

LOFO — Logique Formelle (Correction)

EPITA – Documents, ordinateurs et calculatrices sont interdits

Juin 2012 (1h30)

Bien lire les questions, chaque mot est important. Écrire court, juste, et bien. Une argumentation informelle mais convaincante est souvent suffisante.

Pour les questions à choix multiples (numérotées Q.1, Q.2 etc.) aucune réponse manuscrite ne sera corrigée : répondre sur les formulaires. Renseigner les champs d'identité. Il y a exactement une et une seule réponse juste pour ces questions. Si plusieurs réponses sont valides, sélectionner la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est *nul*, *non nul*, *positif*, ou *négatif*, cocher *nul* qui est plus restrictif que *positif* et *négatif*, tous deux vrais. Répondre incorrectement est plus pénalisé que de ne pas répondre.

1 λ-Calcul

Q.1 Quelle équivalence est *fausse* ?

✗ $x\lambda x \cdot xxx \equiv x\lambda y \cdot (yy)y$

✓ $x\lambda x \cdot xxx \equiv x\lambda y \cdot y(yy)$

✗ $x\lambda x \cdot xx \equiv x(\lambda y \cdot yy)$

✗ $\lambda xy \cdot xy \equiv \lambda ab \cdot ab$

Q.2 Quelle est la forme complètement parenthésée de $\lambda nfx \cdot f(nfx)$.

✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot (f((nf)x))))))$

✓ $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot (f((nf)x))))))$

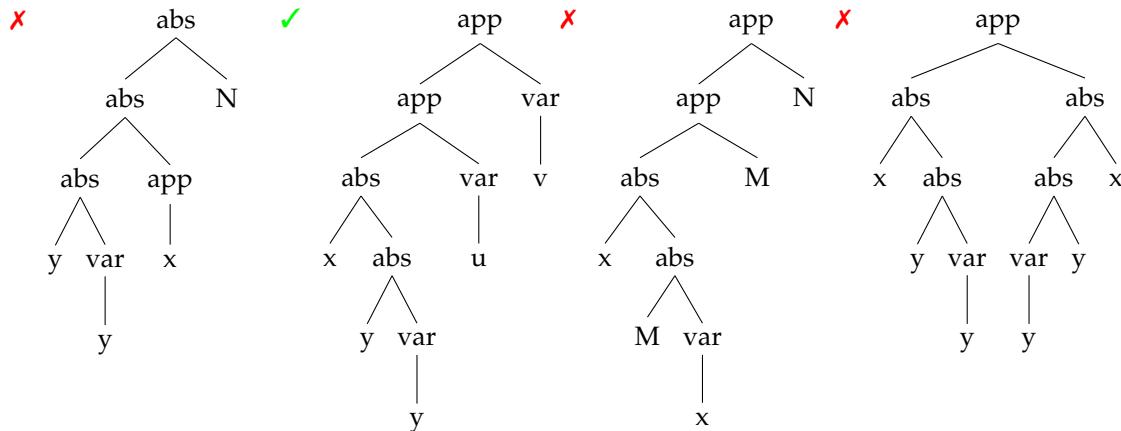
✗ $(\lambda x \cdot (\lambda f \cdot (\lambda n \cdot f)))((nf)x)$

✗ $(\lambda n \cdot (\lambda f \cdot \lambda x \cdot (f((nf)x))))$

Best-of:

- $((\lambda x).(\lambda y).(y(xx)y))((\lambda x).(\lambda y).(y(xx)y)))$

Q.3 Quel arbre de syntaxe abstraite est correct ?



Soit le combinateur suivant :

$$\Theta = (\lambda xy \cdot y(xy))(\lambda xy \cdot y(xy)) \quad (\text{Combinateur de Turing})$$

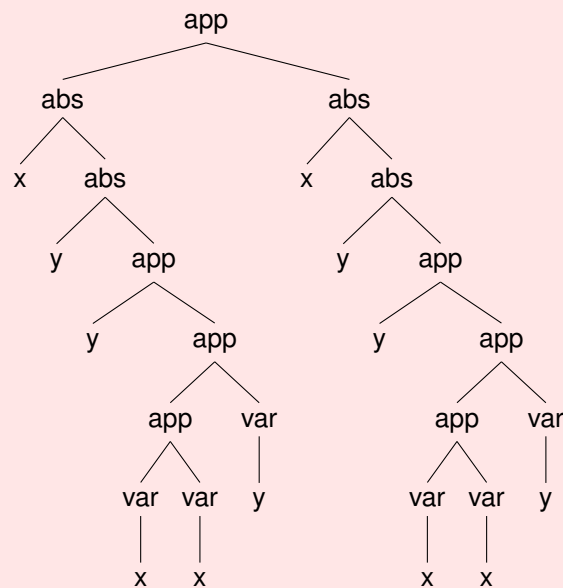
1. Écrire Θ en le parenthésant complètement.

