Feuille d'exercices n°10

Algèbre linéaire II

(du mardi 2 avril 2013 au vendredi 19 avril 2013)

Exercice 1

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées

1. dans $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,5)\big)$
2. dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),(1,-2,-3),(3,-2,-3)\big)$
3. dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\big((1, X+1, (X-1)^2)\big)$
4. dans $\mathbb{R}^{]-1,1[}$: $\left(f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x-1}\ ;\ g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x+1}\right)$
5. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $(f\ :\ x \mapsto x\ ;\ g\ :\ x \mapsto |x|\ ;\ h\ :\ x \mapsto 1-x)$
6. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\big(f\ :\ x \mapsto 1\ ;\ g\ :\ x \mapsto \cos^2(x)\ ;\ h\ :\ x \mapsto \cos(2x)\big)$
7. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\left(f\ :\ x \mapsto \dfrac{e^x+1}{2e^x+1}\ ;\ g\ :\ x \mapsto \dfrac{2e^x-1}{e^x+1}\ ;\ h\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{e^x-x+1}\right)$
8. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\big(f\ :\ x \mapsto e^x\ ;\ g\ :\ x \mapsto e^{x+1}\ ;\ h\ :\ x \mapsto e^{x+2}\big)$

Exercice 2

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}$. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x\ ;\ \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x\ ;\ \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que les $(2n+1)$ fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_0(t) = 1 \\ \forall k \in \{1,...,n\}\ \ f_k(t) = \cos(kt) \\ \forall k \in \{n+1,...,2n\}\ \ f_k(t) = \sin\big((k-n)t\big) \end{cases}$$

forment une famille libre.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs $u = (1, 1, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (1, -1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base.

Exercice 4

Soient $P_0 = 1$; $P_1 = 1 + X$, $P_2 = (1 + X)^2$ et $P_3 = (1 + X)^3$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $Q = X^3 + 2X^2$. Donner les coordonnées de Q dans $\mathscr{B}$.
3. En déduire une primitive de $x \longmapsto (x^3 + 2x^2)(1 + x)^{3/2}$

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on note

$$L_i(X) = \prod_{k \neq i} \left(\frac{X - a_k}{a_i - a_k} \right)$$

Montrer que $B = (L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 6

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{cases}$$ où les a_{ij} sont des réels

2. $$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto 2(X + 1)P - (X^2 - 2X + 1)P' \end{cases}$$

3. $$I : \begin{cases} C^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$ où $C^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 7

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\big(\mathrm{Ker}(g)\big)$
2. $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}(f)$
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g\big(\mathrm{Im}(f)\big)$
4. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(u,v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$$

Exercice 9

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f et exhiber une de ses bases.
3. Déterminer l'image de f.

Exercice 10

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$p \circ f = f \circ p \implies \big[f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p) \quad \text{et} \quad f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)\big]$$

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, p un projecteur (c'est-à-dire $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$ où $p^2 = p \circ p$) et $s = 2p - id$ où id est l'endomorphisme identité de E.

1. Montrer que $id - p$ est un projecteur.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(id - p) = \mathrm{Ker}(p)$.

4. Montrer que $s^2 = id$.

5. Soit $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$. Montrer que $s(y+z) = y - z$.

6. Soit $\Theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & g \end{array} \right.$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

   Montrer que Θ est un projecteur puis déterminer $\mathrm{Ker}(\Theta)$ et $\mathrm{Im}(\Theta)$.

Exercice 12

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 5X + 6$.

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 - 5f + 6id = 0$.

   a. Vérifier que $(f - 2id) - (f - 3id) = id$.

   b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3id) = E$.

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(p, q) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs/

1. Montrer que $p + q$ projecteur $\Longleftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$

2. On suppose de plus que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que

   a. $p \circ q$ est un projecteur.

   b. $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}) + \mathrm{Ker}(q)$

   c. $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

Exercice 14

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n paire et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\left(f^2 = 0 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \frac{n}{2}\right) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)\big)$$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\big(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)\big) \Longleftrightarrow \big(E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)\big)$$

Feuilles d'exercices n°10
Algèbre linéaire II

Rappel: Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une famille $\boxed{\text{libre}}$ si pour

$u_1, \ldots, u_n \in B$

tq $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Sinon

c'est une famille liée.

Exo 1:

1) Dans $\mathbb{R}^2$: $((1,2),(3,5))$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

a-t-on $\alpha = \beta = 0$?

On a $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -3\beta \\ -6\beta + 5\beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -3\beta \\ \beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

D'où famille libre de $\mathbb{R}^2$.

2) $\mathbb{R}^3$: $((1,2,3),(1;2,-3),(3,-2,-3))$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$

a-t-on $\alpha = \beta = \gamma = 0$?

