Chapitre 5 **ELECTROSTATIQUE**

Force, champp, potentiel et énergie électrostatiques

Plan

I. Objectifs

II. Charge et phénomènes électrostatiques

III. Lois fondamentales d'électrostatique

1. Force électrostatique
2. Champ électrostatique
3. Relation entre force et champ électrostatique
4. Potentiel électrostatique
5. Relation entre champ et potentiel, notion de Gradient

IV. Distributions continues de charge

V. Energie potentielle électrostatique

A. Zellagui

I – Objectifs

- Etude des interactions électrostatiques entre corps chargés.
- Etablir les lois fondamentales d'électrostatiques :
  - Force électrique $\vec{F}_e$ / potentiel électrique V
  - Champ électrique $\vec{E}$ / Energie potentielle électrique : E_{pe}

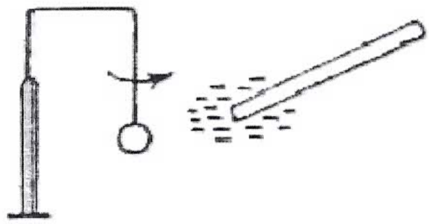
- Domaines d'application de l'électrostatique :
  - plasma, arc électrique, éclair (foudre),...
  - Biophysique (étude des molécules).
  - Physique nucléaire (accélérateur des particules chargées).

II - Charge et phénomènes électrostatiques : constituants de la matière

Atome :
- Electrons de charge : $q_{e^-} = -e = -1{,}6.10^{-19}$ C
- Noyau : formé de
  - Neutrons : pas de charge
  - Protons de charge $+e = 1{,}6.10^{-19}$

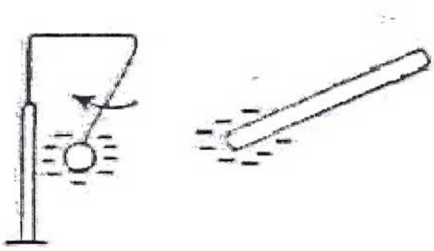
L'atome est neutre lorsqu'il a autant de protons que d'électrons.
Le corps devient électrisé (+) ou (-) s'il cède ou récupère des électrons.

Phénomènes électrostatiques : *électrisation par contact*

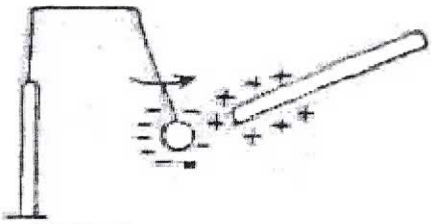


Lorsque nous frottons un bâton d'ébonite, celui-ci se charge en électricité négative puisqu'il gagne des électrons. Il est capable d'attirer une balle de sureau.

Un corps ayant un excès en électrons va essayer de se débarrasser de ces électrons en trop.



Lors du contact, une partie des électrons qui étaient de trop sur le bâton passent sur la balle qui se charge négativement.
A ce stade, on observe maintenant une répulsion entre les deux corps. Cette répulsion est d'autant plus importante que la distance entre les deux objets est petite.



Tout en ayant le boule chargée négativement, approchons un bâton de verre qui lui sera chargé positivement. Contrairement au cas précédent, la balle est attirée par ce corps positif.

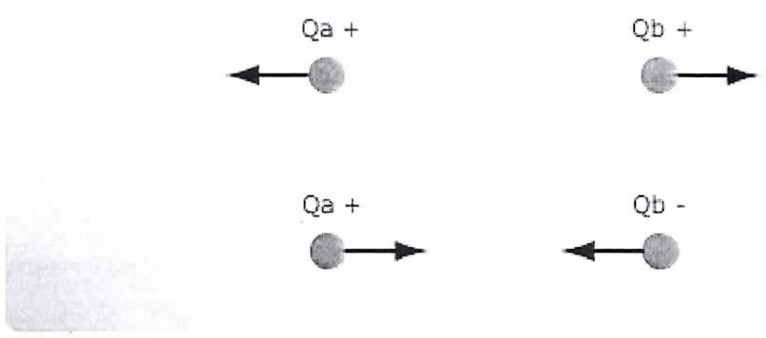
III – Lois fondamentales de l'électrostatique

1. *Force électrostatique* : $\vec{F}_e$

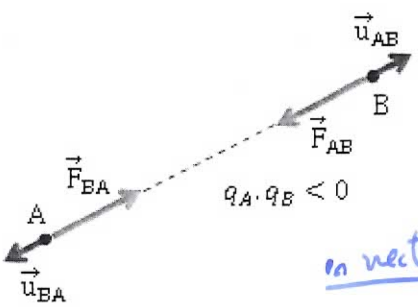
La force électrostatique $\vec{F}_e$ s'exerce entre deux corps électrisés q1 et q2 : deux charges ponctuelles ou deux corps de volume important, s**on expression est donnée par la loi de Coulomb**.

$$\boxed{F_e = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}}$$

k = 9.10^9 SI   constante de Coulomb et r est la distance qui sépare les 2 charges.



