Chapitre 1:

Systèmes de coordonnées

Plan

I. Coordonnées cartésiennes

1. Elément de longueur
2. Elément de surface
3. Elément de volume

II. Coordonnées polaires

1. Elément de longueur
2. Elément de surface

III. Coordonnées cylindriques

1. Elément de longueur
2. Elément de surface
3. Elément de volume

IV. Coordonnées sphériques

1. Elément de longueur
2. Elément de surface
3. Elément de volume

A. Zellagui

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\alpha) \qquad \alpha = (\vec{F_1}, \vec{AB})$$

$$\mathrm{d}d_p = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$$

flux magnétique.

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S} \qquad \Phi = BS \qquad \Phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$$

energie electrique $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_\tau E^2 \, \mathrm{d}\tau$

$$\mathrm{d}W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \overbrace{\mathrm{d}\tau}^{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

I. Coordonnées cartésiennes

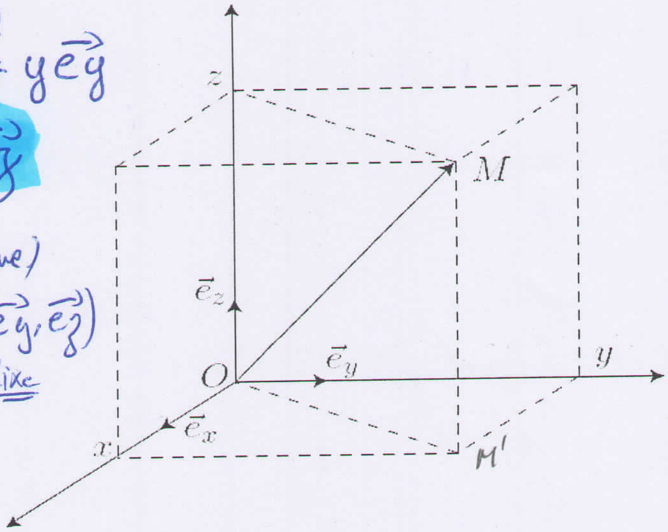
- Variables : x, y, z
- Base : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- Notation d'un vecteur : $\vec{U}\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$
- Notation d'une fonction: f(x,y,z)

$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OM'} = \vec{OH} + \vec{OA} + \vec{OB}$$
$$= z\vec{e_z} + x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$$
$$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

(Vecteur position en cinematique)

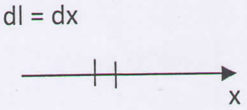
(en coordonnées cartesienne : base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

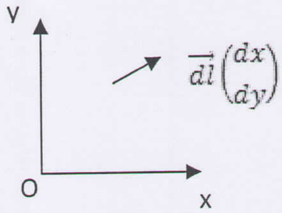
$$\frac{d\vec{e_x}}{dt} = \frac{d\vec{e_y}}{dt} = \frac{d\vec{e_z}}{dt} = \vec{0}$$ fixe



I.1 Elément de longueur dl

dl = « longueur infinitésimale ».





A trois dimensions, $\vec{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

2. Elément de surface dS

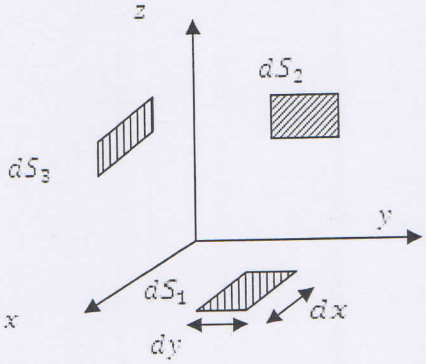
dS = surface infinitésimale

Dans le plan (xoy) : $dS_1 = dx.dy$

Dans le plan (yoz) : $dS_2 = dy.dz$

Dans le plan (xoz) : $dS_3 = dx.dz$

$d\tau = \underbrace{S_{base}} \times hauteur$

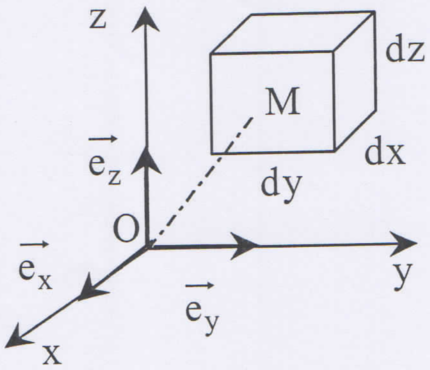


3. Elément de volume

$$d\tau = \underbrace{S_{base}}_{dx.dy} \times \underbrace{hauteur}_{dz}$$

$$\boxed{d\tau = dx\,dy\,dz}$$

en m^3



II. Coordonnées polaires

- Variables : r , θ
- Base : $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ ($\overrightarrow{e_r}$: vecteur radial, $\overrightarrow{e_\theta}$: vecteur tangentiel)
- Notation d'un vecteur : $\vec{U}\binom{U_r}{U_\theta}$ (U_r : composante radiale et U_θ : composante tangentielle)
- Notation d'une fonction : f(r,θ).

