Chapitre 7 ELECTROCINETIQUE

Plan

A. Zellagui

I. *Objectifs*

L'électrocinétique est l'étude des charges en mouvement. Les lois que l'on va établir dans ce chapitre nous serviront pour la partie magnétostatique.
Nous donnerons les lois d'électrocinétique qui caractérisent le mouvement des porteurs de charge et qui mettent en relations les grandeurs telles que : la quantité d'électricité Q, le courant I, la densité de courant $\vec{J}$, le champ électrique et la vitesse de drives des particules chargées.
Nous donnerons également les grandeurs qui caractérisent le matériau conducteur telles que : la résistance R, la résistivité ρ, la conductivité γ, et la mobilité des porteurs de charges μ.

II. *Courant électrique I*

Le courant I est la quantité de charges dQ qui traverse le conducteur pendant un intervalle de temps *dt* .

$I = \frac{dQ}{dt}$ → qté de charges en C ; → en seconde ; Ampère

$\boxed{dQ = I\,dt}$ (1ère loi d'électrocinétique)

. Si I est cst (courant continu)

$Q = I\int_{t_0}^{t_1} dt = I(t_1 - t_0) = I.\Delta t$

qté d'électricité traversant le système pendant Δt

. Si I est variable

$Q = \int_{t_0}^{t_1} I(t)\,dt$

III. *Densité de courant* $\vec{J}$

III. 1- *Relation entre I et* $\vec{J}$

Le courant I représente le flux de la densité de courant $\vec{J}$ à travers la section S du conducteur.

I = flux de $\vec{J}$

$\boxed{I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS}}$ où S = section du conducteur

(2e loi d'électrocinétique)

$\vec{J}$: vecteur densité de courant (en Ampère/m²)

$\vec{J}$: vecteur colinéaire et de même sens que I.

$\vec{J}$ est lié à la vitesse des charges en mvmt qui produisent le courant I.

($\vec{J}$ considéré comme fil)

⇒ $\boxed{I = J.S}$

Câble conducteur de rayon R (R ≈ quelques cm)

I : Courant total qui traverse totale

I' : Courant qui traverse S' de rayon $(r<R)$

(Remarque : • Pour le calcul du champ magnétique B ext on utilise I.

• Pour le calcul du champ $B(r<R)$ on utilise I'

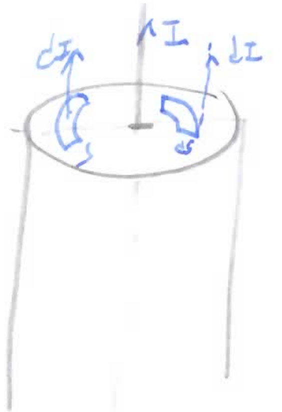
et I' est calculé à partir de la donnée de $J(r,\theta)$

= fct densité de courant

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_S J\, dS \cos(0°)$$

$$dI = J \cdot dS$$

$$J = \frac{dI}{dS}$$



dI = courant qui traverse dS

• Si dI est le même pour tous les dS alors $J = cst \Rightarrow \vec{J}$ unif

Application

On considère un conducteur cylindrique de rayon R traversé par un courant I de densité :

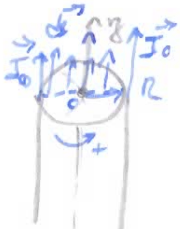
$J(r) = J_0 \cdot \frac{r^2}{R^2}$ où J_0 et R sont des cstes

a- Exprimer le courant total en fonction de J_0 et R

b- Exprimer le courant I' qui traverse une section de rayon $r<R$

$J(r) = J_0 \cdot \frac{r^2}{R^2}$

$\begin{cases} r=0 & J=0 \\ r=R & J=J_0=J_{max} \end{cases}$



a) $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$

$$I_{total} = \int_0^{2\pi}\int_0^R J_0 \cdot \frac{r^2}{R^2}(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \frac{J_0}{R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3\, dr$$

$$I = \frac{J_0}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4}\, 2\pi \Rightarrow \underline{I = \frac{J R^2 \pi}{2}}$$

III.2- Expression de la densité de courant $\vec{J}$ en de la vitesse des charges.