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\gamma = -\alpha - \beta = 3\alpha - 3\beta \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

3 inconnues > 2 équations $\Rightarrow$ liée.

$\beta = -\gamma \quad \alpha = \beta - 3\gamma = -5\gamma$

$\gamma \in \mathbb{R}$

Famille liée.

3) $\mathbb{R}_2[X]$: $((1, X+1, (X-1)^2))$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tq

$\alpha + \beta(X+1) + \gamma(X-1)^2 = 0$

a-t-on $\alpha = \beta = \gamma = 0$?

$\alpha + \beta X + \beta + \gamma X^2 + \gamma - 2X\gamma = 0$

$\gamma X^2 + X(\beta - 2\gamma) + \alpha + \gamma + \beta = 0$

Or : Un polynome est nul ssi ses coefficients sont nuls

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma + \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$

4) $\mathbb{R}^{]-1,1[}$: $\left(f : x \mapsto \frac{1}{x-1} \ ; \ g : x \mapsto \frac{1}{x+1}\right)$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha\left(\frac{1}{x-1}\right) + \beta\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$\underline{\text{a-t-on } \alpha = \beta = 0}$

$$\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = 0$$

$$\frac{\alpha x + \alpha + \beta x - \beta}{(x-1)(x+1)} = 0$$

Donc $(x-1)(x+1) \neq 0$

et $\alpha x + \alpha + \beta x - \beta = 0$

$x(\alpha + \beta) + \alpha - \beta = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Famille libre.

5) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\left(f : x \mapsto x, \ g : x \mapsto |x| \ ; \ h : x \mapsto 1 - x\right)$

Soient α, β, γ tq

~~on~~ $\alpha x + \beta|x| + \gamma(1-x) = 0$

a-t-on $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha x + \beta|x| + \gamma - \gamma x = 0$

$x(\alpha - \gamma) + |x|(\beta) + \gamma = 0$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Si $x \geq 0$:

$$x(\alpha+\beta-\gamma) + \gamma = 0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = -\beta \end{cases}$$

Donc famille liée

Si $x \leq 0$:

$$x(\alpha-\beta-\gamma) + \gamma = 0$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha-\beta-\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

6) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $(f : x \mapsto 1 \ ; g : x \mapsto \cos^2(x) \ ; h : x \mapsto \cos(2x))$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq :

$$\alpha + \beta\cos^2(x) + \gamma\cos(2x) = 0$$

$$\alpha + \beta\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) + \gamma\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = 0 .$$

7/ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\left(f : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{2e^x+1} \; ; \; g : x \dfrac{2e^x-1}{e^x+1} \; ; \; h : x \mapsto \dfrac{1}{e^x-x+1} \right)$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\forall x$:

$$\alpha \frac{e^x+1}{2e^x+1} + \beta \frac{2e^x-1}{e^x+1} + \gamma \frac{1}{e^x-x+1}$$

<u>q-t.on</u> : $\alpha = \beta = \gamma = 0$?

<u>En particulier pour :</u>

$\boxed{x=0}$

$$\Rightarrow \alpha \frac{2}{3} + \beta \frac{1}{2} + \gamma \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{4}{3}\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{-4\alpha - 3\beta}{3}$$

$\boxed{x \longrightarrow -\infty}$

$$\alpha \frac{1}{1} + \beta \frac{-1}{1} + \gamma \times 0 = 0$$

$\boxed{\alpha - \beta = 0}$ $\alpha = \beta = 0$

$\boxed{x = 1}$

$$\alpha \frac{e+1}{2e+1} + \beta \frac{2e-1}{e+1} + \gamma \frac{1}{e} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha e(e+1)^2 + \beta(2e-1)(2e+1).e + \gamma(2e+1)(e+1)}{(2e+1).(e+1)e} = 0$$

$\alpha = \beta$ et $\gamma = \dfrac{-4\alpha - 3\beta}{3}$

$$\Rightarrow \alpha\left(5e^3 + 2e^2 - \frac{14}{3}e^2 - 7e - \frac{7}{3}\right) = 0$$

$\alpha = 0$ $\gamma = 0$

$\alpha = \beta \Rightarrow \beta = 0$

8) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $(f : x \mapsto e^{x} ; g : x \mapsto e^{x+1} ; h : x \mapsto e^{x+2})$

$$h(x) = e\,g(x) = e^2 f(x)$$

$\Rightarrow$ famille liée.

