

# Approximation, interpolation, optimisation

Regragui Mohammed

ING1 2014

Sources disponibles sur <http://ing1.nemunai.re/> ou [ing1@nemunai.re](mailto:ing1@nemunai.re)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Approximations</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Approximation dans un espace métrique . . . . .	2
1.3	Approximation uniforme . . . . .	3
1.3.1	Polynôme de Chibyshev . . . . .	3
1.4	Méthode des moindres carrés . . . . .	10
1.5	Interpolation . . . . .	12
1.5.1	Polynôme d'interpolation de Lagrange . . . . .	12
1.5.2	Polynôme d'interpolation de Newton . . . . .	13
1.6	Dérivation numérique . . . . .	16
1.6.1	Dérivée d'un polynôme par division synthétique . . . . .	17
1.7	Intégration numérique . . . . .	20
1.7.1	Méthode générale . . . . .	21
1.7.2	Quelques exemples de méthodes composées . . . . .	21

# Chapitre 1

## Approximations

### 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner les premières notions de la théorie de l'approximation permettant d'aborder la résolution de problèmes tels que :

- soit  $f(x)$  continue sur  $[a; b]$ , déterminer dans l'espace des polynôme de degré  $n$  celui rend :  $|f(x) - P_n(x)|$  le plus petit possible ;
- déterminer les coefficients  $a_k$  qui minimisent la valeur  $\int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k)^2 \omega(x) dx$  où  $\omega(x)$  est le poid.
- Soit  $f$  continue et  $(n + 1)$  points  $X_0, X_1, \dots, X_n$  :  
 $\exists P_n(x) / P_n(X_i) = f(X_i) \quad \forall i = 0..n$   
 $P_n(x)$  est le polynôme d'interpolation de  $f(x)$ .

### 1.2 Approximation dans un espace métrique

$(E, d)$  est un espace métrique : il existe une distance  $d$  :

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(f, \Phi) \longmapsto d(f, \Phi)$$

- (i)  $d(f, \Phi) = 0 \Rightarrow f = \Phi$
- (ii)  $d(f, \Phi) = d(\Phi, f)$
- (iii)  $d(f, \Phi) \leq d(f, \psi) + d(\psi, \Phi) \quad \forall f, \Phi, \psi \in E$

**Problème** Soit  $(E, d)$  un espace métrique :  $F \subset E$  (sous espace-vectoriel de  $E$ ).

Déterminer  $\Phi^* \in F / d(f, \Phi^*) = \text{Mind}(f, \Phi) \quad \Phi \in F$ . S'il existe, cet élément  $\Phi^*$  sera appelé meilleur approximation (ou sens de la distance  $d$ ) de  $f \in E$ .

**Définition**  $E$  est un espace vectoriel normé s'il existe une norme  $\|f(f)\|$ ,  $\forall f \in E$ .

$d(f, \Phi) = \|f - \Phi\|$  distance sur  $E$ .

On suppose que  $\dim(E) < +\infty$

$$\|f - \Phi^*\| = \min(\|f - \Phi\|) \quad \Phi \in F$$

### 1.3 Approximation uniforme

Soit  $E = \mathcal{C}([a, b] \in \mathbb{R}) = f$  continue  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$E$  est normée  $\|f\| = \max|f(x)| \quad a \leq x \leq b$

$$d(f, \Phi) = \|f - \Phi\| = \max|f(x) - \Phi(x)|$$

Soit  $\mathbb{C}_n$  un sous espace vectoriel de  $E$ , de dimension  $n$ .

La meilleur approximation uniforme  $\Phi^* \in \mathcal{E}_n$  de  $f \in E$  est donc la fonction définie par :

$$f - \Phi^* = \min(\max|f(x) - \Phi(x)|) \quad \Phi \in \mathcal{E}_n$$

Soit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  une base de  $\mathcal{E}_n$  :

$$\Phi^* = \sum_{i=1}^n a_i^* \cdot \varphi_i$$

$$\|f - \Phi^*\| = \min(\max|f(x) - \Phi(x)|) \quad \Phi \in \mathcal{E}, a \leq x \leq b$$

#### 1.3.1 Polynôme de Chibyshev

Les polynômes sont définis pour :

$$T_2 = 2X.T_1(x) - T(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 2x.T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8^4 - 8x^2 + 1$$

#### Propriétés

$$(i) \quad T_n(x) = \cos(n.\theta) \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ où } x = \cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = \cos(x) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$(ii) \quad \text{Le coefficient dominant de } T_n(x) \text{ est } a_n = 2^{n-1}, T_n(x) = 2^{n-1}.X^n \dots$$

- (iii)  $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$  est un ensemble de polynômes orthogonaux sur  $[-1, 1]$  relativement à la fonction poids  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) \cdot T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \forall n \neq m \quad \text{pp. scalaire}$$

- (iv)  $T_n(x) = +1; -1; +1; -1; \dots$   
 Pour  $X = 1, \cos(\frac{\pi}{n}), \cos(\frac{2\pi}{n}), \dots, \cos(\frac{k\pi}{n})$

**Théorème** Dans l'ensemble des polynômes de degré  $n$  ayant le coefficient de tête égal à 1, c'est  $T_n^* = \frac{T_n}{2^{n-1}}$  qui réalise la meilleure approximation uniforme de la fonction nulle sur  $[-1; 1]$ .

$$\|T_n^*\| = \max |T_n^*(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$P_n = \text{polynôme} : X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + a_0$$

**Démonstration** On veut montrer que  $\|T_n^*\| = \min \|R_n\| \quad R_n \in P_n$ .

Supposons le contraire :  $\exists R_n \in P_n$  tel que  $\|R_n\| < \|T_n^*\| = \frac{1}{2^{n-1}}, T_n^* - R_n = P_{n-1}$  polynôme de degré  $\leq n-1$ .

$$X_0 = 1 \quad P_{n-1}(1) = T_n^*(1) - R_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(1) > 0$$

$$X_1 = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad P_{n-1}(X_1) = T_n^*(X_1) - R_n(X_1) = \frac{-1}{2^{n-1}} - R_n(X_1) < 0$$

$$X_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad P_{n-1}(X_2) = T_n^*(X_2) - R_n(X_2) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(X_2) > 0$$

$\vdots$

$$X_n = \cos(\pi) = -1 \quad P_{n-1}(X_n) = T_n^*(X_n) - R_n(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(X_n) \leq 0$$

Les  $(n+1)$  points  $X_0 = 1, \dots, X_n$  pour lesquels  $T_n^*$  prend les valeurs  $\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{-1}{2^{n-1}}; \dots$

Donc  $P_{n-1}(x)$  possède au moins  $n$  racines dans  $[-1, 1]$ . Ceci n'est pas possible car le degré  $P_{n-1} \leq n-1$ .