***Deux charges de signe opposé* (Attraction)**



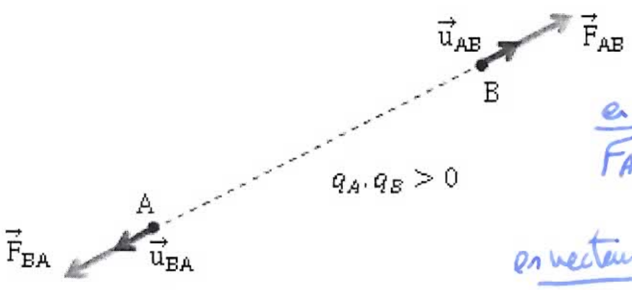
$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

en intensité : (norme ou module)

$F_{AB} = F_{BA} = k\frac{|q_A \cdot q_B|}{r_{AB}^2}$ (>0)

en vecteur : $\underbrace{\vec{F}_{AB} = k\frac{\overset{<0}{q_A q_B}}{r_{AB}^2}\vec{u}_{AB}}_{\text{de sens opposé}}$

***Deux charges de même signe* (Répulsion)**



$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

en intensité :

$F_{AB} = F_{BA} = k\frac{\overset{>0}{q_A q_B}}{r_{AB}^2}$ (>0)

en vecteur : $\underbrace{\vec{F}_{BA} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\vec{u}_{BA}}_{\text{de même sens}}$

Analogie avec la gravitation

$\vec{F}_G$	$\vec{F}_e$
Attractive	Attractive ou répulsive
Indépendante des charges	Indépendante des masses
Inversement proportionnelles au carré de la distance	
- Négligeable à l'échelle atomique - Prépondérante à l'échelle macroscopique ou astronomique	-Prépondérante à l'échelle microscopique (atomique $\approx 10^{-10}$ m)
$F_G = G\dfrac{m_1.m_2}{r^2}$ **G = 6,67.10^{-11} SI constante gravitationnelle**	$F_e = k\dfrac{\lvert q_1\rvert . \lvert q_2\rvert}{r^2}$ **k = 9.10^{9} SI constante de Coulomb**

2. *Champ électrostatique* : $\vec{E}$

On peut retrouver l'expression du champ électrique par **analogie avec la gravitation** :

a- *Champ électrique créé par une charge ponctuelle*

Gravitation

$$F_G = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Si $m_1 = M_T$ (masse de la Terre)

Si $m_2 = m$ (masse quelconque)

$$F_G = \frac{G M_T m}{r^2} = mg = \text{Poids}$$

$$g(M) = \frac{G.M_T}{r^2}$$

(Champ de pesanteur produit par la terre au point d'observation M)

Électrostatique

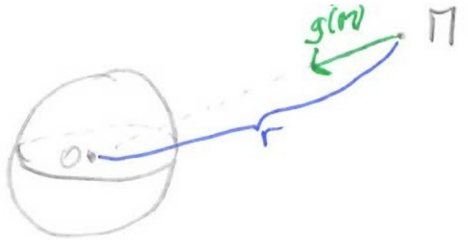
$$F_e = k\frac{|q_1|.|q_2|}{r^2}$$

Si $q_1 = q$

$q_2 = q_2$ (q_2 au point M)

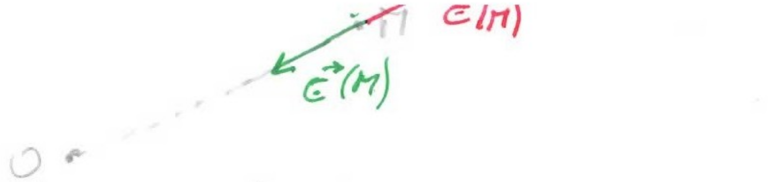
$$F_e = \frac{k|q|}{r^2} \times q_2 = q_2 . E(M)$$

$E(M)$: champ électrique produit par la charge q au point d'observation M.



$\vec{g}$: attractif

$$\left(g = \frac{G M_T}{r^2}\right)$$



(q<0 ou q>0)

Une particule de charge q au point O

$\vec{E}$ convergent (si q<0) (orienté de M vers la charge élec)
$\vec{E}$ divergent (si q>0) (orienté de M vers l'∞)

