Corrigé du partiel 1

Exercice 1 (3,5 points)

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)}$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{\sqrt{((n+1)!)^\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{(n!)^\alpha}}{n^n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)^{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Si $\alpha < 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge.

Si $\alpha = 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e > 1$ donc $\sum u_n$ diverge.

Si $\alpha > 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 (4 points)

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ 2 & 2-X & -3 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 1-X & 2-X & -3 \\ 1-X & 2 & 1-X \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 0 & -X & -3 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -X(1-X)^2
\end{aligned}$$

D'où P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$ avec $m(0) = 1$ et $m(1) = 2$.

$$\begin{aligned}
E_1 &= Ker\,(A - I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -2x + 2y = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y = z \right\} \\
&= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

D'où $\dim(E_1) = 1 \neq 2 = m(1)$ donc A n'est pas diagonalisable.

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 2-X & 1 & -X \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1+X)^2
\end{aligned}$$

D'où P_B est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \{-1, 2\}$ avec $m(-1) = 2$ et $m(2) = 1$.

$$\begin{aligned}
E_{-1} &= Ker\,(B + I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 0 \right\} \\
&= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

D'où $\dim(E_{-1}) = 2 = m(-1)$. De plus $\dim(E_2) = 1$ car $m(2) = 1$ donc B est diagonalisable.

Il reste à déterminer E_2 pour obtenir une base de vecteurs propres.

$$\begin{aligned}
E_2 &= Ker\,(B-2I)\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0 \end{array} \right. \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x=y=z \right\}\\
&= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (4,5 points)

On a

$$P_A(X) = -X(a-X)(2+2a-X)$$

donc le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$.

<u>1er cas</u> : $a \notin \{0,-1,-2\}$
Alors $S_{P_\mathbb{R}}(A) = \{0, a, 2+2a\}$ avec $\forall \lambda \in S_{P_\mathbb{R}}(A)$, $m(\lambda) = 1$ donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

<u>2e cas</u> : $a = 0$
Alors

$$P_A(X) = X^2(2-X)$$

donc $S_{P_\mathbb{R}}(A) = \{0,2\}$ avec $m(0) = 2$ et $m(2) = 1$. Or

$$E_0 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc $\dim(E_0) = 1 \neq m(0)$ d'où A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

<u>3e cas</u> : $a = -1$
Alors

$$P_A(X) = -X^2(1+X)$$

donc $S_{P_\mathbb{R}}(A) = \{0,-1\}$ avec $m(0) = 2$ et $m(-1) = 1$. Or

$$E_0 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc $\dim(E_(0) = 2 = m(0)$ d'où A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (car $\dim(E_{-1}) = 1$ vu que $m(-1) = 1$

<u>4e cas</u> : $a = -2$
Alors

$$P_A(X) = -X(2+X)^2$$

donc $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, -2\}$ avec $m(0) = 1$ et $m(-2) = 2$. Or

$$E_{-2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

donc $\dim(E_{-2}) = m(-2)$. D'autre part comme $m(0) = 1$, $\dim(E_0) = 1$ d'où A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Finalement A diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ssi $a \neq 0$.

Exercice 4 (4 points)

1. $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

2. $P_A(X) = -X(X+1)(X-2)$.
   Donc le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $S_{P_{\mathbb{R}}}(A) = \{0, -1, 2\}$
   De plus $m(0) = m(-1) = m(2) = 1$ donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   $E_0 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

   Donc $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

3. On a $A = PDP^{-1}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 4(-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n\\ 0 & 4(-1)^{n+2} + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}\\ 0 & 4(-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 2(-1)^n + 2^{n+2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$ i.e. vu que $u_0 = 0$ et $u_1 = u_2 = 1$

$$\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 4(-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n\\ 0 & 4(-1)^{n+2} + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}\\ 0 & 4(-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 2(-1)^n + 2^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

   Ainsi on a en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{6}\Big(4(-1)^{n+1} + 2^n + 2(-1)^n + 2^n\Big)$$

   soit encore

$$u_n = \frac{1}{3}\Big((-1)^{n+1} + 2^n\Big)$$

Exercice 5 (4 points)

1. En effectuant la transformation $C_n \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i$ puis en développant par rapport à la $n^{\text{ième}}$ colonne, on obtient

$$det(A) = (-1)^{n+n} n(-a_1)(-a_2)...(-a_{n-1})$$

soit finalement

$$det(A) = (-1)^{n-1} n a_1 ... a_{n-1}$$

2. En effectuant les transformations $C_i \longleftarrow C_i - C_{i-1}$ de $i = n$ à $i = 2$, on obtient en développant par rapport à la dernière colonne

$$det(B) = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)...(a_{n-1} - b_{n-1})$$