Feuille d'exercices n°11

Algèbre linéaire III

(du lundi 22 avril 2013 au vendredi 17 mai 2013)

Exercice 1

Soient $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$ et $e_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1.

1. Montrer que $dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$, Ae_{ij}, $e_{ij}A$, $e_{ij}Ae_{ij}$ et $(e_{ij}A)^2$.

Exercice 2

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Montrer que
$$\forall (A,B) \in E^2,\ AB \in E \text{ et } AB = BA$$

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1}.

   N.B. : vous prendrez soin de vérifier au final que $A^{-1}A = I_3$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par
$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\ x-y+z,\ -2x+y-z)$$
   Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 4

Soit $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$ tel que $AB = A + B$.

1. Montrer que $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$.
2. En déduire que $AB = BA$.

Exercice 5

Soient A, B et C trois matrices carrées non nulles d'ordre n telles que $ABC = 0$. Montrer que 2 au moins de ces 3 matrices ne sont pas inversibles.

Exercice 6

1. Déterminer la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice d'une rotation vectorielle d'axe $(0z)$ et d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = \left(1, X - 1, (X+1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 8

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X) - XP'(X) \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array} \right.$

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes relativement aux bases canoniques.

Exercice 9

Soient $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé et V l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$V(P) = \left(\tilde{P}(x_0), \ldots, \tilde{P}(x_n)\right)$$

où $\tilde{P}$ désigne la fonction polynôme associée à P.

Déterminer la matrice de V dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

Feuille exercice n°11

Exercice 2:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Mq que E est un $\mathbb{R}$-ev

- $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: ev
- $E \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ pour $a=b=c=0$
- SPCL :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in E$ q-t-on $\alpha A + \beta B \in E$

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 2c' & a' & b' \\ 2b' & 2c' & c' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ 2\alpha c & \alpha a & \alpha b \\ 2\alpha b & 2\alpha c & \alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a' & \beta b' & \beta c' \\ 2\beta c' & \beta a' & \beta b' \\ 2\beta b' & 2\beta c' & \beta c' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \\ 2(\alpha c + \beta c') & \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \underbrace{2(\alpha b + \beta b')}_{\in \mathbb{R}} & \underbrace{2(\alpha c + \beta c')}_{\in \mathbb{R}} & \underbrace{\alpha a + \beta c'}_{\in \mathbb{R}} \end{pmatrix} \in E$$

E est un sev et E est un sev d'un espace vectoriel donc E $\mathbb{R}$-ev.

Déterminons une base et la dimension de $\mathcal{E}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{E}} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{K}$$

Donc un élément de $\mathcal{E}$ s'écrit comme combinaison linéaire de I, J, K

or $\{I, J, K\}$ libre

$\Rightarrow \{I, J, K\}$ une base de $\mathcal{E}$.

2) mq : $\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2,\ AB \in \mathcal{E}$ et $AB = BA$

$A \times B$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ 2c' & a' & b' \\ 2b' & 2c' & a' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} aa' + 2bc' + 2b'c & ab' + ba' + 2cc' & ac' + bb' + ca' \\ 2ca' + 2ac' + 2bb' & 2a'c + aa' + 2bc' & 2cc' + ab' + ba' \\ 2ba' + 4cc' + 2ab' & 2bb' + 2a'c + 2ac' & 2bc' + 2cb' + aa' \end{bmatrix} \in \mathcal{E}$$

et

$B \times A$ = même chose.