$$E = \frac{k\,|q|}{(OM)^2}$$

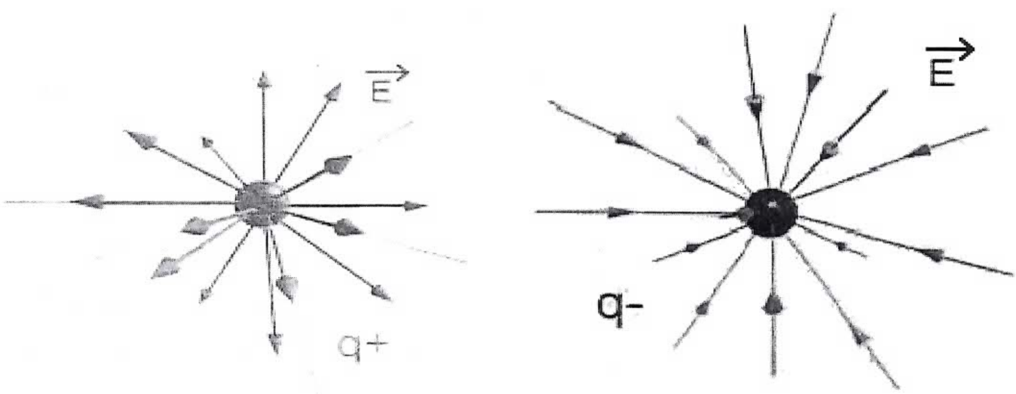
<u>Caractéristiques du champ</u> $\vec{E}$: (produit au point M par une charge q placée au point O)

- Direction : La droite (OM).
- Sens : divergent si q est positive et convergent si q est négative.
- Intensité : $E(M) = k.\dfrac{|q|}{(OM)^2}$
- E(M) n'est pas défini au point O (r = 0) et tend vers zéro à l'infini
- Unité de E(M) : $V.m^{-1}$

b- <u>Lignes de champ</u> :

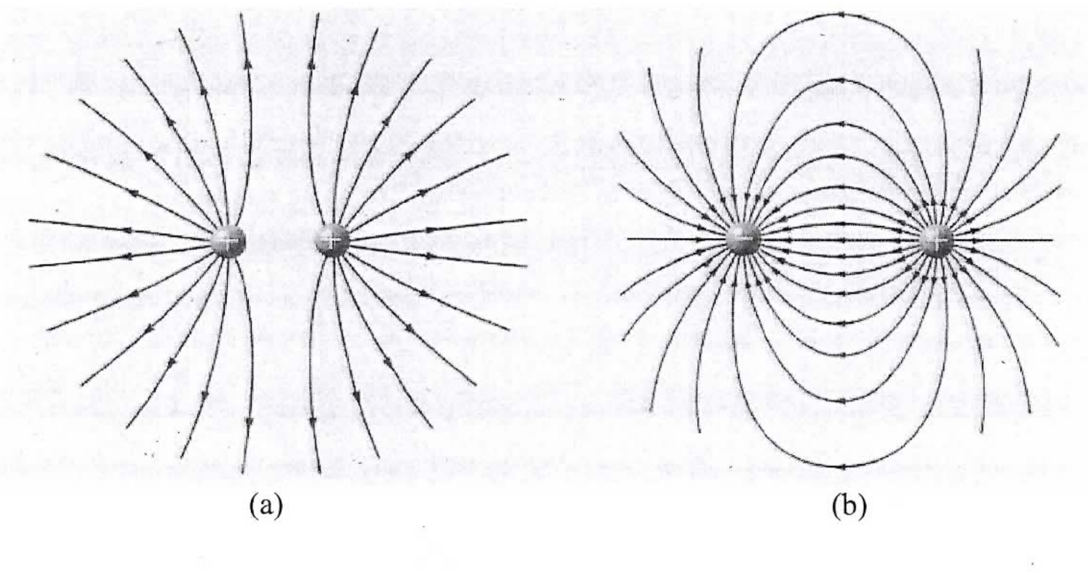
C'est le lieu géométrique où le vecteur champ électrique est **tangent en tout point.**

<u>Exemple 1</u> : Ligne de champ d'une charge ponctuelle



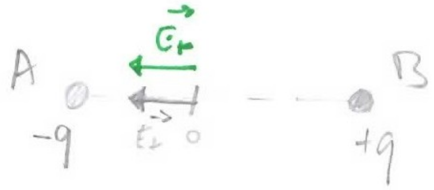
<u>Exemple 2</u> : Lignes de champ d'un doublet électrique

a) 2 charges positives
b) Dipôle électrique

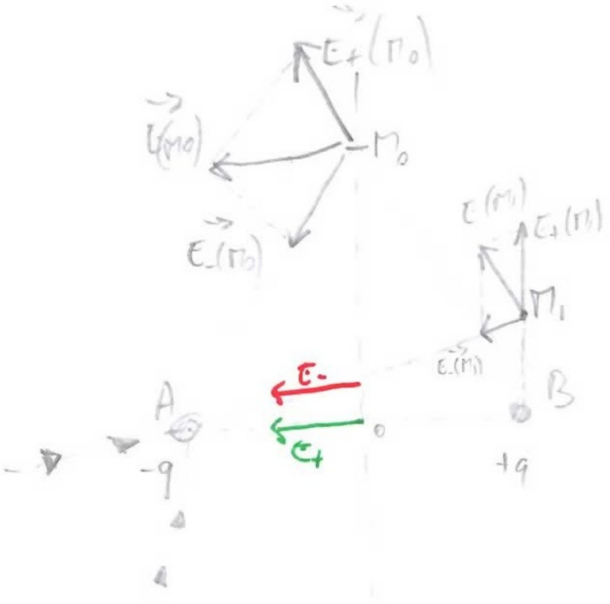


(a) (b)

