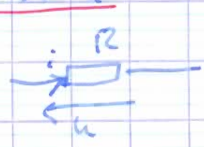
Régimes transitoires

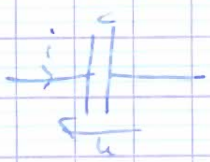
I) Composants

1) Résistance



$u = Ri$

2) Condensateur



$i = C\dfrac{du}{dt}$

Rq : En régime continu i et u sont constants

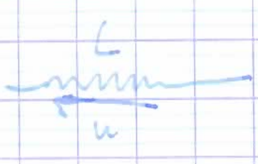
$\rightarrow i = 0$

$\Rightarrow$ Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier brutalement.

$\rightarrow$ On dit qu'il y a continuité de la tension aux bornes de C.

Bobine :



$u = L\dfrac{di}{dt}$

Rq : En régime continu i et u sont constants

$\Rightarrow u = 0$

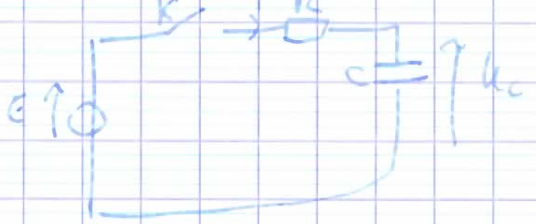
$\Rightarrow$ La bobine se comporte comme 1 fil

Le courant ne peut pas varier brutalement dans une bobine.

$\Rightarrow$ On dit qu'il y a continuité du courant dans L

II/ Régime transitoire : Circuit d'ordre 1
Étude du circuit RC

1) Réponse à 1 échelon



Pour $t < 0$, C est déchargé

À $t = 0$, on ferme K

a) Étude qualitative

	i	u_c
$t = 0^+$		
$t \to \infty$		

$t = 0^+$ = Instant juste après avoir fermé K.

$t = 0^-$ = Instant juste avant de fermer K

$t \to \infty$ = Régime permanent atteint.

$t \to \infty$ $\Rightarrow$ Régime continu

$\Rightarrow$ $C \Leftrightarrow$ —/ — $\quad i = 0$

$u_c = E$

- $t = 0^+$:

Continuité de la tension aux bornes de C

$\Rightarrow u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$ car C déchargé

$E = Ri \Rightarrow i = \frac{E}{R}$

b) Etude Quantitative

Loi des mailles $E = Ri + u_c$

$$i = C\frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E}$$

$\rightarrow$ Equation différentielle du 1er ordre, avec second membre et coef csts

Solution de l'équation ssm sans le membre

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$RC\frac{du_c}{dt} = -u_c$$

$$\frac{du_c}{u_c} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln u_c = -\frac{t}{RC} + A$$

$$u_{c_{ssm}} = e^{-\frac{t}{RC} + A} = Ke^{-t/RC}$$

Solution particulière :

On cherche la solution particulière u_{Cpart} tq

$u_{Cpar} = cst$

$$RC \frac{du_{Cpar}}{dt} + u_{Cpar} = E$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

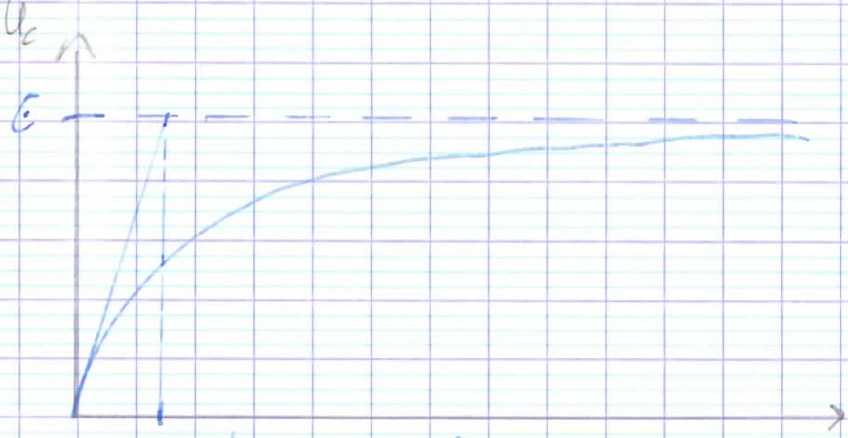
$$u_C = Ke^{-t/RC} + E$$

Identification de la constante

À $t=0$, $u_C(t) = 0$

$$Ke^{-0/RC} + E = K + E$$

$$\Rightarrow u_C(t) = \underbrace{E}_{\text{Régime permanent}} - \underbrace{Ee^{-t/RC}}_{\text{Régime transitoire}}$$



t tq tangente à l'origine coupe $y = E$

Equation de la tangente à t $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{RC} e^{-t/RC}$

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{RC}$$

$\tau = RC$ = constante de temps du circuit.