Donc  $\|T_n^*\| = \min \|R_n\| \quad R_n \in P_n$ .

**Théorème** Si  $P_n \in \mathbb{P}_n$  = polynôme de degré  $\leq n$  est tel que la fonction erreur  $\epsilon_n = f - P_n$  atteint les *valeurs extrêmes alternées*  $M; -M; M; \dots$  à  $M = \|\epsilon_n\|$  en au moins  $n+2$  points  $X_1, X_2, \dots, X_{n+2} \in [a, b]$  alors  $P_n$  est le polynôme qui réalise la meilleure approximation de  $f$  sur  $[a, b]$  ( $P_n = P_n^*$ )

**Démonstration** (Par l'absurde)

Supposons  $\exists q_n \in \mathbb{P}_n / \|f - q_n\| < \|f - P_n\| = \|\epsilon_n\| = M$ ,  $\text{Max}|f(x) - q_n(x)| < M \Leftrightarrow -M < f(x) - q_n(x) < M \quad a \leq x \leq b \quad \forall x \in [a, b]$

$$r_n = q_n - p_n \text{ degré de } r_n \leq n$$

$$r_n = f - P_n + q_n - f = \epsilon_n + q_n - f$$

$$r_n(x_1) = \epsilon_n(x_1) + q_n(x_1) - f(x_1) = M + q_n(x_1) - f(x_1) > 0$$

$$r_n(x_2) = \epsilon_n(x_2) + q_n(x_2) - f(x_2) = M + q_n(x_2) - f(x_2) < 0$$

$\vdots$

$$r_n(x_{n+2}) = \epsilon_n(x_{n+2}) + q_n(x_{n+2}) - f(x_{n+2}) = M + q_n(x_{n+2}) - f(x_{n+2}) \underset{<}{>} 0$$

$r_n(x)$  change au moins  $(n-1)$  fois de signe dans  $[a, b]$  en raison de l'atérnence de  $\epsilon_n \Rightarrow r_n$  possède au moins  $(n+1)$  racines ce qui est impossible.

**Exercice 1** Polynôme de Chebyshev

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) &= 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1, T_1(x) = x \end{cases}$$

1. Montrer que  $T_n(x) = \cos(\theta) \quad |x| \leq 1 \quad \theta = \arccos(x)$
  2. Montrer que le coefficient dominant de  $T_n$  est  $a_n = 2^{n-1}$
  3. Montrer que  $T_n(x) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n) \forall x \in \mathbb{R}$
  4. Montrer que  $\int_{-1}^1 \frac{T_n(x).T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \forall n \neq m$
1. Par récurrence sur  $n$  :

$$\begin{cases} n = 0 & T_0(x) = \cos(0) = 1 \\ n = 1 & T_1(x) = x = \cos(\theta) \end{cases}$$

**Hypothèse** Supposons que  $T_k(x) = \cos(k\theta)$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2.\cos(\theta).\cos(n\theta) - \cos(n-1)\theta \\ &= 2.\cos(\theta).\cos(n\theta) - (\cos(n\theta).\cos(\theta) + \sin(\theta).\sin(n\theta)) \\ &= \cos(\theta).\cos(n\theta) - \sin(\theta).\sin(n\theta) = \cos(n+1)\theta \end{aligned}$$

2.

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) &= 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1, T_1(x) = x \end{cases}$$

Supposons que le coefficient dominant de  $T_n$  est  $a_n = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x.(2^{n-1}.X^n + R_{n-1}(x)) - T_{n-1}(x) \\ &\Rightarrow a_{n+1} = 2.2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2x.T_n - T_{n-1} \\ T_{n+1} - 2x.T_n + T_{n-1} &= 0 \text{ (équation récurrente)} (*) \end{aligned}$$

L'équation caractéristique :  $r^2 - 2xr + 1 = 0$

2 solutions particulières de l'équation (\*) :  $r_1^n$  et  $r_2^n$ .

En effet  $r_1^{n+1} - 2x.r_1^n + r_1^{n-1} = r_1^{n-1}(r_1^{n-1} - 2x.r_1 + 1) = 0$ , de même pour  $r_2^n$ .

La solution générale de (\*) est  $T_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminées par les conditions initiales.

4.

$$T_{n+1}(x) = 2 \times T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = \cos(n.\theta) \quad \theta = \arccos(x) \Leftrightarrow$$

$$X = \cos(\theta) \Rightarrow dx = -\sin(\theta)d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n.\theta) \cdot \cos(m.\theta)}{|\sin(\theta)|} (-\sin(\theta)d\theta) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta \\ \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta)d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} \right] = 0 \end{aligned}$$

5.

$$T_n(x) = 0 \quad |x| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n.\Theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Les racines de  $T_n(x)$  soit :

$$X_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

### Exercice 2 Polynôme de Legendre

On considère les polynômes :

$$\begin{cases} P_0(x) &= 1 \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Les polynômes vérifient la relation  $P_n(x) = \frac{2n-1}{n} \times P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad \forall n \geq 2$ .