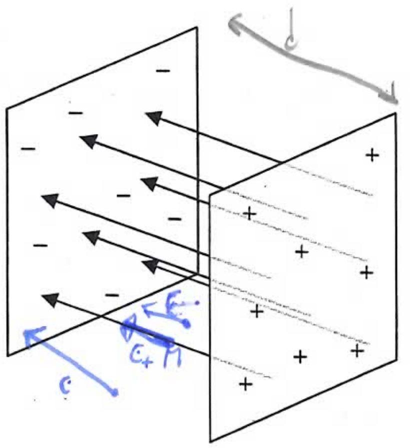
Justifions la courbure des lignes de champ électrique $\vec{E}$ (entre q_- et q_+)



$$E_{tot_0} = \underbrace{E_+ + E_-}_{\text{colinéaires et de m. sens}} = 2E_+ = 2E_- = \frac{2kq}{(OB)^2}$$



Exemple 3 : Lignes de champ électrique dans un condensateur plan



Les lignes de champ sont perpendiculaires aux armatures et sont dirigées de la plaque positive vers la plaque négative.

Condensateur plan : $d \ll$ dimensions des plaques → Plan infini ⇒ symétrie $\vec{E} \perp$ aux 2 plaques

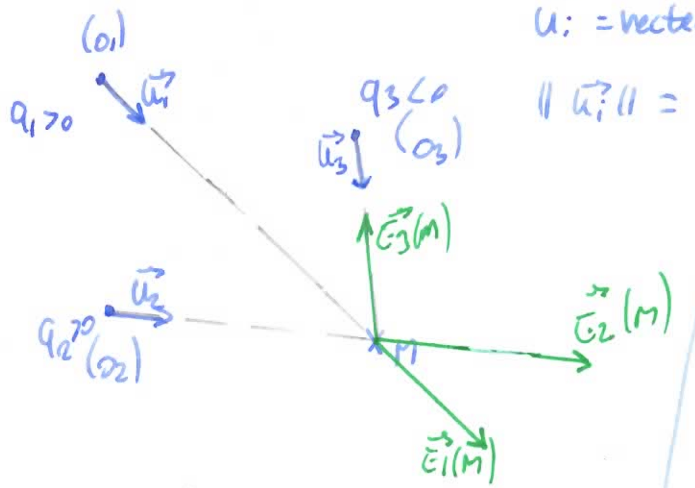
$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_+(M)}_{\text{divergent}} + \underbrace{\vec{E}_-(M)}_{\text{convergent}}$

le calcul montre que $E(M) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (σ = densité de charge (coulomb/m²) ; ε_0 = permittivité diélectrique du milieu vide)

$E(M)$ dirigé de la plaque (+) → (−) (⇒ E est constant $\forall M$) $\vec{E}$ uniforme

c- Champ $\vec{E}$ créé par une distribution discrète : Principe de superposition

Distribution discrète de charge = nombre N « fini » de charges ponctuelles.
Soient $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_N$ placées respectivement aux points $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_N$ et un point M qui se trouve à l'extérieur de la distribution.



$\vec{u}_i$ = vecteur unitaire (orienté de $q \to M$)
$\|\vec{u}_i\| = 1$

(*) $E_x(M) = \sum_{i=1}^{N} E_{ix}$; $E_y(M) = \sum_{i=1}^{N} E_{iy}$

↳ pythagore ↳ $E(M) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

en vecteur : $\vec{E}_i(M) = \dfrac{k q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$

en intensité (ou module) : $E_i(M) = \dfrac{k|q_i|}{r_i^2}$ (> 0) (en $V.m^{-1}$) (k = cste de coulomb $= 9.10^9$ S.I)

$\vec{E}_{total}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) + \ldots + \vec{E}_N(M)$

$\vec{E}_{total}(M) = k \sum \dfrac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$ (principe de superposition) pour l'intensité de $E(M)$: – Pythagore – Al Kashi – projection dans le repère (*) $(\vec{Mx}, \vec{My})$

Exercice d'application 1 : ***Etude d'un dipôle électrique***

Un dipôle est un couplet (-Q ; +Q), 2 charges ponctuelles séparées par une distance a.
a : appelée dimension du dipôle $\approx 10^{-10}$m (échelle atomique).

1- Exprimer et représenter $\vec{E}(O)$: champ créé par le dipôle de centre O.

2- Exprimer et représenter $\vec{E}(M)$: M appartient à la médiatrice du dipôle tel que $\widehat{AMO} = \alpha = 30°$.

Application 1

1) M : pt d'observation $= O$ (centre)

$\vec{E}(O)$?