$dQ = I\,dt$

$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$

$\vec{J} = nq\vec{v}$

$\vec{J} = \gamma . \vec{E}$

On considère un flux de particules de même charge q, de même vitesse moyenne v, et de densité n : nombre de charges par m^3.
Le courant qui résulte de ce mouvement a une densité d'expression :

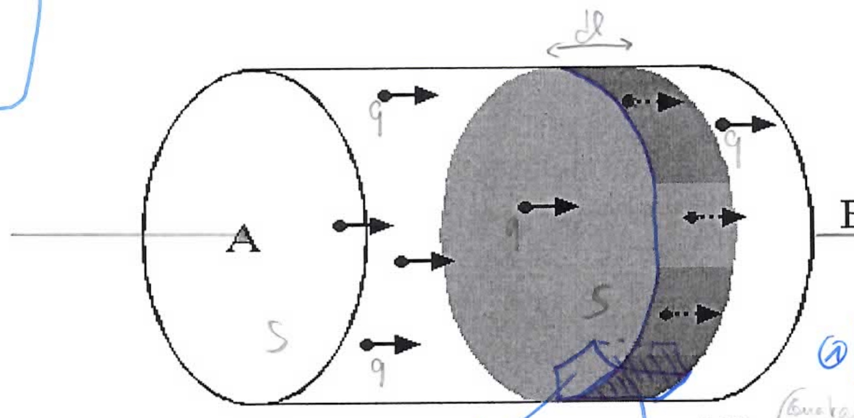
$$\boxed{\vec{J} = n.q.\vec{V}}$$

Démo

Soit $d\tau = S \times dl$ (en m^3)

$I = \iint_S J \cdot dS$

$dI = J.dS \Rightarrow J = \frac{dI}{dS}$



V1 V2

Calcul de dI :

① $\boxed{d^2Q = dI\,dt} + I\,dt^2$

(on le néglige) $dt^2 \ll dt$

$\Rightarrow dI = \frac{d^2Q}{dt}$ (courant traversant ...)

dS

$d\tau' = dS \times dl$

d^2Q = qté de charge qui traverse $d\tau'$

$d^2Q = N.q = (n \times d\tau') \times q$

$= (n \times dS \times dl) \times q$

$J = \frac{dI}{dS} = \frac{d^2Q}{dt\,dS} = \frac{n \times dS \times dl \times q}{dt \times dS}$

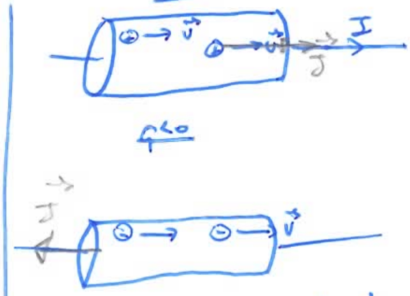
n = densité des porteurs de charge (nbre de charges / m^3)

v = vitesse de dérive ou vitesse d'entraînement

d'où $\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}}$

q>0

q<0



$J = n|q|\langle v \rangle$

b - $I' = \int_0^r \int_0^{2\pi} J_0 \frac{r^2}{R^2} \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{J_0}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4}\, 2\pi$

$\boxed{I' = \frac{J\pi}{2R^2} r^4}$ Cst

Remarques :

- Pour N espèces chargées le vecteur densité de courant résultant est :

$$\boxed{\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} n_i . q_i . \vec{V}_i}$$

- Pour des porteurs de charges positives $\vec{J}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires et de même sens
- Pour des porteurs de charges négatives $\vec{J}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires et de sens opposés
- J s'exprime en Ampère/m^2

IV. ***Grandeurs caractéristiques du milieu conducteur***

IV.1- ***Résistivité*** ρ

Une grandeur qui dépend de la nature du matériau. Elle est assimilable aux frottements. La résistivité augmente avec la température, elle est donc importante dans le cas d'une mauvaise conduction.

