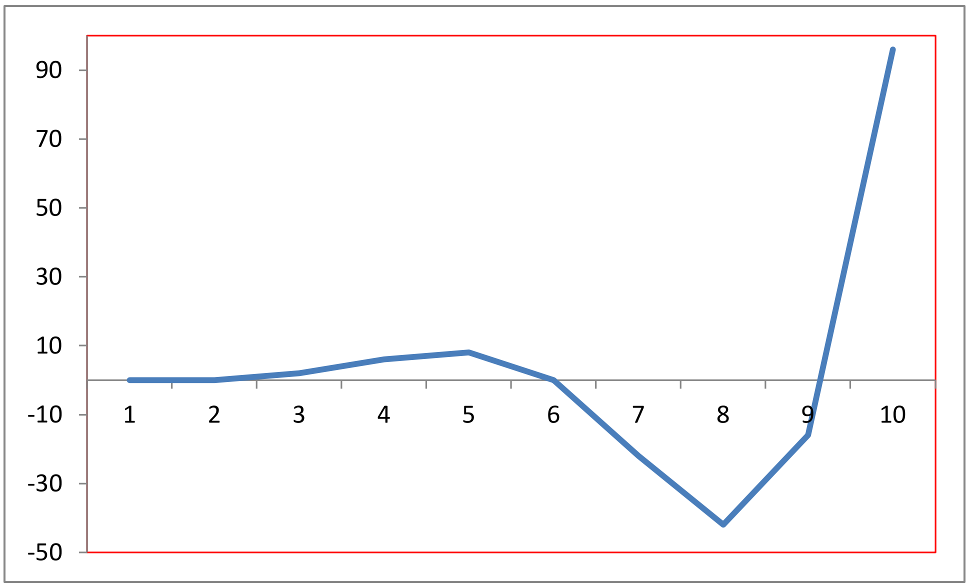
Partiel 2012 – Proposition de correction par Tien THACH (Tackounet ☺)

Exercice 1 :

Tableau de S :

S_0	0
S_1	2
S_2	6
S_3	8
S_4	0
S_5	-22
S_6	-42
S_7	-16
S_8	96



On va échantillonner la bête :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(nT)z^{-n} \quad avec\ u(nT) = \frac{S(n)}{E(n)} \ \ (donc\ \ T = 1)$$

On va seulement calculer les 8 premiers termes, la suite étant clairement divergente :

$$H_8(z) = \sum_{n=0}^{8} u(n)z^{-n} = \ 0 + 2z^{-1} + 6z^{-2} + 8z^{-3} - 22z^{-5} - 42z^{-6} - 16z^{-7} + 96z^{-8} + [\dots]$$

Exercice 2 :

Soit

$$X(z) = \frac{z^2(5.1z - 3)}{4\,(z-1)(z-0.6)(\,z-0.8)}$$

Divisions polynomiales :

On met le dénominateur sous la forme $D(z) = a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{-i}$

On divise donc le numérateur et le dénominateur par z^3, soit :

$$X(z) = \frac{5.1 - 3z^{-1}}{4 - 9.6z^{-1} + 7.52z^{-2} - 1.92z^{-3}}$$

(Et c'est parti mon kiwi \o/) (Pardonnez la microscopie de la chose svp …)

1	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}	1	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}
5.1	**-3**					**4**	**-9.6**	**7.52**	**-1.92**		
	9.24	-9.588	2.448			1.275	**2.31**	**3.147**	**3.822**	**4.36524**	**4.801776**
		12.588	-14.9232	4.4352							
			15.288	-19.23024	-6.04224						
				17.46096	-22.6992						

- ⇨ $X(0) = 1.275$
- ⇨ $X(T) = 2.31$
- ⇨ $X(2T) = 3.147$
- ⇨ $X(3T) = 3.822$
- ⇨ $X(4T) = 4.36524$
- ⇨ $X(5T) = 4.801776$

(Ne faîtes pas trop attention aux chiffres significatifs)

On utilise le théorème de la valeur finale pour déterminer $X(nT)$.

$$\lim_{n\to\infty} X(nT) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2(5.1z-3)}{4\,(z-1)\,(z-0.6)\,(z-0.8)}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{2.1}{0.32}\right) = 6.5625$$

Division par 'z' puis décomposition :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z\,(5.1z-3)}{4\,(z-1)(z-0.6)(\,z-0.8)} = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.6} + \frac{C}{z-0.8}\right)$$

$$avec\ A = \frac{105}{4}\ ; B = \frac{9}{20}\ \ et\ C = \frac{108}{5}$$

(Les calculs peuvent faire peurs, je n'ai pas réussi à faire quelque chose de très simple)

On reprend notre fonction X(z) en multipliant par z l'équation ci-dessus, on se reporte au tableau des transformées inverses et on remarque en supposant :

$$A(t) = \frac{105z}{4\,(z-1)}\ \ ;\ \ B(t) = \frac{9z}{20\,(z-\ 0.6)}\ \ \ et\ \ C(t) = \frac{108z}{5\,(z-0.8)}$$

$$Z^{-1}[\mathrm{A(z)}] = \frac{105}{4}\mathrm{u(t)}\ \ ;\ \ \ Z^{-1}[\mathrm{B(z)}] = \frac{9}{20}0.6^{n}.\,u(t)\ et\ ;\ \ \ Z^{-1}[\mathrm{C(z)}] = \frac{108}{5}0.8^{n}.\,u(t)$$

Et donc

$$X(nT) = \frac{1}{4}\left(\frac{105}{4} + \frac{9}{20}0.6^{n} + \frac{108}{5}0.8^{n}\right)u(nT)$$

(Vérification de la cohérence)

- ⇨ $X(0) = \ 1.275$
- ⇨ $X(T) = \ 2.31$
- ⇨ $X(2T) = \ 3.147$
- ⇨ $X(3T) = \ 3.822$
- ⇨ $X(4T) = \ 4.36524$
- ⇨ $X(5T) = \ 4.801776$

C'est donc juste (faut pas s'attendre à des trucs sympa de sa part alors, contrairement à notre autre professeur de mathématiques).

Exercice 3 :

Soit la fonction $y(t) = e^{-t}\cos t\,.\,u(t)$

On suppose que l’entrée est un échelon unitaire (les transformées étant linéaires, on peut donc se désintéresser de l’amplitude d’entrée, étant un coefficient multiplicatif constant).

Soit F la fonction de transfert :

$$F(p) = L(y(t))$$

Par la formule d’Euler, on décompose notre cosinus de tel sorte que :

$$y(t) = e^{-t}\left(\frac{e^{-it} + e^{it}}{2}\right)u(t)$$

$$y(t) = \left(\frac{e^{-(1+i)t} + e^{-(1-i)t}}{2}\right)u(t)$$

On en déduit, par le tableau des correspondances :

$$Y(p) = L^{-1}\left[\left(\frac{e^{-(1+i)t} + e^{-(1-i)t}}{2}\right)u(t)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+(1+i)} + \frac{1}{p+(1-i)}\right)$$

$$Y(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p+1)+i} + \frac{1}{(p+1)-i}\right)$$

$$Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1}$$