Corrigé du partiel n°2

Exercice 1 (2 points)

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a

$$AU = V \Longleftrightarrow U = A^{-1}V$$

Or

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & X \\ x \quad -z & = & Y \\ x-y-4z & = & Z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & X \\ -y-2z & = & Y-X \\ -2y-5z & = & Z-X \end{array} \right.$$

via $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$. Donc

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & X \\ -y-2z & = & Y-X \\ -z & = & X-2Y+Z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -X+3Y-Z \\ y & = & 3X-5Y+2Z \\ z & = & -X+2Y-Z \end{array} \right. .$$

Finalement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (4,5 points)

1. $F(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+2}$

   En multipliant cette égalité par $X+1$ puis en prenant la valeur $X = -1$ on a $a = 2$

   En multipliant la même égalité par $X-1$ puis en prenant la valeur $X = 1$ on a $b = -3$

   En multipliant la même égalité par $X+2$ puis en prenant la valeur $X = -2$ on a $c = 1$

   Donc
   $$F(X) = \frac{2}{X+1} - \frac{3}{X-1} + \frac{1}{X+2}$$

2. En effectuant la division euclidienne de X^4+1 par $(X+1)^2(X-2) = X^3 - 3X - 2$ on a
   $$X^4 + 1 = (X^3 - 3X - 2)X + 3X^2 + 2X + 1$$

   donc $G(X) = X + \dfrac{3X^2+2X+1}{(X+1)^2(X-2)}$

   Or $R(X) = \dfrac{3X^2+2X+1}{(X+1)^2(X-2)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{(X-2)}$

   En multipliant cette égalité par $X-2$ et en prenant la valeur $X = 2$, on a $c = 17/9$

   En multipliant la même égalité par $(X+1)^2$ et en prenant la valeur $X = -1$, on a $b = -2/3$

En prenant la valeur particulière 0, on a $-\dfrac{1}{2} = a - \dfrac{2}{3} - \dfrac{17}{18}$ donc $a = 10/9$

Ainsi

$$G(X) = X + \frac{10}{9(X+1)} - \frac{2}{3(X+1)^2} + \frac{17}{9(X-2)}$$

3. $H(X) = 1 + \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2+1}$

   En multipliant cette égalité par $X+1$ puis en prenant la valeur $X = -1$ on trouve $a = 1$.

   En multipliant cette égalité par X^2+1 puis en prenant la valeur $X = i$ on trouve $\dfrac{1-i}{i+1} = bi + c$ soit $-i = bi + c$ soit encore $b = -1$ et $c = 0$

   Donc

$$H(X) = 1 + \frac{1}{X+1} - \frac{X}{X^2+1}$$

Exercice 3 (4,5 points)

1. $f(1) = 2X + 2$

   $f(X) = X^2 + 2X - 1$

   $f(X^2) = 2X^2 - 2X$

   donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $f(1) = 2X + 2 = 2(X-1) + 4$

   $f(X-1) = X^2 - 3 = (X+1)^2 - 2(X-1) - 6$

   $f\big((X+1)^2\big) = 4X^2 + 4X = 4(X+1)^2 - 4(X-1) - 8$

   donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $f(1) = 2X + 2 = 2(X-1) + 4$

   $f(X) = X^2 + 2X - 1 = (X+1)^2 - 2$

   $f(X^2) = 2X^2 - 2X = 2(X+1)^2 - 6(X-1) - 8$

   donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $f(1) = 2X + 2$

   $f(X-1) = X^2 - 3$

   $f\big((X+1)^2\big) = 4X^2 + 4X$

   donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Après calculs, on a $\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On constate donc que $\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)\right)^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id)$

Exercice 4 (3 points)

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a(1-X)^2 + bX(1-X) + cX^2 = 0$.

   Alors $(a-b+c)X^2 + (-2a+b)X + a = 0$ donc $a-b+c=0$, $-2a+b=0$ et $a=0$ soit $a=b=c=0$.

   Ainsi $\mathscr{B}$ est libre.

2. E est de dimension 3 et $\mathscr{B}$ contient 3 vecteurs donc $\mathscr{B}$ est une base de E.

3. On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $3X^2 + 4X - 1 = a(1-X)^2 + bX(1-X) + cX^2$.

   Donc $3X^2 + 4X - 1 = (a-b+c)X^2 + (-2a+b)X + a$ soit $a-b+c=3$, $-2a+b=4$ et $a=-1$ soit encore $a=-1$, $b=2$ et $c=6$.

   Ainsi les coordonnées de $3X^2+4X-1$ relativement à $\mathscr{B}$ sont $(-1,2,6)$.

4. $\big((1-X)^2, X(1-X), X^2, 3X\big)$ contient 4 vecteurs or une famille libre de E contient au plus 3 vecteurs car E de dimension 3. Ainsi $\big((1-X)^2, X(1-X), X^2, 3X\big)$ n'est pas une famille libre de E.

Exercice 5 (3 points)

1. $\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P' = 0\} = \mathbb{R}_0[X]$

2. Soit $P \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = Q'$. Donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Or via le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n+1$ soit $\dim(\text{Im}(f)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

   Or $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

3. f n'est pas injective car $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$

   f n'est pas surjective car $f(\mathbb{R}_n[X]) \neq \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 (4 points)

1. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0$ d'où $g(f(x)) = g(0) = 0$ (car g est linéaire) donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

2. Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$. De plus $f(x) \in E$ donc $y \in \text{Im}(g)$.

3. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors $\exists x \in E,\ y = f(x)$. Montrons que $y \in \text{Ker}(g)$.

$$g(y) = g(f(x)) = 0$$

   car $g \circ f = 0$. Donc $y \in \text{Ker}(g)$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in E$. Montrons que $g(f(x)) = 0$.

   On a $f(x) \in \text{Im}(f)$ or $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ donc $f(x) \in \text{Ker}(g)$ i.e. $g(f(x)) = 0$.

4. Montrons que $f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big) \subset \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

   Soit $y \in f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big)$. Alors il existe $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. On a donc immédiatement $y \in \mathrm{Im}(f)$.

   Il reste à montrer que $y \in \mathrm{Ker}(g)$.

   Or $g(y) = g\big(f(x)\big) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

   donc $y \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

   Montrons que $f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big) \supset \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

   Soit $y \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $g(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$ car $g\big(f(x)\big) = g(y) = 0$ donc finalement $y \in f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big)$.