$$\boxed{AB = BA}$$

<u>**Exo 4**</u> : on a $AB = A + B$

1) mq $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$

$I_n - B - A + AB = I_n$

$I_n - (B + A) + AB = I_n$

$I_n - AB + AB = I_n$ ok

$I_n = I_n$

2) Déduisons que $AB = BA$

On a $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$

<u>Rappel</u> : $AB = I_n \Leftrightarrow A$ inversible et $B = A^{-1}$

<u>Donc</u> : $(I_n - A)$ est inversible et son inverse $(I_n - B)$

$\Rightarrow (\cancel{I_n} - A) = (\cancel{I_n} - B) \Leftrightarrow A = B$

<u>Exercice 3</u> :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = ?$

inverse A / revient à résoudre l'équation matricielle $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ inconnue et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donc

$$\underset{Y}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

$AX = Y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = x' & L_1 \text{ pivot} \\ x - y + z = y' & L_2 \\ -2x + y - z = z' & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = x' & L_1 \\ -2y + 3z = y' - x' & L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y - 5z = z' + 2x' & L_3' \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = x' \\ y - \frac{3}{2}z = \frac{-y'}{2} - \frac{x'}{2} \\ 3y - 5z = z' + 2x' \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 2z = x' \\ y - \frac{3}{2}z = \frac{-y'}{2} + \frac{x'}{2} \\ -\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}y' + z' & L_3' \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = x' \\ y - \frac{3}{2}z = -\frac{y'}{2} + \frac{x'}{2} \\ z = -x' - 3y' - 2z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{y'}{2} + \frac{x'}{2} - \frac{3}{2}x' - 3\times\frac{3}{2}y' - \frac{3}{2}\times 2z' \\ y = -x' - 5y' - 3z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' - y + 2z \\ x = -y' - z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y' - z' \\ y = -x' - 5y' - 3z' \\ z = -x' - 3y' - 2z' \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A^{-1}} Y$$

On était parti avec $AX = Y$

$\Rightarrow X = A^{-1}Y$

Vérifions :

$AA^{-1} = I_3$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ OK}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = ?$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$AX = Y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = x' & L_1 \\ x - 2y + 3z = y' & L_2 \text{ pivot} \\ x + y + \frac{1}{2}z = z' & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = y' & L_2 \\ 8y - 7z = x' - 2y' & L_1' \leftarrow L_1 - 2L_2 \text{ pivot} \\ 3y - \frac{5}{2}z = z' - y' & L_3' \leftarrow L_3 - L_2 \text{ pivot} \end{cases}$$

$3y - \frac{5}{2}z = z' - y'$

$y - \frac{5}{6}z = \frac{1}{3}z' - \frac{1}{3}y'$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = y' & L_2 \\ y - \frac{5}{6}z = \frac{1}{3}z' - \frac{1}{3}y' & L_3' \text{ pivot} \\ -\frac{7}{3}z = x' + \frac{2}{3}y' - \frac{8}{3}z' \end{cases}$$

$L_3'' \leftarrow L_1' - 8L_3'$

~~$y - y - \frac{5}{6}z - \frac{7}{8}z = \frac{1}{3}z' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{8}x' - \frac{1}{4}y'$~~

~~$-\frac{20}{24}z - \frac{21}{24}z = \frac{8}{24}z' - \frac{8}{24}y' + \frac{3}{24}x' - \frac{6}{24}y'$~~

~~$\Leftrightarrow -\frac{41}{24}z = \frac{8}{24}z' - \frac{14}{24}y' + \frac{3}{24}x'$~~

~~$\Leftrightarrow -41z = 8z' - 14y' + 3x'$~~

$L_3'' \Leftrightarrow z = -3x' - 2y' + 8z'$

$x = y' + 2y - 3z$

$= y' \ldots -$

$x = 4x' + 3y' - 10z'$

$y = \frac{z'}{3} - \frac{y'}{3} - \frac{5}{2}x' - \frac{10}{6}y' + \frac{40}{6}z'$

$y = 7z' - 2y' - \frac{5}{2}x'$

$A = \ldots$

$$\cancel{\begin{cases} x - 2y + 3z = y' \\ x + y + \frac{1}{2} z = z' \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3-4
Sans doute
par cœur

2) $f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ x - y + z,\ -2x + y - z)$

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(la matrice de f est égale à A.
or A est inversible donc f est bijective

$f^{-1}(x, y, z) = (-y - z\ ;\ -x - 5y - 3z\ ;\ -x - 3y - 2z)$

<u>Exo 5</u> :

