Chapitre 1

Outils mathématiques d'analyse vectorielle.

Plan :

I. Opérateurs

1. Gradient
2. Divergence
3. Rotationnel
4. Laplacien

II. Transformation d'intégrales

1. Théorème de GrEEn-Ostrogradski.
2. Théorème de Stokes

III. Quelques identités remarquables d'analyse vectorielle

Les éléments d'analyse vectorielle que l'on donnera dans ce chapitre seront utilisés pour établir les équations locales d'électromagnétisme, nécessaires pour l'étude des ondes électromagnétiques. On retrouve ces mêmes outils mathématiques dans d'autres domaines de la physique tels que la mécanique, la thermodynamique, la mécanique des fluides……

I. Opérateurs

1. Gradient :

Noté : $\overrightarrow{grad}$

C'est l'application de l'opérateur nabla : $\vec{\nabla}$, à une fonction f(x,y,z)

$$tel\ que\ \vec{\nabla}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix};\ \text{appliqué à f} \Rightarrow \overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Remarque

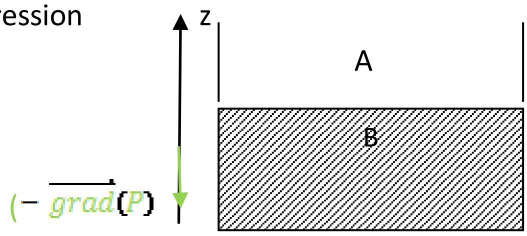
L'opérateur $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$ ne s'applique qu'à des fonctions scalaires telles que : pression P, température T, masse volumique ρ, potentiel électrique : V….et le résultat donne un vecteur.

Interprétation

Le $\overrightarrow{grad}(f)$ mesure l'intensité de la variation d'une fonction scalaire selon les 3 directions de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{grad}(f)$ donne aussi le sens de croissance de la grandeur f. C'est une dérivé directionnelle.

Exemple

f = pression



On a $P_a =$ Pression atmosphérique, et $P_B > P_A$, le vecteur gradient de pression est donc orienté vers les z < 0.
Les surfaces horizontales = surfaces à pression constante=isobares, tel que le vecteur $\vec{grad}(P)$ est perpendiculaire à ces surfaces.

2. Divergence.

Noté : div.

La divergence est obtenue lorsque $\vec{\nabla}$ s'applique en produit scalaire à un vecteur.

Pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque, $div(\vec{U}) = \vec{\nabla}.\vec{U}$

$$div\,\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{dx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Interprétation :

Pour un écoulement d'un fluide tel que (vecteur$\vec{u} \equiv \vec{v}$) vecteur vitesse, alors :

- $div\,(\vec{v}) = \mathbf{0}$: signifie fluide est homogène et incompressible.
- $div\,(\vec{v})$ >0 : signifie une accumulation locale de la matière, ou excès de matière.
- $div\,(\vec{v})$<0 : signifie une perte de masse locale.

En électromagnétisme

$$\vec{u} = \vec{E}\begin{cases} \text{si div E} = 0 \text{ (pts A)} \\ \text{Si } div\,\vec{E} > 0 \text{ ou } < 0 \text{ (accumulation de charges >0 ou < 0 au pts A)} \end{cases}$$

3. Rotationnel

Noté : $\overrightarrow{rot}$

C'est l'application d'un opérateur $\vec{\nabla}$ en produit vectoriel à un vecteur.

Pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque : $ro\vec{t}\,(\vec{U}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{u})\begin{pmatrix} \frac{\partial}{dx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Interprétation

* Le rotationnel est lié à un effet de cisaillement. Il est d'autant plus élevé que ça cisaille fort !