Exercice 2 : 1) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}$ calculer les intégrales suivantes :

formule d'Euler $A = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^{2\pi} (e^{ipx} + e^{-ipx})(e^{iqx} + e^{-iqx})\,dx$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$A = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(e^{i(p+q)x} + e^{ix(p-q)} + e^{ix(q-p)} + e^{-ix(p+q)}\right)dx$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)\right)dx$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p-q)x)\,dx$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)x) + \frac{1}{p-q}\sin((p-q)x)\right]_0^{2\pi}$$

avec $\begin{cases} p-q \neq 0 \\ p+q \neq 0 \end{cases}$ $A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\times 0 + \frac{1}{p-q}\times 0 - \frac{1}{p+q}\times 0 - \frac{1}{p-q}\,0\right]$

$$A = 0.$$

$$B = \int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx)\, dx = \int_0^{2\pi} \left(e^{ipx} + e^{-ipx}\right)\left(e^{iqx} - e^{-iqx}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(p+q)x}\right) + \left(e^{ix(p-q)}\right) + \left(e^{-ix(q+p)}\right) + \left(e^{-ix(p+q)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((p+q)x)\, dx \times \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((p-q)x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+q} \sin((p+q)x) - \frac{1}{p-q} \cos((p-q)x) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p+q} \times 0 - \frac{1}{p-q} \times 0 - \frac{1}{p+q} \times 0 - \frac{1}{p-q} \right\}$$

$$= 0$$

$$C = \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(e^{ipx} - e^{-ipx}\right)\left(e^{iqx} - e^{-iqx}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{ix(p+q)} - e^{ix(p-q)} - e^{-ix(q+p)} + e^{-ix(p+q)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos((p+q)x) - \cos((p-q)x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((p+q)x)\, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((p-q)x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+q} \sin((p+q)x) + \frac{1}{p-q} \sin((p-q)x) \right]_0^{2\pi}$$

$C = \frac{1}{2}\left[- \quad \right]$

$C = 0$.

2) En déduire que les $(2n+1)$ fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f_0(t) = 1 \\ \forall k \in \{1, \dots, n\} \ f_k(t) = \cos(kt) \\ \forall k \in \{n+1, \dots, 2n\} \ f_k(t) = \sin((k-n)t) \end{cases}$$

Soient $(2n+1)$ scalaires

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

et $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n} \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha_0 . 1 + \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \cos(2t) + \dots + \alpha_n \cos(nt)$

$+ \alpha_{n+1} \sin(t)$

$\hookrightarrow (n+1-n)t$

$+ \dots + \alpha_{2n} \sin(nt) = 0$

Mq : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{2n} = 0$

On multiplie par $\cos(t)$ et on intègre sur

$$\alpha_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt}_{=0} + \alpha_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt}_{\neq 0} + \dots +$$

$$\alpha_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt}_{=0} + \alpha_{n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(t).\cos(t)\,dt}_{=0} +$$

$$\dots + \alpha_{2n} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(t)\,dt}_{=0} = 0$$

$$\alpha_1 \int_0^{2\pi} \frac{2\cos(2t)+1}{2}\,dt$$

$$\alpha_1 \left[\frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin(2t)}_{=0} + \frac{1}{2} t \right]_0^{2\pi} = 0 .$$

$$\alpha_1 \cdot \frac{1}{2}(2\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 .$$

On multiple à chaque fois par $\cos(it)$

avec $i \in [\![1, \dots, 2n]\!]$

<u>Donc</u> $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2n} = 0$

Exercice 3 :

$\mathbb{R}^3$: $u = (1, 1, -1)$
$v = (-1, 1, 1)$
$w = (1, -1, 1)$

mq (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

Base = famille libre et génératrice

Rappel : Une famille de n elements de $\mathbb{R}^n$ est libre
$\Rightarrow$ elle est forcement génératrice

Tout d'abord, on mq $\{u, v, w\}$ est libre de $\mathbb{R}^3$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \beta - \gamma \\ \beta = \gamma - \alpha \\ \gamma = \alpha - \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha \\ \beta = \gamma - \alpha \\ \gamma = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre
Car dim espace = Nb elements.

Or : la dimension de l'espace, c'est à dire celle de $\mathbb{R}^3 = 3$

= au nombre éléments de la famille.

donc la famille est génératrice

Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées de $(2,1,3) = V_1$ dans cette base :

on a $V_1 = \alpha u + \beta v + \gamma w$:

et on doit calculer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2 = \alpha - \beta + \gamma & (1) \\ 1 = \alpha + \beta - \gamma & (2) \\ 3 = -\alpha + \beta + \gamma & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} (1)+(2) : & 2\alpha = 3 \quad \alpha = \frac{3}{2} \; (1) \\ (2)+(3) : & 2\beta = 4 \quad \beta = 2 \\ (2) & \gamma = -1 + \beta + \alpha = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$v = \frac{3}{2}u + 2v + \frac{5}{2}w$$

Exercice 4.