1. Montrer que  $\int_{-1}^1 x^k \cdot P_n(x) dx = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .
2. En déduire la relation d'orthogonalité :  $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = 0 \quad \forall n \neq m$ .
3. Montrer que le coefficient dominant de  $P_n(x)$  est :  $a_n = \frac{(2.n)!}{2^n (n!)^2}$
4. Montrer que  $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n-1}}$   
(Rappel :  $\|P_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx}$ )

1.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) dx \begin{cases} u^1 &= \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \\ v &= x^k \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left( \left[ x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} ((x^2 - 1)^n) \right]_{-1}^1 - k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} ((x^2 - 1)^n) dx \right) \\ &= \frac{-k}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} ((x^2 - 1)^n) dx \end{aligned}$$

### Deuxième intégration par partie

$$\begin{aligned} I &= -\frac{k}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} ((x^2 - 1)^n) dx \\ &= -\frac{k}{2^n n!} \left( \left[ x^{k-1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} ((x^2 - 1)^n) \right]_{-1}^1 - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} ((x^2 - 1)^n) dx \right) \\ I &= \frac{k(k-1)}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} ((x^2 - 1)^n) dx \end{aligned}$$



Après  $p$  intégration par parties, on obtient :

$$I = \frac{(-1)^p \cdot k(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^{k-p} \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}} \left( (x^2 - 1)^n \right) dx$$

Si  $p = k$  ( $k$  intégrations par partie) :

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left( (x^2 - 1)^n \right) dx \\ &= \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \left[ \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} \left( (x^2 - 1)^n \right) \right]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 x^k \cdot P_m(x) dx \stackrel{?}{=} 0 \quad \forall n \neq m$$

Supposons que  $n < m$   $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 x^k \cdot P_m(x) dx = 0 \quad \text{car } k < m \text{ (première partie)}$$

3.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n-1)}{n} x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{(n-1)}{n} P_{n-2}(x) \quad \forall n \geq 2 \\ &= n \cdot x \cdot \deg(n) - n \cdot P_{n-2}(x) \end{aligned}$$

$a_n$  est le coefficient dominant de  $P_n(x)$ .

$$a_n = \frac{(2n-1)}{n} a_{n-1} \quad a_{n-1} \text{ est le coefficient dominant de } P_{n-1}$$

$$\begin{cases} a_n &= \frac{(2n-1)}{n} a_{n-1} \\ a_{n-1} &= \frac{(2n-3)}{n-1} a_{n-2} \\ a_{n-2} &= \frac{(2n-5)}{n-2} a_{n-3} \\ \vdots & \\ a_2 &= \frac{3}{2} a_1 \end{cases}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = \frac{1}{2} \times 2x = x$$

$$P_1(x) = x$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{n!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

4.

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} ||P_n|| &= \sqrt{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx} \\ P_n(x) &= a_n \cdot x^n + Q_{n-1}(x) \end{aligned} \right\} ||P_n||^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \\
&= a_n \int_{-1}^1 x^n \cdot P_n(x) + \int_{-1}^1 Q_{n-1}(x) \cdot P_n(x) dx \\
&= a_n \int_{-1}^1 x^n \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1) dx \\
&= \frac{a_n}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1) dx
\end{aligned}$$

En utilisant la première question avec  $k = 1$  :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x^n \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) dx &= (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x - 1)^n dx \\
||P_n||^2 &= \frac{a_n}{2^n n!} (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{a_n (-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx
\end{aligned}$$

Soit  $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$  :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} v &= (x^2 - 1) & \rightarrow & v' = n(x^2 - 1)^{n-1} 2x \\ n' &= 1 & \rightarrow & n = x \end{cases} \\
I_n &= [x(x^2 - 1)^n]_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-1} x^2 dx \\
&= -2n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-1} x^2 dx = -2n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-1} (x^2 - 1 + 1) dx \\
&= -2n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx - 2n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n-1} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2n - 1)I_n &= -2nI_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{-2n}{2n+1} I_{n-1} \\
&\Rightarrow I_n = \frac{(-2)^n n! I_0}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} n!}{(2n+1)!} 2^n n!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||P_n||^2 &= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^n (n!)^2 2^n} (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \\
&\Rightarrow ||P_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}
\end{aligned}$$

## 1.4 Méthode des moindres carrés

Soit  $E$  espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

$$(f, g) \in E \times E \longrightarrow \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Soit  $F \subset E$  (sous-espace vectoriel) de dimension finie.

**Théorème** Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\phi^* \in F$  soit une meilleure approximation de  $f \in E$  et que  $\langle f - \phi^*, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in F$

### Démonstration

**Condition nécessaire** Soit  $\phi^* \in F$  la meilleure approximation de  $f \in E$ , supposons  $\exists \phi_1 \in F$  tel que  $\langle f - \phi^*, \phi_1 \rangle = \alpha \neq 0$ .

Soit  $\phi_2 = \phi^* + \beta \cdot \phi_1$  avec  $\beta = \frac{\alpha}{\|\phi_1\|^2}$

$$\begin{aligned} \|f - \phi_2\|^2 &= \langle f - \phi_2, f - \phi_2 \rangle \\ &= \langle f - \phi^* - \beta \cdot \phi_1, f - \phi^* - \beta \cdot \phi_1 \rangle \\ &= \|f - \phi^*\|^2 - 2\beta \langle f - \phi^*, \phi_1 \rangle + \beta^2 \|\phi_1\|^2 \\ &= \|f - \phi^*\|^2 - 2\beta\alpha + \beta^2 \|\phi_1\|^2 \\ &= \|f - \phi^*\|^2 - 2\frac{\alpha^2}{\|\phi_1\|} + \frac{\alpha^2}{\|\phi_1\|^2} \\ &= \|f - \phi^*\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\phi_1\|^2} \\ &= \|f - \phi^*\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\phi_1\|^2} \\ &\Rightarrow \|f - \phi_2\| < \|f - \phi^*\| \text{ ce qui est absurde car } \phi^* \text{ est déjà la meilleure approximation de } f \\ &\Rightarrow \langle f - \phi^*, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in F \end{aligned}$$

**Condition suffisante** Supposons que  $\langle f - \phi^*, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in F$ .

Soit  $\phi_1 \in F$  tel que  $\langle f - \phi_1, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in F$ .