Correction:

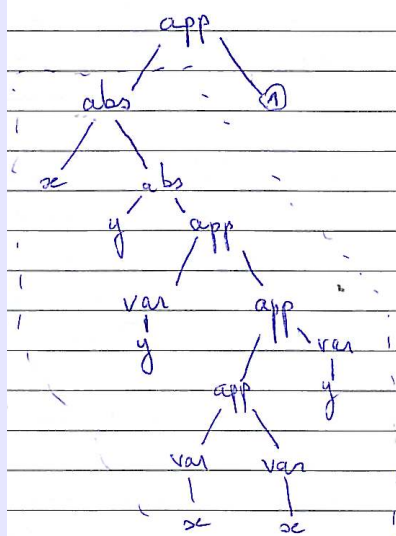
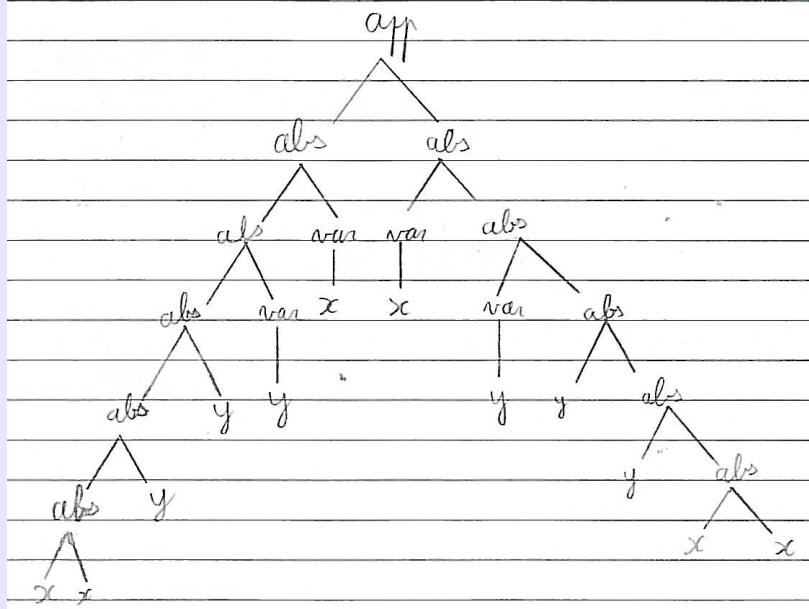
$$\Theta = (\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (y((xx)y))))(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot (y((xx)y)))) \quad (1)$$

2. Représenter l'arbre de syntaxe abstraite de Θ en utilisant les constructeurs var, abs et app, et les noms des variables pour feuilles.

Correction:



Best-of:



① : la branche est exactement la même que celle de gauche

3. Prouver que Θ est un opérateur de point fixe en démontrant que pour toute λ -fonction g on a $\Theta g =_{\beta} g(\Theta g)$.

Correction: Posons $\theta = \lambda xy \cdot y((xx)y)$, i.e., $\Theta = \theta\theta$. Alors

$$\begin{aligned}
 \Theta g &= (\theta\theta)g \\
 &= (\lambda xy \cdot y((xx)y) \theta) g \\
 &\rightarrow_{\beta} \lambda y \cdot y((\theta\theta)y) g \\
 &\rightarrow_{\beta} g((\theta\theta)g) \\
 &= g(\Theta g)
 \end{aligned}$$

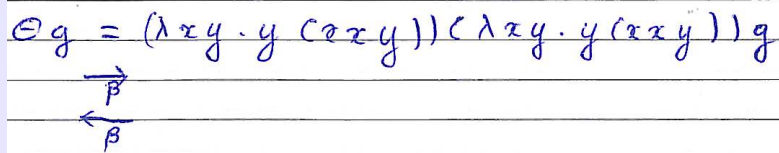
Barème: Je n'ai pas accepté les réponses qui font les deux réductions en une seule étape, surtout quand elles sont marquées par \rightarrow .