Largeur de la bande Passante

$\Delta \omega = 2\xi \omega_0$

Dephasage de V_s par rapport à v_e

$$\varphi(\omega) = \arg(A_{max}) + \arg\left(2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

Rq : $\varphi(\omega) \in \left[-\pi/2 , \pi/2\right]$

Diagramme de Bode

. Courbe de gain

$G(\omega) \xrightarrow[\omega \to 0]{} -\infty$

$G(\omega) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} -\infty$

Equation des asymptotes

. En TBF :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \simeq 1$$

$$A_{max} \cdot \frac{''}{''} \simeq A_{max}$$

$$A(\omega) \simeq A_{max}\, 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$G(\omega) \underset{0}{\approx} 20\log\left(\frac{A_{max}\, 2z}{\omega_0}\right) + 20\log \omega$$

⇒ Asymptote : droite de pente +20dB/décade

. <u>En THF :</u>

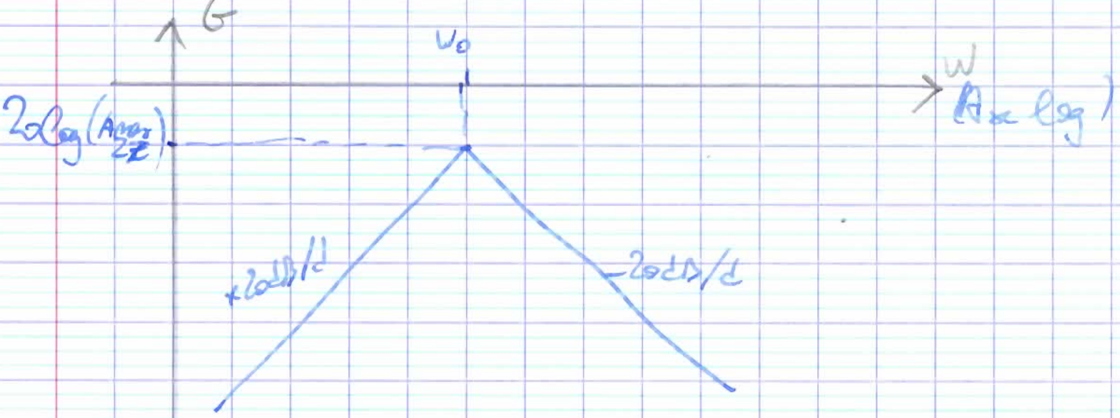
$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \underset{\infty}{\approx} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

$$A_{max}\frac{1}{1} \underset{\infty}{\approx} \frac{A_{max}\,\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$A_{max}\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \underset{\infty}{\approx} \frac{A_{max}\, 2z\frac{\omega}{\omega_0}}{\omega^2}$$

$$G(\omega) \underset{\infty}{\approx} 20\log\left(A_{max} \cdot 2z\,\omega_0\right) - 20\log(\omega)$$

