2 Séries numerique

Cours

Si $\sum u_n$ cv. alors $u_n \to 0$

règles de comparaison :

- $0 \leq u_n \leq v_n$
  - . $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv
  - . $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

- . Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Bilan : Pour étudier la convergence d'une série, on est donc amené à simplifier l'expression du terme général par majoration / minoration / équivalence.

Pb : Il faut avoir des séries de référence.

Série de Riemann :

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Règle de d'Alembert : (Très efficace lorsque le t.g comporte puissance, suite géo, et factorielle).

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs
On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Si $0 \leq l < 1$, alors $\sum u_n$ CV
- Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ div.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure

Exemples :

- $u_n = \dfrac{3^n . n^{15}}{n!}$ -> Règle de d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{3}^{n+1} . (n+1)^{15}}{(n+1)!} . \frac{n!}{\cancel{3}^n . n^{15}}$$

$$= \frac{3}{(n+1)} . \frac{(n+1)^{15}}{n^{15}}$$

$$= \frac{3(n+1)^{14}}{n^{15}} \sim \frac{3n^{14}}{n^{15}} \left(\text{Car } n+1 \underset{+\infty}{\sim} n\right)$$

$$\text{d'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{3}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ Converge.

- $u_n = \dfrac{1 + \sin n}{\sqrt{n^3+n} \times \cos\left(\frac{1}{n}\right)} \geq 0$

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{\sqrt{n^3+n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{2}{\sqrt{n^3+n}}$$

$$\sim \frac{2}{n^{3/2}}$$

Comme $3/2 > 1$, alors d'après Riemann,

$\sum \frac{2}{n^{3/2}}$ Converge, donc $\sum \frac{2}{\sqrt{n^3+n}}$ converge,

donc $\sum \frac{2}{\sqrt{n^3+n} \times \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$, et par majoration, $\sum u_n$ converge.

- $e^{-\ln^3 n}$

On a $n^2 e^{-\ln^3 n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

donc pour n assez grand, $n^2 e^{-\ln^3 n} \leq 1$

$$0 \leq e^{-\ln^3 n} \leq \frac{1}{n^2}$$

or $2 > 1$, donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum e^{-\ln^3 n}$ converge

(on a pris $\frac{1}{n^2}$ pour majorer.)

<u>Exercice 1:</u> 1) $U_n = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$

$$= \ln\left(\frac{(n^2+2n)\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)}{n^2+2n}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n^2+2n}}_{u}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2+2n} \underbrace{- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2+2n}\right)^2}_{} + o\left[\left(\frac{1}{n^2+2n}\right)^2\right]$$

l'ordre 2 inutile ici.

$$\sim \frac{1}{n^2+2n}$$

$$\sim \frac{1}{n^2} > 0$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum U_n$ converge.

Exemples :

$u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

$\sim \frac{1}{n} > 0$

or $\sum \frac{1}{n}$ dv donc

$\sum u_n$ dv.

$u_n = \frac{4^n}{n!}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$

$l<1$ donc $\sum u_n$ cv par la règle de d'Alembert

$u_n = \frac{1+\cos(n)}{n^5+n}$

$0 \leq u_n \leq \frac{2}{n^5+n}$

$= \frac{2}{n^5(1+\frac{1}{n^4})}$

$\sim \frac{2}{n^5} > 0$

$\sum \frac{1}{n^5}$ cv donc $\sum u_n$ cv

$u_n = \frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{n e^{1/n}}$

$= \frac{1 - \frac{1}{2n^2} - 1 + o(\frac{1}{n^2})}{n e^{1/n}}$

$\sim \frac{-\frac{1}{2n^2}}{n}$ & $e^{1/n} \to 1$

$u_n \sim -\frac{1}{2n^3} < 0$ (signe cst neg)

$\sum u_n$ cv

2) $u_n = (\ln(n))^{-\sqrt{n}}$

$= e^{-\sqrt{n}\ln(\ln(n))}$

On a $n^2 e^{-\sqrt{n}\ln(\ln(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc pour n assez grand, $n^2 e^{-\sqrt{n}\ln(\ln(n))} \leq 1$

d'où $0 \leq e^{-\sqrt{n}\ln(\ln(n))} \leq \frac{1}{n^2}$

3) $u_n = e - (1+\frac{1}{n})^n$

$u_n = e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

$u_n = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$

$u_n = e - e \times e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$

$= e - e\,(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}))$

$\sim \frac{e}{2n} > 0$ $\quad \sum \frac{e}{2n}$ dv

donc $\sum u_n$ dv.