Best-of:

- La bêta-réduction $\Theta g \underset{\beta}{=} g(\Theta g)$ est vrai car le combinateur de Turing se décompose en 2 expressions tout à fait similaires. Il s'agit donc, par conséquent, d'un opérateur point-fixe.
- J'ai souvent vu des pseudo-réductions dans le style des suivantes. Je les consigne uniquement dans l'espoir que les générations futures ne feront plus de pareilles horreurs.

$$\begin{aligned}\Theta g &= ((\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)))g \\ &\rightarrow (\lambda xg \cdot g(xxg))(\lambda xg \cdot g(xxg)) \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta g &= ((\lambda xy \cdot y(xxy))(\lambda xy \cdot y(xxy)))g \\ &\rightarrow (g(xxg))(g(xxg)) \\ &\dots\end{aligned}$$

• 

4. Que permettent les combinateurs de point fixe ?

Correction: À simuler la récursion : ils prennent une fonction f , et en répètent l'application jusqu'à l'obtention d'un point fixe, i.e., un x tel que $x = f(x)$.

Best-of:

- À combiner des points fixes.
- Avoir un opérateur/élément neutre pour le lambda calcul.
- Ces opérateurs (sic) permettent de simplifier les expressions (re-sic).
- Ils permettent de dupliquer des variables à gauche.
- Les combinateurs de point fixe permettent de dupliquer les fonctions.
- Ils permettent de faire des applications infinies.
- Ils permettent de montrer qu'une variable n'a pas été modifiée par la fonction. Pour $f(x) = x^2$, on a 0 et 1 par exemple.
- Les combinateurs de point fixe permettent de réaliser des bêta-réductions qu'il n'aurait pas été possible de faire autrement.
- Les opérateurs de point fixes permettent de générer des entiers.
- Ils permettent
- Les combinateurs de point-fixe permettent de dédoubler un terme.
- Ils permettent de combiner les points-fixes, évidemment.
- Les combinateurs de point fixe permettent de se passer de λ .

2 λ -Calcul Simplement Typé

Q.4 Tout λ -terme est typable. . .

☒ vrai

☒ faux

Q.5 Tout λ -terme qui admet un type simple est. . .

☒ non nécessairement normalisable

☒ fortement normalisable

☒ faiblement normalisable

☒ normalisé

Q.6 Quel type admet $\lambda xy. xy$.

☒ $\rho \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$

☒ $(\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$

☒ $(\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$

☒ $(\tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)) \rightarrow \tau \rightarrow (\rho \rightarrow \rho)$

Correction: La réponse (d) n'est pas fausse, mais (b) est plus générale.

1. Le prouver.

Barème:

2 Si la preuve est correcte, mais les hypothèses ne sont pas déchargées.

Best-of:

↳ IP s'agit simplement d'une fonction qui prend 2 arguments et qui renvoie l'application du deuxième sur le premier.
Si nous notons / x le type de x
/ y le type de y
/ σ le type de l'application de y sur x

3 Calcul des Séquents Classique

1. Éliminer la coupure dans la preuve suivante.

$$\frac{\frac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B} \vee I \quad \frac{\frac{\overline{B \vdash B}}{B, A \vee B \vdash B} W \vdash}{A \wedge B \vdash B} Cut$$

Correction:

$$\frac{\frac{\overline{B \vdash B}}{B, A \vdash B} W \vdash \quad \frac{\overline{A, B \vdash B}}{A \wedge B \vdash B} \wedge \vdash$$

Best-of:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \text{Id} \\
 \frac{}{BVA \vdash BVA} \text{Id} \\
 \frac{B \vdash B \quad BVA \vdash BVA}{BVA \vdash B} \text{VR} \\
 \frac{BVA \vdash B}{BVA \vdash B} \text{VF} \\
 \frac{B, A \vdash B}{A, B \vdash B} \text{X} \vdash \\
 \frac{A, B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \wedge \vdash
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \text{Id} \\
 \frac{}{BVA \vdash BVA} \text{Id} \\
 \frac{B \vdash B \quad BVA \vdash BVA}{BVA \vdash B} \text{VR} \\
 \frac{BVA \vdash B}{BVA \vdash B} \text{VF} \\
 \frac{B, A \vdash B}{A, B \vdash B} \text{X} \vdash \\
 \frac{A, B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \wedge \vdash
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash B} \text{W} \vdash \\
 \frac{A, A \vdash B}{A \vdash B} \text{CF}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{VL} \\
 \frac{}{B \vdash B} \text{WL} \\
 \frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \vdash A \vee B} \vee \vdash \\
 \frac{B, A \vee B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \wedge \vdash
 \end{array}$$

Q.7 Pour toute preuve avec coupures...