En mesurant la résistance R d'un fil conducteur (de longueur l et de section S),

ρ : a été mesurée en traçant les courbes

$R = f\left(\frac{l}{S}\right)$ où $R = \frac{U}{I}$ (résistance)

l = longueur du fil
S = section du fil
à T° fixée

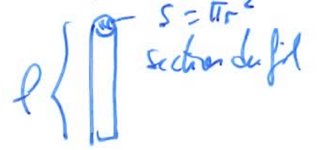
$R = K \frac{l}{S}$ (K = coef directeur)

$K \nearrow$ qd $R \nearrow \Rightarrow$ mauvaise conduction

on pose donc $K = \rho$ = résistivité du matériau

$\boxed{R = \rho . \frac{l}{S}}$ valable pour des fils électriques

($\Omega \cdot m$)



On constate que le coefficient k varie selon la nature du matériau et augmente pour les mauvais conducteurs. On a posé donc : K = ρ : résistivité du matériau.

Ordre de grandeur de la résistivité ρ :

Nom du métal	Résistivité à 300 K (Ω·m)
Argent	$15\cdot10^{-9}$
Cuivre	$16\cdot10^{-9}$
Or	$22\cdot10^{-9}$
Aluminium	26.10^{-9}
Magnésium	$46\cdot10^{-9}$
Bronze	$55\cdot10^{-9}$
Zinc	$60\cdot10^{-9}$
Nickel	$70\cdot10^{-9}$
Laiton	$70\cdot10^{-9}$
Cadmium	$76\cdot10^{-9}$
Platine	$94\cdot10^{-9}$
Fer	$104\cdot10^{-9}$
Étain	$142\cdot10^{-9}$
Plomb	$207\cdot10^{-9}$

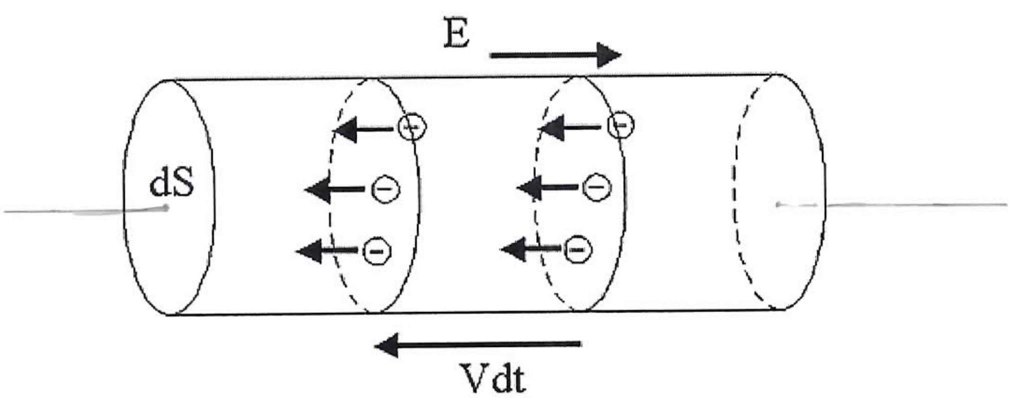
IV.2- ***Conductivité*** γ

C'est une mesure de la capacité d'un matériau à conduire un courant électrique. On la mesure en plaçant le conducteur dans un champ électrique extérieur E et en mesurant la densité de courant qui en résulte.

a- ***Loi d'Ohm généralisée*** /microscopique : $\boxed{\vec{J} = \gamma\cdot\vec{E}}$

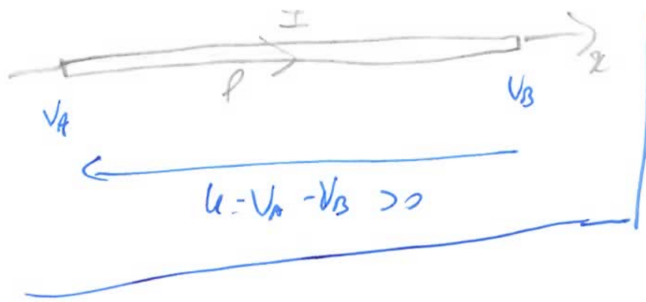
Soit un conducteur de section S, de longueur l soumis à une tension U.

