# Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisées

**NOM :**
**Prénom :**

## Exercice 1 (4 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

2. Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de D'Alembert, la nature de $\sum \dfrac{(n-1)!}{n^{a+n}}$

[suite du cadre page suivante]

3. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$

## Exercice 2 (5 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A$ et $B$ sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ?

*(Vous devez justifier rigoureusement votre réponse en déterminant* ***OBLIGATOIREMENT*** *avec précision les sous-espaces propres).*

Si oui, exhiber une base de vecteurs propres i.e. déterminer $D$ et $P$.

[suite du cadre page suivante]

[suite du cadre page suivante]

## Exercice 3 (4,5 points)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de $A$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de $\alpha$.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

[suite du cadre page suivante]

## Exercice 4 (4 points)

*L'exercice suivant est à résoudre exclusivement de la manière indiquée.*

On souhaite résoudre le système d'équations différentielles suivant : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{array}\right.$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X'(t) = AX(t)$.

2. Diagonaliser $A$ en explicitant $D$ et $P$.

[suite du cadre page suivante]

3. En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de $t$.

[suite du cadre page suivante]

## Exercice 5 (3 points)

Soit $S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X]) & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ f & \longmapsto & f(1) + f(X) \end{array} \right.$

Déterminer la matrice de $S$ relativement aux bases canoniques de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$ et $\mathbb{R}_1[X]$.