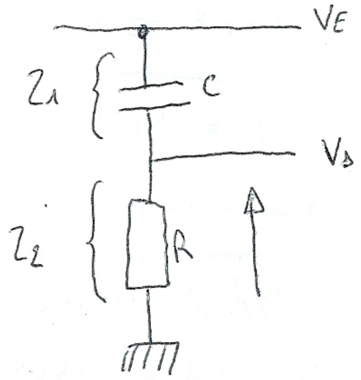
Exercice 1

1) On cherche à exprimer $F(p)$, la fonction de transfert. On peut la déduire à partir du schéma du circuit, en faisant apparaître un pont diviseur de tension : (voir schéma redessiné)

schéma redessiné :



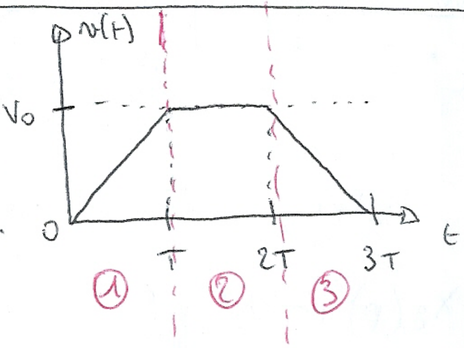
$$V_S = V_E \times \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$$

d'où $F(p) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$ (exprimée avec Laplace) $Z_1 = 1/Cp$, $Z_2 = R$.

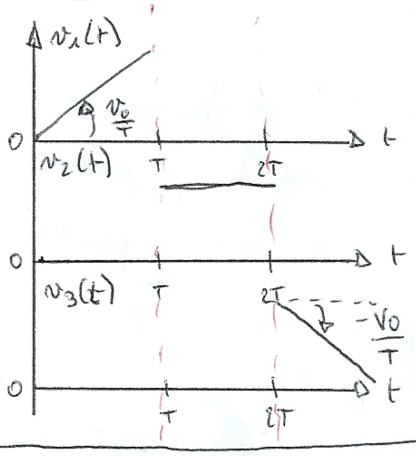
$$F(p) = \frac{R}{R+\frac{1}{Cp}} \Rightarrow \boxed{F(p) = \frac{RCp}{1+RCp}}$$

2) $V(p) = \mathcal{L}\{v(t)\}$

Comme on peut le voir on peut découper le signal en 3 parties.



Remarque : Le signal n'est pas périodique.



d'où $v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$, avec un retard de $1T$ pour $v_2(t)$ et de $2T$ pour $v_3(t)$

- On va utiliser le théorème du retard et la table des transformées élémentaires pour exprimer $V(p)$:

- $V_1(p) = \frac{V_0}{T} \times \frac{1}{p^2}$ car rampe unitaire de pente $\frac{V_0}{T}$.
- $V_2(p) = \mathcal{L}[v_2(t-\tau)] = \underbrace{e^{-Tp} \cdot \mathcal{L}[v_2(t)]}_{\text{Th du retard}} \Rightarrow V_2(p) = \frac{V_0}{p} e^{-Tp}$ car échellon unitaire.

$V_2(p) = \frac{V_0}{p^2} e^{-Tp}$ (j'hésite ici avec une rampe unitaire)

- $V_3(p) = -\frac{V_0}{T} \times \frac{1}{p^2} \times e^{-2Tp}$ car rampe unitaire avec th du retard avec $\tau = 2T$

$$V(p) = V_1(p) + V_2(p) + V_3(p)$$

$$V(p) = \frac{V_0}{T} \times \frac{1}{p^2} + \frac{V_0}{p^2} \times e^{-Tp} + \frac{1}{p^2} \times \frac{-V_0}{T} \times e^{-2Tp}$$

$$\boxed{V(p) = V_0 \left[\frac{1}{Tp^2} + \frac{1}{p^2} \times e^{-Tp} - \frac{1}{Tp^2} \times e^{-2Tp} \right]}$$