D'après la loi d'Ohm, on a :



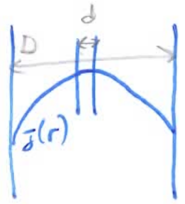
$\boxed{J = \gamma . E}$!

Démo hypothèses : Un fil de longueur l, de section S, de résistivité ρ, traversé par I



Loi d'Ohm :

$U = RI = \left(\rho \cdot \frac{l}{S}\right) \cdot I \quad \left(\text{car } R_{fil} = \rho \cdot \frac{l}{S}\right)$



Sur d = diamètre du fil J peut être considéré comme constant

$I = \iint J\, dS = J \iint dS = J \cdot S$

d'où $\frac{I}{S} = J \Rightarrow \boxed{U = \rho \cdot l \cdot J}$ (1)

relier U à E c'est utiliser $\vec{E} = \vec{grad}(V)$

fil "fin" $\longrightarrow$ coords cartésiennes

$\Rightarrow \vec{grad} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ fil sur $\vec{Ox}$, $\Rightarrow$ V ne dépend que de x de $V_A \to V_B$

$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{grad}(V) \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dx} \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$

$dV = -E\,dx$

$\int_{V_A}^{V_B} dV = -E \int_{x_A}^{x_B} dx$

$V_B - V_A = -E\,(x_B - x_A)$

$-U = -E \cdot l$

$\boxed{U = E \cdot l}$ (2)

(2) dans (1)

$\Rightarrow E \cdot \cancel{l} = \rho \cdot \cancel{l} \cdot J$

$J = \frac{1}{\rho} E$

Si $\frac{1}{\rho} \nearrow \Rightarrow J \nearrow \Rightarrow$ bonne conduction

On pose donc $\gamma = \frac{1}{\rho}$ = conductivité

$\boxed{\vec{J} = \gamma \vec{E}}$ (CQFD) (4e loi d'électrocinétique) b- ***Calcul de la conductivité γ en fonction des éléments microscopiques***.

On place un conducteur dans un champ électrique extérieur uniforme E. En négligeant les frottements et en considérant le mouvement pendant un intervalle de temps égal au temps moyen entre deux collisions successives, les porteurs de charges (les électrons) ne seront soumis qu'à la force électrostatique : $\vec{F}_e = q.\vec{E}$.

A l'aide de lois électrocinétiques on montre que la conductivité s'écrit :

$$\boxed{\gamma = \frac{n_e.e^2.\tau}{m_e}}$$

n_e : la densité électronique
m_e : est la masse de l'électron
e : la valeur absolue de la charge de l'électron
τ : le temps moyen entre deux collisions successives

b) frottements négligeables

PFD $\quad \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow a\,?$

cinématique $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow v? \Rightarrow \langle v \rangle$ valeur moyenne de v

électrocinétique $\quad J = n\,|q|\,\langle v \rangle$

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$

conductivité $\quad \gamma = ?$

F_{ext} : $\vec{P}$, $\vec{F_e}$, $\vec{f}_{collision}$ / $\vec{f}_{frotts}$

$\vec{P}$: négligeable à l'échelle atomique ; $\vec{f}_{collision}$: négligeable ; $\vec{f}_{frotts}$: négligeable

$\vec{f}_{coll}$ (car l'électron se fait percuter sur ΔT = intervalle de temps entre 2 collisions successives)

d'où $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F_e} = q_{e^-} \cdot \vec{E}$

