

MAFI – Notes de cours
Julien LEHUEN

Dernière mise à jour : 15/06/11

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| 1. Taux d'intérêt..... | 4 |
| 1.1. Exemple..... | 4 |
| 2. Prêts sur une courte durée..... | 5 |
| 2.1. Exemple 1..... | 5 |
| 2.2. Exemple 2..... | 5 |
| 2.3. Exercice..... | 5 |
| 2.3.1. Scénario 1..... | 5 |
| 2.3.2. Scénario 2..... | 5 |
| 2.4. Conventions usuelles sur de courtes périodes..... | 5 |
| 2.4.1. Emprunt : intérêts payables à l'échéance..... | 5 |
| 2.4.2. Escompte : intérêts payés dès le début..... | 6 |
| 3. Les obligations..... | 7 |
| 3.1. Augmentation de capital..... | 7 |
| 3.2. Caractéristiques..... | 7 |
| 3.3. Fonctionnement..... | 8 |
| 3.3.1. Remarque..... | 8 |
| 3.3.2. Exemple..... | 8 |
| 3.4. Vocabulaire..... | 8 |
| 3.4.1. Exemple..... | 8 |
| 3.4.2. Remarque..... | 9 |
| 3.5. Contre-exemple..... | 9 |
| 3.5.1. Remarque..... | 9 |
| 3.6. Schéma..... | 9 |
| 3.7. Revente d'une obligation..... | 10 |
| 3.8. Exercice..... | 10 |
| 3.8.1. Énoncé..... | 10 |
| 3.8.2. Solution..... | 10 |
| 3.9. Différences Action/Obligation..... | 11 |
| 3.9.1. Action..... | 11 |
| 3.9.2. Obligation..... | 11 |
| 3.10. Cote d'une obligation..... | 11 |
| 3.10.1. Marché primaire..... | 11 |
| 3.10.2. Marché secondaire..... | 11 |
| 4. Emprunt..... | 12 |
| 4.1. Taux actuariel..... | 12 |
| 4.1.1. Principe..... | 12 |
| 4.1.2. Généralisation..... | 13 |
| 4.1.3. Définition..... | 13 |
| 4.2. Exemples..... | 13 |
| 4.2.1. « C'est quoi le mieux !? »..... | 13 |
| 4.2.2. Applications..... | 14 |
| 4.3. Définition du taux..... | 14 |
| 5. Exercices..... | 15 |
| 5.1. Exercice 1..... | 15 |
| 5.2. Exercice 2..... | 15 |
| 6. Ramené au mois..... | 16 |
| 6.1. Intro..... | 16 |
| 7. Pour terminer..... | 17 |
| 7.1. Il manque..... | 17 |
| 7.2. Partiel..... | 17 |
| 7.3. Contact..... | 17 |

1. Taux d'intérêt

1.1. Exemple

Soit 10 000 € placés à 7% par an, combien de temps faut-il pour avoir 1 000 000 € ?

Chaque année, on multiplie par 1,07 :

Après 1 année : $10\,000 \times 1,07$

Après 2 années : $10\,000 \times 1,07 \times 1,07 = 10\,000 \times 1,07^2$

Après n années : $10\,000 \times 1,07 \times \dots \times 1,07 = 10\,000 \times 1,07^n$

On cherche donc n tel que :

$$10\,000 \times 1,07^n = 1\,000\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,07^n = 100$$

$$\Leftrightarrow n = \log(100)/\log(1,07)$$

2. Prêts sur une courte durée

2.1. Exemple 1

Entre banques
De quelques jours à quelques mois
On prête, puis rembourse en une fois

2.2. Exemple 2

Une facture
Une échéance (60 jours par exemple)
Possibilité d'encaisser immédiatement

2.3. Exercice

On sait pouvoir faire 1 000 000 € dans 3 mois.

2.3.1. Scénario 1

Cas de la banque A (*Escompte*) : me prélève immédiatement 1,5%
Je lui demande 1 000 000 €, elle me donne 985 000 €, et je lui rembourserais 1 000 000 dans 3 mois.
 $\text{Taux} = (S / S \times (1 - q)) - 1 = q / 1 - q$

2.3.2. Scénario 2

Cas de la banque B (*Emprunt*) : me prête aujourd'hui S, et me demande de rembourser S(1,015)
Si je veux devoir 1 000 000 € dans 3 mois, je peux emprunter $1\,000\,000 / 1,015 = 985\,221,67$ €
 $\text{Taux} = (S / (S / (1 + q))) - 1 = q$

2.4. Conventions usuelles sur de courtes périodes

NB : on considère qu'une année fait 360 jours.

