Patrick SIARRY

Option SCIA

Mathématiques du signal

Promo 2007

Table des matières

Table des figures

1 Transformation de Laplace

1.1 Outils mathématiques nécessaires

1.1.1 Équation différentielle linéaire à cœfficients constants

Exemple :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t)$$

La linéarité de l'équation vient du fait qu'il n'y a pas de produit de dérivées. Les cœfficients constants sont indépendants du temps.
Exemple numérique :

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t + 20$$

Première étape : on cherche la solution générale de l'équation sans second membre

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 0$$

Équation caractéristique : on remplace les dérivées par un paramètre r : $r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -3; r_2 = 2$.
La solution générale sans second membre : $y(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$.

Deuxième étape : solution particulière de l'équation avec second membre Solution particulière de la forme : $y(t) = at + b$.

$$a - 6(at + b) = 12t + 20 \Rightarrow \begin{cases} -6at = 12t & \Rightarrow \quad a = -2 \\ a - 6b = 20 & \Rightarrow \quad b = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Solution générale de l'équation avec second membre On somme la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$y(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t} - 2t - \frac{11}{3}$$

A et B dépendent des conditions initiales normalement connues. La transformée de Laplace offre une méthode de résolution concurrente plus simple.

1.1.2 Produit de convolution

Soient deux signaux continus $x(t)$ et $y(t)$. On appelle produit de convolution :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t - \tau) d\tau$$

L'"impulsion" de Dirac ou le "pic" de Dirac, $\delta(t)$, joue le rôle d'unité de convolution. On a :

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$$

1.1.3 Fonction complexe d'une variable complexe

C'est une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1.2 Définition de la transformation de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction généralement causale ($f(t) = 0, t \leq 0$), on pose

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \text{ avec } p \in \mathbb{C}$$

On dira que $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$: $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p)$. On a $p = \sigma + j\omega$ avec ω la pulsation. $\omega = 2\pi f$ avec f la fréquence.

Convergence de $\mathscr{L}$? La convergence ne pose aucun problème pour les signaux réels (qui possèdent un sens physique). Les problèmes peuvent survenir si l'on considère des fonctions mathématiques non-réalisables.

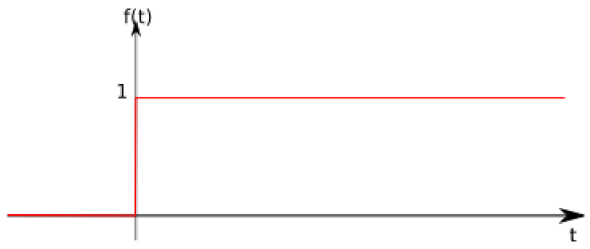


Fig. 1 – Échelon de Heaviside

Exemple Échelon unitaire (voir Fig. 1) :

$$\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

1.2.1 Propriétés

On se sert le plus souvent des propriétés de la transformée de Laplace plutôt que de sa définition.

Linéarité

$$\mathscr{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda F(p) + \mu G(p)$$

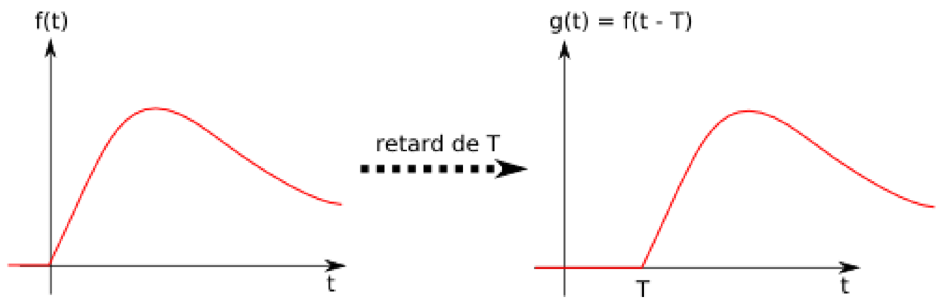


Fig. 2 – Retard d'un signal

Théorème du retard (voir Fig. 2)

$$\mathscr{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau p}F(p)$$

t	p
Échelon de Heaviside	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
Rampe unitaire $tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$e_{-at}u(t), a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p+a}$

FIG. 3 – Tableau des transformées de Laplace usuelles

Dérivation / intégration On suppose que la condition initiale $f(t = 0)$ est nulle.