$ABC = 0$

$A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

<u>Mq</u> : 2 au moins de ces 3 matrices ne sont pas inversibles

* Supposons que A et B sont inversibles tel que
$ABC = 0$

<u>On a</u> :

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}BC = \underbrace{A^{-1}.0}_{0}$

$BC = 0$

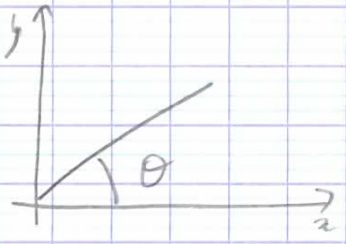
$B^{-1}BC = B^{-1}.0$

$C = 0$

Ce qui exclut C. Donc C n'est pas inversible.

Idem pour les autres cas où 2 des 3 matrices sont inversibles.

<u>Exo 6</u> : 1) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ rotation d'angle θ



cette matrice fait tourner le plan d'angle θ

$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y.\cos\theta \end{cases}$

<u>Si</u> $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: elle fait tourner l'axe des x en direction de l'axe des y.

2) $R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: rotation opère ainsi : elle tourne l'axe des x vers l'axe des y

$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $y \longrightarrow z$

Exo 7 : $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2(X+1)P - (X^2-2X+1)P'$

1) matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$

$\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array}$$
$$\begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$f(1) = 2(X+1).1 - (X^2-2X+1) \times 0$
$= 2(X+1)$
$= 2X+2$
$= 1.2 + 2.X$

2) Mq : $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha.1 + \beta(X-1) + \gamma(X+1)^2 = 0$

montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha + \beta X - \beta + \gamma X^2 + 2\gamma X + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \gamma X^2 + X(\beta + 2\gamma) + \alpha - \beta + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ Donc

la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

et comme,

$\dim B' = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow$ génératrice

$\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}_2[X]$

3)

$$M_{B'}(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(1) & f(X-1) & f((X+1)^2) \\ \hline 1 & \cancel{2}4 & -4 & -16 \\ (X-1) & 2 & 0 & -8 \\ (X+1)^2 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

$(X^2+2X+1)(2X+2)$

$2X^3+4X^2+2X$
$+2X^2+4X+2$

$-(2X^3+2X^2-4X^2-4X+2X+2)$

$= 8x^2+8x$
$= 1\alpha+\beta(X-1)+\gamma(X+1)^2$
$\alpha+\beta X-\beta+\gamma X^2+2\gamma X+\gamma$
$X^2(\gamma)+X(\beta+2\gamma)+\alpha-\beta+\gamma$

$\begin{cases} 8=\gamma \\ 8=\beta+2\gamma \\ \alpha-\beta+\gamma=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma=8 \\ \beta=-8 \\ \alpha=-16 \end{cases}$

$f((X+1)^2) = 1(-16)+(-8)(X-1)+8(X+1)^2$

$$M_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -16 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Exo 8 : $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $B = (1, X, X^2)$

1/ $P \longmapsto f(P) = P(X) - XP'(X)$

$$M_B(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(1) & f(X) & f(X^2) \\ \hline 1 & & & \\ X & & & \\ X^2 & & & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2/ $P \longmapsto g(P) =$

$B(\mathbb{R}_3[X]) = (1, X, X^2, X^3)$

$B(\mathbb{R}^3) = (e_1, e_2, e_3)$

$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{cccc} g(1) & g(X) & g(X^2) & g(X^3) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$g(1) = (P(-1) ; P(0) ; P(1)) \Rightarrow P(X) = 1$
$= (1, 1, 1)$

$g(X) = (P(-1) ; P(0) ; P(1))$; $P(X) = X$
$= (-1, 0, 1)$

$g(X^2) = (P(-1) ; P(0) ; P(1))$; $P(X) = X^2$
$= (1, 0, 1)$

$g(X^3) = (P(-1) ; P(0), P(1))$; $P(X) = X^3$
$= (-1, 0, 1)$