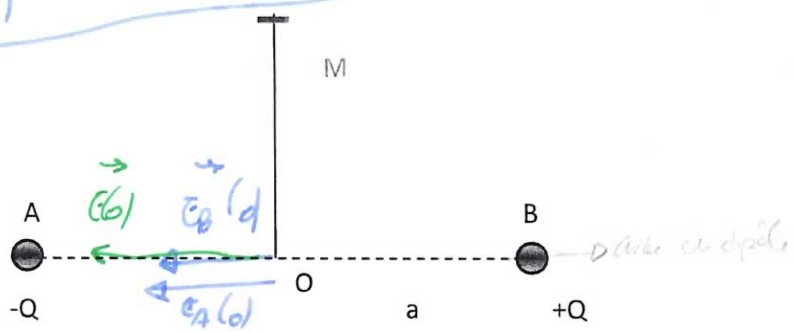
$\vec{E}(O) = \underbrace{\vec{E}_A(O)}_{\text{convergent car } q_A<0} + \underbrace{\vec{E}_B(O)}_{\text{divergent car } q_B>0}$

en intensité : $\vec{E}_A(O)$ et $\vec{E}_B(O)$ sont col. et de même sens

$\Rightarrow E(M) = E_A(O) + E_B(O)$

avec $E_A(O) = E_B(O) = \dfrac{kQ}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$\boxed{E(O) = \frac{8kQ}{a^2} \text{ en V.m}^{-1} \text{ (créé par le dipôle)}}$$



2) $\vec{E}(M)$

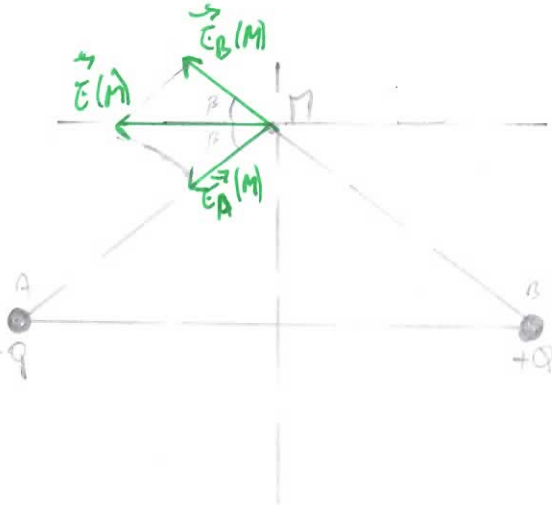
* Sens et direction de $\vec{E}(M)$

. $\vec{E}(M) \perp$ à la médiatrice (ou $\vec{E}$ // à l'axe du dipôle)

. orienté de $\oplus \rightarrow \ominus$

* intensité (ou norme de $E(M)$)

On projette sur $(\vec{M_x}, \vec{M_y})$



$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$ $\nRightarrow$ ~~$E = E_A(M) + E_B(M)$~~ faux car $\vec{E}_A$ et $\vec{E}_B$ non colinéaires

D'où projection : $\begin{cases} \vec{M_x} : E_B(M)\cos\beta + E_A(M)\cos\beta = 2E_A(M)\cos(\beta) \\ \vec{M_y} : E_B\sin(\beta) - E_A\sin(\beta) = 0 \end{cases}$ $\left(E_A(M) = E_B(M) = \dfrac{kQ}{(AM)^2}\right)$

$\Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} 2E_A = 2\dfrac{kQ}{(AM)^2} \times \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $\cos\beta = \sin(\alpha)$ car $\alpha + \beta = 90°$

et (AM) : $\sin(\alpha) = \dfrac{OA}{AM} = \dfrac{a/2}{AM} \Rightarrow (AM) = \dfrac{a}{2\sin(\alpha)} \Rightarrow$

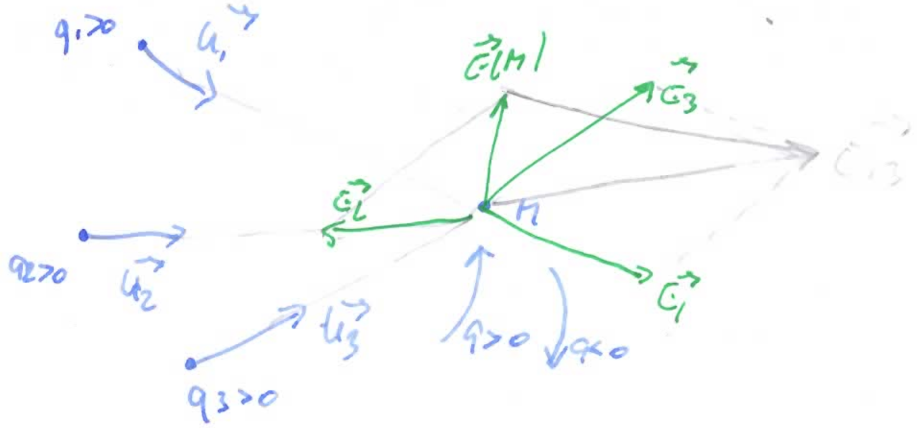
$(AM)^2 = \dfrac{a^2}{4\sin^2(\alpha)}$

$E(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{8kQ}{a^2}\sin^3(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y})}$