Soit $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X$, $P_2 = (1+X)^2$, $P_3 = (1+X)^3$

1) Mq $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$

(dimension = 4)

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\alpha(1) + \beta(1+X) + \gamma(1+X)^2 + \delta(1+X^3) = 0$$

$$\alpha + \beta + \beta X + \gamma + \gamma X^2 + 2\gamma X + \delta(1 + X^2 + 2X)(1+X) = 0$$

~~$\alpha + \beta + \beta X + \gamma + \gamma X^2 + 2\gamma X + \delta X^3 + \delta + 2\delta X^2 + 2\delta X = 0$~~

$\delta X^3 + (\gamma + 2\delta)X^2$

$\Rightarrow$

$\alpha + \beta + \beta X + \gamma + \gamma X^2 + 2\gamma X + \delta + \delta X + \delta X^2 + \delta X^3 + 2\delta X + 2\delta X^2 = 0$

$\delta X^3 + (\gamma + 3\delta) X^2 + (\beta + 2\gamma + 3\delta) X + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$

$\begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma + 3\delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ famille libre.

+ nb élmt = 4 = dim de $\mathbb{R}_3[X]$

$\Rightarrow$ Donc Base de $\mathbb{R}_3[X]$

2) Soit $Q = X^3 + 2X^2$

Coords de Q dans B :

$\begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma + 3\delta = 2 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma = -1 \\ \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

$\boxed{X^3 + 2X^2 = 1P_0 - 1P_1 - 1P_2 + 1P_3}$

3) $x \mapsto (x^3 + 2x^2)(1+x)^{3/2}$

$\int Q(x)(1+x)^{3/2} dx$

$\int (1 - (1+X) - (1+X)^2 + 1(1+X)^3)(1+X)^{3/2} dx$

car $Q(X) = P_0 - P_1 - P_2 + P_3$

$= 1 - (1+X) - (1+X^2) + (1+X)^3$

$\int \left((1+X)^{3/2} - (1+X)^{5/2} - (1+X)^{7/2} + (1+X)^{9/2}\right) dx$

$= \int (1+X)^{3/2} - \int (1+X)^{5/2} - \int (1+X)^{7/2} + \int (1+X)^{9/2}$

$$= \frac{(1+s)^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{(1+s)^{7/2}}{7/2} - \frac{(1+s)^{9/2}}{9/2} + \frac{(1+s)^{11/2}}{11/2} + cst$$

$$= \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{2}{9}(1+x)^{9/2} + \frac{2}{11}(1+x)^{11/2}$$

<u>Exercice 5 :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on note

$$L_i(x) = \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - a_k}{a_i - a_k}\right)$$

<u>Mq</u> $B = (L_1, \dots, L_n)$ est une base $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

$\Rightarrow$ <u>mq</u> qu'elle est libre

<u>Soient</u> $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

<u>tq</u> $b_1 L_1(x) + b_2 L_2(x) + \dots + b_n L_n(x) = 0$

<u>a-t-on</u> $b_i = 0 \quad \forall i \in [1, \dots, n]$

$$L_i(x) = \prod \frac{(x - a_k)}{(a_i - a_k)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \cdots (x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2) \cdots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \cdots (a_i-a_n)}$$

Au point $x = a_i$; $L_j(a_i) = 0$ et $L_i(a_i) = 1$

Soit $P(x) = b_1 L_1(x) + \dots + b_n L_n(x) = 0$

Pour $x = a_1$; $P(a_1) = \overbrace{b_1 L_1(a_1)}^{b_1 \times 1} + \overbrace{b_2 L_2(a_1)}^{0} + \dots + \overbrace{b_n L_n(a_1)}^{0} = 0$

$= b_1 \times 1 = 0$

$b_1 = 0.$

de même avec $X = a_2$ ___ $X = a_n$

$\Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

donc libre.

dr autant de polynome que la dimension de l'espace

Donc générateur

Donc base

Exercice : Rappel : Application linéaire, $f : E \to F$, E, F : ev

f est dite linéaire si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $X, Y \in E$, $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

1/ $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p \end{pmatrix}$$ où les a_{ij} sont des réels

Soit $\alpha ; \beta \in \mathbb{R}$ mq :

$f(\alpha X + \beta X) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$

$$\alpha X + \beta Y = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_p + \beta y_p \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha X + \beta Y) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_p + \beta y_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha x_1 + \beta y_1) + \dots + a_{1p}(\alpha x_p + \beta y_p) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(\alpha x_n + \beta y_n + \dots + a_{np}(\alpha x_p + \beta y_p) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} x_1 \dots + a_{1p} x_p \\ \vdots \\ a_{n1} x_n + \dots + a_{np} \cdot x_p \end{pmatrix}}_{f(X)} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} y_1 + \dots + a_{1p} y_p \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} y_n + \dots + a_{np} y_p \end{pmatrix}}_{f(Y)}$$

$$= \alpha \quad f(X) \quad + \beta \quad f(Y)$$

donc linéaire.