4/ $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1}$

$= n^{3/2}\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}_{u}\right)^{1/2}}_{(1+u)^{\alpha}} - n^{3/2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}_{u}\right)^{1/2}$

$= n^{3/2}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$- n^{3/2}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= \underbrace{n^{3/2}\times\frac{1}{2n^3}}_{\frac{n^{-3/2}}{2}} + \underbrace{n^{3/2}\times\frac{1}{2n^3}}_{\frac{n^{-3/2}}{2}} + o\left(\frac{n^{3/2}}{n^3}\right)$

$= \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}} > 0$ or a $\frac{3}{2} > 1$ donc

$\sum u_n$ CV car $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ CV.

5/ $u_n = \frac{2\times4\times\dots\times2n}{(n!)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\frac{\cancel{2\times4\times\dots}\times(2n+2)}{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}} \times \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{2\times4\times\dots\times2n}}$

$\Rightarrow \frac{(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)}$

$\sim \frac{2}{n} \longrightarrow 0 < 1$

$\sum u_n$ CV car $\sum \frac{2}{n}$ CV.

6/ $u_n = \dfrac{(n!)^\alpha}{n^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alembert:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!^\alpha}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{(n!)^\alpha}$$

$$= \frac{(n+1)^\alpha \, n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)} \times \frac{n^n}{(n+1)^n} \qquad = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= (n+1)^{\alpha-1} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= \exp\left[-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left(-1 + o(1)\right) \longrightarrow e^{-1}$$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim e^{-1}(n+1)^{\alpha-1}$

3 cas présents:

$\alpha - 1 > 0$: (ie $\alpha > 1$) alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow +\infty > 1$ } dv

$\alpha - 1 = 0$: (ie $\alpha = 1$) alors $\longrightarrow e^{-1} < 1$ } cv

$\alpha - 1 < 0$: (ie $\alpha < 1$) alors $\longrightarrow 0 < 1$

Conclu: $\boxed{\sum u_n \text{ cv} \iff \alpha \leq 1}$

7) $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ où $a \in \mathbb{R}$

$u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{n}{n+a}\right)\right)$

$u_n = \exp\left(-n^2 \ln\left(\frac{n+a}{n}\right)\right)$

$u_n = \exp\left(-n^2 \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right)$

$u_n = \exp\left(-n^2\left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{a}{n}\right)\right)\right)$

$u_n = \exp\left(-an + o(n)\right)$

3 cas possibles

$a<0$: $u_n \to +\infty$ $\sum u_n$ dv

$a=0$: $u_n \to 1$ $\sum u_n$ dv car ne tend pas vers 0.

$a>0$:

$n^2 \times u_n = n^2 \left(\exp(-na + o(n)\right) \longrightarrow 0$

donc pour n assez grand $n^2 \ u_n \leq 1$

$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv donc $\sum u_n$ cv

Concl : $\sum u_n$ cv ssi $a>0$

8) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}$

$\sim \frac{n^2}{n^2} \times \frac{1}{2^{(n+1)^2 - n^2}}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{2^{2n+1}} \longrightarrow 0$

$\sum u_n$ CV d'après d'Alembert

TD2:

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite >0 tq

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha$$

avec $\alpha > 1$.

