Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (4,5 points)

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ où $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

   N.B. : utiliser un développement limité à l'ordre 1.

2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ où $v_n = \dfrac{e^{1/n} - \cos(1/n)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$

   N.B. : résolution imposée en déterminant un équivalent du numérateur et du dénominateur puis de v_n.

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} w_n$ où $w_n = \left(\dfrac{n}{n-2}\right)^n$

Exercice 2 (3 points)

1. Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de D'Alembert, la nature de la série de terme général $\dfrac{2^n}{n!}$

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

3. En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

Exercice 3 (4 points)

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n (n+1)^{n-1}(2n-1)}{n^{n+1}}.$$

1. Montrer que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = e\left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

2. En déduire que

$$u_n = (-1)^n \frac{2e}{n} + (-1)^{n+1}\frac{4e}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   N.B. : $u_n = (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-1}\left(\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$.

3. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 (3 points)

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}\right)$

1. Déterminer un développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 2.

2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 5 (3 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la nature de la série de terme général $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$

Exercice 6 (3 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$