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(t = 0)$$

Si l'on suppose que les conditions initiales sont nulles, alors la dérivation et l'intégration dans l'espace de la variable p se ramènent à une multiplication ou à une division par p.

Propriété de convolution

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = F(p)G(p)$$

Théorème de la valeur initiale / finale

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} f(t) & = & \lim\limits_{p\to+\infty} pF(p) \\ \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) & = & \lim\limits_{p\to 0} pF(p) \end{cases}$$

1.3 Tableau des transformées de Laplace usuelles

Exemple $f(t) = \sin(\omega t)u(t)$ *:* On a $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}u(t)\right] \\ &= \frac{1}{2j}(\mathscr{L}[e^{j\omega t}u(t)] - \mathscr{L}[e^{-j\omega t}u(t)]) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

1.4 Transformée de Laplace inverse

$F(p) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(t)$. La méthode la plus simple et la plus utilisée est la décomposition en éléments simples.
Exemple $F(p) = \dfrac{2p^2 + 12p + 6}{p(p+2)(p+3)}$ *:* La décomposition en éléments simples permet de retrouver la table 3.

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

On multiplie les deux membres par p, puis on fait $p = 0 : 1 = A$.
On multiplie les deux membres par $p + 2$, puis on fait $p = -2 : 5 = B$
On multiplie les deux membres par $p + 3$, puis on fait $p = -3 : -4 = C$

$$F(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p+2)(p+3)} = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(t) = \left(1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}\right)u(t)$$