1) mq $\forall n \geq 2$, $\frac{u_n}{u_1} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

initialisation :

pour $n = 2 = k+1$ $\quad \frac{u_n}{u_1} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ ok

récurrence :

Soit p tq $\frac{u_p}{u_1} \leq \frac{1}{p^\alpha}$ vrai, mq c'est vrai pour $p+1$:

$$\frac{u_{p+1}}{u_1} \leq \frac{1}{(p+1)^\alpha}$$

$$\frac{u_{p+1}}{u_1} \times \frac{u_p}{u_p} \leq \frac{1}{(p+1)^\alpha} \longrightarrow \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \times \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

méthode rapide :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \cdots \frac{u_2}{u_1}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

2) $\sum u_n$ $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{u_1}{n^\alpha} \longrightarrow \sum \frac{u_1}{n^\alpha}$ cv. $(\alpha > 1)$

car $(u_1 > 0)$

donc $\sum u_n$ cv.

3) $$u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\times\frac{1}{2n+1}$$

a) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n\times(2n+2)}\times\frac{1}{2n+3}\times\frac{2\times 4\times\cdots\times 2n\times(2n+1)}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \quad (*)$$

$$\sim \frac{4n^2}{2n\times 2n} = 1$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

$l = 1$ donc d'Alembert ne peut pas de conclure.

b) D'après $(*)$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(2n)^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\cancel{2n}\left(1+\frac{2}{2n}\right)\cancel{2n}\left(1+\frac{3}{2n}\right)}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)}$$

TD2

2/3/c/ c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-1}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(1-\frac{1}{n}\right) \times \left(1-\frac{3}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{3}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{5}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= 1+\frac{1}{n} - \frac{5}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

TD3

- $u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2} > 0$

$\sum u_n$ cv car $\alpha > 1$ d'après Riemann

- $v_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1-\frac{3}{n}\right)}$

$= e^{n\left(-\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \sim e^{-3} \neq 0$

$v_n \not\to 0$ donc $\sum v_n$ dv.

- $w_n = n^{-\sqrt{n}} \Rightarrow = e^{-\sqrt{n}\ln(n)}$

$\Rightarrow n^2 w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc

$n^2 w_n \leq 1$

$0 \leq w_n \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum w_n$ cv

- $y_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{4/3}}$

$\cancel{y_n \leq \frac{1}{n^{4/3}}}$ → on ne peut pas conclure.

→ par équivalents :

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim$ DL → $\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$y_n \sim \dfrac{1}{n^{5/3}} > 0$ $\quad$ $5/3 > 1 \to$ CV.

donc $\sum y_n$ CV.

Suite correction :
eso 2

4) a) Mq $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{5/4}$

rappels : $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{3}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

Effectuons le DL_1 de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{5/4}$

$= \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-5/4} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-5/4}$

comparons

$= \boxed{1 - \dfrac{5}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{5/4}$$

$$= -\frac{3}{2n} - \left(-\frac{5}{4n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{4n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Rappel :

$$\left[\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \exists\, \varepsilon_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \ / \ u_n = \varepsilon_n v_n \end{array}\right]$$

$\exists\, \varepsilon_n \longrightarrow 0$ tq $o\left(\frac{1}{n}\right) = \varepsilon_n \times \frac{1}{n}$

Comme $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N_0$, $\varepsilon_n \leq \frac{1}{8}$

donc $\forall n \geq n_0$, $o\left(\frac{1}{n}\right) = \varepsilon_n \times \frac{1}{n}$

$$\leq \frac{1}{8n}$$

Par conséquence , $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{5/4} = -\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\leq -\frac{1}{4n} + \frac{1}{8n}$$

$$= -\frac{1}{8n}$$

$$\leq 0$$

Ainsi

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{5/4}$$

4.b Ici, $\alpha = \frac{5}{4} > 1$, donc par ce qui a été fait à la question 2 la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Et par csq, $\sum_{n \geq 0} u_n$ cv

Exercice 3 :

1) $u_{n+1} - u_n = \ln((n+\cancel{1}-1)!) - (n+1-\frac{1}{2})\ln(n+1) + \cancel{n+1}$
$-\left(\ln((n-1)!) - (n-\frac{1}{2})\ln(n) + \cancel{n}\right)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\quad = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln((n-1)!) + \frac{1}{2}\ln(n) + 1$
$-n\ln(n+1) - n\ln(n)$

$\frac{n!}{(n-1)!} = n$ $\quad = 1 + \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) + \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n+1)$