⇒ Asymptote = Droite de pente −20 dB/décade



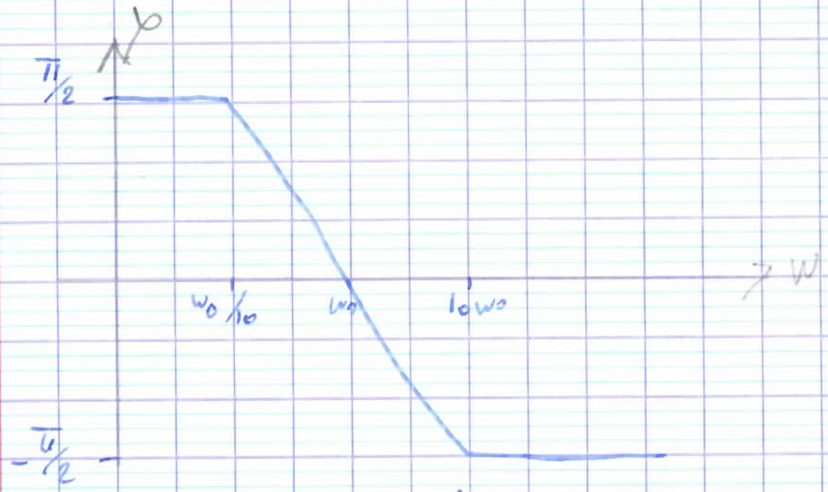
<u>→ Courbe de phase</u>

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$\varphi \xrightarrow[\omega \to 0]{} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

$\varphi \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

$\varphi \xrightarrow[\omega \to \omega_0]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$



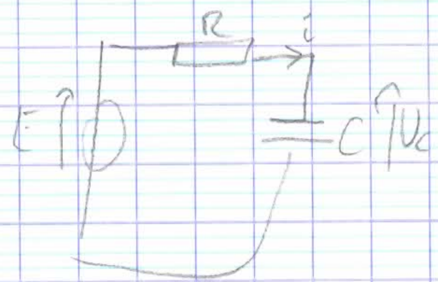
$u_c(t) = E - E e^{-t/\tau}$ $\tau = RC$

E : régime permanent = solution particulière

$E e^{-t/\tau}$: régime transitoire = solution de l'équation homogène

$u_c(\tau) = E(1 - e^{-1}) \simeq 0{,}63 \cdot E \Rightarrow$ Condensateur chargé à 63 %.

$u_c(5\tau) \simeq 0{,}99\, E \Rightarrow$ Condensateur chargé à 99 %.



Détermination de i(t)

Si on connaît u_c

1ère méthode

Loi des mailles : $E = Ri + u_c$

$\Rightarrow i = \frac{1}{R}(E - u_c) = \frac{1}{R}\left(E - (E + E e^{-t/\tau})\right)$

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

2ème méthode

$i(t) = C \frac{du_c}{dt}$

$= C\left(0 - E\left(-\frac{1}{RC} e^{-t/\tau}\right)\right)$

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

• Si on ne connait pas u_c

3ème méthode

Loi des mailles $E = Ri + u_c$ (1)

et $i = C\frac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow u_c = \frac{1}{C}\int i$

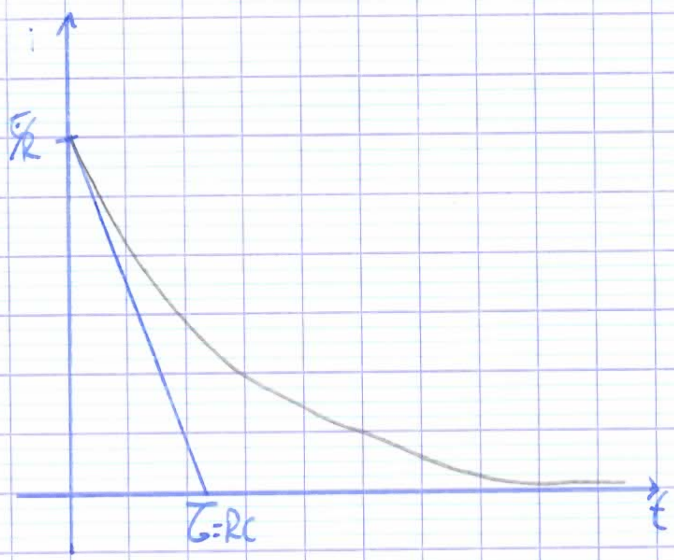
dériver (1) : $\frac{d(1)}{dt}$ $\quad 0 = \frac{R\,di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = \frac{R\,di}{dt} + \frac{i}{C}$

$\Rightarrow$ les solutions de cette ED (equadiff) sont de la forme

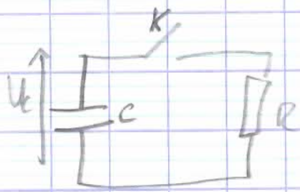
$i(t) = A e^{-t/RC}$

CI (cond. initiales) : $i(0) = \frac{E}{R} = A$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$