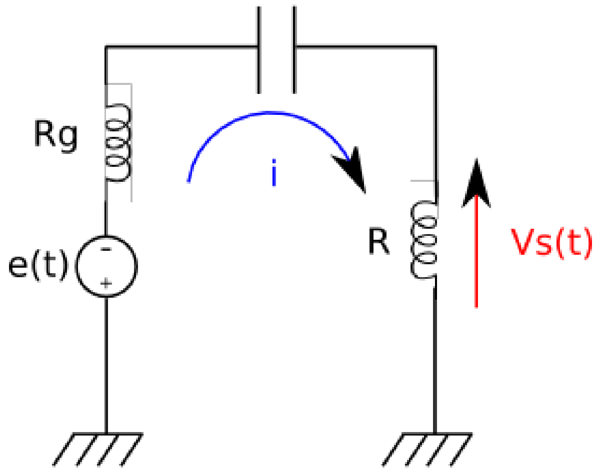


FIG. 4 – Exemple d'utilisation de $\mathscr{L}$

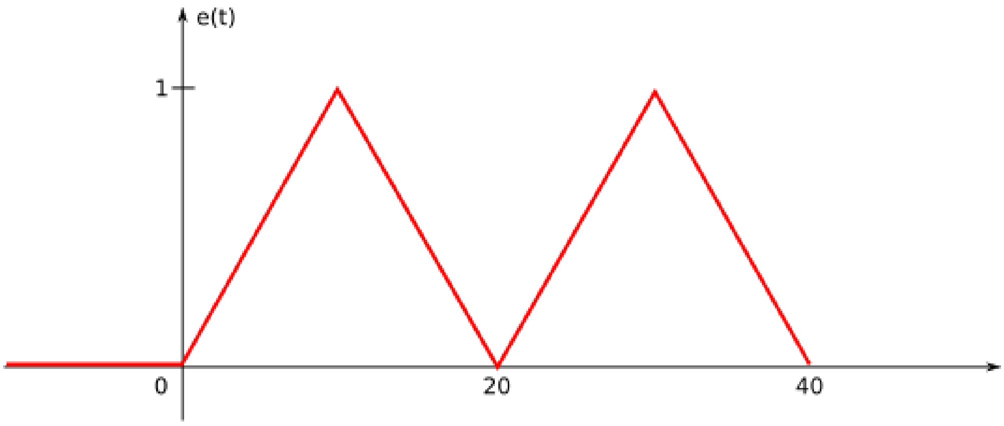


FIG. 5 – Graphe de $e(t)$

Application (voir figure 4) $\mathscr{L}$ permet de calculer la réponse $V_s(t)$ à une sollicitation $e(t)$ donnée. On considère $e(t)$ dans la figure 5

1. Calculer $\mathscr{L}[e(t)] = E(p)$. Ne pas faire appel à la définition mais aux propriétés. On s'intéresse d'abord à une période isolée (montrée dans la figure 6). Calculer $H(p)$

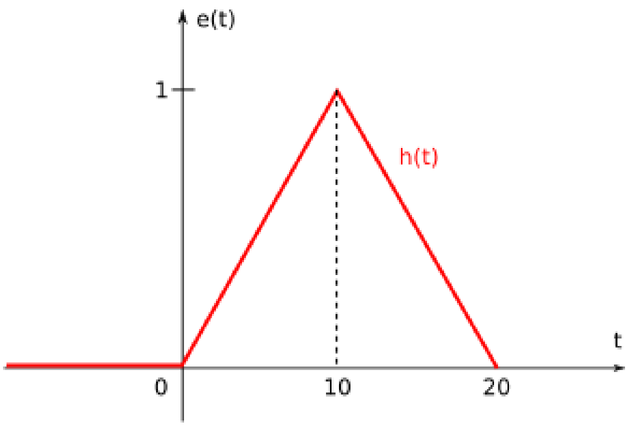


FIG. 6 – Première période isolée

D'après le théorème du retard, $\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p)$

– (voir figure 7) $H_1(p) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{p^2}$.

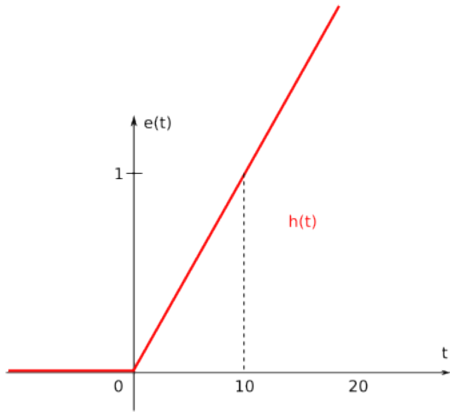


Fig. 7 – $H_1(p)$

– (voir figure 8) $H_2(p) = \dfrac{-2}{10} \times \dfrac{1}{p^2} \times e^{-10p}$.

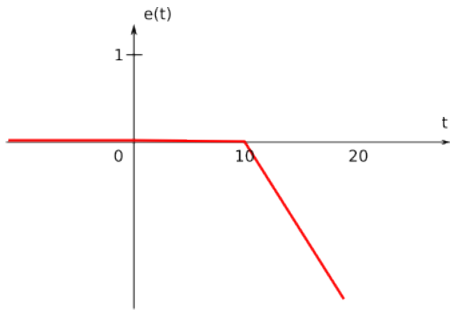


Fig. 8 – $H_2(p)$

– (voir figure 9) $H_3(p) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{p^2} \times e^{-20p}$.