$$\begin{aligned} \|f - \phi\|^2 &= \langle f - \phi, f - \phi \rangle \\ &= \langle (f - \phi_1) - (\phi - \phi_1), (f - \phi_1) - (\phi - \phi_1) \rangle \\ &= \|f - \phi_1\|^2 - 2\langle f - \phi_1, \phi - \phi_1 \rangle + \|\phi - \phi_1\|^2 \\ &= \|f - \phi_1\|^2 + \|\phi - \phi_1\|^2 \quad \forall \phi \in F \\ &\Rightarrow \|f - \phi_1\| \leq \|f - \phi\| \quad \forall \phi \in F \\ &\Rightarrow \|f - \phi_1\| = \min \|f - \phi\| \Rightarrow \phi_1 = \phi^* \end{aligned}$$

**Remarque** Cette condition montre que l'élément  $\phi^*$  représente la projection orthogonale de  $f$  sur  $F$ .

$\phi^*$  est unique

### Construction de $\phi^*$

Soit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  une base de  $F$ .

$$\varphi^* = \sum_{k=1}^n a_k^* \cdot \varphi_k$$

La condition d'orthogonalisation  $\langle f - \varphi^*, \varphi_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^n a_k^* \cdot \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$$\langle f, \varphi_j \rangle - \sum_{k=1}^n a_k^* \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$$(S) \begin{cases} \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle a_k^* = \langle f, \varphi_j \rangle \\ \forall j = 1 \dots n \end{cases}$$

C'est un système linéaire à  $n$  équations et  $n$  inconnues.

**Remarque** Si la base  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  est orthonormée, la matrice du système sera diagonale.

La matrice du système (S) est la matrice de *Gram* :

$$G_{kj} = \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \quad \forall k = 1 \dots n, j = 1 \dots n$$

#### (a) Cas continu

Soit  $\omega$  une fonction poids, position telle que  $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$  existe  $\forall f \in E = \mathcal{C}([a, b])$ .

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$  produit scalaire sur  $E$ .

$F = \epsilon$  sous-espace vectoriel de dimension  $n$ .

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k^* \int_a^b \varphi_k(x)\omega(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx \\ \forall j = 1 \dots n \end{cases}$$

$$\text{La matrice de Gram : } G_{kj} = \int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_j(x) \omega(x) dx$$

#### (b) Cas discret

Le produit scalaire discret :  $\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^N f(x_i)g(x_i)\omega(x_i)$ .  
 $f$  est donnée aux points  $x_i (i = 0 \dots N)$

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^N f(x_i)\omega(x_i)}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k^* \sum_{i=0}^N \varphi_k(x_i) \cdot \varphi_j(x_i) \omega(x_i) = \sum_{i=0}^N f(x_i) \varphi_j(x_i) \omega(x_i) \\ \forall j = 1 \dots n \text{ La matrice } G_{kj} = \sum_{i=0}^N \varphi_k(x_i) \cdot \varphi_j(x_i) \omega(x_i) \end{cases}$$

## 1.5 Interpolation

Soit  $f(x)$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .

$f(x)$  est connue en  $(n+1)$  points  $x_i \in [a, b] (i = 1 \dots n+1)$ .

Chercher une fonction  $\varphi$  d'un type choisi à l'avance qui interpole  $f(x)$  sur  $[a, b]$ , c'est déterminer  $\varphi$  tel que  $\varphi(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1 \dots n+1$ .

En général, on cherche  $\varphi$  dans l'espace des polynômes.

### 1.5.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soit  $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i)$  où les fonctions  $L_i$  sont des polynômes de degré au plus  $n$ , telles que  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ .

$$L_i(x_j) = 0 \Rightarrow L_i(x) = C(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_{n+1}) \quad \forall j \neq i$$

$$L_i(x_i) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{[(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})]}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ La base de Lagrange}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \text{ Le polynôme de Lagrange}$$

$$P_n(x_k) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x_k) f(x_i)$$

$$P_n(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 1 \dots n+1$$

**Exemple** Soit  $f$  continue telle que :  $\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline f(x_i) & 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}$

Construire le polynôme d'interpolation  $P_z(x)$  de  $f(x)$ .

$$P_z(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1)(-3)(-4)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \cdot 3 + \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \cdot 2 + \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \cdot 5$$

$$P_z(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{14}{6}x^2 + \frac{13}{3}x + 1$$

Pour vérifier que l'on a pas fait d'erreur de calcul, on vérifie que  $P_z(x_i) = f(x_i)$

**Remarque** L'erreur d'interpolation  $\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  ( $f$  est dérivable  $n + 1$  fois avec ses dérivées continues).

$$\exists \eta_x \in [a, b] / \varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$$

### 1.5.2 Polynôme d'interpolation de Newton

**Différence divisées** Soit  $f$  une fonction donnée en  $n+1$  points  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  ( $x_i \neq x_j$   $i \neq j$ ).

On appelle différence divisée d'ordre  $0, 1, 2, \dots, n$  de  $f$  les expressions suivantes :

Ordre	Notation	Définition
0	$f[x_i]$	$f(x_i)$
1	$f[x_i, x_j]$	$\frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$ $i \neq j$
2	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$ $i \neq j \neq k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$f[x_1, \dots, x_{n+1}]$	$\frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_2, \dots, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$

#### Polynôme de Newton

$$f[x, x_1] = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \Rightarrow f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f[x, x_1]$$

$$f[x, x_1, x_2] = \frac{f[x, x_1] - f[x_1, x_2]}{x - x_2} \Rightarrow f[x, x_1] = f[x_1, x_2] + (x - x_2) \cdot f[x, x_1, x_2]$$

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f[x_1, x_2] + (x - x_1)(x - x_2) \cdot f[x, x_1, x_2]$$

$$P_1(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f[x_1, x_2]$$

$$P_1(x_1) = f(x_1)$$

$$P_1(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f(x_1) - f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$$

Donc  $P_1(x)$  interpole la fonction  $f$  aux points  $x_1$  et  $x_2$ . En réitérant le procédé, on obtient :

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f[x_1, x_2] + (x - x_1)(x - x_2) f[x_1, x_2, x_3] + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot f[x_1, \dots, x_{n+1}]$$

$$+ \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \cdot f[x, x_1, \dots, x_{n+1}] \quad \text{l'erreur}$$

$P_n(x)$  est le polynôme d'interpolation de Newton de  $f(x)$  aux  $(n+1)$  points  $x_i$  ( $i = 1 \dots n+1$ ).