2) $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P' \end{cases}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$
et calculons $\Delta(\alpha P + \beta Q) = \alpha \Delta(P) + \beta \Delta(Q)$

$$\Delta(\alpha P + \beta Q) = 2(X+1)(\alpha P + \beta Q) - (X^2 - 2X + 1)(\alpha P + \beta Q)'$$

$$= 2X\alpha P + 2X\beta Q + 2\alpha P + 2\beta Q - (X^2 - 2X + 1)(\alpha P' + \beta Q')$$

$$= 2(X+1)\alpha P + 2(X+1)\beta Q - (X^2 - 2X + 1)\alpha P' - (X^2 - 2X + 1)\beta Q'$$

$$= \alpha \Delta(P) + \beta \Delta(Q)$$

Donc linéaire.

3)

$I : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$f \longmapsto I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et f et $g \in C^0(\mathbb{R})$

$$I(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)$$
$$= \int_0^1 \alpha f(t)\,dt + \int_0^1 \beta g(t)\,dt$$
$$= \alpha \int_0^1 f(t)\,dt + \beta \int_0^1 g(t)\,dt$$
$$= \alpha I(f) + \beta I(g)$$

$\Rightarrow$ I est bien linéaire

Exercice 7 : E, F et G trois $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$
et $g \in \mathcal{L}(F, G)$

$f \in \mathcal{L}(E, F) \Leftrightarrow f : E \to F$ linéaire.
$g : F \to G$ linéaire

1) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ g)$

<u>Rappel</u> : $\ker f = \{x \in F \,/\, f(x) = 0\}$

On a $x \in \ker(g \circ f)$

$\Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 0$

$\Leftrightarrow g(f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) \in \ker(g)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\ker(g))$

2) $\ker(g \circ f) \supset \ker(f)$

<u>mq</u> $\ker(f) \subset \ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$

Soit $x \in \ker(f)$

$\ker f = \{x \in F \,/\, f(x) = 0\}$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow g(f(x)) = g(0)$

or linéaire donc $g(0) = 0$

$\Leftrightarrow$ ~~$g \circ f \neq 0$~~

$\Leftrightarrow f(x) \in \ker(g)$

$\Leftrightarrow$ Donc $x \in f^{-1}(\ker(g)) = \ker(g \circ f)$

3) Mq : $Im(g \circ f) = g(Im(f))$

Rappels :

$Im\, f = \{ y \in F \,/\, \exists x \in E \,;\, f(x) = y \}$

On a : $Im(g \circ f) = (g \circ f)(E)$

$\hookrightarrow$ def

$= g(f(E)) = g(Im(f))$

4) $\underbrace{Im(g \circ f)}_{=} \subset Im(g)$

On a $g(Im(f)) = g(f(E))$

$= g(F) = Im\, g$

$g : F \to G$

Donc : $Im(g \circ f) \subset Im(g)$

Exo 8 : Soit E un Rev, $(u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$

Mq $E = Ker(u) \oplus Ker(v) \Rightarrow Im(u) \subset Ker(v)$ et $Im(v) \subset Ker(u)$

Supposons que $E = Ker(u) \oplus Ker(v)$

et mq $Im(u) \subset Ker(v)$

$\Rightarrow \begin{cases} \ker(u) \cap \ker(v) = \{0\} \\ \cdot\, x = x_u + x_v \end{cases}$

$\underset{\in}{x}$ $\underset{\ker(u)}{x_u}$ $\underset{\ker(v)}{x_v}$

mq $\operatorname{Im}(u) \subset \ker(v)$

revient à montrer que

Autrement dit

soit $y \in \operatorname{Im}(u)$

mq $y \in \ker(v)$

mq $\Rightarrow v(y) = 0$

On a

$y \in \operatorname{Im}(u)$, $\exists x \in E \,/\, u(x) = y$

et d'autre part

$x = x_u + x_v$

or $u \in \mathcal{L}(E)$ donc :

$u(x) = u(x_u + x_v)$

$= \underbrace{u(x_u)}_{= 0 \text{ car } x_u \in \ker u} + u(x_v)$

$u(x) = u(x_v)$

$\Rightarrow v(u(x)) = v(u(x_v))$

$= u(\underbrace{v(x_v)}_{= 0 \ x_v \in \ker(v)})$ car $u \circ v = v \circ u$

$= u(0) = 0$ car $u \in \mathcal{L}(E)$

$\underbrace{v(u(x))}_{y} = 0$

$\Rightarrow v(y) = 0$

$\Rightarrow y \in Ker(v)$

$Im(u) \subset Ker(v)$

Et par analogie $Im(v) \subset Ker(u)$

$\begin{cases} u \to v \\ v \to u \end{cases}$

Exo 9 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$

1) mq f linéaire :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$u = (x,y)$, $v = (x',y')$

mq $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

on a $\alpha u + \beta v = \alpha(x,y) + \beta(x',y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$

$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$

$= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y')$

$= \alpha(x+y) + \beta(x'+y')$

$= \alpha u + \beta v$

$\alpha f(u) + \beta(f(v))$

linéaire

2) Déterminer le noyau de f et exhiber une de ses bases.

