Intégrales impropres

(trois semaines)

(du lundi 9 décembre 2013 au vendredi 24 janvier 2014)

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}}\,\mathrm{d}t$ e
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)\mathrm{d}t$ $\to = \frac{e}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \to \int_1^{+\infty} \frac{e}{2t}\,dt$ diverge car $\alpha = 1$
4. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t}\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ (sans invoquer les intégrales de Bertrand)
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer par un changement de variable que

$$\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3

Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

1. a. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \to +\infty$?

   b. Montrer que I converge.

2. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $F_\varepsilon(x)$ par intégration par partie en fonction de x et ε.

   b. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en fonction de x.

   c. En déduire la valeur de I.

Exercice 4

Soient $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ et $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ où $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

1. Étudier la nature de $\Gamma(\alpha)$ en fonction de α.
2. Former une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+1)$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Étudier la nature de $\beta(x,y)$ en fonction de x et y.
5. Montrer que $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

Exercice 5

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^p(x)\mathrm{d}x$ et $J_{n,p} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^p\mathrm{d}t$

1. Déterminer la nature des intégrales $I_{n,p}$ en fonction de n et p.
2. Via une intégration par parties, déterminer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n,p-1}$.
3. En déduire, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ en fonction de n et p.
4. Déterminer la nature des intégrales $J_{n,p}$ en fonction de n et p.
5. Via le changement de variable $t = -\ln(x)$, déterminer, $I_{n,p}$ en fonction de $J_{n+1,p}$.

Exercice 6

Considérons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I converge et que $I = J$.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)\mathrm{d}x$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 7

1. Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.
   a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.
   c. Par une démarche similaire, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$?
3. Posons $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ et $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\cos^2(x)}{x}$
   a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
   b. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x)$.
   c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ sont-elles de même nature ?

      Expliquer pourquoi le critère de comparaison ne s'applique pas.

Exercice 8

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

1. Montrer que I est une intégrale impropre convergente.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$
3. En déduire la valeur de I.
4. Retrouver la valeur de I en utilisant le changement de variable $u = 1/x$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n(1+nx)}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n(1+nx)}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$

   (on pourra utiliser le changement de variable $y = 1 + x$).

1

Exercice 1 :

$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$\int_a^b f(t)dt \quad -\infty\leq a<b\leq+\infty$

① Déf l'intervalle où f est continue

ex : $]a,b]$ $]a,b[$ $[a,b[$

② On étudie les problèmes aux bornes séparément

-> équivalents

ou

-> majorations / minorations en val. absolue

ou

-> $\int_a^x f(t)dt$ a une limite qd $x\to b$?

1) $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ continue sur $]0,+\infty[$

problème en 0 : $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha<1$

problème en $+\infty$: $\int_1\frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha>1$

donc il n'existe pas de valeur de α pour laquelle $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

Autrement dit, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge.

2) $\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{t^2-t}}$. $t\to e^{-\sqrt{t^2-t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$

. Pb en $+\infty$:

$$f(t)=e^{-\sqrt{t^2-t}} = e^{-t\left(1-\frac{1}{t}\right)^{1/2}} = e^{-t\left(1-\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)} = e^{-t+\frac{1}{2}+o(1)} = \underbrace{e^{-t}}_{\sim e^{-t}}\underbrace{e^{1/2+o(1)}}_{\sim e^{1/2}}$$

donc $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}e^{1/2}\times e^{-t}$

Méthode 1 :

$t^2e^{-t}\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$ donc à partir d'un certain rang,

$t^2e^{-t}\leq1$

ie $0\leq e^{-t}\leq\frac{1}{t^2}$

Intégrale de référence :

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ $\alpha>1$ converge

$\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}dt$ $\alpha<1$ converge.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-t}$ converge. Il en est de même pour $\int_1^{+\infty} e^{1/t} e^{-t} dt$ et par équivalence $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

3) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right) dt$ / La fonction $t \mapsto e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ est continue sur $[1, +\infty[$

-> On s'intéresse au problème en $+\infty$

DL : $e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e - e^{t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}$

$= e - e^{t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)}$

$= e - e^{1 - \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)}$

$= e - e \times e^{-\frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)}$

$= e - e\left(1 - \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$

$= \frac{e}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$

$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2t}$

$\int_1^{+\infty} \frac{e}{2t} dt$ diverge (car $\alpha = 1$) donc par équivalence,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{t}\right)\right] dt \text{ diverge}}$$

2) Deuxième méthode :

Etudions la limite, quand $x \to +\infty$ de $\int_1^x e^{1/2} e^{-t} dt$.

$= e^{1/2} \int_1^x e^{-t} dt = e^{1/2} \left[-e^{-t}\right]_1^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1/2} \cdot e^{-1}$.

