- **Théorème du moment cinétique.**

Pour une rotation autour d'un axe (Δ).

$$\boxed{\sum \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{ext}) = I_{\Delta}.\ddot{\theta}}$$

c- **Energie cinétique de rotation**.

Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ).

$E_{c_{rot}} = \frac{1}{2} \vec{L}\cdot\vec{w}$

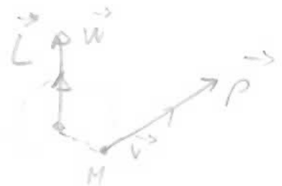
On a vu que l'énergie cinétique de rotation s'écrit comme :

$$(E_c)_{rotation} = \frac{1}{2}\vec{L}.\vec{\omega}$$

$= \frac{1}{2} L w \cos(0°)$ Car $\vec{L}$ et $\vec{w}$ sont colin. et dm sens.

Où L est le moment cinétique et ω la vitesse angulaire.

$\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{P}$



Or $L = I_{\Delta}.\dot{\theta}$

Ce qui donne :

$\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{OM}$

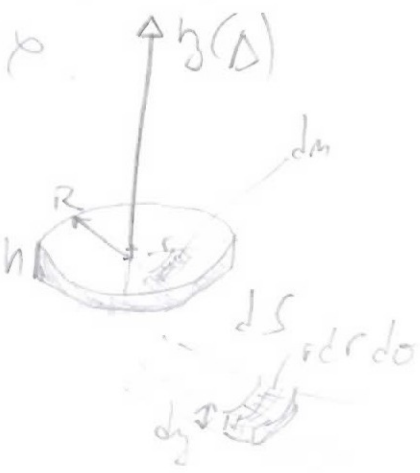
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_{\Delta}.\dot{\theta}^2}$$

IV. Conclusion

Grandeur	Translation	Rotation autour d'un axe (Δ)
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}I_{\Delta}.\dot{\theta}^2$
Principe fondamental de la dynamique	$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$	$\sum \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{ext}) = I_{\Delta}.\ddot{\theta}$
Torseur cinétique	$\vec{p} = m.\vec{v}$	$L_{\Delta} = I_{\Delta}.\dot{\theta}$

Application

1) Calcul du moment d'inertie I_{Oz} d'un disque d'axe Oz, de rayon R, de masse M, de hauteur h, et de masse volumique cst ρ.



par déf : $I_{Oz} = \iiint_{\tau} dm \cdot d^2$ (d = dist entre "dm" et Oz)

$$I_{Oz} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{h} \rho \cdot r^2 \cdot \underbrace{r\,dr\,d\theta\,dz}_{d\tau_{cyl}}$$

$$I = \rho \cdot \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{M}{\tau_{disque}} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot h$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 \cdot h} \frac{R^4}{4} 2\pi h$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$

$$\tau = \iiint d\tau$$

$$= \iiint r\,dr\,d\theta\,dz = \pi R^2 h$$