Calcul de $\ker(f)$:

$\ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\}$

Soit $(x,y) = u \in \mathbb{R}^2$ / $f(x,y) = 0$
$u \in \ker(f)$

$\Rightarrow x + y = 0$

$\Leftrightarrow x = -y$

$(x,y) = (-y, y)$

$= y(-1,1)$; $y \in \mathbb{R}$

$= \text{vect}\{(-1,1)\}$

$\Rightarrow \ker(f) = \text{Vect}\{(-1,1)\}$

base : $\{(-1,1)\}$ de $\ker(f)$

3) Déterminer $\text{Im}(f)$

Soit $a \in \text{Im}(f)$, $\exists! u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

tq $f(u) = a$

$\Leftrightarrow f(x,y) = a$

$\Leftrightarrow x + y = a$

$\Leftrightarrow x = a - y$

$\Leftrightarrow u = (x,y) = (a-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$

Si je prends $y = 0$

$$u = (a, 0)$$

$$Im(f) = Vect \{(a,0)\} , a \in \mathbb{R}$$

Exo :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathcal{L}(E)$

mq $p \circ f = f \circ p \Rightarrow [f(Ker(p)) \subset Ker(p)$ et $f(Im(p)) \subset Im(p)]$

Rq : F est dit stable par u ssi

$$u(F) \subset F$$

Autrement dit

mq $Ker(p)$ stable par f

$Im(p)$ stable par f

1) Stabilité de $Ker(p)$:

càd mq si $p \circ f = f \circ p$

alors $Ker(p)$ est stable par f

Soit $x \in Ker(p) \Rightarrow p(x) = 0$

$$f(p(x)) = f(0)$$

or $f(0) = 0$ car f linéaire

$\Rightarrow p(f(x)) = 0$ car $p \circ f = f \circ p$

$\Rightarrow f(x) \in Ker(p)$

d'où la stabilité de $Ker(p)$ par f

2) montrons la stabilité de $Im(p)$

$$\forall y \in Im(p) \ \exists x \in E \ / \ p(x) = y$$

en particulier pour $y = x$

alors $p(x) = x$

$$\Rightarrow \quad f(p(x)) = f(x)$$

$$p(f(x)) = f(x)$$

$\Rightarrow f(x) \in Im(p)$

D'où la stabilité de $(Im(p))$ par f.

Exo 11 :

Rq $p \in \mathcal{L}(E)$

p est un projecteur ss $p^2 = p$

avec $\boxed{p^2 = p \circ p}$

et $s = 2p - id$ $\quad id = i \times d \Rightarrow ev$

id : identité de E

1) mq $(id - p)$ est un projecteur

autrement dit mq $(id-p)^2 = (id-p)$

$\Leftrightarrow (id-p) \circ (id-p) = (id-p)$

$id \circ id - id \circ p - p \circ id + p \circ p = (id-p)$

$id^2 + p^2 - 2p = (id-p)$

$= id^2 + p - 2p$

$= 1 - p = (id-p)$ OK

2) mq : $E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$

mq $\begin{cases} \ker(p) \cap \operatorname{Im}(p) = \{0\} \\ \ker(p) + \operatorname{Im}(p) = E \end{cases}$

Soit $x \in \ker(p) \cap \operatorname{Im}(p)$, mq $x = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = 0 \\ \exists y \in E \text{ tq } p(y) = x \end{cases}$

$\Rightarrow$ on a $p(x) = 0 = p(p(y))$

$= p(y)$ car p projecteur.

$= x = 0$

OK

$\Rightarrow$ mq $E = \ker(p) + \operatorname{Im}(p)$

Soit $x \in E$, on a

$x = p(x) + (x - p(x))$

or $x - p(x) \in \ker(p)$ car

$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x))$

$\hookrightarrow p \in \mathcal{L}(E)$

$= p(x) - p(x)$ car p projecteur.