$\begin{cases} R = OM \text{ (distance} > 0) \\ \theta = \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM} \end{cases}$
(orienté dans le sens trigo)

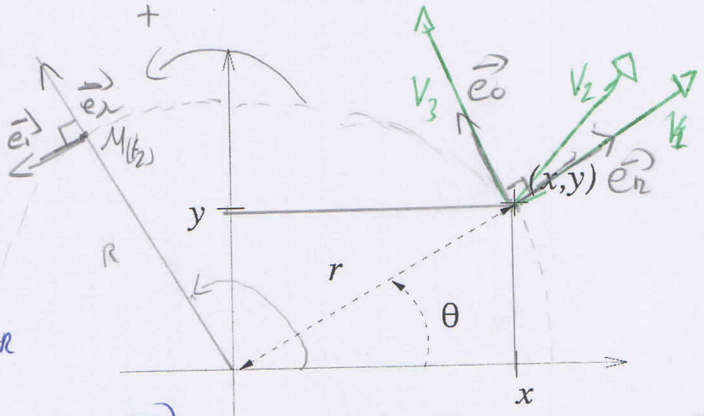
Changement de variable.

$\begin{cases} x = R\cos(\theta) \\ y = R\sin(\theta) \end{cases}$ $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_R} + 0_{e_\theta}$

$= \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_R}\,\overrightarrow{e_\theta}}$

$= \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y}}$



$\overrightarrow{V_1} = V_1 \cdot \overrightarrow{e_R}$ ($\overrightarrow{V_1}$: vect radiale)

$V_2 = V_2 \cdot \overrightarrow{e_\theta}$ ($\overrightarrow{V_2}$: vect tangentiel)
(pas de composante $\overrightarrow{e_R}$)

$= dr \times r\,d\theta$
$= dl_1 \times dl_2$
$=$
dS pelouche.

II.1 Elément de longueur dl

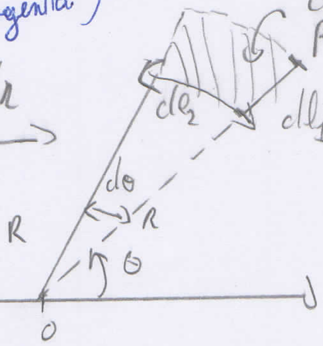
$R \rightarrow dl_1 = dr$
$\theta \rightarrow d\theta \rightarrow$

dl = dr (quand on fait varier r d'une valeur dr).

$dl_2 = R \cdot d\theta$
mesure de l'arc qui intercepte l'angle dθ

dl = r.dθ (quand on fait varier θ d'un angle dθ).

r.dθ est la mesure de l'arc qui intercepte l'angle élémentaire dθ.



II.2 Elément de surface dS

III. Coordonnées cylindriques

$R = HM$ (H projection de M sur $\vec{Oz}$) $= OM'$ $(R \geq 0)$

$\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$

(M' projection de M sur (xOy)) $0 \leq \theta \leq 2\pi$

- Variables : (r , θ , z)
- Base : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

Sens trigo

- Notation d'un vecteur : $\vec{U}\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \end{pmatrix}$ $\begin{cases} U_r = composante\ radiale \\ U_\theta = composante\ tangentielle \\ U_z = composante\ parallèle\ à\ \overrightarrow{O_z} \end{cases}$

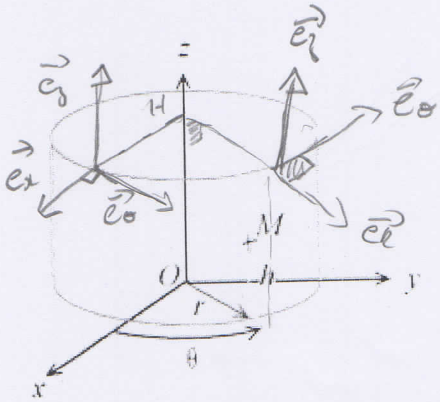
- Notation d'une fonction : f(r, θ, z)

$z = \overline{OH}$ $(-\infty < z < +\infty)$

$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ base mobile

$\vec{e_z}$ garde la même direction

$d\vec{e_z} = \vec{0}$ mais $\frac{d\vec{e_r}}{dt} \neq \vec{0}$ et $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} \neq \vec{0}$