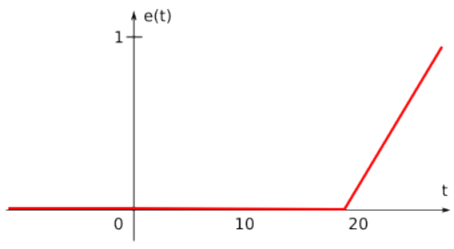


Fig. 9 – $H_3(p)$

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}\right) = \frac{(1 - e^{-10p})^2}{10p^2} \rightarrow E(p)?$$

On a

$$\begin{aligned} e(t) = h(t) + h(t-20) + h(t-40) + \cdots \xrightarrow{\mathscr{L}} E(p) &= H(p) + H(p)e^{-20p} + H(p)e^{-40p} + \cdots \\ &= H(p)(1 + e^{20p} + e^{-40p} + \cdots) \end{aligned}$$

On admet que la série est convergente.

$$E(p) = H(p) - \frac{1}{1-e^{-20p}} = \frac{(1-e^{-20p})^2}{10p^2(1-e^{-10p})(1+e^{-10p})} = \frac{1-e^{-10p}}{10p^2(1+e^{-10p})} = E(p)$$

2. On applique un pont diviseur de tension comme montré dans la figure 11.

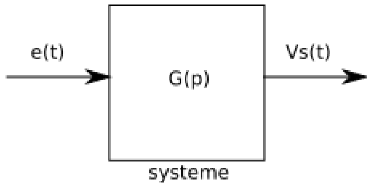


FIG. 10 – Fonction de transfert $G(p)$

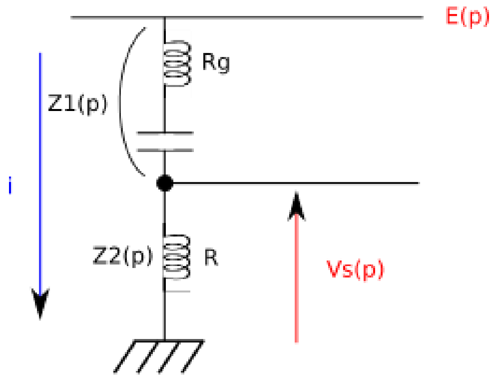


FIG. 11 – Pont diviseur de tension

$$G(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)} = \frac{R}{R + R_g + \frac{1}{C_p}} = \frac{RC_p}{1 + (R + R_g)C_p}$$

2 La transformation en z

C'est l'outil de base pour traiter les signaux échantillonnés (dits encore "discrets" ou numériques).

2.1 Définitions du signal échantillonné

On considère un signal $f(t)$ causal ($f(t) = 0, t \leq 0$). T = période d'échantillonnage.
Remarque : On suppose que l'échantillonnage est périodique.
Échantillons : $f(0), f(T), f(2T), \ldots$.
$f^*(t) = \{f(0), f(T), f(2T), \ldots\}$.
$\mathscr{L}$ pour passer si fréquentiel⇒problème. $\mathscr{L}$ d'une suite de nombre n'est pas définie. D'où la nécessité de faire appel à une deuxième définition qui est moins intuitive mais a le même contenu.

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

Peigne de Dirac $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$. C'est un support ou un emballage de l'information.

Lorsqu'on multiplie un dirac par une constante, la surface de Dirac prend la valeur de cette constante. On a des échantillons $f(0), f(T), \ldots$ à transporter. Pour cela, on utilise un peigne de Dirac.

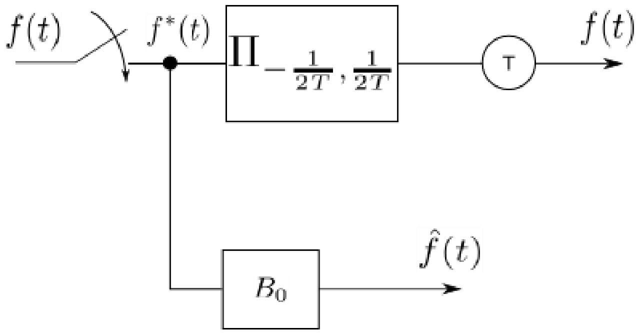
Calcul de $\mathscr{L}$ de $f^*(t)$
- $\mathscr{L}$ est linéaire.
- Théorème du retard : $\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p)$.
- $\mathscr{L}$ élémentaires : $\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f^*(t)] &= F^*(p) \\
&= \mathscr{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathscr{L}[f(nT)\delta(t - nT)] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f(nT)}_{cte} \mathscr{L}[\delta(t - nT)] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{-nTp}\mathscr{L}[\delta(t)] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{-nTp}
\end{aligned}$$

