Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/ 20.

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer $\lim\limits_{x \longmapsto 0} \dfrac{(\cos(x))^x - 1}{x^3}$

2. Déterminer $\lim\limits_{x \longmapsto 0} \dfrac{e^{x^2} - \ln(e + x^2)}{x \ln(1+x)}$

3. Déterminer $\lim\limits_{x \longmapsto 0} \dfrac{\sin(x^2) - x\sin(x)}{1 - \cos(x^2)}$

[suite du cadre page suivante]

Exercice 2 (4 points)

1. Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$

2. Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum \frac{2^n}{n(3^n+n)}$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(p!)^n}{n^n}$

4. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, on a $\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

[suite du cadre page suivante]

2. Montrer que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \dfrac{2}{n}\left(1 + \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

3. En déduire que $u_n = (-1)^n \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} \left(1 + \dfrac{\beta}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

4. Montrer que si $\beta \leqslant \alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.

5. Etude du cas $\beta > \alpha$.

   a. Vérifier que $u_n = (-1)^n \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n$ avec $v_n = (-1)^n \dfrac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right)$.

b. Montrer que $\sum v_n$ converge.

c. Montrer que la série de terme général $w_n = (-1)^n \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$ est convergente.

d. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 (6 points)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

   Montrer que $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

2. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a. Soit $(v_n) = \left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ où $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

N.B. : on pourra considérer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$ et utiliser la suite (v_n) introduite dans la question précédente.

c. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

N.B. : on pourra considérer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 1$ et utiliser la suite (v_n) introduite dans la question a.

3. Etudier la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$

4. Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ de la nature $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{n \times n!}{(a+1) \times \cdots \times (a+n)}$

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (3 points)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$. Discuter, suivant les valeurs de α et β, la nature de $\sum \frac{n^\beta}{\alpha^n}$