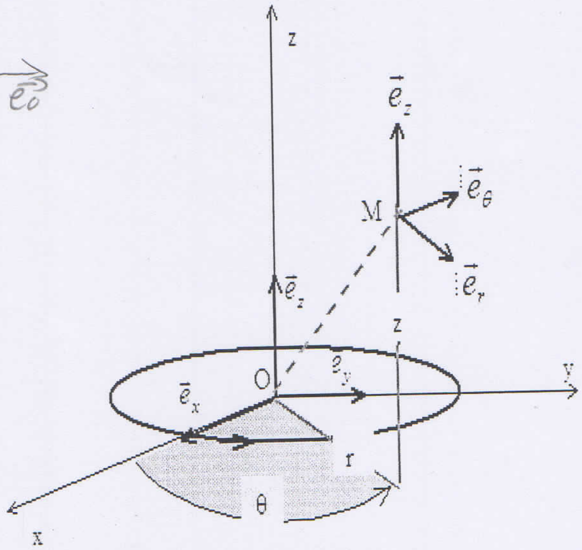
Base : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ est représentée en tout point M tel que :

relations entre les vecteurs de la base.

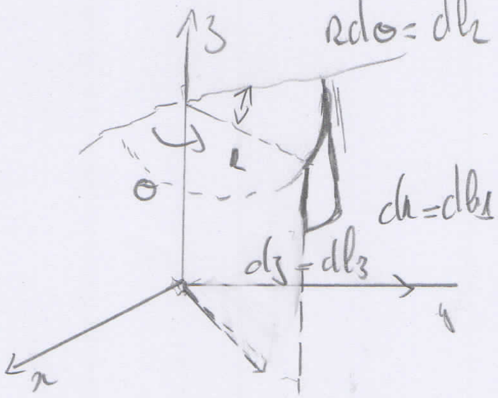
$$\begin{cases} \vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_z} \\ \vec{e_\theta} \wedge \vec{e_z} = \vec{e_r} \\ \vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta} \end{cases}$$

$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = \vec{OM}\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= z\vec{e_z} + R\vec{e_r}$$



III.1 Elément de longueur dl



III.2 Elément de surface dS

R, θ, z

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

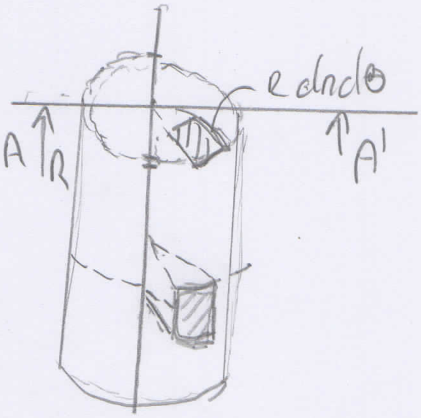
$dr \quad r\,d\theta \quad dz$

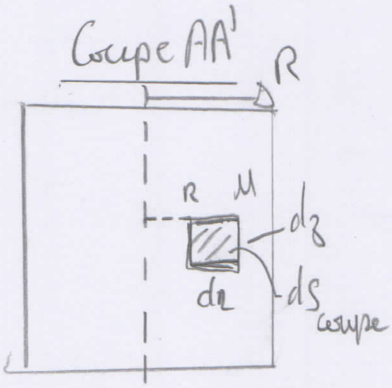
dS_{lat}

$$\boxed{dS_{base} = dl_1 \times dl_2 = r\,dr\,d\theta}$$

$dS_{lat} = dl_2 \times dl_3$

$dS_{lat} = r\,d\theta\,dz$





III.3 Elément de volume dτ

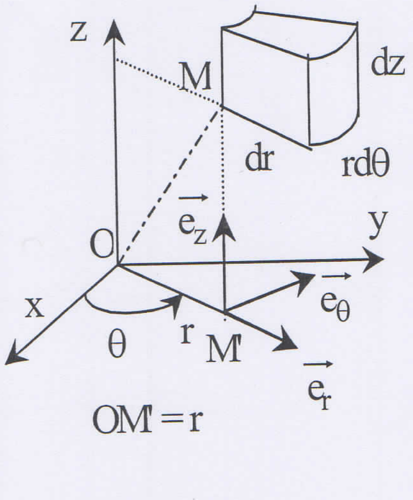
$d\tau_{cyl} = dS_{base} \times \text{hauteur}$

$= r\,dr\,d\theta \times dz$

$$\boxed{d\tau_{cyl} = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

$$\begin{pmatrix} R = cst \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{pmatrix}$$

$$\tau_{cyl} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r\,dr\,d\theta\,dz = \pi R^2 h$$