2.4.1. Emprunt : intérêts payables à l'échéance

Soient : emprunt S, remboursement dans n jours, taux annuel r

$$\text{Intérêts} = (n/360) \times r \times S$$

$$\text{Somme remboursée} = S \times (1 + (n/360) \times r)$$

Exemple :

| | | |
|----------------|----------------------|-----------------------|
| Une entreprise | emprunte 1 000 000 € | le 02/05/2011 (lundi) |
| | rembourse taux 4,5% | le 28/06/2011 (mardi) |

On a donc $S = 1\,000\,000$ €, $n = 57$ jours, $r = 4,5\%$

$$\text{Intérêts} = I = (57/360) \times 0,045 \times 1\,000\,000 = 7\,125 \text{ €}$$

$$\text{Somme remboursée} = S + I = 1\,000\,000 \times (1 + (57/360) \times 0,045) = 1\,007\,125 \text{ €}$$

Remarques :

Une année fait 365 jours : si l'emprunt dure toute l'année, taux = $(365/360) \times r = 4,5625\%$

Si on prête pendant 182 jours, puis prête la somme remboursée pendant les 183 jours restant, le taux augmente encore un peu...

Exercice :

Une entreprise emprunte taux 4,5% au jour J0
 rembourse 250 000 € au jour J190

On a donc : $\text{Emprunt} \times (1 + (190/360) \times 0,045) = 250\,000 \text{ €}$

$$\text{Emprunt} = 250\,000 / (1 + (190/360) \times 0,045) = 244\,200 \text{ €}$$

2.4.2. Escompte : intérêts payés dès le début

Soient : somme prévue S, remboursement dans n jours, taux annuel r

$$\text{Somme payée} = S \times (1 - (n/360) \times r)$$

Exercice :

Soit r le taux d'escompte sur n jours.

Calculer r' le taux équivalent à r, mais si ça avait été un emprunt.

Calculer r'' le taux équivalent à r', mais sur 365 jours.

$$\text{Somme } S_0 \text{ prêtée au jour } J_0 = S \times (1 - (n/360) \times r)$$

$$\text{Somme } R \text{ remboursée au jour } J_n = S$$

$$\text{On a donc } S_0 = R \times (1 - (n/360) \times r)$$

$$\text{On a aussi, en appliquant la formule de l'emprunt : } R = S_0 \times (1 + (n/360) \times r')$$

$$\text{Finalement } S_0 = S \times (1 - (n/360) \times r) = S / (1 + (n/360) \times r')$$

$$\Leftrightarrow (1 - (n/360) \times r)(1 + (n/360) \times r') = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + (n/360) \times r') = 1 / (1 - (n/360) \times r)$$

$$\Leftrightarrow (n/360) \times r' = (1 / (1 - (n/360) \times r)) - 1$$

$$\Leftrightarrow (n/360) \times r' = (1 / (1 - (n/360) \times r)) - ((1 - (n/360) \times r) / (1 - (n/360) \times r))$$

$$\Leftrightarrow (n/360) \times r' = ((n/360) \times r) / (1 - (n/360) \times r)$$

$$\Leftrightarrow r' = r / (1 - (n/360) \times r)$$

Pour r'' , on a $r'' = (365/360) \times r'$

Remarque :

On a toujours $r'' > r' > r$

Exercice :

Calculer r en fonction de r' ?

$$r' = r / (1 - (n/360) \times r)$$

$$\Leftrightarrow r = r' / (1 + (n/360) \times r')$$

Intérêt :

Si un confrère a eu un escompte avec un taux r' , on sait que r est un taux d'emprunt « acceptable »...

Exercice :

Un confrère a réussi à obtenir un escompte sur 90 jours avec un taux $r' = 2,5\%$.

On peut donc chercher à négocier un emprunt sur 90 jours avec un taux r :

$$r = 0,025 / (1 + (90/360) \times 0,025)$$

$$r = 2,484472\%$$

3. Les obligations

Une grosse entreprise, elle a un capital, et se développe.

En se développant, elle a besoin de plus de capital !

3.1. Augmentation de capital

= Les actionnaires mettent de l'argent sur l'entreprise.

