Partiel 2013 – Proposition de correction par Tien THACH (Tackounet ☺)

Exercice 1 :

Soit $y'(t) - y(t) = u(t)$ $avec$ $y(0) = 0$

Domaine de Laplace :

Les conditions à l'origine étant nulles, on peut écrire l'équation ci-dessus de la manière suivante :

$$pY(p) - Y(p) = L\big(u(t)\big) = \frac{1}{p}$$

C'est-à-dire $Y(p) = \frac{1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$

En passant au domaine temporel, par le tableau de correspondance, on trouve :

$$y(t) = L^{-1}\big(Y(p)\big) = L^{-1}\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\right) = -1 + e^{t}$$

Exercice 2 :

Soit la transformée de Laplace :

$$F(p) = \frac{e^{-4p}}{p(2p+1)} \rightarrow F(p) = e^{-4p}.\frac{1}{p(2p+1)}$$

On décompose le deuxième membre en éléments simples :

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{2p+1} \quad avec\ A = 1 \quad et\ B = -2$$

On en déduit, avec le tableau des correspondances :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p(2p+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + {}^{1}\!/_{2}}\right) = u(t) - e^{-\frac{t}{2}}$$

En prenant en compte le retard, on obtient :

$$L^{-1}(F(p)) = u(t-4) - e^{-\frac{t-4}{2}}$$

Exercice 3 :

Soit la fonction $x(t) = (2 + 5t + 3t^2).u(t)$

On a deux méthodes pour transformer celle-ci en transformée en Z. On va faire les deux pour s'entraîner ;

1. La plus fastidieuse :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT).z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2 + 5nT + 3(nT)^2).z^{-n}$$

$$X(z) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} + 5T\sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^{-n} + 3T^2\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,z^{-n}$$

On va s'amuser à dériver tout ça :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} -n\,z^{-n-1} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$-z.f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$f''^{(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} -n^2 z^{-n-1} = -\frac{z+1}{(z-1)^3}$$

$$-z.f''(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,z^{-n} = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

D'où le résultat :

$$X(z) = 2\,\frac{z}{z-1} + 5T\,\frac{z}{(z-1)^2} + 3T^2\,\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

2. Avec le passage en Laplace

$$x(t) = (2 + 5t + 3t^2).u(t) \rightarrow X(p) = \frac{2}{p} + \frac{5}{p^2} + \frac{6}{p^3}$$

(Pour ceux qui n'auraient pas compris Laplace pour le 3e terme, intégrer une fonction revient à diviser par p, et $\int 2t = t^2$, vous pouvez deviner la suite je pense)

On en déduit :

$$X(z) = 2\,\frac{z}{z-1} + 5T\,\frac{z}{(z-1)^2} + 6T^2\,\frac{z\,(z^2-1)}{2\,(z-1)^4}$$

$$X(z) = 2\,\frac{z}{z-1} + 5T\,\frac{z}{(z-1)^2} + 3T^2\,\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

Exercice 3 :

Soit la fonction

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Plusieurs méthodes peuvent être mise en œuvre. Cette fois, je ne vais faire qu'une seule méthode (j'en ai marre de faire des partiels que je vais me taper quelques heures après -_-)

On passe par la fonction auxiliaire

$$G(z) = \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

On le décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-e^{-aT}} \quad avec\ A = \frac{1}{1-e^{-aT}}\ et\ B = -\frac{1}{1-e^{-aT}}$$

On se remet avec notre fonction originale :

$$Y(z) = G(z).z = \frac{z}{(z-1)(1-e^{-aT})} - \frac{z}{(z-e^{-aT})(1-e^{-aT})}$$

On en déduit la transformée inverse suivante :

$$y(nT) = \frac{1-e^{-anT}}{1-e^{-aT}}\,u(nT)$$