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \cdot f[x, x_1, \dots, x_{n+1}]$$

### Algorithme de Newton

$$P_0(x) = f(x_1)$$

Pour  $m = 0, \dots, n-1$  :

$$P_{m+1}(x) = P_m(x) + (x - x_1) \dots (x - x_{m-1}) \cdot f[x_1, \dots, x_{m+1}]$$

**Exercice 3** Sur  $[-1, 1]$  on considère la fonction  $f(x) = X^3 - X^2$

1. Décomposer  $f(x)$  dans la base de Chebyshev.
2. En déduire  $P_2^*(x)$  polynôme de meilleur approximation de degré 2 de  $f(x)$ .  
Donner l'erreur d'approximation  $\|f - P^*\|$

$$\|f\| = \max |f(x)| \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0.T_0(x) + a_1.T_1(x) + a_2.T_2(x) + a_3.T_3(x) \\ \begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \end{cases} & \begin{aligned} &a_0 + a_1x + a_2(2x^2 - 1) + a_3(4x^3 - 3x) \\ &a_0 + a_1x + 2a_2x^2 - a_2 + 4a_3 + 4a_3x^3 - 3a_3x \\ &a_0 - a_2 + (a_1 - 3a_3)x + 2a_2x^2 + 4a_3 + 4a_3x^3 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 - a_2 = 0 \\ a_1 - 3a_3 = 0 \\ 2a_1 = -1 \\ 4a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_1 = \frac{3}{4} \\ a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x) = -\frac{1}{2}T_0(x) + \frac{3}{4}T_1(x) - \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{1}{4}T_3(x)$$

$$\epsilon = f(x) - P_2(x) = \frac{1}{4}T_3(x)$$

$$M = \|\epsilon\| = \max |\epsilon(x)| = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} T_3(x) = \cos(3\theta) \\ \theta = \arccos(x) \end{cases}$$

**Théorème** Si la fonction erreur  $\epsilon(x)$  atteint la valeur extrême alternée  $M$  et  $-M$  en au moins  $(n+2)$  points, alors  $P_n(x) = P_n^*(x)$ .

$$\epsilon(x) = \frac{1}{4}T_3(x) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) \quad \theta = \arccos(x)$$

$$\text{Les } x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad n = 3.$$

$$\begin{array}{llll} k=0 & x_0 = 1 & \varepsilon(x_0) = \frac{1}{4} = M & \\ k=1 & x_1 = \cos \frac{\pi}{3} & \varepsilon(x_1) = -\frac{1}{4} & \\ k=2 & x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} & \varepsilon(x_2) = \frac{1}{4} & \\ k=3 & x_3 = \cos \pi & \varepsilon(x_3) = -\frac{1}{4} & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ x_3 = \cos \pi = -1 \end{cases} \Rightarrow P_2(x) = P_2^*(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_2^*(x) &= -\frac{1}{2}T_0(x) + \frac{3}{4}T_1(x) - \frac{1}{2}T_2(x) \\ &= -4 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}(2x^3 - 1) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - x^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}x - x^2 \end{aligned}$$

**Exercice 4** Soit  $f(x)$  une fonction continue donnée aux points  $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ .

$$f(0) = -5, f(1) = 17, f(2) = 115, f(4) = 143$$

En utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange, interpoler  $f(2)$ .

$$f(0) = -5, f(1) = 17, f(2) = 115, f(4) = 143$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \left( \frac{x - x_i}{x_i - x_j} \right)$$

Interpolons  $f(2)$  :

$$L_1(2) = \frac{(2-1)(2-3)(2-4)}{(-1)(-3)(-4)} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$L_2(2) = \frac{(2-0)(2-3)(2-4)}{1(-2)(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$L_3(2) = \frac{2(2-1)(2-4)}{3(3-1)(3-4)} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$L_4(2) = \frac{2(2-1)(2-3)}{4(3)(1)} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

La valeur interpolée est :  $f(2) \simeq P_3(2) = -\frac{1}{6}(-5) + \frac{2}{3}(17) + \frac{2}{3}(115) - \frac{1}{6}(143) \simeq$



**Exercice 5** Soit  $f \in C^{n+1}[a, b]$ ,  $P_n(x)$  son polynôme d'interpolation de  $f(x)$  aux points  $x_i \in [a, b]$  ( $i = 1 \dots n + 1$ )

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{erreur d'interpolation}$$

Montrer qu'il existe  $\eta_x \in [a, b]$  tel que  $\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \frac{f(\eta_x)}{(n+1)!}$

**Rappel** Théorème de Rolle

$f$  continue, dérivable sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) = f(b)$  alors  $\exists C \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

$$\varepsilon(x_i) = 0 \quad \text{car } P_n(x_i) = f(x_i)$$

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) A_x \quad x \neq x_i \quad A_x \text{ quantité inconnue}$$

Soit la fonction  $\varphi(y) = f(y) - P_n(y) - \prod_{i=1}^{n+1} (y - x_i) A_x \quad \forall y \in [a, b]$

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = 0 & \forall i = 1 \dots n + 1 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

$\varphi$  admet  $(n + 2)$  racines.  $\varphi \in C^{n+1}$  car  $f \in C^{n+1}$ .

On applique le théorème de Rolle  $\varphi'$  admet au moins  $(n + 1)$  racines.

On applique le théorème de Rolle  $\varphi''$  admet au moins  $n$  racines.

On applique le théorème de Rolle  $\varphi^{(3)}$  admet au moins  $n - 1$  racines.

$\vdots$

On applique le théorème de Rolle  $\varphi^{(p)}$  admet au moins  $(n + 1) - p$  racines.