$= 1 + \frac{3}{2}\ln(n) - \frac{1}{2} - n\ln(n+1) - n\ln(n)$ $\quad -\frac{1}{2}\left(n - \frac{n^2}{2}\right)$

$= \ln(n!) - n\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + 1 - \ln((n-1)!) - n\ln(n)$
$+ \frac{1}{2}\ln(n)$

$= \ln(n) - (n+\frac{1}{2})\ln(n+1) - n\ln(n) + 1$

Correction

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{\ln(n!) - \ln((n+1)!)} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n + n+1-n$$

$$= \ln(n) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) + 1$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + 1$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[-\ln(n) + \ln(n+1)\right]$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

2) mq $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{3n^2} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{12n^2}$$

3/ $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{12n^2}$ Or $\sum -\frac{1}{12n^2}$

Converge, donc $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

d'après la prop du cours

Notons S la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k$

$u_n = \underbrace{u_n - u_{n-1}} + \underbrace{u_{n-1} - u_{n-2} + \dots + u_1 - u_0} + u_0$

$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k}_{} + u_0$

$\xrightarrow[n\infty]{} S + u_0$

donc u_n $\underline{CV}$

4) $e^{u_n} = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} = e^{\ln((n-1)!) - (n-\frac{1}{2})\ln(n) + n}$

On note ℓ la limite de (u_n)

$= e^{\ln((n-1)!)} \times e^{-(n-\frac{1}{2})\ln(n)} \times e^n$

$= (n-1)!\, e^{-n\ln n} \times e^{\frac{1}{2}\ln n} \times e^n$

$= (n-1)! \frac{1}{n^n} \times \sqrt{n} \times e^n$

$= \frac{n!}{n} \frac{1}{n^n} \sqrt{n}\, e^n = \boxed{\frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}}$

$\rightarrow$

Suite 3/4. $e^{u_n} = \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}$

$n! = \dfrac{n^n \sqrt{n}\, e^{u_n}}{e^n}$ $\quad e^{u_n} \to \ell$

or $u_n \to \ell$

donc $e^{u_n} \longrightarrow e^{\ell}$

donc $e^{u_n} \sim e^{\ell}$

donc $n! \sim n^n e^{\ell} e^{-n} \sqrt{n}$

TD4 __Rappels de cours__ : $\sum u_n$ à termes positifs

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

→ si $a > 1$, $\sum u_n$ converge

→ si $a < 1$, $\sum u_n$ div

__Exercice 1 : Suite__ 9) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} a^n$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 1 suite

9) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2(n+1))!} \times \frac{a^{n+1}}{a} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = a\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = a\frac{(n+1)}{(4n+2)}$ $\underset{\sim}{\nearrow} n$ $\underset{\sim}{\searrow} 4n$

. Si $\frac{a}{4} < 1 \rightarrow \sum$ cv d'après d'Alembert

. Si $\frac{a}{4} > 1 \rightarrow \sum$ dv d'après d'Alembert

. Si $\frac{a}{4} = 1 \rightarrow a = 4$, d'Alembert ne permet pas de conclure, on passe donc par duhamel.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \times a = \frac{4n+4}{4n+2} = \frac{4n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{4n\left(1+\frac{2}{4n}\right)}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= 1-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

or $-\frac{1}{2} < 1$ donc d'après la règle de Duhamel.

$\sum U_n$ diverge.

$n = \sqrt[n]{n^n}$

10) $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n} = e^{\ln(n)^2 - n\ln^2(n)}$

$\sqrt[n]{u_n} = \ln(n)^{-1}\sqrt[n]{n^{\ln(n)}} = \ln(n)^{-1} \times n^{\frac{1}{n}\ln(n)}$

$= \dfrac{e^{\frac{\ln(n)^2}{n}}}{\ln(n)}$

<u>or</u> $\dfrac{\ln(n)^2}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

<u>donc</u> $e^{\frac{\ln^2 n}{n}} \longrightarrow 1$

donc $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow 0$

et par la règle de Cauchy, $\sum u_n$ cv.