* Calculer le rotationnel d'un vecteur $\vec{u}$ c'est mesurer sa variation selon une direction perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$

* Quand on lâche une particule dans un champ de vitesse $\vec{v}$:

$$\begin{cases} -si\ \overrightarrow{rot}(\vec{v}) > 0\text{: la particule tournera dans le sens >0} \\ -si\ \overrightarrow{rot}(\vec{v}) < 0 \text{ la particule tournera dans le sens <0} \\ -si\ rot\ (\vec{v}) = 0\text{, la particule <0 évolue sans rotation} \end{cases}$$

4. Laplacien :

Noté : Δ

Il peut s'appliquer à des fonctions scalaires et à des vecteurs

* Appliqué à une fonction f : Δf donne un scalaire
* Appliqué à un vecteur $\vec{U}$: $\Delta\vec{U}$ donne un vecteur

$$\Delta(\square) = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{grad}\right)(\dots) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(\dots) = \nabla^2(\dots)$$

Appliqué à f :

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Appliqué à un vecteur :

$$\Delta\vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

- Le laplacien Δ permet d'établir les équations de propagation de n'importe quel type d'onde.

L'équation de propagation permet de calculer la vitesse de propagation

Equation de propagation type :

$$\Delta\xi - \frac{1}{v^2}.\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0$$

ξ Désigne la grandeur physique qui subit la déformation (ou la variation).

En électromagnétisme

L'équation de propagation équivalente à l'équation ci-dessus est donnée par :

(Ξ = E : champ électrique)

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{C^2}.\frac{\partial^2.\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Où c représente la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide et qui est donnée par :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3.10^8 m\backslash s.$$

II. Transformation d'Intégrales :

Il existe deux théorèmes qui permettent de transformer une simple intégrale en une double et une double intégrale en un triple.
Ces deux théorèmes ont permis à Maxwell d'établir les quatre équations locales qui résument toutes les interactions électromagnétiques.

1. Théorème de Green – GstrogradskI

(Appelé aussi théorème de la divergence).

Pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque :

$$\oiint \vec{u}(M).\overrightarrow{ds_\tau} = \iiint_\tau div\left(\vec{u}(P)\right)d.\tau$$

Conditions :

$$\text{Conditions: } \begin{cases} \text{S: surface fermée} \\ \text{M} \in \text{surface fermée} \\ \text{P} \in \text{volume } \tau \\ \tau\text{: volume contenu à l'intérieur d'une surface fermée} \end{cases}$$

2. Théorème de Stokes.

(Appelé aussi théorème du rotationnel)

Pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque :

$$\oint \vec{U}(M).\overrightarrow{dl_C} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{u}(P)\right).\overrightarrow{ds}$$

Conditions

$$\begin{cases} \text{C: parcours fermé} \\ \text{M} \in \text{à la courbe C} \\ \text{P} \in \text{surface S} \\ \text{"C" parcours qui délimite S} \end{cases}$$

Exemple

Si on prend le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho \, d\tau \rightarrow \iiint \text{div } \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho \, d\tau$$

$$\Rightarrow \iiint_\tau \left(div \, \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right)d\tau$$

$$\Rightarrow \text{dire}\vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow div \, \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette dernière représente l'équation locale du théorème de Gauss

III. Quelques identités remarquables d'analyse vectorielle.

Ces différentes identités seront utilisées pour de nombreuses démonstrations dans les prochains cours.

1) $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{u})\right) = 0$
2) $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \vec{0}$
3) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\,\Delta f + 2\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f).\overrightarrow{grad}(g)$
4) $\Delta\vec{U} = grad\vec{d}(div(\vec{U})) - rot\vec{t}(rot\vec{t}(\vec{U}))$
5) $\overrightarrow{grad}(fg) = f\,\overrightarrow{grad}(g) + g\,\overrightarrow{grad}(f)$
6) $div\,(f\,\vec{u}) = f\,div\,(\vec{u}) + \overrightarrow{grad}(f).\vec{u}$
7) $rot\vec{t}\,(f\vec{U}) = frot\vec{t}\,(\vec{U}) + grad\vec{d}\,(f) \wedge \vec{U}$
8) $div(\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2) = \vec{U}_2.rot\vec{t}\,(\vec{U}_1) - \vec{U}_1.rot\vec{t}\,(\vec{U}_2)$

Remarque importante

Toutes les définitions des opérateurs données dans ce chapitre ne sont valables que dans les coordonnées cartésiennes. Dans les autres types de coordonnées : polaires, cylindriques ou sphériques, il existe un formulaire (distribué en TD) qui donnera les expressions des différents opérateurs.