Si  $p = n + 1 \Rightarrow \varphi^{(n+1)}$  admet au moins 1 racine  $\eta_x \quad \varphi^{(n+1)}(\eta_x) = 0$

or :

$$\varphi^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - 0 - (n + 1)! A_x$$

$$\varphi^{(n+1)}(\eta_x) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(\eta_x) - (n + 1)! A_x = 0 \Rightarrow A_x = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n + 1)!}$$

Donc :

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n + 1)!}$$

$$f[x_1, \dots, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_2, \dots, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$$

## 1.6 Dérivation numérique

Lorsqu'une fonction  $f(x)$  dont on veut calculer les dérivées successives  $f'(x)$ ,  $f''(x), \dots$  est donnée par les valeurs  $f(x_i)$ , on procède de la manière suivante :

- (i)  $f(x) \simeq g(x)$  (polynôme d'interpolation).
- (ii)  $f^{(k)}(x) \simeq g^{(k)}(x)$

### 1.6.1 Dérivée d'un polynôme par division synthétique

$$f(x) \simeq P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j$$

Soit à calculer :

$$f^{(k)}(x=t) \quad \text{dérivée d'ordre } k$$

$$f^{(k)} \simeq P_n^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^n j(j-1) \dots (j-k+1) a_j \cdot x^{j-k}$$

Il suffit alors de calculer  $P_n^{(k)}(x=t)$ .

$$P_n(x) | x-t \quad (\text{division par } x-t)$$

$$P_n(x) = (x-t)Q_{n-1}(x) + R_n \quad Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 + 0$$

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{j-1} = t \cdot b_j + a_j \quad j = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

**Exemple**

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 6 \quad t = 2$$

$j$	4	3	2	1	0
$P_4 a_j$	2	-5	1	-7	6
$Q_3 b_j$		2	-1	-1	-9

On peut poursuivre le processus :

$j$	4	3	2	1	0	Reste
$P_4 \ a_j$	2	-5	1	-7	6	
$Q_3 \ b_j$		2	-1	-1	-9	$-12 = R_4$
$Q_2 \ c_j$			2	3	5	$1 = R_3$
$Q_1 \ d_j$				2	7	$19 = R_2$
$Q_0 \ e_j$					2	$11 = R_1$

$$R_0 = a_n = 2 = Q_0$$

$$\left. \begin{array}{l} P_4(x) = (x-2).Q_3(x) - 12 \\ Q_3(x) = (x-2).Q_2(x) + 1 \\ Q_2(x) = (x-2).Q_1(x) + 19 \\ Q_1(x) = (x-2).Q_0(x) + 11 \end{array} \right\} P_4(x) = -12 + (x-2) + 19(x-2)^2 + 11(x-2) + 2(x-2)^4$$

Ainsi les  $R_k$  sont les coefficients du développement de  $P_n(x)$  en puissance de  $(x-t)$  ( $t=2$ ).

D'une manière générale :

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^n R_l(x-t)^{n-l}$$

En dérivant  $k$  fois :

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{n-k} (n-l) \dots (n-l-k+1) R_l(x-t)^{n-l-k}$$

$$x=t \Rightarrow P_n^{(k)}(t) = k! R_{n-k}$$

$$f^{(k)}(t) \simeq k! R_{n-k}$$

**Exercice 6**  $f(x)$  continue, donnée aux points :  $f(-2) = 69$ ,  $f(2) = 17$ ,  $f(3) = 24$ ,  $f(5) = -22$

1. Construire le tableau des différences divisées.
2. En déduire le polynôme d'interpolation de Newton.
3. En utilisant l'algorithme de division synthétique, interpoler  $f(4)$  et donner les approximations des dérivées  $f'(4)$ ,  $f''(4)$ ,  $f'''(4)$ .

$x_i$	0	1	2	3
-2	<b>69</b>	<b>-13</b>		
2	17		<b>4</b>	<b>-2</b>
3	24	7	-10	
5	-22	-23		

Pour calculer les machins de ce tableau :

$$f[x_i; x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_j - x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[-2, 2, 3] = \frac{f[2, 3] - f[-2, 2]}{5}$$

## 2. Le polynôme d'interpolation de Newton

$$P_3(x) = f[-2] + (x+2)f[-2, 2] + (x+2)(x-2)f[-2, 2, 3] + (x+2)(x-2)(x-3)f[-2, 2, 3, 5]$$

On remplace ensuite les coefficients :

$$P_3(x) = 69 - 13(x+2) + 4(x+2)(x-2) - 2(x+2)(x-2)(x-3)$$

On développe tout pour avoir le polynôme dans sa forme canonique (utile pour la question suivante) :

$$P_3(x) = -2x^3 + 10x^2 - 5x + 3$$

On peut vérifier que ce polynôme interpole bien les points donnés de  $f$ .

**3. Algorithme de division synthétique** Pour  $Q_{1,0} : 4$  (coeff) \* -2 (valeur précédente sur la ligne) + 2 (valeur au dessus) = -6

$j$		3	2	1	0	Reste
$P_3$	$a_j$	-2	10	-5	3	
$Q_2$	$b_j$		-2	2	3	$15 = R_3$
$Q_1$	$c_j$			-2	-6	$-21 = R_2$
$Q_0$	$d_j$				-2	$-14 = R_1$

$$P_3(x) = 15 - 21(x-4) - 14(x-4)^2 - 2(x-4)^3$$

$$f(4) \simeq P_3(4) = 15$$

$$f^{(k)}(t) \simeq k!_{n-k}$$

$$f'(4) \simeq 1!R_2 = -21$$

$$f''(4) \simeq 2!R_1 = -28$$

$$f'''(4) \simeq 3!R_0 = -12$$

**Exercice 7** Soit  $f(x)$  continue, donnée aux points  $f(-2) = 32$ ,  $f(-1) = 26$ ,  $f(0) = 30$ ,  $f(1) = 28$

1. Construire le tableau des différences divisées.
2. En déduire le polynôme d'interpolation de Newton.
3. En utilisant l'algorithme de division synthétique, interpoler  $f(2)$  et donner les approximations des dérivées  $f'(2)$ ,  $f''(2)$ ,  $f'''(2)$ .