= Emprunts sur de longues périodes, avec un montant important

Concerne les États et Grandes entreprises

3.2. Caractéristiques

Montant très important (ex: dette Grecque) : > 1 Milliard d'euros

Besoin de plusieurs établissements. Il n'existe pas UN établissement qui puisse prêter 10 ou 100 Milliards d'euros à Microsoft, l'État Allemand ou Français...

Montant découpé en obligations. Chacune est l'équivalent d'une petite dette.

3.3. Fonctionnement

L'organisation “emet” des obligations.

Chaque acteur “prête” en achetant des obligations.

L'entreprise obtient 5Milliards => Sentiment de solidité

Etablissements financiers, Particuliers... => Sentiment de solidarité

On n'emprunte pas 5 Milliards, on emet des obligations d'un certain montant !

En prêtant à l'entreprise, on possède une obligation : engagement de l'entreprise pour un certain taux d'intérêt. Moins risqué qu'une action : pas de cours de bourse !

3.3.1. Remarque

Un “bout de papier” c'est une dette, une dette c'est “un bout de papier”.

Même un billet de 10€, signifie que la banque me doit 10€.

3.3.2. Exemple

Si on possède une obligation Thalès de 1000€ à un taux de 5%.

Il s'agit d'une dette pour l'entreprise,

Il s'agit d'une épargne pour nous, car on fait confiance en la solidité de l'entreprise.

3.4. Vocabulaire

Obligation : Élément qu'on peut avoir dans son porte-feuille, si on a la chance d'avoir fait EPITA, monté son entreprise et fait beaucoup de bénéfices. C'est une façon pour un gouvernement/une grosse entreprise de s'endetter. C'est une façon pour un particulier de placer son argent.

Nominal : Montant prêté.

Echéance : En années ! (2 à 50)

Taux d'intérêts : Intérêt versé tous les ans.

Coupon : Ce qui est reçu à la date anniversaire.

3.4.1. Exemple

On obtient une obligation le 10/05/2011, avec :

- Nominal = 1000€
- Echéance = 10/05/2020
- Taux d'intérêts = 3,89%

Tous les 10 mai (10/05/2012, 2013 ... 2019), on se fait payer 3,89%.

Le 10 mai 2020, on se fait rembourser le nominal et le taux d'intérêt.

3.4.2. Remarque

Les Etats et grandes entreprises réémettent constamment des obligations.

3.5. Contre-exemple

Ressemble à une obligation...

On remplace la grosse entreprise par 1 million de familles pauvres qui empruntent pour leur logement.

Risque => taux d'intérêt plus élevé ! ~6%

On mélange à d'autres obligations plus solides...

Quand je touche \$1000, j'ai en gros \$500 qui vient des familles plus modestes, \$500 qui vient des entreprises solides...

Si l'immobilier augmente, pas de chômage, tout va bien...

Si chômage, crise, famille ne peut plus rembourser, à la porte...

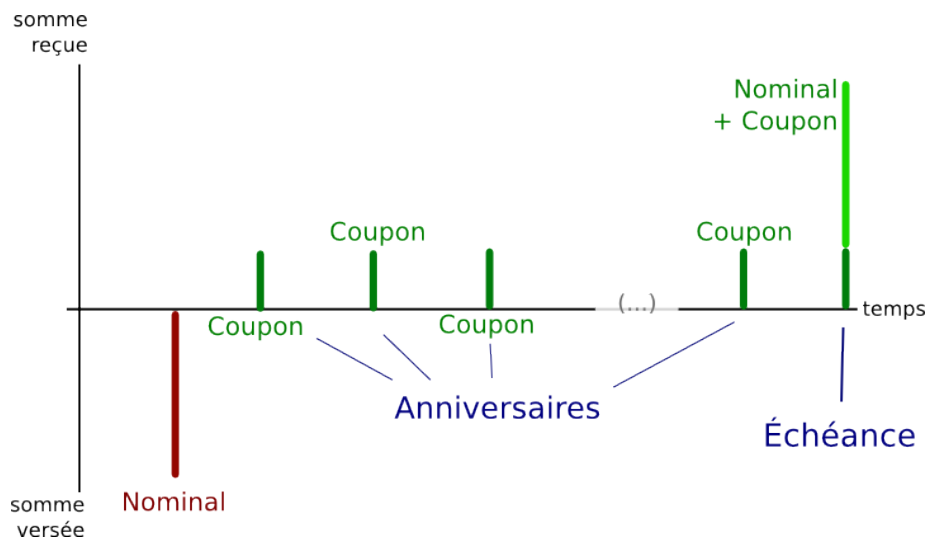
=> Le nominal de \$1000 ne vaut plus \$1000

3.5.1. Remarque

C'est un exemple schématique, sans vocabulaire financier...

