Feuille d'exercices n°6
Espaces préhilbertiens

(du lundi 28 janvier 2013 au vendredi 15 février 2013)

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$. On considère l'application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E^2$ par

$$\phi(P, Q) = -\int_0^1 \big[P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x)\big]\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et préciser sa dimension.
2. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $||.||$ la norme associée à $<,>$.

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in E^2\ :\ 1 + ||x + y||^2 \leqslant 2\big(1 + ||x||^2\big)\big(1 + ||y||^2\big)$$
2. Montrer que
$$\forall (x, y) \in E^2\ :\ \left|\left|\frac{1}{||x||^2}x - \frac{1}{||y||^2}y\right|\right| = \frac{1}{||x||\ ||y||}||x - y||$$
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour $(x, y) \in E^2$, on pose
$$\phi(x, y) =< u(x), u(y) >$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que ϕ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 3

On considère $E = C\big([0, 1]\big)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$: $\phi_x\ :\ E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_x(f, g) = \int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, ϕ_x est bilinéaire symétrique positive. Montrer que ϕ_1 est un produit scalaire sur E.
2. Soit $f \in E$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.
   a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f^2(x) \leqslant x \displaystyle\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t$
   b. En déduire que $2\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t$

Exercice 4

Considérons l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = tr(A\ {}^tB)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Exercice 5

On considère un espace vectoriel E de dimension finie et un produit scalaire sur E noté $< .,. >$. Dans la suite, f désigne un endomorphisme de E. On dit que f est une isométrie si $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

1. Soient x et y deux vecteurs de E. Montrer que
$$< x, y >= \frac{1}{2}\big(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\big).$$
2. Montrer que si f est une isométrie alors f est bijectif.
3. Montrer que
$$f \text{ est une isométrie} \iff \forall(x, y) \in E^2, < f(x), f(y) >=< x, y > .$$
4. Soit f une isométrie telle que $f^2 = -id$. Montrer que pour tout x dans E, $f(x)$ est orthogonal à x.
5. Soit f une isométrie telle que pour tout x dans E, $f(x)$ est orthogonal à x.
   a. Développer $< f(x) + x, f^2(x) + f(x) >$ et en déduire que $< x, f^2(x) >= -||x||^2$.
   b. En développant $\big|\big|f^2(x) + x\big|\big|^2$, montrer que $f^2 = -id$.
6. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -id$ et tel que pour tout x dans E, $f(x)$ est orthogonal à x.
   Montrer que f est une isométrie.

Exercice 6

Soient $(E, <, >)$ un espace euclidien et $f : E \to E$ une application.

1. Supposons que f vérifie $\forall(x, y) \in E^2 : < f(x), y >= - < x, f(y) >$. Montrer que
$$\forall(x, y, z) \in E^3, \forall\lambda \in \mathbb{R} : < f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y)), z >= 0$$
2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
$$(i)\ \ \forall(x, y) \in E^2 : < f(x), y >= - < x, f(y) >$$
$$(ii)\ \ f \in \mathscr{L}(E) \text{ et } \forall x \in E\ \ < f(x), x >= 0$$
   On dit que f est antisymétrique si f vérifie (i) ou (ii)

3. Supposons $f \in \mathscr{L}(E)$ antisymétrique.
   a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$
   b. Notons $s = f \circ f$.
   Montrer que s est symétrique (c'est à dire $\forall (x,y) \in E^2 \ : \ < s(x), y > = < x, s(y) >$) et que $\mathrm{Sp}(s) \subset \mathbb{R}^-$ où $\mathrm{Sp}(s)$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de s.

Exercice 7

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et p la projection d'image F de noyau G. Montrer que

$$G = F^\perp \iff \forall (x,y) \in E^2 \ : < p(x), y > = < x, p(y) >$$

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Soient $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $P = X^2$.

1. A partir de la base canonique de E, construire par la méthode de Gram-Schmidt une base orthogonale de E.
2. Calculer le projeté orthogonal P_0 de P sur F.
3. En déduire $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x$

Exercice 9

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit l'application $< \, , \, > : \ E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$< P, Q > = \int_{0}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $< \, , \, >$ est un produit scalaire sur E.
2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. Déterminer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. A partir de la base canonique de E, construire, par la méthode de Gram-Schmidt, une base orthogonale de E.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
5. Déterminer $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} \mathrm{d}x$