$= 0$

$\Rightarrow (x - p(x)) \in \ker(p)$

. $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ par déf

D'où : $E = \ker(p) + \operatorname{Im}(p)$

$\Rightarrow E = Ker(p) \oplus Im(p)$

3) Mq $Im(id-p) = Ker(p)$

on a : $Im(id-p) = \{y \in E \text{ tq } \exists x \in E, (id-p)(x) = y\}$

avec $y = x$ on a $= \{x \in E, \text{tq } (id-p)(x) = x\}$

$= \{x \in E, \text{tq } x - p(x) = x\}$

$= \{x \in E \text{ tq } -p(x) = 0\}$

$= \{x \in E, p(x) = 0\}$

$= Ker(p)$

4) Mq $s^2 = id$ $\quad s^2 = s \circ s$

avec $s = (2p - id)$

on a $s^2 = s \circ s$

$= (2p - id) \circ (2p - id)$

$= 4p \circ p - 2p \circ id - id \circ 2p + id \circ id$

$= 4p - 2p - 2p + id$

$\Rightarrow s$ symétrie

5) Soit $(y, z) \in Im(p) \times Ker(p)$

Mq: $s(y+z) = y - z$

on a : $s(y+z) = (2p - id)(y+z)$

$= 2p(y+z) - (y+z)$

$= 2p(y) + 2p(z) - y - z$

$p \in \mathcal{L}(E)$

$= 2\underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{car } z \in \ker(p)}}{p(z)} - z + 2p(y) - y - z$

$= 2p(y) - y - z$

$= p(y) + p(y) - y - z$

$= p^2(y) + p^2(y) - y - z$

or $y \in \operatorname{Im}(p)$

donc $p(y) = y$

$= y + y - y - z = y - z$

b) $\Theta = \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \longmapsto g \end{cases}$ $(\Theta(f) = g)$

$g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

mq : Θ est un projecteur

càd : mq $\Theta \circ \Theta = \Theta = \Theta^2$

$(\Theta \circ \Theta)(f) = \Theta(\Theta(f))$

$= \dfrac{\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}}{2}$

$= \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

$= \Theta(f)$

$\rightarrow$ Θ est un projecteur !

$$\Theta(f) = \left\{ f \text{ paire} \right\} = \left\{ f \,/\, \frac{f(x)+f(-x)}{2} \right\}$$

<u>$Ker(\Theta)$</u> ?

Soit $f \in Ker(\Theta)$

$$\Rightarrow \frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(-x) = -f(x)}_{\text{fonction impaire.}}$$

<u>Donc</u> $Ker(\Theta) = \left\{ f \,/\, \text{impaire} \right\}$

$$\left\{ f \,/\, \text{impaire} \right\} = \left\{ f \,/\, \frac{f(x)-f(-x)}{2} \right\}$$

d'après 2) $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ $\begin{cases} E = Ker(\Theta) + Im(\Theta) \\ Ker(\Theta) \cap Im(\Theta) = \{0\} \end{cases}$

<u>or</u> $E = Ker(\Theta) + Im(\Theta)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\substack{\text{impaire} \\ \in Ker(\Theta)}} + \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\substack{\text{Pair} \\ \in Im(\Theta)}}$$

Par unicité de la décomposition

Ex12 : 1) $X^2 - 5X + 6$
$= (X-2)(X-3)$

2) $f^2 - 5f + 6id = 0$

a) $(f-2id) - (f-3id) = \cancel{f} - 2id - \cancel{f} + 3id$
$= id$

b) Mq $Ker(f-2id) \oplus Ker(f-3id) = E$

Mq $\begin{cases} Ker(f-2id) \cap Ker(f-3id) = \{0\} & ① \\ Ker(f-2id) + Ker(f-3id) = E & ② \end{cases}$

① Soit $x \in Ker(f-2id) \cap Ker(f-3id)$

$\Rightarrow \begin{cases} (f-2id)(x) = 0 \\ (f-3id)(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = 0 \\ f(x) - 3x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \\ f(x) = 3x \end{cases} \Rightarrow 2x = 3x \Rightarrow x = 0$!

② Soit $x \in E$

$x = ((f-2id) - (f-3id))(x)$

$= \underbrace{(f-2id)(x)}_{\in Ker(f-2id)} - \underbrace{(f-3id)(x)}_{\in Ker(f-3id)}$

Exo 13.