2) Régime libre



Pour $t<0$ C chargé et $u_c = E$
K ouvert

À $t=0$, on ferme K

Étude qualitative

	i	u_c
$t=0^+$	$-\frac{E}{R}$	E ← Continuité de la tension aux bornes de C
$t\to\infty$	0	0

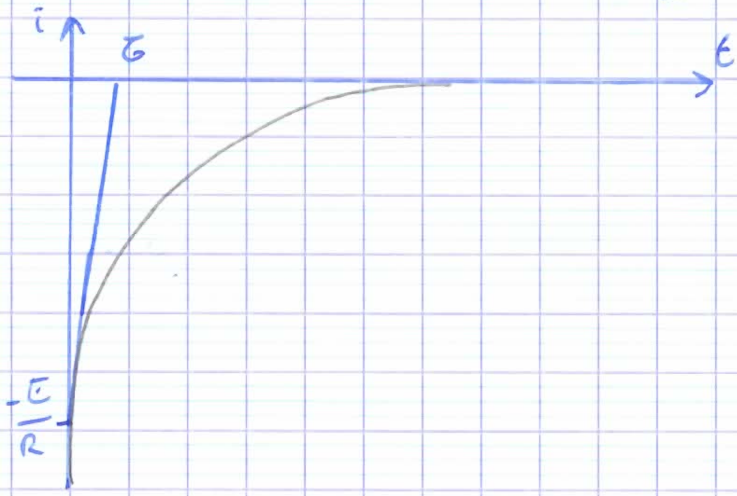
Étude quantitative

Loi des mailles $u_c + Ri = 0$

et on a $i = C\dfrac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow RC\dfrac{du_c}{dt} + u_c = 0$

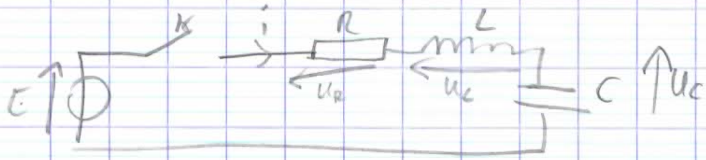
Loi des mailles $i(t) = -\dfrac{u_c}{R} = -\dfrac{E}{R}e^{-t/RC}$



III Régime Transitoire circuit d'ordre 2

Cas d'un circuit RLC

1) Réponse à un échelon



Pour $t < 0$ C déchargé ($u_C = 0$)
L déchargé ($i = 0$)
K ouvert

À $t = 0$, on ferme K

· Étude qualitative

	i	u_R	u_L	u_C
$t=0^+$	0	0	E	0
$t \to \infty$	0	0	0	E

Etude quantitative

Loi des mailles : $E = u_R + u_L + u_C$

$$u_R = Ri$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$\Rightarrow$ Equation différentielle du 2^{nd} ordre,

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ : pulsation propre}$$

$$2\sigma\omega_0 = \frac{R}{L} \qquad \sigma = \text{coef d'amortissement}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{di}{dt} + \cos^2 i = 0$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 2\sigma\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\sigma^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2$$
$$= 4\omega_0^2(\sigma^2 - 1)$$

1ère Cas $\sigma > 1$ $\Delta > 0$

$\Rightarrow$ 2 racines réelles

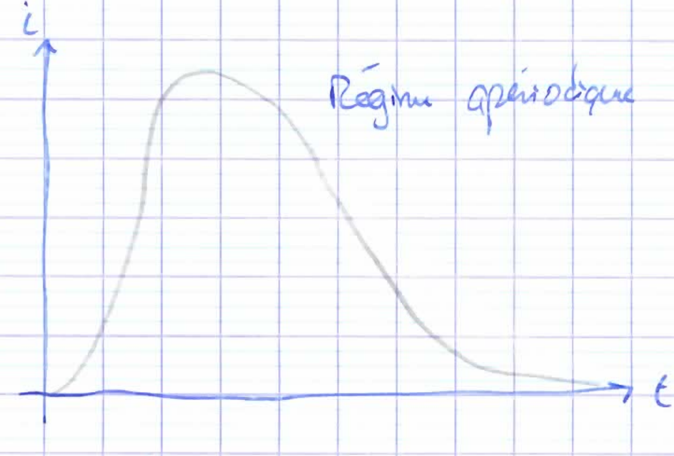
$$r_1 = \frac{-2\sigma\omega_0 + 2\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}}{2}$$