$E_x = \|E\|$

3- <u>Relation entre la force $\vec{F}_e$ et le champ $\vec{E}$ en un point donné</u>

Soient une distribution discrète formée de N charges ponctuelles : $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_N$ (N fini) et un point d'observation M extérieur aux charges.



$$\vec{E}(M) = \frac{k q_1}{r_1^2}\vec{u_1} + \frac{k q_2}{r_2^2}\vec{u_2} + \frac{k q_3}{r_3^2}\vec{u_3}$$

On place une charge "q" au pt M

$\vec{F}$ = force que subit q est :

$$\vec{F} = \underbrace{\frac{k q q_1}{r_1^2}\vec{u_1}}_{\vec{F}_{q_1/q}} + \underbrace{\frac{k q q_2}{r_2^2}\vec{u_2}}_{\vec{F}_{q_2/q}} + \underbrace{\frac{k q q_3}{r_3^2}\vec{u_3}}_{\vec{F}_{q_3/q}}$$

$$= q\left(k\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}\right)$$

$$= q.\vec{E}(M)$$

<u>Conclusion</u> : Au point M $\vec{E}(M)$ et $\vec{F}(M)$ ~~$\vec{E}$~~

$$F(M) = q(M).\vec{E}(M)$$

<u>Rq</u> : <u>Si $q>0$</u> $\vec{F}$ de M | sens que $\vec{E}(M)$
| direction

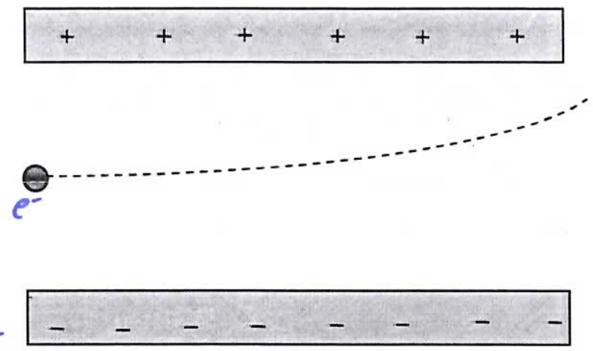
<u>Si $q<0$</u> $\vec{F}$ de M | sens opposé à $\vec{E}(M)$

Exercice d'application 2

Un e⁻ projeté entre les deux plaques d'un condensateur de champ électrostatique uniforme $\vec{E}$.

m = masse de l'e

$\vec{a}$ = accélération



$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{F_e} = m\vec{a} \Rightarrow F_e \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = F_e = eE \\ (|q_e| \neq e) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{cases}$ $\begin{cases} V_x = \int 0\,dt = c = V_0 \\ V_y = \int \frac{eE}{m}\,dt = \left(\frac{eE}{m}\right)t + \overbrace{V_{0y}}^{=0} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \int V_0\,dt = V_0 t + x_0 = 0 \quad (1) \\ y(t) = \int \left(\frac{eE}{m}\right)t\,dt = \left(\frac{eE}{2m}\right)t^2 + \underbrace{\cancel{y_0}}_{0} \quad (2) \end{cases}$

$1 = Vt = \frac{x}{V_0}$ dans (2)

$y = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{x^2}{V_0^2} \Rightarrow y = \left(\frac{e.E}{2mV_0^2}\right)x^2$

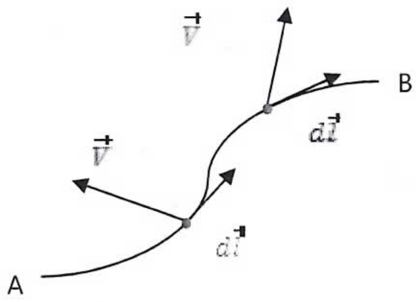
4- Potentiel électrostatique V(M)

a) Notion mathématique de la circulation d'un vecteur

Pour un vecteur $\vec{V}$ quelconque, la circulation de $\vec{V}$ le long du trajet AB est :

$$C(\vec{V})_{A-->B} = \int_A^B \vec{V}.\vec{dl}$$

$$W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = C(\vec{F})$$



$\vec{dl}$ = élmt de longueur orienté de A vers B
- tangent en tout point à la courbe AB
- $\vec{dl} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y}$ en polaire $\vec{dl} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta}$
- Si le parcours est fermé $\oint (A \to A)$ dl sera orienté dans le sens trigo.