1) Mq $(p+q)$ projecteur ssi $p\circ q = q\circ p = 0$

On suppose $p\circ q = q\circ p = 0$, mq $(p+q)$ projecteur

$(p+q)^2 = (p+q)\circ(p+q)$

$= p\circ p + p\circ q + q\circ p + q\circ q$

$= p + \underbrace{p\circ q}_{0} + \underbrace{q\circ p}_{0} + q$ car p et q projecteurs ⊛

or :

$= p+q$

Donc $(p+q)$ est un projecteur

réciproque :

mq si $(p+q)$ est un projecteur alors $p\circ q = q\circ p = 0$

On a : $(p+q)$ est un projecteur ssi

$p\circ q + q\circ p = 0$ (d'après ⊛)

On a : $p\circ q + q\circ p = 0$

$p\circ p\circ q + p\circ q\circ p = p$ (j'applique à gauche de l'égalité "p")

$p^2\circ q + p\circ q\circ p = p\circ 0 \Rightarrow \boxed{p\circ q + p\circ q\circ p = 0}$

$p(0) = 0$ car $p \in \mathcal{L}(E)$

d'autre part : on a $p\circ q + q\circ p = 0$ (je réapplique p) à droite de l'équation)

$p\circ q\circ p + q\circ p\circ p = 0\circ p = 0$

$\boxed{\Rightarrow p\circ q\circ p + q\circ p = 0}$

$\Rightarrow q \circ p = -p \circ q \circ p$

$\Rightarrow q \circ p = p \circ q$

or $p \circ q + q \circ p = 0$

$p \circ q + p \circ q = 0$

car $(p \circ q = q \circ p)$

$\Rightarrow 2 p \circ q = 0 \Leftrightarrow p \circ q = 0$

2) $p \circ q = q \circ p$

a) mq $(p \circ q)$ est un projecteur

$\Rightarrow (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$

On a $(p \circ q)^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q)$

$= q \circ p \circ p \circ q$

$= q \circ p \circ q$ car p projo

$= p \circ q \circ q = p \circ q$ car projo.

b) mq $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

Double inclusion

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

mq $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$

On a : $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

Donc $\exists (x_p, x_q) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Ker}(q)$ tq

$x = x_p + x_q$

$$(p\circ q)(x) = (p\circ q)(x_p + x_q)$$
$$= p(q(x_p + x_q)) - p(q(x_p) + \underbrace{q(x_q)}_{0}))$$

$q \in \mathcal{L}(E)$

or $(p\circ q)(x) = p(q(x_p))$

$= q(p(\underbrace{x_p}_{\text{car } x_p \in Ker(p)}))$ car $p\circ q = q\circ p$

$= q(0) = 0$ car $q \in \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow (p\circ q)(x) = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(p\circ q)$

$\boxed{C}$ Soit $x \in Ker(p\circ q)$ mq $x \in Ker(p) + Ker(q)$

Soit $x \in Ker(p\circ q)$ tq :

$x = q(x) + x - q(x)$

Or : $q(x) \in Ker(p)$ car

$p(q(x)) = 0$ car $x \in Ker(p\circ q)$ par hypothèse

mq $(x - q(x)) \in Ker(q)$

On a : $q(x - q(x)) = q(x) - q(q(x))$; $q \in \mathcal{L}(E)$

$= q(x) - q(x) = 0$

$\Rightarrow (x - q(x)) \in Ker(p)$

c) mq $Im(p \circ q) = Im(p) \cap Im(q)$

Double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in Im(p \circ q)$

mq $y \in Im(p) \cap Im(q)$

On a $y \in Im(p \circ q)$, $\exists x \in E / (p \circ q)(x) = y$

$\Rightarrow y = p(q(x)) \Rightarrow y \in Im(p)$

et puisque $p \circ q = q \circ p$

$y = q(p(x)) \Leftrightarrow y \in Im(q)$

$\Rightarrow y \in Im(p) \cap Im(q)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in Im(p) \cap Im(q)$

mq $x \in Im(p \circ q)$

On a $x \in Im(p) \cap Im(q)$

$\Rightarrow$ d'où $\begin{cases} p(x) = x \\ q(x) = x \end{cases} \Rightarrow p(x) = q(x) = x$

$p \circ p(x) = p(q(x)) = p(x)$

$p(x) = p(q(x)) = x$

$\Rightarrow x \in Im(p \circ q)$

Q014 :

Dimension finie

dim $E = n$ pair

$f \in \mathcal{L}(E)$

Mq $f^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \frac{n}{2} \Leftrightarrow$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$

Thm du rang

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$

$\Leftarrow$ • On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$

$2\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$

$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = \frac{n}{2}}$

• mq $f^2 = 0$

Soit $x \in E$, $\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

or : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$

$\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow f^2(x) = 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow f^2 = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $f^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \frac{n}{2}$

et mq $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$

(i) mq $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$

Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists y \in E \,/\, f(y) = x$

$\Rightarrow f(x) = f(f(y))$ or $f^2 = 0$

$= f^2(y) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f)$

(ii) mq $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$

comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\frac{n}{2}} = n$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \frac{n}{2}$

et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$

Ex 15

$f \in \mathcal{L}(E)$;

mq $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

revient à mq $(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)) \Rightarrow E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

or $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

$\Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ ①

$\Rightarrow$? ②