<u>Exercice</u> : 1/ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère la serie $\sum u_n$ où

$u_n = \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}$

<u>On suppose $\alpha < 0$</u>.

Déterminons un équivalent de $\ln(1+n^\alpha)$ en $+\infty$:

dl : $\ln(1+n^\alpha) = n^\alpha + o(n^\alpha)$

Si α négatif, $n^\alpha = \dfrac{1}{n^{-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sum u_n$ cv.

donc $u_n = \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta} \sim \dfrac{n^\alpha}{n^\beta}$

Soit $u_n \sim \dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}} > 0$, $\sum u_n$ cv ssi $\boxed{\beta-\alpha > 1}$

$\boxed{\text{si } \beta > \alpha+1}$

2/ $\boxed{\alpha > 0}$

$$\ln(1+n^\alpha) = \ln\left(n^\alpha\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$
$$= \ln(n^\alpha) + \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
$$= \alpha\ln(n) + \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \alpha\ln(n)$$

On a donc :

$$u_n = \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta} \sim \frac{\alpha\ln(n)}{n^\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{n^\beta(\ln n)^{-1}} > 0 \quad \text{cv } \underline{\text{ssi}} \ \beta > 1$$

donc $\sum u_n$ cv ssi $\boxed{\beta > 1}$

3/ $\boxed{\alpha = 0}$

u_n devient donc $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n^\beta}$, donc $\sum u_n$ cv ssi $\boxed{\beta > 1}$

4) Conclusion : $\sum V_n$ converge ssi :

$[\alpha \geq 0$ et $\beta > 1]$ ou $[\alpha < 0$ et $\beta > \alpha + 1]$

Cours

Théorème des séries alternées :

$\sum u_n$ une série alternée tq

(1) $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$

(2) $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante

Alors $\sum u_n$ converge

Exemples :

- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{4/5}}$

  $|u_n| = \dfrac{1}{n^{4/5}}$ est $\searrow$

  donc $\sum u_n$ cv

  $\sum u_n$ est alternée.

- $V_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$

  $V_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$

  $\sum$ cv mais n'est pas de signe cst donc le critère de $\sim$ ne s'applique pas.

$$V_n = \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{u}\right)^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{u_n} - \underbrace{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

TSA $\quad w_n \sim -\frac{1}{n^2}$ ↳ $\sum w_n$ cv

↳ $\sum u_n$ cv

donc $\sum V_n$ cv.

Exercice 1 suite

11) $u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ série alternée. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0}$

$|u_n| = \frac{1}{n\ln(n)} \searrow$) donc $\sum u_n$ cv d'après le TSA.

12) $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ série alternée $\to 0$ $\Rightarrow |u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

car $\ln(n) \nearrow$ moins vite que n.

Correction
C201
suite

11) $\cdot\ U_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

. La série $\sum U_n$ est alterné,

. $|U_n| = \dfrac{1}{n\ln n}$ donc $(|U_n|)$ est décroissante car

$\begin{cases} (n) \text{ est une suite croissante} \\ (\ln n) \text{ ——— croissante} \end{cases}$

. $U_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Donc d'après le théorème des séries alternées,

$\sum U_n$ converge

12) $U_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

. La série $\sum U_n$ est alternée

. $U_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ par croissance comparée.

. Montrons alors que $(|U_n|)$ est décroissante, on pose la fonction : $f : x \in]0,+\infty[\longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\forall x \in]0,+\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

$\times \left(f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$

$1 - \ln(x) \geq 0$ croissant sur $\mathbb{R}$.

on compare : $\ln(x) \leq 1$

et par exponentielle : $x \leq e$

$\rightarrow$

d'où

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, f est $\searrow$ sur $[e; +\infty[$ et, donc

$(|u_n|)$ est $\searrow$ à partir de $n=3$

Conclusion : Par le th des séries alternées,

$\sum_{n\geq 3} u_n$ converge

donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

13) $u_n = \dfrac{n^4 2^{-n^2} + (-1)^n}{\sqrt{n}}$

. La série $\sum u_n$ est alternée

$$u_n = \underbrace{\frac{n^4 2^{-n^2}}{\sqrt{n}}}_{v_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{w_n \to \text{alterné}}$$

$(|w_n|) \longrightarrow 0$ et $\searrow$, donc $\sum w_n$ cv

d'après Th séries alternées.