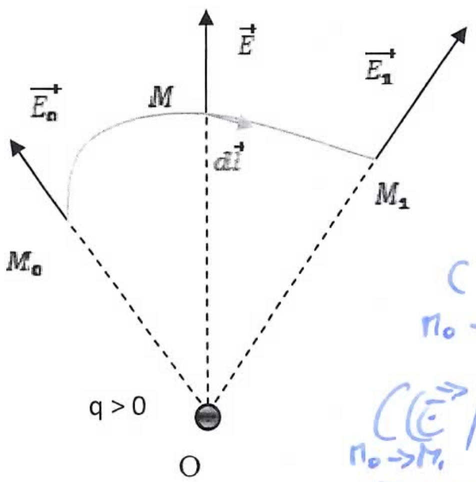
b-circulation du champ $\vec{E}$ créé par une charge q.

Soit une charge q > 0 placée en 0, elle crée en tout point M :

$$E = k\frac{|q|}{r^2}$$

Soient deux points M_0 et M_1, **on montre que la circulation du champ $\vec{E}$ de M_0 vers M_1 est** :

$$\boxed{C(\vec{E}) = k\frac{q}{r_0} - k\frac{q}{r_1} = V(M_0) - V(M_1)}$$



$$E(M) = \frac{kq}{(OM)^2} = \frac{kq}{r^2}$$

avec $\vec{E} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta}$ car $\vec{E}$ porté par (OM), $\vec{E}$ est donc radial.

$$C(\vec{E})_{M_0 \to M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{M_0}^{M_1} (E_r dr + \overset{=0}{E_\theta} r d\theta)$$

$$C(\vec{E})_{M_0 \to M_1} = \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{kq}{r^2}\right) dr = kq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r_1}$$

$$\boxed{C(\vec{E})_{M_0 \to M_1} = \underbrace{\frac{kq}{r_0}}_{V(M_0)} - \underbrace{\frac{kq}{r_1}}_{V(M_1)}}$$ CQFD

V(M₁) potentiel électrique créé au point M par q

Généralisation :

* Une charge q placée en un point O crée en tout point de l'espace un potentiel

$$\boxed{V(M) = \frac{kq}{OM}}$$

Conclusion :

On a trouvé que

$$C(\vec{E}) = V(M_0) - V(M_1)$$

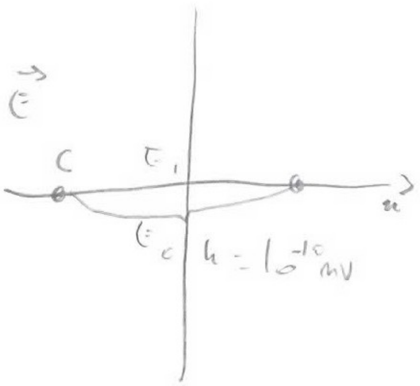
$$M_0 \to M_1 = -\underset{M_0 \to M_1}{\Delta V} \quad \text{ddp entre } M_0 \text{ et } M_1$$

$$\int_{M_0}^{M_1} \vec{E}\,\vec{dl} = -\Delta V \qquad \boxed{dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}} \;(*)$$

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = -dV$$

Calcul de $C(\vec{E})$

exemple de calcul :



$$V(M) = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \dots + \frac{kq_n}{r_n}$$

$$V(0) = \frac{k(-q)}{OA} + \frac{k(+q)}{OB}$$

$V(0) = 0$ alors que $\vec{E}(0) \neq \vec{0}$

(*) Si $V(x,y,z)$: fonction potentiel

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

d : dérivée totale
différentielle de la fct.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \text{dérivée partielle de } V/\text{à } x \ (y,z : \text{cstes}) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \text{dérivée partielle de } V/\text{à } y \ (x,z : \text{cstes}) \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \text{dérivée partielle de } V/\text{à } z \ (x,y : \text{cstes}) \end{cases}$$

. Si une seule variable x

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} = V'(x)$$

dérivée totale = dérivée partielle (car on a une seule variable)

Par ailleurs :

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

(par def du produit scalaire)

b) Potentiel créé par N charges (N fini)

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{r_i} = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}}$$

Remarque :

- V(M) s'exprime en Volts : V
- V(M) est une fonction scalaire (et non un vecteur !)
- Les charges q_i sont en valeur algébriques

5- Relation entre champ $\vec{E}$ et potentiel V(M)

Le champ $\vec{E}$ est relié au potentiel V(M) par la relation :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}(V)}$$

Cette expression permet le calcul des composantes de $\vec{E}$ par une simple application de l'opérateur gradient : $\vec{grad}$, qui consiste à dériver la fonction V(M) par rapport aux trois variables de l'espace.