Pour éliminer l'exponentielle, on effectue une changement de variable : $z = e^{Tp}$

$$\mathscr{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$$

Remarque : $F^*(p)$ est souvent appelée "transformée de Laplace échantillonnée de $f(t)$".
Remarque échantillonnage idéal / échantillonnage réel :



2.2 Choix de T

Problème de la reconstitution du signal continu à partir du signal échantillonné. La reconstitution de $f(t)$ à partir de $f^*(t)$ est théoriquement possible seulement si T a été bien choisi. Y'a-t-il perte d'information lors de l'échantillonage ? Comment mesurer la quantité d'information contenue dans un signal ? On utilise le spectre de Fourier.

Transformée de Fourier presqu'équivalente à la transformée de Laplace : $f(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\nu)$. $F(\nu)$ est une fonction complexe d'un argument réel (la fréquence). Spectre de Fourier $= |F(\nu)|$ en fonction de ν. Le spectre de Fourier mesure la quantité d'information contenue dans le signal $f(t)$.

On admet que $f^*(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F^*(\nu) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$.

Ainsi, lorsqu'on échantillonne un signal, on recopie l'information une infinité de fois le long de l'axe fréquentiel, avec l'écart $\frac{1}{T}$. Pour retrouver l'information, on construit un filtre rectangulaire qui va éliminer les composantes qui ne sont pas centrées en 0, garder la composante centrée en 0 et appliquer un gain de T.

La reconstitution de $f(t)$ n'est possible que si lors de l'échantillonnage, les différentes copies du spectre central se sont placées les unes à côté des autres **sans se chevaucher**.

Théorème de Shonnon $T < \dfrac{1}{N}$. Lorsqu'on échantillonne un signal continu à spectre fréquentiel borné $[-N, N]$, on ne perd aucune information si la fréquence d'échantillonnage est supérieure au double de la plus haute fréquence contenue dans le signal continu.

Reconstitution approchée du signal continu à partir du signal échantillonné.

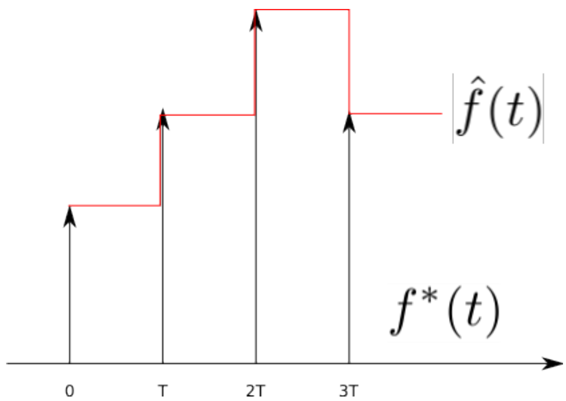


FIG. 12 – Reconstitution approchée de $f(t)$

B_0 est défini dans le domaine temporel. Étudions le comportement de B_0 dans le domaine fréquentiel.

$$B_0(p) = \frac{\mathscr{L}(sortie)}{\mathscr{L}(entrée)}$$

On a

$$\begin{aligned} f_{B_0}(t) &= f(0) \quad 0 \leq t < T \\ f_{B_0}(t) &= f(T) \quad T \leq t < 2T \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'ensemble de ces expression peut être remplacé par

$$f_{B_0}(t) = f(0)[u(t) - u(t-T)] + f(T)[u(t-T) - u(t-2T)] + \cdots \text{ avec } u(t) \text{ signal en échelon}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f_{B_0}(t)] &= f(0)\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-Tp}\right] + f(T)\left[\frac{1}{p}e^{-Tp} - \frac{1}{p}e^{-2Tp}\right] + \cdots \\ &= \frac{1-e^{-Tp}}{p}\left(f(0) + f(T)e^{-Tp} + f(2T)e^{-2Tp}\right) \\ &= \frac{1-e^{-Tp}}{p}\sum_{i=0}^{n} f(nT)e^{-nTp} \end{aligned}$$