$$= -\sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{\sigma^2-1}$$

$$r_1' = -\sigma\omega_0 - \omega_0\sqrt{\sigma^2-1}$$

$\Rightarrow$ Les solutions de l'équadiff sont de la forme

$$i(t) = A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_1' t}$$
$$= e^{-\sigma\omega t}\left(A_1 e^{\omega_0 t\sqrt{\sigma^2-1}} + B_1 e^{-\omega_0 t\sqrt{\sigma^2-1}}\right)$$



Régime apériodique

Rq: $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{E}{L}$

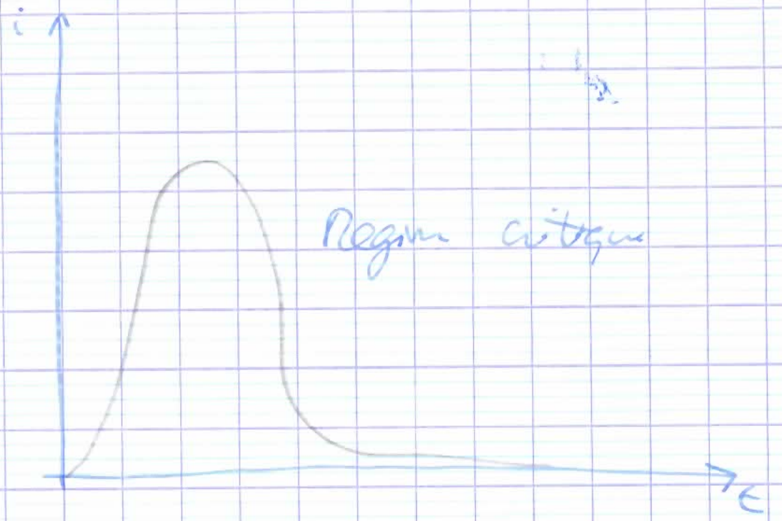
2ème Cas : $\sigma = 1$ $\Rightarrow \Delta = 0$

$\Rightarrow$ 1 racine double

D'où $r_2 = \frac{-2\sigma w_0}{2} = -w_0$

⇒ Les solutions de l'équadiff sont de la forme :

$i(t) = e^{-w_0 t}(A_2 t + B_2)$



Régime critique

3ème Cas : $\sigma < 1$ ⇒ $\Delta < 0$

⇒ 2 racines complexes

On pose $w = w_0\sqrt{1-\sigma^2}$

$\underline{r_3} = \frac{-2\sigma w_0 + j\sqrt{|\Delta|}}{2}$

$\underline{r_3} = -\sigma w_0 + j w_0\sqrt{|\sigma^2 - 1|} = -\sigma w_0 + jw$

$\underline{r'_3} = -\sigma w_0 - jw$

⇒ Les solutions de l'équadiff sont de la forme :

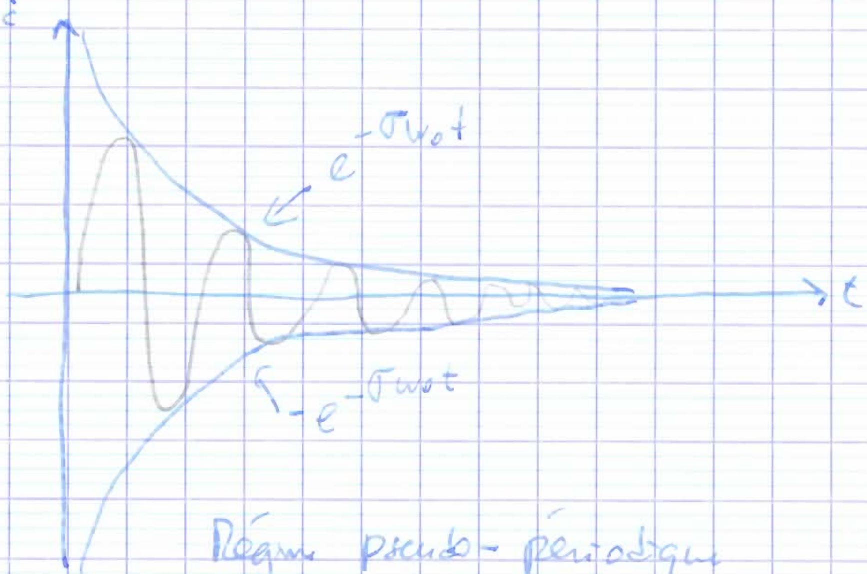
$\underline{i(t)} = \alpha e^{r_3 t} + \beta e^{r'_3 t}$