$\vec{E}$: champ électrique appliqué au conducteur

$\sum \vec{F}_{ext} = m_e \vec{a}$ $\quad$ (a = accélération)

$q_{e^-} \vec{E} = m_e \vec{a}$ $\quad$ m_e = masse d'un e^-

q_{e^-} = charge d'un e^-

$\underbrace{|q_{e^-}|}_{e} E = m_e a$

$\boxed{a = \dfrac{eE}{m_e}}$ (accélération)

*** Calcul de $\vec{v}$**

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a \int_{t_0}^{t} dt$

$v_0 = 0$ à $t_0 = 0$ $\qquad t - t_0 = \Delta t$

$v = a \cdot \Delta t \Rightarrow \langle v \rangle = a \underbrace{\langle \Delta t \rangle}_{\tau}$

$\langle v \rangle = a\,\tau$

$\langle v \rangle = \dfrac{eE}{m_e}\,\tau$

*** électrocinétique :** $\vec{J} = n_e q_{e^-} \vec{v} \Rightarrow J = n_e |q_{e^-}| \langle v \rangle$

$J = n_e \cdot e \cdot \dfrac{eE}{m_e}\tau = \left(\dfrac{n_e \cdot e^2 \cdot \tau}{m_e}\right) E = \gamma E$ (loi d'Ohm généralisée)

On identifie donc le γ

$\boxed{\gamma = \dfrac{n_e \cdot e^2 \cdot \tau}{m_e}}$ CQFD

Si • $\tau \nearrow$, peu de collisions $\Rightarrow$ bonne conduction ($\gamma \nearrow$)

• $\tau \searrow$, bcp de collisions $\Rightarrow$ mauvaise conduction ($\gamma \searrow$)

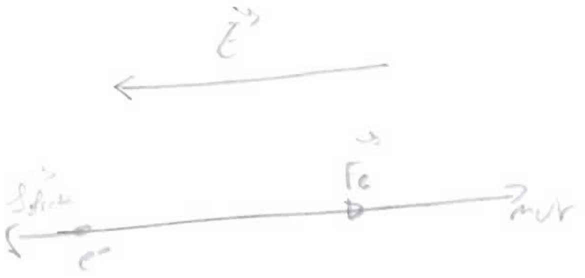
$\boxed{\text{b2 Avec frottements}}$ $\vec{f}_{frott} = -\alpha \vec{v}$

où α = coef de frotts qui dépend de la nature du milieu conducteur

$$\|\vec{f}\| = \alpha \langle v \rangle$$

* $\sum \vec{F}_{ext} = m_e \vec{a}$

$$q_{e^-} \vec{E} - \alpha \vec{v} = m_e \vec{a}$$



projection sur l'axe du mvt

$$eE - \alpha \langle v \rangle = m_e a$$

$$a = \frac{\langle v \rangle}{\tau} \quad \text{(voir b.1)}$$

$$eE - \alpha \langle v \rangle = m_e \frac{\langle v \rangle}{\tau}$$

$$\Rightarrow eE = \langle v \rangle \left(\alpha + \frac{m_e}{\tau} \right)$$

$$\langle v \rangle = \frac{eE}{\alpha + \frac{m_e}{\tau}}$$

* $j = n_e |q_{e^-}| \langle v \rangle$

$$= n_e \cdot e \cdot \frac{eE}{\alpha + \frac{m_e}{\tau}}$$

$$j = \left(n_e \frac{e^2}{\alpha + \frac{m_e}{\tau}} \right) E = \gamma E$$

d'où $\boxed{\gamma = \frac{n_e \cdot e^2}{\alpha + \frac{m_e}{\tau}}} = \frac{n_e \cdot e^2 \tau}{m_e + \alpha \tau}$

Si $\alpha = 0$ (pas de frotts)
on retrouve le γ de (b1)
càd $\gamma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$