IV. Coordonnées sphériques

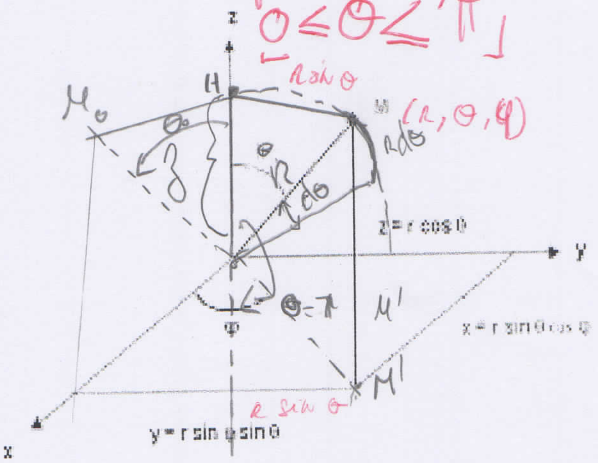
- Variables : (r , θ , φ) avec θ « theta » le premier angle et φ « phi » le second angle
- Notation d'un Vecteur : $\vec{U}\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_\varphi \end{pmatrix}$
- Notation d'une fonction : f(r, θ , φ)

$\theta = (\vec{Oz}, \vec{OM})$ (en partant de l'axe $\vec{Oz}$ vers $\vec{OM}$) $[0 \leq \theta \leq \pi]$

$\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM'})$

tel que M' = projection de M sur (xoy) orienté dans le sens trigo

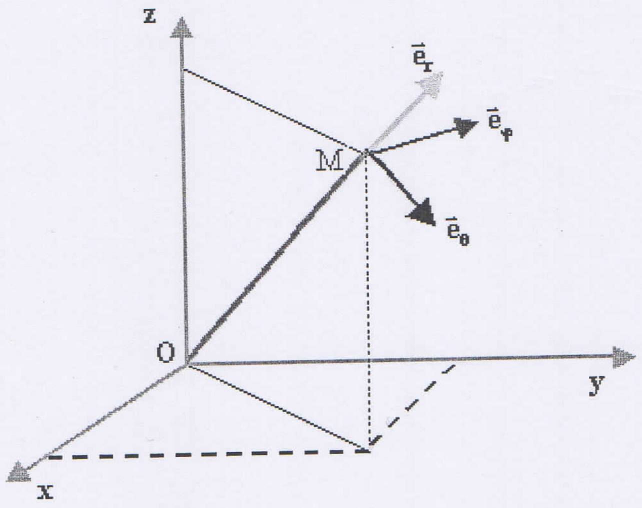
$[0 \leq \varphi \leq 2\pi]$

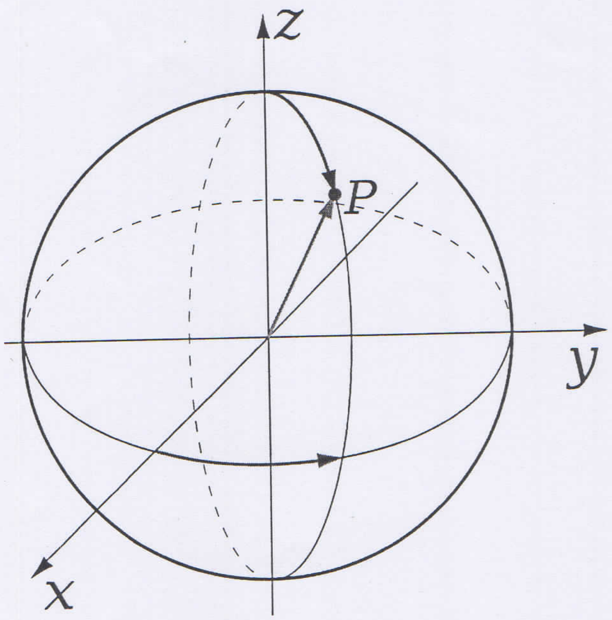


$$\begin{cases} z = r\cos\theta = OH \\ x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Base : $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$

- $\overrightarrow{e_r}$: colinéaire à OM (dirigé de M vers l'extérieur)
- $\overrightarrow{e_\theta}$: perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ et appartient au plan (OM , O_z)
- $\overrightarrow{e_\varphi}$: décrit la rotation de φ et forme un trièdre direct avec $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ perpendiculaire à $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.





IV.1 *Elément de longueur*

- Dans le plan (OM , O_z)
- Dans le plan (xoy),

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O_3})$ $dl_1 = dr$ $dl_3 = (r\sin\theta)\,d\varphi$

$dl_2 = r\,d\theta$

IV.2 *Elément de surface dS*

$dS = dl_2 \times dl_3$ $= (r\,d\theta)\times(r\sin\theta\, d\varphi)$

(car pour la sphère r ne varie pas !!)

$dS_{sph} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

IV.3 *Elément de volume*

$d\tau_{sph} = dS_{sph} \times dr$

$= r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$0 \leq r < R$

$0 < \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi < 2\pi$