---

3) $V_E(p)$ devient $V(p)$

$\Rightarrow F(p) = \frac{V_S(p)}{V(p)} \Rightarrow V_S(p) = F(p) \times V(p)$

$\Rightarrow V_S(p) = \frac{RCp}{1+RCp} \times V_0 \times \left[\frac{1}{RCp^2} + \frac{1}{p^2} \times e^{-RCp} - \frac{1}{RCp^2} \times e^{-2RCp} \right]$

$\Rightarrow V_S(p) = V_0 \left[\frac{1}{(1+RCp)p} + \frac{RC}{(1+RCp)p} \times e^{-RCp} - \frac{1}{(1+RCp)p} \times e^{-2RCp} \right]$

$\Rightarrow V_S(p) = \underbrace{\left[\frac{V_0}{\frac{1}{RC} + p} \times \frac{1}{p} \right]}_{X_1(p)} + \underbrace{\left[\frac{V_0 RC}{\left(\frac{1}{RC} + p\right)p} \times e^{-RCp} \right]}_{X_2(p)} - \underbrace{\left[\frac{V_0}{\left(\frac{1}{RC} + p\right)p} \times e^{-2RCp} \right]}_{X_3(p)}$

Pourquoi $X_1(p)$, $X_2(p)$ et $X_3(p)$?
La fonction d'entrée est découpée en 3, le circuit a une fonction de transfert qui ne va pas trop changé le signal d'entrée (supposit°), je pense normal que l'on enregistre un signal de sortie pouvant se découper en 3 également.

- $X_1(p) = \frac{V_0 RC}{p} + \frac{1}{p^2}$
- $X_2(p) = \left(\frac{V_0 RC^2}{\frac{1}{RC} + p} \right) \times e^{-RCp}$
- $X_3(p) = \left(\frac{V_0 RC}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \times e^{-2RCp}$

$X_2(p) = \left(\frac{V_0 RC^2}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-RCp}$

$V_0 RC \times e^{-1/RC}$

$\Rightarrow \cdot\ \mathcal{L}^{-1}[X_1(p)] = (V_0 \overset{=T}{RC} + 1) \cdot u(t)$ $\cdot\ \mathcal{L}^{-1}[X_2(p)] = \cdots \cdot u(t-RC)$