3.6. Schéma

Schéma des sommes versées et reçues, pour une obligation



3.7. Revente d'une obligation

On cède l'obligation entre deux anniversaires. Donc l'acheteur recevra le prochain coupon sans avoir possédé l'obligation un an. On peut donc réclamer un "bout du dernier coupon"...

Nominal + partage de l'intérêt = Cote : prix affiché dans les journaux

Coupon couru = "partage de l'intérêt"

$$Cc = (d \times r \times S) / 365$$

d : nb jours passés | r : taux | S : nominal

Remarque : 365 à remplacer par 366 si année bisextile

3.8. Exercice

3.8.1. Énoncé

500 obligations à 1000€

Coupons payables le 25/10

Taux = 4,5%

Je les vends aujourd'hui (12/05)

Valeur du coupon couru

3.8.2. Solution

Durée : d = 199

Taux : r = 4,5%

Nominal : S = 500 000€

Coupon couru : $Cc = (199 \times 0,045 \times 500\,000) / 365 = 12\,267.12€$

3.9. Différences Action/Obligation

3.9.1. Action

Varie : dépend d'évènements, de la santé de la société

Aucune garantie

Courts en bourse

Aucune idée des dividendes dans 5 ans, par exemple

Danger : mauvaises variations, pas de dividendes

3.9.2. Obligation

Flux de monnaie connu d'avance, aucune hésitation

(NB : il existe des obligations qui ne sont pas à taux fixe, mais on parle ici du cas simple)

On « paie un risque » : plus c'est risqué, plus le taux est élevé.

Risque dans le cas des entreprises : taux exigé

Risque dans le cas des Etats : taux

Seul danger d'une obligation : défaut de paiement

3.10. Cote d'une obligation

3.10.1. Marché primaire

Acheter une obligation, empocher les coupons, et se faire tout rembourser à l'échéance. Puis recommencer...

3.10.2. Marché secondaire

Besoin d'une cote prenant en compte le taux aujourd'hui et le risque.

Exemple : Cote 105 avec un nominal à 500 000 se vend 525 000 (+ le coupon couru)

La prochaine fois : « pourquoi le journal a dit ça ? »

4. Emprunt

4.1. Taux actuariel

4.1.1. Principe

J'emprunte une somme (S) à un taux (r) annuel

- Equivalent : j'emprunte S , je rembourse $(1 + r) \times S$ au bout d'un an
- Exemple : 1000€ « valent » 1040€ après 1 an, si $r = 4\%$...
- 1000€ aujourd'hui, ce n'est pas pareil que 1000€ dans un an !
- Remarque : Si j'emprunte 1000€ aujourd'hui à 4%, ne rembourse rien la première année, et rembourse tout au bout de 2 ans :
 - On rembourse $(1000 \times 1,04) \times 1,04 = 1081,60$ €
 - On ne rembourse pas $1000 \times (1,04 + 1,04) = 1080,00$ €
 - On rembourse en général $S \times (1 + r)^n$ pour n années !
 - Le nombre « n » n'est pas forcément entier...

J'emprunte une somme (S) à un moment (t_0) à un taux (r) annuel

- Remboursement d'une somme F_1 à l'instant t_1
- Si tout n'est pas remboursé, combien dois-je à t_1 ?

Tableau :

| Date | Intérêt | Remboursement | Capital remboursé | Somme |
|-------|--|---------------|-------------------|---------------------------|
| t_0 | 0 | 0 | 0 | S |
| t_1 | $I_1 = (S \times (1 + r)^{(t_1 - t_0)} - 1)$ | F_1 | $F_1 - I_1$ | $S_1 = S - (F_1 - I_1)$ |
| t_2 | $I_2 = S \times ((1 + r)^{(t_2 - t_1)} - 1)$ | F_2 | $F_2 - I_2$ | $S_2 = S_1 - (F_2 - I_2)$ |
| (...) | | | | |

$$S = (F_1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)}) + (S_1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)})$$