1er 2 cas (*) $\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \quad \forall (x,y,z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{vecteur}} (V)$$

$\vec{E} = -\vec{grad}(V)$ où $\vec{grad} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

↓ $\vec{grad}(P)$ où P = pression

$\vec{grad}(P) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} \end{pmatrix}$

exemple

- le $\overrightarrow{grad}$ ne s'appliqu qu'à des fonctions scalaires et le résultat donne un vecteur ($\vec{u} = \overrightarrow{grad}(f)$)
- le $\overrightarrow{grad}(f)$ mesure la variation de f selon les trois directions de l'espace (x, y, z)
- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow$. E mesure la variation du potentiel V
  . $(-)$ signifie que $\vec{E}$ est tjrs orienté

$V.m^{-1}$ m^{-1} Volt

~~Trouver le Champ $\vec{E}$ produit par la m̂ distribution au pt (1,1,1)~~

~~$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$~~

1) Encoordonnées Cartésiennes

Une distribution de charge certaine crée un potentiel $V(M)$ donné par

$$V(M) = 3x^3y^2 - \frac{2x^2}{y}$$

, trouver le champ $\vec{E}$ produit par la m̂ distribution au point (1,1,1)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -9x^2y^2 + \frac{4x}{y} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -6x^3y - \frac{2x^2}{y^2} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

au point (1,1,1) où $x=1$, $y=1$, $z=1$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = -5 \\ E_y = -8 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

norme de $\vec{E}$ au point (1,1,1)

$$E = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2}$$

$$E = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}\ V.m^{-1}$$

a) Composantes de $\overrightarrow{grad}$ dans différents types de coordonnées

Coordonnées	Cartésiennes	Polaires	Cylindriques	Sphériques
Variables	(x, y, z)	(r, θ)	(r, θ, z)	(r, θ, φ)
$\overrightarrow{grad}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

V – Energie potentielle électrostatique

Une charge q placée en un point M de potentiel V(M) a une énergie potentielle de nature électrique donnée par :

$$\boxed{E_{pe} = q.V(M)}$$

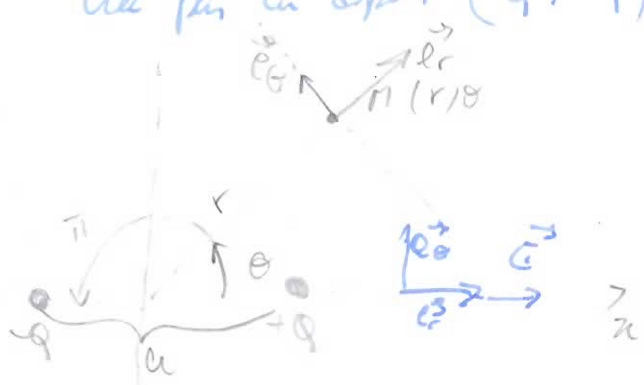
Démonstration

2) En coord polaires

Trouver les composantes de $\vec{E}$ créé par un dipôle $(-Q, +Q)$ tq

$$\boxed{V(M) = \frac{kQa\cos\theta}{r^2}}$$

$(r \gg a \Rightarrow \frac{a}{r} \ll 1 \quad \varepsilon = \frac{a}{r})$



$\overrightarrow{grad} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{pmatrix}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

$\Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \text{composante radiale} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \quad // \text{ tangentielle} \end{cases}$

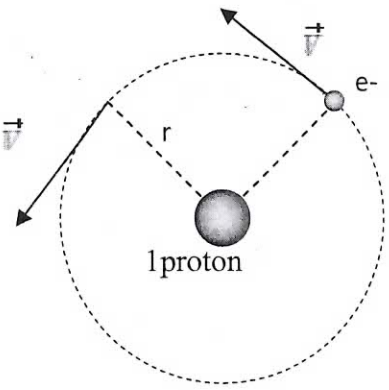
$\Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{kQa\cos\theta}{r^2}\right) \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{kQa\cos\theta}{r^2}\right) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = -kQ\, a\cos\theta\, \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r^2}\right) \quad - \quad r^3 \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r^3}\, kQa\, \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\right) = -\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} E_r = \dfrac{2kQa\cos(\theta)}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{kQa\,\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Application à la physique atomique (Atome d'hydrogène).

L'énergie potentielle électrique de l'électron en mouvement circulaire autour du noyau.



IV – Distribution continues

1- Calcul de la charge Q d'une distribution continue

Nature de la distribution	Linéaire	Surfacique	Volumique
Densité	λ (en C/m)	σ (en C/m²)	ρ (en C/m³)
dQ	$\lambda.dl$	$\sigma.dS$	$\rho.d\tau$
Q	$\int_l \lambda \mathbf{dl}$	$\iint_S \sigma \mathbf{dS}$	$\iiint_\tau \rho.\mathbf{d\tau}$

3- Calcul du champ $\vec{E}$ créé par des distributions continues

	Distribution discrète	Distribution continue
Charge élémentaire	q_i	dQ
Champ élémentaire	$E_i = k\dfrac{q_i}{r_i^2}$	$dE = \dfrac{kdQ}{r^2}$
Champ résultant (ou total)	$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$	Distribution de charges linéaire $\vec{E} = \int_L d\vec{E}$
		Distribution de charges surfacique $\vec{E} = \iint_S d\vec{E}$
		Distribution de charges volumique $\vec{E} = \iiint_\tau d\vec{E}$

Application

Fil infini

Soit un fil infini chargé avec une densité λ constante et positive. Retrouver E(M) :