Mathématiques vectorielles

Opérateurs

$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f = \begin{Bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{Bmatrix}$	$Div(\vec{U}) = \vec{\nabla}.\vec{U} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \frac{\delta U_x}{\delta x} + \frac{\delta U_y}{\delta y} + \frac{\delta U_z}{\delta z}$
$\overrightarrow{Rot}(\vec{U}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta U_z}{\delta y} - \frac{\delta U_y}{\delta z} \\ \frac{\delta U_x}{\delta z} - \frac{\delta U_z}{\delta x} \\ \frac{\delta U_y}{\delta x} - \frac{\delta U_x}{\delta y} \end{Bmatrix}$	$\Delta f = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f = Div(\overrightarrow{grad}(f)) = \frac{\delta^2 U_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U_z}{\delta z^2}$ $\Delta \vec{U} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{U} = \begin{Bmatrix} \Delta U_x \\ \Delta U_y \\ \Delta U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta^2 U_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U_x}{\delta z^2} \\ \frac{\delta^2 U_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U_y}{\delta z^2} \\ \frac{\delta^2 U_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U_z}{\delta z^2} \end{Bmatrix}$

Avec $\vec{\nabla} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{Bmatrix}$

Transformation d'intégrales

Green-Ostrogradsky $\oiint \vec{U}(M).\overrightarrow{dS_\tau} = \iiint_\tau Div(\vec{U}(P)).\overrightarrow{d\tau}$ Conditions : • S : Surface fermée de volume τ • M appartient à S • P appartient au volume τ	**Stokes** $\oint \vec{U}(M).\overrightarrow{dl_C} = \iint_S \overrightarrow{Rot}(\vec{U}(P)).\overrightarrow{dS}$ Conditions : • C : Parcourt fermé délimitant une surface S • M appartient à la courbe de C • P appartient à la surface S

Identités remarquables

$Div(\overrightarrow{Rot}(\vec{U})) = 0$

$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = 0$

$\Delta(fg) = g\Delta f \ + \ f\Delta g \ + \ 2\overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{grad}(g)$

$\Delta(\vec{U}) = \ \overrightarrow{grad}(Div(\vec{U})) - \overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}(\vec{U}))$

$\overrightarrow{grad}(fg) = f.\overrightarrow{grad}(g) + g.\overrightarrow{grad}(f)$

$Div(f.\vec{U}) = f.Div(\vec{U}) \ + \ \vec{U}.\overrightarrow{grad}(f)$

$Rot(f.\vec{U}) = f.\overrightarrow{Rot}(\vec{U}) + \ \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{U}$

$Div(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V}.\overrightarrow{Rot}(\vec{U}) + \vec{U}.\overrightarrow{Rot}(\vec{V})$