Si on rembourse tout le reste à la date t_2 :

$$S_1 = (F_2 / (1 + r)^{(t_2 - t_1)}) + (\text{RESTE} = 0 \text{ car on rembourse tout le reste})$$

Donc :

$$S = (F_1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)}) + ((1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)}) \times (F_2 / (1 + r)^{(t_2 - t_1)}))$$

$$S = (F_1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)}) + (F_2 / (1 + r)^{(t_2 - t_0)}) \text{ Si on rembourse tout en 2 fois}$$

4.1.2. Généralisation

- J'emprune S aujourd'hui
- A taux r
- Je rembourse en « n » fois :

$$F_1 \text{ à } t_1 ; F_2 \text{ à } t_2 ; \dots ; F_n \text{ à } t_n$$

On a alors :

$$S = (F_1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)}) + (F_2 / (1 + r)^{(t_2 - t_0)}) + \dots + (F_n / (1 + r)^{(t_n - t_0)})$$

4.1.3. Définition

r est le taux actuariel

4.2. Exemples

4.2.1. « C'est quoi le mieux !? »

J'emprunte 1000, je rembourse 540 dans 1 an, et je rembourse 540 dans deux ans.

Ou

J'emprunte 1000, je rembourse 500 dans 1 an, et je rembourse 590 dans deux ans.

Premier cas :

$$1000 = (540 / (1 + r)) + (540 / (1 + r)^2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow r = 5,288\%$$

On calcule S' en utilisant r dans le second cas :

$$S' = (500 / (1,05288)) + (590 / (1,05288)^2) = 1006.$$

Supérieur au premier cas, donc moins intéressant !

Remarque :

J'emprunte 1000, je rembourse 500 dans 1 an, et je rembourse 581 dans deux ans.

$$S'' = ((500 / (1,05288)) + (581 / (1,05288)^2) = 998.99$$

=> On rembourse « plus » mais c'est plus intéressant ! O_O

4.2.2. Applications

| Connu | On trouve |
|---|-------------------------------|
| Somme empruntée (S) Sommes remboursées (F_i) | Taux actuariel (r) |
| Somme empruntée (S) Taux actuariel (r) | Sommes à rembourser (F_i) |
| Sommes à rembourser (F_i) Taux actuariel (r) | Somme empruntée (S) |

=> Tout est possible !

4.3. Définition du taux

Le taux est la rémunération du risque !

Si le risque augmente, r augmente !

=> Variation de la cote (indiquée dans les journaux) dans le cas des obligations !

5. Exercices

5.1. Exercice 1

Une entreprise a emprunté 1 000 000 € le 17/05/2011 à un taux exact/360 de 4,5%

Le remboursement se fait le jeudi 25/08/2011

- 1) Intérêts ?
- 2) Taux actuariel ?

5.2. Exercice 2

Une entreprise a escompté 1 000 000 € à un taux exact/360 de 4,5%

Le remboursement se fait 100 jours plus tard

- 1) Intérêts ?
- 2) Taux actuariel ?

Solutions sous forme de Fichier OpenOffice Calc...

6. Ramené au mois...

6.1. Intro

Reprenons la formule :

$$S = (F_1 / (1 + r)^{(t_1 - t_0)}) + (F_2 / (1 + r)^{(t_2 - t_0)}) + \dots + (F_n / (1 + r)^{(t_n - t_0)})$$

t_0, t_1, \dots, t_n en mois !

Taux (r) : ramené au mois

$F_1, F_2, \dots, F_n = F$: mensualités

On aura... $S = F \times (1 / (1 + r)^{1/12} + 1 / (1 + r)^{2/12} + \dots + 1 / (1 + r)^{n/12})$

$$= F \times (x + x^2 + \dots + x^n) \text{ avec } x = 1 / (1 + r)^{1/12}$$

=> Séries géométriques !...

7. Pour terminer

7.1. Il manque...

J'ai assisté et pris des notes à tous les cours, sauf les deux derniers. Il manque sûrement la fin du cours, et tous les exercices faits en dernières séances...

7.2. Partiel

Il s'agit d'un QCM, avec pas toujours des points négatifs normalement...

On a BESOIN d'un calculatrice.

On a pas le droit à des notes de cours, mais le prof fourni un formulaire complet.

7.3. Contact

Si vous voulez corriger ou compléter ces notes, envoyez moi un email (julien@lehuen.net), un SMS (+33(0)6 76 90 07 96), ou un pigeon voyageur...