#2

Ainsi on a vérifié la définition de la convergence de l'intégrale
$\int_1^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$

Par équivalence on en déduit la

convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

4) $\int_0^1 \ln(t)\,dt$

- $t \mapsto \ln(t)$ est continue en $]0,1]$

* Pb en zero: On va chercher la limite, si elle existe de

$\int_x^1 \ln(t)\,dt$ qd $x \to 0$.

$\int_x^1 1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t)]_x^1 - \int t \times \frac{1}{t}\,dt$

$= \ln(1) - x\ln(x) - \int_x^1 1\,dt$

$= -x\ln(x) - [t]_x^1$

$= -x\ln(x) - 1 + x$

$\xrightarrow[x \to 0]{} 1$

donc $\lim \int_x^1 \ln(t)\,dt = 1$ donc par définition,

$\int_0^1 \ln(t)\,dt$ convergente.

$$\cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t}\,dt$$

$*$ $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{e^t}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$*$ Pb en 0 :

$$\ln(t)\,\underbrace{e^{-t}}_{\to_0 1} \underset{0}{\sim} \ln(t)\times 1$$

donc $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$

or $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ convergente, donc par équivalence

$\boxed{\int_0^1 f(t)\,dt \text{ convergente.}}$

Pb en $+\infty$:

$$f(t) = \ln(t)\,e^{-t}$$

pour $t \geq 1$

$$\ln(t)\,e^{-t} \leq t\,e^{-t}$$

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt$.

Meth 1 : Primitive par IPP

$t^3 e^{-t} \to 0$ ...

Meth 2 : mult par t^2.

3

Meth 1. Primitive par IPP.

$$\int_1^x t e^{-t} dt = \left[t \times -e^{-t}\right]_1^x - \int_1^x 1 \times (-e^{-t}) dt$$

$$= -xe^{-x} + 1e^{-1} + \int_1^x e^{-t} dt$$

$$= e^{-1} - xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_1^x$$

$$= e^{-1} - xe^{-x} - xe^{-x} + e^{-1}$$

$$= 2e^{-1} - xe^{-x} - e^{-x}$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 2e^{-1}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x t e^{-t} dt = 2e^{-1}$

et par csq : $\int_1^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.

Donc par majoration $\int \ln e^{-t}$ est cv

conclusion : $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$ est convergente.

5) $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ continue sur $[0, +\infty[$

$F(t) = -e^{-t}$

$$\int_0^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= -e^{-x} + 1$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-t}\, dt \rightarrow \text{Continue sur } [0, +\infty[$$

$$-1 \leq \sin(t) \leq 1$$

Correction :

Meth 1 : par majoration :

$$t^2 e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

donc pour t assez grand,

$$t^2 e^{-t} \leq 1$$

$$0 \leq e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ cv (car $\alpha = 2 > 1$) donc par majoration,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt \text{ converge}}$$

Meth 2 : On étudie l'éventuelle limite de

$\int_0^{x} e^{-t}\, dt$ quand $x \to +\infty$

$$\int_0^{x} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{x} = -e^{-x} + 1 \xrightarrow[+\infty]{} 1.$$

donc limite donc intégrale convergente.

#4

· $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t}\,dt$ continue sur $[0,+\infty[$.

pb en $+\infty$:

$$0 \leq |\sin(t) e^{-t}| = |\sin(t)||e^{-t}|$$
$$\leq e^{-t}$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente donc par majoration,

$\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t}\,dt$ converge absolument

donc converge.

7) $\boxed{\text{En } 0}$

Si $\alpha > 0$: $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \sim \frac{t^\beta}{1} = \frac{1}{t^{-\beta}}$ cv ssi $-\beta < 1$
$\beta > -1$

Si $\alpha = 0$: $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} = \frac{t^\beta}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^{-\beta}}$ cv ssi $\beta > -1$

Si $\alpha < 0$: $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \sim \frac{t^\beta}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-\beta}}$ cv ssi $\alpha-\beta < 1$.

$\boxed{\text{En } +\infty}$

Si $\alpha > 0$: $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{t^\beta}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-\beta}}$ cv ssi $\alpha-\beta > 1$.

Si $\alpha = 0$

$$\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} = \frac{t^\beta}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^{-\beta}} \quad \text{CV ssi } \beta < -1.$$

Si $\alpha < 0$:

$$\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} t^\beta \quad \text{CV ssi } \beta < -1.$$

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,dt \text{ CV ssi}$$

$\beta < \alpha - 1$

① → $[\alpha > 0 \,,\, \beta > -1 \,,\, \alpha - \beta > 1]$

~~② → $(\alpha = 0$ → pas possible$)$~~

$\beta > \alpha - 1$

① ou ③ → $[\alpha < 0 \,;\, \alpha - \beta < 1 \,,\, \beta < -1]$