Examen de Théorie des Graphes

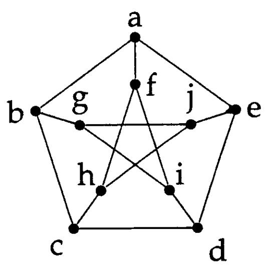
EPITA ING1 2014 S2; A. DURET-LUTZ

Durée : 1 heure 30

Consignes

- Document autorisé : une seule page A4 manuscrite (recto/verso).
- Cet examen se déroule **sans calculatrice, téléphone, ou autre appareil électroménager**.
- Répondez sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet de façon claire et concise.
- Le barème est indicatif et correspond à une note sur 26.

1 Graphe de Petersen (5 points)

On considère le graphe suivant : 

. Précisez les caractéristiques de ce graphe :

1. **(0,5pt)** Diamètre

Réponse :

2. **(0,5pt)** Rayon

Réponse :

3. **(0,5pt)** État(s) du centre

Réponse :

4. **(0,5pt)** Maille (taille du plus petit cycle)

Réponse :

5. **(0,5pt)** Nombre chromatique

Réponse :

6. **(0,5pt)** Taille de la plus grande clique

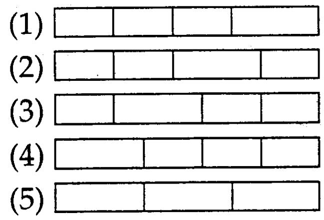
Réponse :

7. **(2pt)** Ce graphe est-il planaire ? Justifiez votre réponse.

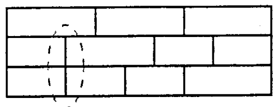
Réponse :

2 Joli mur de briques (7 points)

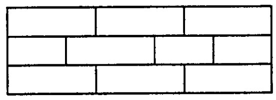
Des briques de taille 2×1 et de taille 3×1 sont utilisées pour construire un mur de largeur 9, dans lequel les briques sont toujours horizontales. Si le mur ne fait qu'une rangée de hauteur, il y a 5 configurations possibles, numérotées (1) à (5) ci-contre. Les murs plus hauts sont construits en empilant plusieurs de ces configurations, mais pour des raisons esthétiques, on ne veut pas que les séparations des briques soient alignées entre deux niveaux consécutifs du mur.



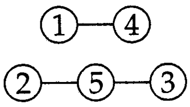
mur 9×3 interdit



mur 9×3 autorisé



La relation *"la configuration (i) peut être adjacente verticalement à la configuration (j)"* peut être représentée par le graphe suivant dont nous donnons aussi la matrice d'adjacence :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **(2pts)** Calculez M^3.

Réponse :

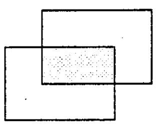
2. **(3pts)** Donnez un sens à M^3 : que représente la valeur stockée en (i,j) dans cette matrice ?

Réponse :

3. **(2pts)** Combien de murs 9×4 différents peut-on construire en respectant la contrainte esthétique ?

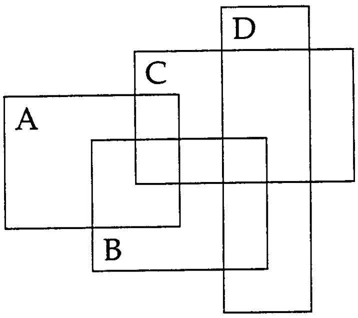
Réponse :

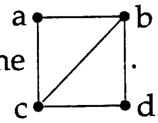
3 Graphes d'intersection de rectangles (8 points)



Dans tout cet exercice, on considère des rectangles dont les côtés sont parallèles à l'un des axes du plan. Chaque rectangle $R = (X_R, Y_R)$ peut être représenté par deux intervalles qui sont la projection du rectangle sur les axes. Dans ces conditions, l'intersection de deux rectangles $A = (X_A, Y_A)$ et $B = (X_B, Y_B)$ est le rectangle $A \cap B = (X_A \cap X_B, Y_A \cap Y_B)$. On appelle $R = (X_R, Y_R)$ un rectangle *vide* si $X_R = \emptyset$ ou $Y_R = \emptyset$; et on dit que le rectangle A *intersecte* le rectangle B si $A \cap B$ est un rectangle non-vide (autrement dit si $X_A \cap X_B \neq \emptyset$ et $Y_A \cap Y_B \neq \emptyset$).