$x_i$	0	1	2	3
-2	<b>-32</b>	<b>58</b>		
-1	26		<b>27</b>	<b>8</b>
0	30	4	-3	
1	28	-2		

## 2. Le polynôme d'interpolation de Newton

$$P_3(x) = f[-2] + (x+2)f[-2, -1] + (x+2)(x+1)f[-2, -1, 0] + (x+2)(x+1)(x)f[-2, -1, 0]$$

On remplace ensuite les coefficients :

$$P_3(x) = -32 - 58(x+2) - 27(x+2)(x+1) - 8(x+2)(x+1)(x)$$

On développe tout pour avoir le polynôme dans sa forme canonique (utile pour la question suivante) :

$$P_3(x) = 8x^3 - 3x^2 - 7x + 30$$

On peut vérifier que ce polynôme interpole bien les points donnés de  $f$ .

$j$		3	2	1	0	Reste
$P_3$	$a_j$	8	-3	-7	30	
$Q_2$	$b_j$		8	13	19	$68 = R_3$
$Q_1$	$c_j$			8	29	$77 = R_2$
$Q_0$	$d_j$				8	$45 = R_1$

$$P_3(x) = 68 + 77(x-2) + 45(x-2)^2 + 8(x-2)^3$$

$$f(2) \simeq P_3(2) = 68$$

$$f^{(k)}(t) \simeq k!_{n-k}$$

$$f'(2) \simeq 1!R_2 = 77$$

$$f''(2) \simeq 2!R_1 = 90$$

$$f'''(2) \simeq 3!R_0 = 48$$

## 1.7 Intégration numérique

On se propose d'étudier quelques méthodes numériques permettant d'approcher  $\int_a^b f(x)dx$ . De telles méthodes s'imposent en particulier lorsque la primitive  $F(x)$  de  $f(x)$  n'est pas connue, ou dans le cas où  $f(x)$  n'est donnée que par points.

Par exemple pour :  $\int_a^b e^{-x^2} dx \simeq \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$

### 1.7.1 Méthode générale

$$I = \int_a^b f(x)p(x)dx \quad p(x) : \text{fonction poids, } > 0$$

L'idée est d'utiliser les valeurs de  $f$  aux points  $x_i \in [a, b] \quad i = 0 \dots n$ .

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \sum_{i=0}^n \omega_i \cdot f(x_i) + E \quad E \text{ l'erreur}$$

Les coefficients  $\omega_i$  sont déterminés de telle sorte que  $E$  soit nulle lorsque  $f(x)$  appartient à une certaine classe de fonctions (les polynômes de degré  $\leq N$ ).

$$f(x) = \phi(x) + E(x)$$

$$\phi(x_i) = f(x_i) \quad i = 0 \dots n$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b \phi(x)p(x)dx + \int_a^b E(x)p(x)dx$$

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)f(x_j) \quad \text{Lagrange}$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^n L_j(x)f(x_j)p(x)dx + \int_a^b E(x)p(x)dx$$

$$= \sum_{j=0}^n \left( \int_a^b L_j(x)p(x)dx \right) f(x_j) + \int_a^b E(x)p(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \sum_{j=0}^n \omega_j f(x_j) + E$$

$$\text{avec } \omega_j = \int_a^b L_j(x)p(x)dx \text{ et } E = \int_a^b E(x)p(x)dx$$

### 1.7.2 Quelques exemples de méthodes composées

$$[\alpha, \beta] \quad I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

La méthode consiste à décomposer  $[\alpha, \beta]$  en  $k$  intervalles  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}] \quad i = 0, 1, \dots, k$  et ensuite à approcher chaque  $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx$  en remplaçant  $f(x)$  par son polynôme d'interpolation.

**Exemple 1**  $t_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

$$f(x) \simeq P_0(x) = f(t_i) \quad \forall x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$$

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i) \quad \text{Somme de Riemann}$$

**Exemple 2** Sur  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  on interpole  $f(x)$  par  $P_1(x)$  polynôme de degré 1 qui interpole  $f(x)$  aux points  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$ .

$$\int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq \int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} P_1(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} \left[ \left( \frac{x - \alpha_{i+1}}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} \right) f(\alpha_i) + \frac{x - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} f(\alpha_{i+1}) \right] dx$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} \left[ \frac{(x - \alpha_{i+1})^2}{2} \right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} + \frac{f(\alpha_{i+1})}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \left[ \frac{(x - \alpha_i)^2}{2} \right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq \frac{(\alpha_{i+1}) - \alpha_i}{2} (f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1}))$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{2} (f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1}))$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2} (f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1}))$$

**Définition** Soit la méthode d'intégration  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) p(x) dx \simeq \sum_{i=0}^k$ .

Nous dirons que la méthode d'intégration est d'ordre  $N$  si elle est exacte pour tout polynôme de degré  $N$ , c'est-à-dire :  $E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) p(x) dx - \sum_{i=0}^k \alpha_i f(x_i) = 0 \quad \forall f$  un polynôme d'ordre  $N$ .

Soit  $U_+ = \max(u, 0)$ . Pour  $t$  fixé,  $K_N(t) = E(x \mapsto (x-t)_+^N)$   $N$  : ordre de la méthode s'appelle le noyau de Péano de la méthode d'intégration. avec la convention  $(x-t)_+^0 = 1 \quad x \geq t \quad = 0 \quad x < t$ .