Or $F^*(p) = \mathscr{L}[f^*(t)] = \sum_{i=0}^{n} f(nT)e^{-nTp}$, donc

$$B_0(p) = \frac{1-e^{-Tp}}{p}$$

On construit le diagramme de Bode :

$$\begin{aligned} |B_0(j\omega)| &= \left|\frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega}\right| \\ &= \left|\frac{1-\cos(T\omega) + j\sin(T\omega)}{j\omega}\right| \\ &= \frac{\sqrt{(1-\cos(T\omega))^2 + \sin^2(T\omega)}}{\omega} \\ &= \frac{\sqrt{2-2\cos(T\omega)}}{\omega} \end{aligned}$$

2.3 Calcul pratique d'une transformée en z

On a

$$\mathscr{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$$

si l'on considère l'obtention de $\mathscr{F}(z)$ à partir du signal continu. Si l'on part du signal échantillonné par la transformée de Laplace,

$$\mathscr{F}(z) = \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } F(p)} \textit{résidus de} \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}}$$

En pratique, $F(p)$ est une fraction rationnelle en p. On fait la liste des pôles de $F(p)$:
– les pôles simples p_i.
– les pôles multiples p_i d'ordre n.
Exemple : $F(p) = \dfrac{(3p+7)^2}{(2p-5)(5p+12)^3}$.

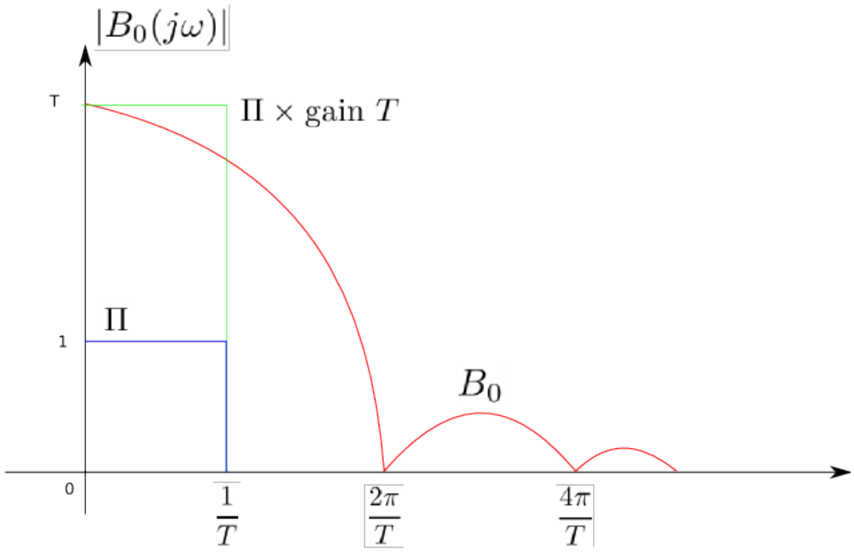


FIG. 13 – Diagramme de Bode de B_0

- $-\frac{7}{3}$ est un zéro d'ordre 2.
- $\frac{5}{2}$ est un pôle simple.
- $-\frac{12}{5}$ est un pôle d'ordre 3.

$$\mathscr{F}(z) = \sum r_i$$

où r_i est un résidu associé au pôle p_i.

Résidu d'un pôle simple

$$r_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} = \frac{1}{1 - e^{Tp_i}z^{-1}}$$

en posant $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ et $D'(p) = \frac{dD(p)}{dp}$.

