Equivalents :

- $for\ (i = N; i > 0;\ --i) == for\ (i = 1; i \leq N; ++i)$
- $for\ (i = 1; i \leq N; i *= w) == for\ (i = \mathbf{0}; i \leq \log_w N;\ ++i)$

Identités remarquables :

$$\sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{k=a}^{b} k + c = \sum_{k=a+c}^{b+c} k$$

$$\sum_{k=0}^{N} k + x = \left(\sum_{k=0}^{N} k\right) + xN = \frac{N(N+1)}{2} + xN$$

Example 1 :

```
for (int i = 2; i < N; ++i)
  for (int j = 3; j <= i; ++j)
    puts(i, j);
```

$$\sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=3}^{i} 1 = \sum_{i=3}^{N-1} \sum_{j=3}^{i} 1 \ \ |\ \ executons\ les\ boucles\ avec\ N = 4:$$

$$(3\ 3) = 1e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i-2) = 1\ tour\ de\ j$$

$$(4\ 3) = 2e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i-2) = 2\ tour\ de\ j$$

$$(4\ 4) = 2e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i-2) = 2\ tour\ de\ j$$

$$(5\ 3) = 3e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i-2) = 3\ tour\ de\ j$$

$$(5\ 4) = 3e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i-2) = 3\ tour\ de\ j$$

$$(5\ 5) = 3e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i-2) = 3\ tour\ de\ j$$

On remarque un certain pattern : pour chaque tour de boucle de i, on a (i-2) tours de j, on peut l'écrire :

$$\sum_{i=3}^{N-1} \sum_{j=3}^{i} 1 = \sum_{i=3}^{N-1} (i-2)$$

Puis avec les identités remarquables :

$$\sum_{i=3}^{N-1} (i-2) = \sum_{i=0}^{N-4} (i+1) = \sum_{i=0}^{N-3} i = \frac{(N-3)(N-2)}{2}$$

Example 2 :

```
for (int i = 1; i <= N; ++i)
  for (int j = 0; j < i; ++j)
    puts(i, j);
```

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{i-1} 1 \mid \ executons\ les\ boucles\ avec\ N = 3:$$

$$(1\ 0) = 1e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i) = 1\ tour\ de\ j$$

$$(2\ 0) = 2e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i) = 2\ tour\ de\ j$$

$$(2\ 1) = 2e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i) = 2\ tour\ de\ j$$

$$(3\ 0) = 3e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i) = 3\ tour\ de\ j$$

$$(3\ 1) = 3e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i) = 3\ tour\ de\ j$$

$$(3\ 2) = 3e\ tour\ de\ i \rightarrow On\ a\ (i) = 3\ tour\ de\ j$$

On remarque un certain pattern : pour chaque tour de boucle de i, on a (i) tours de j, on peut l'écrire :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{i} = \left(\sum_{i=0}^{N} i\right) + 1N = \frac{N(N+1)}{2} + N$$

Example 3 :

```
for (int i = 0; i < N; ++i)
  for (int j = 1; j <= N; j*=2)  -> Via équivalence on obtient : for (int j = 0 ; j <= log_2(N) ; ++j)
    puts(i, j);
```

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{\lfloor(\log_2 N)\rfloor} 1 = \sum_{i=0}^{N-1} nb\_elements(de\ 0\ à\ \lfloor(\log_2 N)\rfloor)$$

Pour N=7 on a $\lfloor(\log_2 N)\rfloor = 2$ donc $nb_{elements(de\ 0\ à\ \lfloor(\log_2 N)\rfloor)} = 3$

Pour N=8 on a $\lfloor(\log_2 N)\rfloor = 3$ donc $nb_{elements(de\ 0\ à\ \lfloor(\log_2 N)\rfloor)} = 4$

Donc $nb_{elements(de\ 0\ à\ \lfloor(\log_2 N)\rfloor)} = \lfloor(\log_2 N)\rfloor + 1$

D'où :

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{\lfloor(\log_2 N)\rfloor} 1 = (N-1) * (\ \lfloor(\log_2 N)\rfloor + 1)$$