$\cdot\ \mathcal{L}^{-1}[X_3(p)] = (V_0 RC + 1) \times u(t-2RC)$ $(RC = T)$

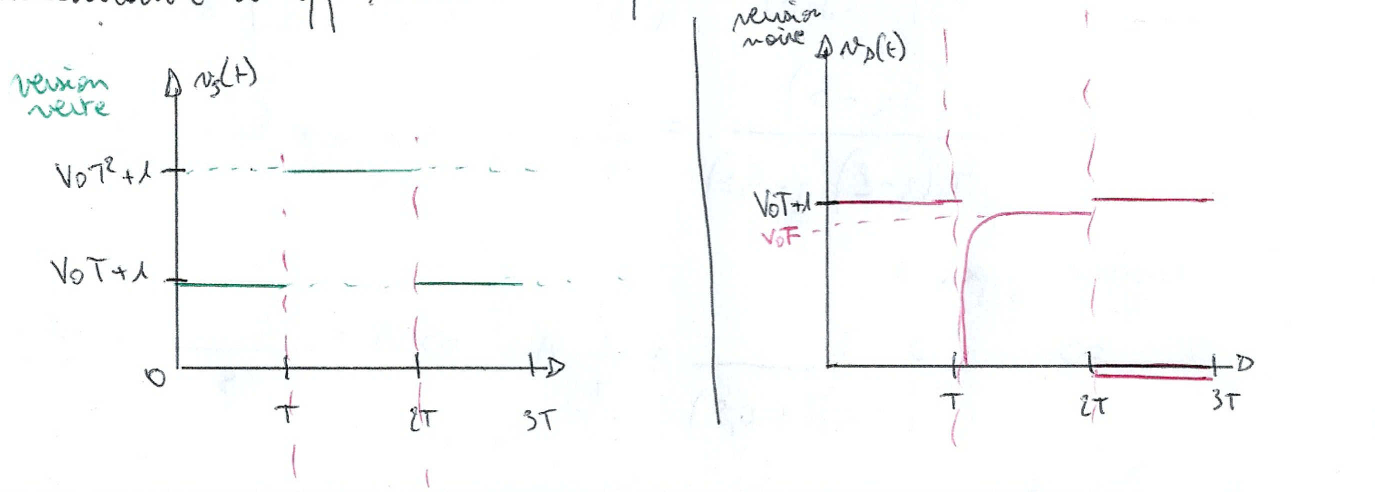
$(V_0 T^2 + 1) \cdot u(t-T)$

$\cdot\ \mathcal{L}^{-1}[X_2(p)] = \cdots$

d'où
$$\boxed{v_S(t) = (V_0T+1).u(t) + V_0T \times e^{-\frac{1}{T}}.u(t-T) - (V_0T+1).u(t-2T)}$$

$$v_S(t) = (V_0T+1).u(t) + (V_0T^2+1).u(t-T) - (V_0T+1).u(t-2T)$$

J'ai hésité ici car la version en noire n'est pas vraiment ressemblante à qq chose alors que la version en verte donnerait :



Exercice 2

On a $f(t) = \cos(\omega_0 t).u(t)$ $\quad f(t) = \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right).u(t)$ (formule d'Euler)

$t>0$.

en passant par Laplace
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left[e^{j\omega_0 t}.u(t)\right] + \mathcal{L}\left[e^{-j\omega_0 t}.u(t)\right]\right]$$
linéarité de $\mathcal{L}$.

ou sinon directement par Z.
$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega_0} + \frac{1}{p+j\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0 T}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega_0 T}}\right) = \frac{z}{2}\left(\frac{z-e^{-j\omega_0 T} + z - e^{j\omega_0 T}}{z^2 - \underbrace{(e^{j\omega_0 T} + e^{-j\omega_0 T})}_{=\cos(\omega_0 T)}z+1}\right)$$

$$F(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{2z - (e^{-j\omega_0 T} + e^{j\omega_0 T})}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T)z+1}\right) = \boxed{\frac{2z^2 - \cos(\omega_0 T)}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T)z+1}}$$

Exercice 3

MASI P4

Soit $Y(z) = \frac{X(z)}{z}$

$$Y(z) = \frac{z(5z-3)}{4(z-1)(z-2)(z-0,5)}$$

On cherche $Y(z)$ sous la forme $Y(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-0,5)}\right)$

$\Rightarrow$ Décomposition en élt simple classique:

A ? $\Rightarrow Y(z) \times (z-1) = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-0,5}\right)(z-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{z(5z-3)}{4(z-2)(z-0,5)} = \frac{1}{4}\left(A + \frac{B(z-1)}{z-2} + \frac{C(z-1)}{z-0,5}\right)$$

On remplace z par 1

$$\Rightarrow \frac{5-3}{4(1-2)(1-0,5)} = \frac{1}{4}A \Rightarrow A = \frac{2}{-0,5} \Rightarrow \boxed{A = -4}$$

de même B :

$$\frac{z(5z-3)}{4(z-1)(z-0,5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{A(z-2)}{z-1} + B + \frac{C(z-2)}{z-0,5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}B = \frac{2(10-3)}{4(2-1)(2-0,5)} \Rightarrow \boxed{B = \frac{28}{3}}$$

C :

$$\frac{z(5z-3)}{4(z-1)(z-2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{A(z-0,5)}{z-1} + \frac{B(z-0,5)}{z-2} + C\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}C = \frac{0,5 \times (\frac{5}{2}-3)}{4(0,5-1)(0,5-2)} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{3}}$$

d'où $Y(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{-4}{(z-1)} + \frac{28}{3(z-2)} - \frac{1}{3(z-0{,}5)}\right)$

On remultiplie par z pour avoir $X(z)$:

$$X(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{-4z}{z-1} + \frac{28z}{3(z-2)} - \frac{z}{3(z-0{,}5)}\right)$$

avec la table des transformées élémentaires

$$x(nT) = \frac{1}{4}\left(-4\,u(nT) + \frac{28}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} \times (0{,}5)^n\right)$$

$$x(t) = \left\{\frac{1}{4}\left(-4 + \frac{28}{3} \times 2^n - \frac{(0{,}5)^n}{3}\right)\right\}_{n = 0,1,2\ldots}$$