# Corrigé du partiel 1

## Exercice 1 (4 points)

1. Soit $(u_n) = \left(\dfrac{n^a}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^a}{(n+2)\cdots(2n+2)} \cdot \frac{(n+1)\cdots(2n)}{n^a}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1\end{aligned}$$

donc $\sum u_n$ converge.

2. Soit $(v_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1}\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Via le critère spécial des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

D'autre part, $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ donc $\sum\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$ converge.

Finalement $\sum v_n$, différence de deux séries convergentes, converge.

## Exercice 2 (5 points)

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $\left\{\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1\end{array}\right.$, on a $P_A(X) = (X+1)^2(1-X)$

Donc $P_A$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1\}$ avec $m(-1) = 2$ et $m(1) = 1$

$$\begin{aligned}E_{-1} &= \operatorname{Ker}(A+I)\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left|\begin{array}{l} x-y=0\\ x+3y-4z=0\\ x+y-2z=0\end{array}\right.\right\}\\ &= \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

$\dim(E_{-1}) = 1 \neq 2 = m(-1)$ donc $A$ n'est pas diagonalisable.

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $\left\{\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1\end{array}\right.$, on a $P_B(X) = -X(4-X)(1-X)$

Donc $P_B$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \{0,1,4\}$ avec $m(0) = m(1) = m(4) = 1$ donc $B$ est diagonalisable.

$$\begin{aligned}
E_0 &= \text{Ker}\,(B) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ y+3z=0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \text{Ker}\,(B-I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} y+2z=0 \\ 2x+z=0 \\ y+2z=0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_4 &= \text{Ker}\,(B-4I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -3x+y+2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ y-z=0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

D'où $D = P^{-1}BP$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

## Exercice 3 (4 points)

En développant par rapport à la première ligne, on a immédiatement $P_A(X) = -(X-1)^2(X+1)$

Donc $P_A$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1,-1\}$ avec $m(1) = 2$ et $m(-1) = 1$.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \text{Ker}\,(A-I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} ax-3y+3z=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} (a-3)x=0 \\ y=x+z \end{array} \right. \right\}
\end{aligned}$$

$A$ est diagonalisable ssi $\dim(E_1) = 2$.

Or si $a \neq 3$, $E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim(E_1) = 1$.

Si $a = 3$, $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \; y = x+z \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim(E_1) = 2$

Ainsi $A$ diagonalisable ssi $a = 3$.

# Exercice 4 (2 points)

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Montrons que $y \in \mathrm{Ker}(v)$ i.e. $v(y) = 0$

Comme $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(v)$.

Donc, vu que $u \circ v = v \circ u$, on a

$$v(y) = v\big(u(x)\big) = v\big(u(x_1 + x_2)\big) = v\big(0 + u(x_2)\big) = u\big(v(x_2)\big) = u(0) = 0$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$

# Exercice 5 (3 points)

Notons $\mathscr{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$T(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(e_{21}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T(e_{22}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

# Exercice 6 (4 points)

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$, on a $P_A(X) = (a + 1 - X)(X + 1)(X + 2)$

<u>Si $a \notin \{-2, -3\}$</u>, alors $A$ admet 3 valeurs propres distinctes donc $A$ est diagonalisable.

<u>Si $a = -2$</u>, alors $P_A(X) = -(X + 1)^2(X + 2)$. Donc $P_A$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, -2\}$ avec $m(-1) = 2$ et $m(-2) = 1$.

Donc $A$ est diagonalisable ssi $\dim(E_{-1}) = 2$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ (b-2)x + y + (1-b)z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Donc $\dim(E_{-1}) = 1 \neq 2$ d'où $A$ n'est pas diagonalisable.

<u>Si $a = -3$</u>, alors $P_A(X) = -(X + 1)(X + 2)^2$. Donc $P_A$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, -2\}$ avec $m(-1) = 1$ et $m(-2) = 2$.

Donc $A$ est diagonalisable ssi $\dim(E_{-2}) = 2$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ (b-3)x + 2y + (1-b)z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} y = x \\ (b-1)(x-z) = 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Si $b \neq 1$, $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim(E_{-2}) \neq 2$ d'où $A$ n'est pas diagonalisable.

Si $b = 1$, $E_{-2} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim(E_{-2}) = 2$ d'où $A$ est diagonalisable.

Finalement $A$ diagonalisable ssi $\left[a \notin \{-2, -3\} \text{ ou } (a = -3 \text{ et } b = 1)\right]$.