Théorème $\mathcal{E}(x) = f - P_n(x)$

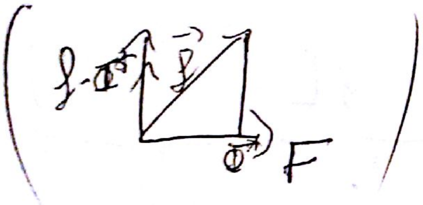
Si $\mathcal{E}(x)$ atteint, les valeurs max $+M, -M$ alternées en au moins $n+2$ points alors $P_n(x) = P_n^*(x)$

$(M = \max \|\mathcal{E}\|)$

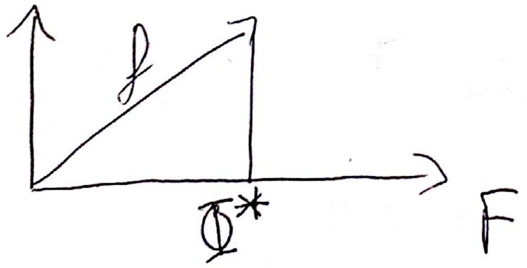
Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour que Φ^* soit une meilleure approx de f est que

$\langle f - \Phi^*, \Phi \rangle = 0 \quad \forall \Phi \in F$



$\langle a, f \rangle$: Produit scalaire



Base de polynôme de degré 2 : $(1, x, x^2)$

Lagrange Soit $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$

où $L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$\mathcal{E}(x) = f - P_n(x)$

Scanned by CamScanner

$$= \sqrt{\frac{9}{20} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{20} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}$$

$$\text{Si } f \in C^{n+1}[a,b], \exists \rho \in [a,b] \,/\, \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{\mathcal{E}(x)} = \prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\rho x)}{(n+1)!}$$

Newton

$$P_0(x) = f(x_1)$$

$$P_{m+1}(x) = P_m(x) + (x - x_1) \dots (x - x_m).\, f[x_1, \dots, x_{m+1}]$$

Ordre	Notation	Définition
0	$f[x_i]$	$f(x_i)$
1	$f[x_i, x_j]$	$\dfrac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f[x_1 \dots x_{n+1}]$	$\dfrac{f[x_1 \dots x_n] - f[x_2 \dots x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$

Partiel 2016 Ex 1

1) $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$: est une famille

On veut montrer que $\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0$

$$\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = 0$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$$

Pour le prouver, on veut montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$,

$$a\varphi_0 + b\varphi_1 + c\varphi_2 = a + bx + cx^2$$

← polynôme x base canonique

$(1, x, x^2)$ étant la base canonique de P^2

1) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$a\varphi_0 + b\varphi_1 + c\varphi_2$$

$$= a + bx + c\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= a + bx + \frac{3c}{2}x^2 - \frac{c}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{3c}{2}}_{a_2}x^2 + \underbrace{b}_{b_2}x + \underbrace{\left(a - \frac{c}{2}\right)}_{c_2} \text{ OK !}$$

Calculons $\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle$

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Calculons $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 0 \text{ OK !}$$

2) $$\|\varphi_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \varphi_2 \cdot \varphi_2\,dx}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{9}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\,dx}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{9}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_{-1}^{1}}$$

Scanned by CamScanner

$$= \sqrt{\frac{9}{20} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{20} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{20} - 1 + \frac{1}{2}}$$

3) ~~Soit $\Phi^*(x)$ la meilleure approximation~~

(sens des moindres carrés) $\Rightarrow \langle f - \Phi^*, \Phi \rangle = 0$

$\Phi^*(x)$ meilleure approximation $\Rightarrow \langle f - \Phi^*, \Phi \rangle = 0$
$\forall \Phi \in (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$

En particulier $\langle f - \Phi^*, \varphi_0 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle f, \varphi_0 \rangle - \langle \Phi^*, \varphi_0 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle f, \varphi_0 \rangle - \sum_{k=0}^{n} a_k^* \langle \varphi_k, \varphi_0 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle f, \varphi_0 \rangle - a_0^* \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 0$

$a_i^* = \dfrac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \quad \forall i \in (0, 1, 2)$

4) $= \dfrac{\int_{-1}^{1} e^x \varphi_i(x)\, dx}{\int_{-1}^{1} \varphi_i(x)^2\, dx} \Rightarrow$ développer

---

Partiel 2016 : Ex 2

Rappel : $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x)$

1) $L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \dfrac{(x - x_j)}{x_i - x_j}$

~~$L_1(x) = \dfrac{(x-2)(x-7)(x-4)}{-11 \times 16 \times 8}$~~ ~~$L_2(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{11 \times 25 \times 20}$~~

Scanned by CamScanner

$\cancel{L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-7_6)(-2?)} \times 45}$ $\cancel{L_4(x) = (x-1)}$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1).(-2).(-3)} \qquad L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(1).(-1).2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2 \times 1 \times (-1)} \qquad L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$P_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} \times 4 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-2} \times 13$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2} \times 40 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} \times 85$$

2) ~~Soit g(x) fonction continue qui passe par les 4 pts suivants:~~
~~(0,1) (-1,0) (-2,-5) (-3,-20)~~

Faire le tableau des diff divisées: $f[x_i, x_j, x_k]$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$		$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
-3	-20	15	-5	1
-2	-5	5	-2	
-1	0	1		
0	1			

$$\left(f[x_1, \dots x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \dots x_{n}] - f[x_2 \dots x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}} \right)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \times f[x_0 \dots x_n]$$

$$= \frac{f[x_i, x_j, x_k] - f[x_j, x_k, x_l]}{x_i - x_l}$$

Scanned by CamScanner

3) $P_3(x) = -20 + (x+3).15 + (x+3)(x+2) + (x+3)(x+2)(x+1).1$

4) $\mathcal{E}(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x-x_i) f[x_1 \dots x_{n+1}]$

5) Montrer que $g(x) - f(x) = 0$

Ex3 1) ~~degré de g(x)~~

On a $f(x) = \dots + g(x) \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x-x_i)}_{\text{degré } n+1}$

degré de $\varphi(x) = 2n+1$

D'où degré de $q(x) = n$

2) Calculer $\varphi(x_i)$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

- Le terme $q(x) \prod_{j=1}^{n} (x-x_j)$ s'annule car $x \in [x_1, \dots, x_n]$

donc à un moment on aura

$x_j - x_j = 0$, donc le produit s'annule

- Donc $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) L_k(x)$

- Or, $L_k(x) = \prod_{0=1, j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$

Donc $L_k(x_i) = \prod_{0=1, j \neq k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} = 0$ car $i = j$ à un moment

$L_k(x_k) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1$

Scanned by CamScanner

3) Faire pour

$f(x) = 1$

$f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$\vdots$

$I \simeq S$

$$\int_{-1}^{1} 1 \, dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} L_k(x) + q(x) \prod_{i=0}^{0} (x - x_i) \, dx$$

Scanned by CamScanner