→ Deux méthodes pour $\sum V_n$

① $V_n = n^{4-\frac{1}{2}} \times 2^{-n^2}$

$= n^{7/2} \times e^{-n^2 \ln(2)}$

$n^2 \times V_n = n^2 \times n^{7/2} e^{-n^2 \ln(2)}$

$= n^{11/2} e^{-n^2 \ln(2)}$

$\xrightarrow[n\infty]{} 0$

Donc pour n assez grand, $n^2 V_n \leq 1$

$0 \leq V_n \leq \frac{1}{n^2}$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv donc $\sum V_n$ converge.

② $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(n+1)^4 2^{-(n+1)^2}}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{n^4 2^{-n^2}}$

$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \times \frac{2^{-(n+1)^2}}{2^{-n^2}} \times \frac{(n+1)^4}{n^4}$

$\sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times 2^{-(n+1)^2 + n^2} \times \frac{n^4}{n^4}$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \sim 2^{-2n-1} = e^{(-2n-1)\ln 2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

La règle d'Alembert assure que $\sum V_n$ cv.

En tant que somme de deux séries convergentes

$\sum U_n$ converge.

Exercice 4 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sum U_n$ où $U_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$

1/ $\sum \frac{(-1)^n}{n^a} \to$ nature ?

$a > 1 \to$ Suite alterné $\left|\frac{(-1)^n}{n^a}\right| \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $\searrow$

donc d'après le TH des série alterné, $\sum U_n$ cv.

2/ $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^a}$ Pas de signe de constant pas équivalent.

3) Déterminons $k \in \mathbb{R}$ tq $U_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{k}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{V_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)}_{W_n}$$

Suite exo 4) $\cdot \sum V_n$ converge (cf question 1)

$\cdot\ W_n \sim -\dfrac{1}{2n^{2a}} \leq 0.$

or $\sum -\dfrac{1}{2n^{2a}}$ cv ssi $2a > 1$ ie $a > \dfrac{1}{2}$

donc il en est de même pour $\sum W_n$.

Ainsi, $\sum U_n$ cv ssi $a > \dfrac{1}{2}$

Entraînement $U_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \quad V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$W_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right) \quad Z_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

étudier leur séries de t.g.

- $U_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = n\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 + o(1)$

  $(U_n) \not\to 0$ donc $\sum$ dv

- $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

  $= \dfrac{1}{n} > 0$

  Serie de Riemann avec $\alpha = 1$ donc (V_n) dv.

  donc $\sum V_n$ dv

■ $W_n = \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \sim \frac{\pi}{n^2} > 0$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$ donc $\sum W_n$ cv

■ $Z_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

① $\sum u_n$ ~~est~~ alterné avec $|u_n| = \frac{1}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $(|u_n|)$ tend vers zéro en décroissant

donc $\sum V_n$ cv.

② $|u_n| = \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv donc $\sum u_n$ cv absolument,

donc converge

Exercice 5 :

$u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1/ mq $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ on a

$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln(n+1) - \ln(n-1)$

$= \ln(n) - \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

2) $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

3) $\left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^{\beta} = \frac{2^{\beta}}{n^{\beta}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$= \frac{2^{\beta}}{n^{\beta}}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{u \to 0}\right)^{\beta}$$

$$u_n = (-1)^n n^{\alpha} \frac{2^{\beta}}{n^{\beta}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^n \frac{2^{\beta}}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

4) $\boxed{\beta \leq \alpha}$

si $\boxed{\beta < \alpha}$ $u_n = (-1)^n 2^{\beta} \underbrace{n^{\alpha-\beta}}_{\longrightarrow} \underbrace{\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1}$

$|u_n| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Si $\boxed{\beta = \alpha}$

$|u_n| \xrightarrow[n\infty]{} 2^\beta \neq 0$ donc $u_n \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} 0$

5. $\boxed{\beta > \alpha}$

(a) d'après la quest 3,

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + \underbrace{\frac{(-1)^n \beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right)}$$

$$= (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n$$

(b) $|v_n| \sim \dfrac{|\beta|\, 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} > 0$

or $\beta - \alpha > 0$ donc $2+\beta-\alpha > 2 > 1$

donc $\sum \frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}$ cv donc $\sum |v_n|$ cv

donc $\sum v_n$ cv absolument.