$= e^{-\sigma w_0 t}\left[\underline{\alpha} e^{jwt} + \beta e^{-jwt}\right]$

$\rightarrow i(t) = R_e(\underline{i}(t))$

$= e^{-\sigma\omega_0 t}\left[A_3 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t)\right]$

$= e^{-\sigma\omega_0 t} \cdot I\cos(\omega t + \varphi)$



Régime pseudo-périodique

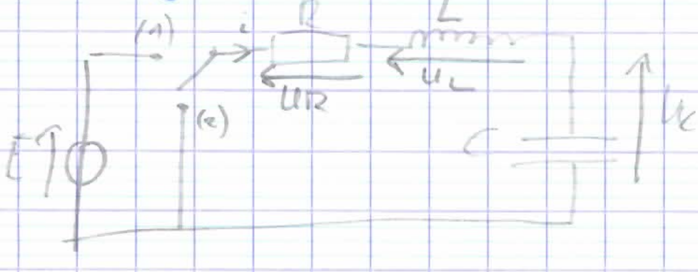
ω = pseudo-pulsation.

Identification des constantes

CI $\quad i(0) = 0$

$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{u_c(0)}{L} = \frac{E}{L}$

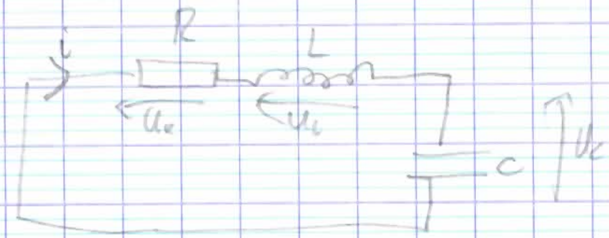
2 - Régime libre



Pour $t<0$, K est en position (1) et le régime permanent est atteint
À $t=0$, K passe en position (2)

Étude qualitative :

	i	u_R	u_L	u_C
$t=0^+$	0	0	$-E$	E
$t\to\infty$	0	0	0	0



Loi des mailles : $u_R + u_L + u_C = 0$

Étude quantitative :

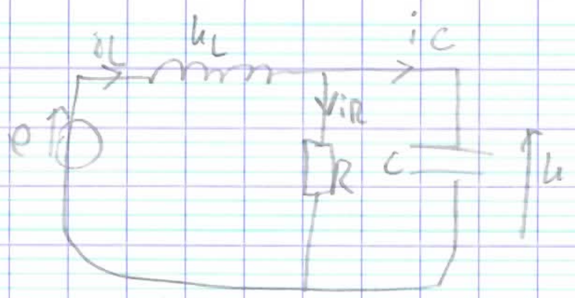
$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d(1)}{dt} \Rightarrow R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$\rightarrow$ (f 1)

Ex p.110 :



	i_L	i_C	i_R	u_L	u	$\frac{di}{dt}$	$\frac{di_C}{dt}$	$\frac{dr}{dt}$	$\frac{du}{dt}$	$\frac{du_L}{dt}$
$t<0$	E_1/R	0	E_1/R	0	E_1	0	0	0	0	0
$t=0^+$	E_1/R	0	E_1/R	E_2-E_1	E_1	$\frac{E_2-E_1}{L}$				
$t\to\infty$	E_2/R	0	E_2/R	0	E_2	0	0	0	0	0

Loi des mailles : $e = u_L + u$

Loi des noeuds : $i_L = i_R + i_C$

$\frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L}$ $\qquad$ $\frac{de}{dt} = \frac{du_L}{dt} + \frac{du}{dt}$

$\frac{du}{dt} = \frac{i_C}{C}$ $\qquad$ $\frac{du}{dt} = \frac{R\,di_R}{dt}$

$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt}$