Pour un ensemble $\mathcal{R}$ de rectangles, on note $G_{\mathcal{R}}$ le graphe dont les sommets représentent les rectangles, et dont les arêtes sont placées entres les sommets représentant des rectangles qui s'intersectent.

Par exemple les rectangles 

correspondent au graphe 

.

1. **(2pts)** Les graphes d'intersection de rectangles sont-ils toujours des graphes cordaux ?

Réponse :

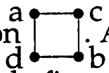
2. **(2pts)** Proposez un ensemble de rectangles dont le graphe d'intersection est isomorphe à $K_{3,3}$.

Réponse :

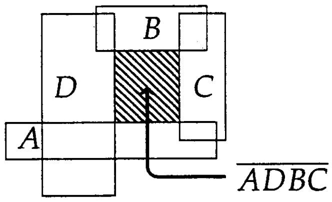
3. **(2pt)** Le *théorème de Helly en dimension 1* dit que si $n \geq 2$ intervalles $I_1, I_2, \ldots I_n$, s'intersectent deux à deux (i.e., $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ pour tout $i \neq j$) alors l'intersection de tous ces intervalles est non vide. Déduisez-en que s'il existe une clique d'ordre n dans $G_{\mathcal{R}}$, alors il existe des points du plan qui appartiennent à n rectangles de $\mathcal{R}$. (Indice : projetez les rectangles de la clique sur les axes.)

Réponse :

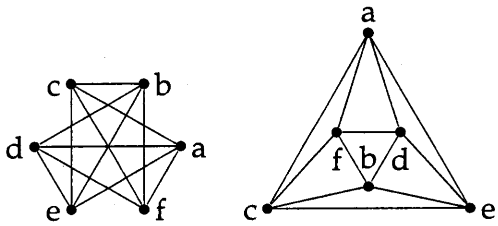
Vous supposerez vrai le lemme suivant, dont la preuve juste fastidieuse...

Lemme R. Soit un ensemble $\mathcal{R} = \{A, B, C, D\}$ de rectangles ayant pour graphe d'intersection 

. Alors $\mathcal{R}$ entoure une région rectangulaire, notée $\overline{ADBC}$ comme dans la figure ci-contre, et dont les points n'appartiennent ni à A, B, C, ou D.



4. **(2pts)** Considérons le graphe triparti $K_{2,2,2}$ dont on donne deux représentations possible ci-après. Les ensembles $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, et $\{e, f\}$ constituent les trois parties du graphes : les points de chaque ensemble ne sont pas voisins, mais ils sont voisins de tous les autres points du graphe.



Justifiez qu'il n'est pas possible de construire un ensemble de rectangles $\mathcal{R} = \{A, B, C, D, E, F\}$ tel que $G_{\mathcal{R}}$ soit isomorphe à $K_{2,2,2}$. (Suggestion : étudiez $\overline{ADBC} \cap E$ et $\overline{ADBC} \cap F$.)

Réponse :

4 Métro (6 points)

Supposez que vous ayez la charge de réaliser un site web calculant l'itinéraire le plus rapide entre deux stations de métro. L'utilisateur choisit deux stations, et vous devez répondre (le plus rapidement possible naturellement) en indiquant
- le temps de parcours minimal,
- la chaîne de stations à parcourir pour relier les deux stations indiquées avec ce temps minimal.

Avant de commencer ce projet, on vous a donné une carte des lignes sous la forme d'un graphe orienté pondéré, dans lequel les nœuds représentent les stations, et les arcs sont pondérés par les temps de parcours entre deux stations. Vous supposerez que les correspondances sont instantanées (il n'y a ni déplacement en station ni attente de la prochaine rame) : seuls les temps de déplacement des rames entre les stations est pris en compte.

1. **(4pts)** Expliquez les algorithmes que vous devez mettre en place pour offrir ces services (le temps plus court ET le chemin correspondant) de façon efficace, et donnez leur complexité. (S'il y a des pré-calculs, à effectuer avant la mise en route du site web, indiquez aussi les algorithmes à utiliser ainsi que leur complexité.)

Réponse :

2. **(2pts)** Comment généraliseriez-vous cette approche de façon à être capable de prendre en compte le temps de marche en station lors d'une correspondance (en supposant que ces temps vous sont fournis, bien sûr).

Réponse :

FIN