- ✓ elle peut être normalisée en une preuve sans coupure mais ce processus est très coûteux
- ✗ elle peut être normalisée en une preuve sans coupure
- ✗ il existe une preuve sans coupure
- ✗ il n'existe pas nécessaire de preuve équivalente sans coupure

Q.8 Quelle déduction est une preuve de $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (Loi de Peirce)?

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash A} \quad \frac{}{B \vdash B} \Rightarrow \vdash \\
\frac{}{A, A \Rightarrow B \vdash B} \Rightarrow \vdash \\
\frac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B} \vdash X \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \frac{}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash A} \vdash W \\
\frac{}{A \vdash A, B} \vdash W \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A, A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \vdash C \\
\frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \quad \frac{}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \vdash X \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow B} \vdash X \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash C \quad \frac{}{A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A} \vdash \Rightarrow
\end{array}$$

Q.9 Quelle déduction prouve $(A \Rightarrow B) \vee A$?

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash A} \vdash W \\
\frac{}{A \vdash B, A} \vdash W \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B, A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A} \vdash \vee \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A, A \Rightarrow B \vee A} \vdash r\vee \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A} \vdash C \\
\frac{}{A \vdash A} \vdash W \\
\frac{}{A \vdash B} \vdash W \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A} \vdash \vee r
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{B \vdash B} \vdash W \\
\frac{}{B \vdash A, B} \vdash W \\
\frac{}{A \Rightarrow B \vdash A} \vdash \Rightarrow \\
\frac{}{\vdash A \Rightarrow B \vee A} \vdash r\vee \\
\frac{}{A \vdash A} \vdash C \\
\frac{}{\vdash A} \vdash C \\
\frac{}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee A} \vdash r\vee
\end{array}$$

Q.10 Cette preuve est-elle intuitionniste ?

- ✗ Non, elle part du tiers exclus.
- ✓ Non, certains des séquents ont deux formules à droite.
- ✗ Oui, $A \Rightarrow B$ est faux ssi A est vrai (et B est faux) donc on a bien intuitivement $(A \Rightarrow B) \vee A$.
- ✗ Oui, car aucun mot du langage n'apparaît dans les hypothèses.

Correction: Non, certains des séquents ont deux formules à droite (e.g., $A \vdash A, B$). Et effectivement, il suffit de prendre $B = \perp$ pour voir pourquoi ce résultat n'est pas (prouvable en logique) intuitionniste. Ça vous amusera peut-être d'apprendre que les propositions incorrectes sont tirées des best-ofs des années précédentes.

2. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation intuitionniste.

Correction:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash A} \vdash W \quad \frac{}{B \vdash B} \vdash W \quad \frac{}{\perp \vdash A} \vdash W \\
\frac{}{A, B \Rightarrow \perp \vdash A} \vdash W \quad \frac{}{B, B \Rightarrow \perp \vdash A} \vdash W \\
\frac{}{A \vee B, B \Rightarrow \perp \vdash A} \vdash \vee
\end{array}$$

Best-of:

3. Prouver $A \vee B, \neg B \vdash A$, en utilisant la négation classique.

Correction:

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A, \neg B \vdash A} W \vdash \quad \frac{\frac{\frac{B \vdash B}{B \vdash B, A} \vdash W}{B, \neg B \vdash A} \vdash \neg}{A \vee B, \neg B \vdash A} \vee \vdash$$

4 Dédution Naturelle Intuitionniste

Q.11 Quelle preuve de $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ est valide ?