(c) $w_n = (-1)^n \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$

. $\sum w_n$ est alterné

$|W_n| = \frac{2\beta}{n\beta - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

et $(|W_n|)$ decroissant $\Big\}$ car $\beta - \alpha > 0$

donc par le CSA, $\sum W_n$ cv.

ii) $u_n = V_n + W_n$

$\sum V_n$ cv abs donc $\sum V_n$ cv

$\sum W_n$ cv

donc $\sum u_n$ cv en tant que somme de 2 séries convergentes.

Exercice 7 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div car $\frac{1}{2} = \alpha < 1$ (Riemann)

b. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Rappel: Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

* (a_n) est croissante

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0$

* (a_n) n'est pas majorée.

Si (a_n) était majoré, étant croissante, elle convergerait, ce qui n'est pas le cas

Conclusion :
$$a_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

D'une manière générale : Toute série à termes ⊕ et divergente a sa suite des sommes partielles qui tend vers $+\infty$.

2) $$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + a_n}$$

(a) On va factoriser par a_n pour faire apparaître $\frac{1}{a_n}$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{a_n\left(1+\frac{(-1)^n}{a_n}\right)}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{a_n} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{a_n}\right)^{-1}$$

$$\frac{(-1)^n}{a_n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

$$= \frac{(-1)^n}{a_n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{a_n} + o\left(\frac{1}{a_n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{a_n}}_{S.C} \underbrace{- \frac{1}{a_n^2} + o\left(\frac{1}{a_n^2}\right)}_{S.\ de\ sg\ f}$$

suite 7) b) a_n est $\nearrow$ donc $\frac{1}{a_n}$ est $\searrow$, de plus

$$a_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \quad \frac{1}{a_n} \to 0$$

c) $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$ est alterné car $(a_n > 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
(de signe cst)

· $\left(\frac{(-1)^n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro en décroissant

Donc par le CSA, $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{a_n} \text{ CV}}$.

d) $$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} = \frac{4(n+2) - 4(n+1)}{2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{4}{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \quad \sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

idem pour la 2nde inégalité.

e. $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

mq $2\sqrt{n+1} - 2 \leq a_n \leq 2\sqrt{n} - 1$

par récurrence.

Init : pour $n=1$ $\underbrace{2\sqrt{1+1} - 2}_{\substack{2(\sqrt{2}-1) \\ \simeq 0{,}8}} \leq a_1 = 1 = 2\sqrt{1} - 1$

Supposons maintenant l'encadrement vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$

On souhaite encadrer

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq a_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq a_{n+1} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\geq \quad (2\sqrt{n+2} - 2) \qquad\qquad \leq \quad (2\sqrt{n+1} - 1)$$

$2\sqrt{n+2} - 2 \leq a_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$

f) $2\sqrt{n+1} - 2 \leq a_n \leq 2\sqrt{n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} - \frac{2}{2\sqrt{n}} \leq \frac{a_n}{2\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1} \leq \frac{a_n}{2\sqrt{n}} \leq \underbrace{1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1}$$

donc par encadrement, $\boxed{\frac{a_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1}$

g) Par définition, on a donc : $a_n \sim 2\sqrt{n}$

On en déduit $a_n^2 \sim 4n$

$$\frac{1}{a_n^2} \sim \frac{1}{4n}$$

$$-\frac{1}{a_n^2} \sim -\frac{1}{4n} < 0$$

donc $\sum -\frac{1}{a_n^2}$ dv (car $\sum -\frac{1}{4n}$ dv)

d'où $\boxed{\sum -\frac{1}{a_n^2} + o\left(\frac{1}{a_n^2}\right) \text{dv}}$

3) Somme d'une série cv avec série dv donc dv