Partiel 2

Durée : quatre heures
Documents et calculatrices non autorisés
Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1 (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 2 (4,5 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \dfrac{8X^2 - 20}{(X-1)(X+2)(X-2)}$

2. $G(X) = \dfrac{X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 11X + 11}{(X+1)(X-2)^2}$

[suite du cadre page suivante]

3. $H(X) = \dfrac{2X^2 - 1}{(X+1)(X^2+X+1)}$

Exercice 3 (2,5 points)

1. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ P(X) & \longmapsto \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P'(1) & P''(1) \end{pmatrix} \end{cases}$

   Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques.
   N.B. : on prendra comme base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ la base suivante :

$$\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 4 (6 points)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a,b,c) & \longmapsto (a+b, b+c) \end{cases}$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner sa dimension.

3. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

4. f est-elle injective, surjective ?

5. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques.

6. Soit $\mathscr{B}' = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$. $\mathscr{B}'$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? $\mathscr{B}'$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

7. Déterminer les coordonnées du vecteur $(2,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{B}'$.

8. En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, déterminer la matrice de f relativement à $\mathscr{B}', \mathscr{B}$.

Exercice 5 (2 points)

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. $\mathscr{B}_1 = \{X^2 + X, X + 3\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}_2[X]$?

2. $\mathscr{B}_2 = \{2, X+1, 2X^2, X^2+3\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?

3. $\mathscr{B}_3 = \{1, X+1, X^2+2X\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 6 (2 points)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et p un projecteur. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$

Exercice 7 (3 points)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, p et q deux projecteurs. Montrer que $(p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q) \iff \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$