✓
$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge rE \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge I}{B \wedge A} \wedge I$$

$$\frac{B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

✗
$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge rE \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge I}{B \wedge A} \wedge I$$

$$\frac{B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_{1,2}$$

✗
$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge rE \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge rE}{B \wedge A} \wedge I$$

$$\frac{B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

✗
$$\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge rE \quad \frac{[A \wedge B]^2}{A} \wedge I}{B \wedge A} \wedge I$$

$$\frac{B \wedge A}{B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_2$$

$$\frac{B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow I_1$$

1. Prouver $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.

Correction:

$$\frac{\frac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} \quad \frac{[A \wedge C]^1}{A}}{A} 1 \quad \frac{\frac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \frac{[A \wedge B]^2}{B} \quad \frac{[A \wedge C]^2}{C}}{B \vee C} 2}{A \wedge (B \vee C)}$$

2. Prouver $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Correction:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \quad \frac{A \wedge (B \vee C)}{A \wedge B} [B]^1 \quad \frac{A \wedge (B \vee C)}{A \wedge C} [C]^1 \\
 \hline
 \frac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} 1
 \end{array}$$

Best-of:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \quad \frac{A \wedge (B \vee C)}{A \wedge B} [B]^1 \quad \frac{A \wedge (B \vee C)}{A \wedge C} [C]^1 \\
 \hline
 \frac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} 1
 \end{array}$$

3. Prouver $B \vee \neg B$.**Correction:** Il est bien entendu impossible de démontrer le tiers exclu en logique intuitionniste.**Best-of:**

$$\begin{array}{c}
 \text{Si } B \text{ est vrai :} \\
 \hline
 [B] \\
 \hline
 B \vee \neg B \text{ vrai}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{Si } B \text{ est faux :} \\
 \hline
 [\neg B] \\
 \hline
 B \vee \neg B \text{ vrai}
 \end{array}$$

→ Dans tous les cas c'est vrai.

Prouver $B \vee \neg B$ est impossible en logique intuitionniste, à cause du tiers exclu.

3. $B \vee \neg B \Rightarrow \text{Id}$, pas besoin d'utiliser vos symboles bizarres puisque il s'agit ni plus ni moins d'un X OU (NON X). Or, on sait que le "ou" logique est vrai si l'une des 2 expressions en entrée est vrai. Or si B est vrai, $\neg B$ est faux par définition de l'opérateur "¬", est inversement. Donc $B \vee \neg B$ est forcément vrai.

B	$\neg B$	$B \vee \neg B$
T	F	T
F	T	T

T = vrai

F = faux.

5 À propos de ce cours

Bien entendu je m'engage à ne pas tenir compte de ces renseignements pour vous noter. Ils ne sont pas anonymes, car je suis curieux de confronter vos réponses à votre note. En échange, quelques points seront attribués pour avoir répondu. Merci d'avance.

Répondre sur les formulaires de QCM. Vous pouvez cocher plusieurs réponses par question.

Q.12 Assiduité

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> Jamais venu | <input checked="" type="checkbox"/> Souvent venu |
| <input checked="" type="checkbox"/> Presque jamais venu | <input checked="" type="checkbox"/> Toujours présent |

Q.13 Prises de notes

- | | | |
|--|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> Aucune | <input checked="" type="checkbox"/> Sur ordinateur à clavier | <input checked="" type="checkbox"/> Sur le journal du jour |
| <input checked="" type="checkbox"/> Sur papier | <input checked="" type="checkbox"/> Sur ardoise | |

Q.14 Travail personnel

- | | |
|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> Rien | <input checked="" type="checkbox"/> Fait les annales |
| <input checked="" type="checkbox"/> Bachotage récent | <input checked="" type="checkbox"/> Lu d'autres sources |
| <input checked="" type="checkbox"/> Relu les notes entre chaque cours | |

Q.15 Ce cours

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> Est incompréhensible et j'ai rapidement abandonné | <input checked="" type="checkbox"/> Est facile à suivre une fois qu'on a compris le truc |
| <input checked="" type="checkbox"/> Est difficile à suivre mais j'essaie | <input checked="" type="checkbox"/> Est trop élémentaire |

Q.16 Ce cours

- | | |
|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> Ne m'a donné aucune satisfaction | <input checked="" type="checkbox"/> Est nécessaire mais pas intéressant |
| <input checked="" type="checkbox"/> N'a aucun intérêt dans ma formation | <input checked="" type="checkbox"/> Je le recommande |
| <input checked="" type="checkbox"/> Est une agréable curiosité | |

Q.17 L'enseignant

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> N'est pas pédagogue | <input checked="" type="checkbox"/> Se répète vraiment trop |
| <input checked="" type="checkbox"/> Parle à des étudiants qui sont au dessus de mon niveau | <input checked="" type="checkbox"/> Se contente de trop simple et devrait pousser le niveau vers le haut |
| <input checked="" type="checkbox"/> Me parle | |