**Théorème** de Péano

On suppose que la méthode d'intégration d'intégration est d'ordre  $N \geq 0$  et que  $f \in \mathcal{C}^{N+1}[a, b]$  alors :

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt$$

### Conséquence

$$|E(f)| \leq \frac{1}{N!} M_{N+1} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt$$

**Corollaire** Si de plus  $K_N(t)$  garde un signe constant sur  $[a, b]$  alors  $\exists \eta \in [a, b]$

$$E(f) = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{(N+1)!} E(x \mapsto x^{(N+1)})$$

### Démonstration du corollaire

**Rappel** La deuxième formule de la moyenne.

$f(x)$ ,  $g(x)$  continue sur  $[a, b]$ . On suppose que  $g(x)$  garde un signe constant sur  $[a, b]$  alors  $\exists \eta \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\eta) \int_a^b g(x)dx$

### 1<sup>re</sup> formule

$$\exists c \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f(t) dt$$

D'après la deuxième formule de la moyenne :

$$\begin{aligned} \exists \eta \in [a, b] / E(f) &= \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{N!} \int_a^b K_N(t) dt \quad E(x \mapsto X^{N+1}) \\ &= \frac{(N+1)!}{N!} \int_a^b K_N(t) dt = \int_a^b K_N(t) dt = \frac{E(x \mapsto X^{N+1})}{N+1} \\ E(t) &= \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{N!} \int_a^b K_N(t) dt \quad \forall f \in \mathcal{C}^{N+1} \\ \Rightarrow E(t) &= \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{N!} \frac{E(x \mapsto X^{N+1})}{N+1} = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{(N+1)!} E(x \mapsto X^{N+1}) \end{aligned}$$

**Exercice 8** Soit  $f(x)$  continue donnée aux points :  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = 5$ ,  $f(3) = 10$ ,  $f(4) = 15$ .

Interpoler  $f(1)$  par le polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^3 \prod_{j=0, j \neq i}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i)$$

$$L_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)(1-4)}{(-2)(-3)(-4)} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$



$$L_1(1) = \frac{(1-0)(1-3)(1-4)}{(2)(2-3)(2-4)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$L_2(1) = \frac{1(-1)(-3)}{3(1)(-1)} = -1$$

$$L_3(1) = \frac{(1)(-1)(-2)}{(4)(2)(1)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } f(1) \simeq P_3(1) = \frac{1}{4}(1) + \frac{3}{2}(5) - 1 \times 10 + \frac{1}{4} \times 15 = \frac{3}{2}$$

**Exercice 9** On considère les méthode d'intégration :

$$\int_0^k f(x)dx \simeq h.f\left(\frac{h}{2}\right) \quad (1.1)$$

$$\int_0^h f(x)dx \simeq \frac{h.(f(i) + f(h))}{2} \quad (1.2)$$

1. Déterminer l'ordre de chaque méthode.
2. Déterminer le noyau de Péano.
3. Étudier l'erreur d'intégration pour chaque méthode.

**L'ordre de la méthode (1.1)**

$$f(x) = 1 \quad \int_0^h f(x)dx = \int_0^h dx = h$$

$$h.f\left(\frac{h}{2}\right) = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto 1) = 0$$

$$f(x) = x \quad \int_0^h f(x)dx = \int_0^h xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{h^2}{2}$$

$$h\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{2}$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto x) = 0$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_0^h x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{3}$$

$$h.f\left(\frac{h}{2}\right) = h.\frac{h^2}{4} = \frac{h^3}{4} \neq \frac{h^3}{3}$$

Donc, la première méthode est d'ordre 1 (exacte pour le polynôme d'ordre  $\leq 1$ ).

### L'ordre de la méthode (1.2)

$$f(x) = 1 \quad \int_0^h 1 dx = h$$

$$h\left(\frac{f(0) + f(h)}{2}\right) = \frac{2h}{2} = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto 1) = 0$$

$$f(x) = x \quad \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2}$$

$$h\left(\frac{f(0) + f(h)}{2}\right) = \frac{h^2}{2} = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto x) = 0$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_0^h x^2 dx = \left[\frac{h^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{3}$$

$$h\left(\frac{f(0) + f(h)}{2}\right)^2 = \frac{h^3}{2} = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = \frac{-h^3}{6} \neq 0$$

$$\Rightarrow N = 1$$

### Noyau de Péano

$$K_1(t) = E(x \mapsto (x - t)_+)$$

$$\forall t \in [a, h] \quad K_1(t) = \int_0^h (x - t)_+ dx - h \left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

$$= \int_t^h (x - t) dx - h \left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

$$K_1(t) = \left[\frac{(x - t)^2}{2}\right]_t^h - h \left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

$$= \frac{(h - t)^2}{2} - h \left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

1<sup>er</sup> cas : si  $\frac{h}{2} < t \leq h$

$$K_1(t) = \frac{(h - t)^2}{2}$$

2<sup>e</sup>cas :  $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2} - h \left( \frac{h}{2} - t \right)$$

$$K_1(t) = \frac{h^2 - 2ht + t^2}{2} - \frac{h^2}{2} + ht$$

$$K_1(t) = \frac{t^2}{2}$$

On trouve que  $K_1(t) \leq 0 \forall t \in [a, h]$ . D'après le corollaire de Péano :

$$\exists \eta \in [a, h] / E(f) = \frac{f''(\eta)}{2!} \frac{h^3}{12} = \frac{h}{24} f''(\eta)$$

$$|E(f)| \leq c \frac{h^3}{24} \quad c = \max |f(x)|$$

### Péano de la méthode (1.2)

$$K_1(t) = t(x \mapsto (x-t)_+)$$

$$= \int_0^h (x-t)_+ dx - \frac{h}{2} ((-f) + (h-t)_+)$$

$$K_1(t) = \int_t^h (x-t) dx - \frac{h}{2}(h-t) \quad \text{car } 0 \leq t \leq h$$

$$(-t)_+ = 0 \quad \text{car } 0 \leq t \leq h$$

$$K_1(t) = \left[ \frac{(x-t)^2}{2} \right]_t^h - \frac{h}{2}(h-t)$$

$$= \frac{(h-t)^2}{2} - \frac{h}{2}(h-t) = \frac{h^2 - 2ht + t^2}{2} - \frac{h^2}{2} + \frac{ht}{2} = -ht + \frac{t^2}{2} + \frac{ht}{2} = -\frac{ht}{2} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}(t-h) \leq 0 \quad \text{car } 0 \leq t \leq h$$

D'après le corollaire de Péano :

$$\exists \eta \in [a, h] / E(f) = \frac{f''(\eta)}{2!} E(x \mapsto x^2) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta)$$

$$|E(f)| \leq c \frac{h^3}{12} \quad c = \max |f''(x)|$$

### Exercice 10

$$\int_0^1 f(x) dx \simeq \frac{1}{4} \left( f(c) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) \right)$$

1. Ordre
2. Noyau de Péano
3. Erreur d'intégration