Résidu d'un pôle p_i multiple d'ordre n

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[(p-p_i)^n \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}}\right]\right)_{p=p_i}$$

Exemple $f(t) = u(t)$:

Méthode 1

$$\mathscr{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n$$

On admet que la série est convergente. Donc

$$\mathscr{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Méthode 2 On a $F(p) = \frac{1}{p}$, donc un seul pôle simple : $p_1 = 0$.

$$\mathscr{F}(z) = r_1 = \frac{N(p_i)}{D'(p_1)}\frac{1}{1-e^{Tp_1}z^{-1}}$$

Ici, comme $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, alors $N(p) = 1$ et $D(p) = p \Rightarrow D'(p) = 1$. Donc

$$\mathscr{F}(z) = \frac{1}{1 - e^{Tp_1}z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Exemple $f(t) = tu(t)$ *:*

Méthode 1

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nTu(nT)z^{-n} \\
&= T\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{-n} \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}
\end{aligned}$$

Méthode 2 On a $F(p) = \dfrac{1}{p^2}$. On a un pôle d'ordre 2 : $p_1 = 0$.

$$r_i = \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dp}\left[(p-0)^2 \frac{\frac{1}{p^2}}{1 - e^{Tp}z^{-1}}\right]\right)_{p=0} = \frac{e^{Tp}Tz^{-1}}{(1 - e^{Tp}z^{-1})^2} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Exemple $f(t)$ *:* $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$ *:* Calculer $\mathscr{F}(z)$.

$F(p)$ a deux pôles : $p_1 = -a$ et $p_2 = -b$. Donc $\mathscr{F}(z) = \sum$ résidus $= r_1 + r_2$. r_1 et r_2 sont associés à des pôles simples :

$$r_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{Tp_i}z^{-1}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} &= \frac{N(p)}{D(p)} \\
D(p) = (p+a)(p+b) &\Rightarrow D'(p) = 2p + a + b \\
r_1 &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} \\
r_2 &= \frac{1}{a-b}\frac{1}{1 - e^{-bT}z^{-1}} \\
Z\left\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right\} &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}}\right]
\end{aligned}$$

2.4 Calcul indirect d'une transformée en z

On dispose de résultats de fonctions élémentaires :

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

2 cas de calculs indirects :

1. Décomposition en éléments simples de $F(p)$:

   Exemple $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$ *:*

   On a $F(p) = \dfrac{A}{p+a} + \dfrac{B}{p+b}$.

– En multipliant les deux membres par $p+a$ puis $p=-a$, alors on a $\dfrac{1}{-a+b}=A$.
– En multipliant les deux membres par $p+b$ puis $p=-b$, alors on a $\dfrac{1}{-b+a}=B$.

Donc $F(p)=\dfrac{1}{-a+b}\dfrac{1}{p+a}+\dfrac{1}{-b+a}\dfrac{1}{p+b}$. On aa donc

$$\mathscr{F}(z)=\frac{1}{-a+b}\frac{z}{z-e^{-aT}}+\frac{1}{-b+a}\frac{z}{z-e^{-bT}}$$

2. Fonctions trigonométriques :
Exemple $f(t)=\sin(\omega t)u(t)$ *:* Essayons d'utiliser la méthode directe :

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\\
Z\{\sin(\omega t)u(t)\} &= Z\left\{\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right\}\\
&= \frac{1}{2j}\left[Z\{e^{j\omega t}u(t)\}-Z\{e^{-j\omega t}u(t)\}\right]\\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right]\\
&= \frac{z}{2j}\left[\frac{z-e^{-j\omega T}-z+e^{j\omega T}}{z^2-z(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})+1}\right]\\
&= \frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}
\end{aligned}$$

Au final, il y a 4 méthodes de résolution de Z :
- 2 méthodes directes :
  - $t\to z$ voie 1.
  - $p\to z$ voie 2.
- 2 méthodes indirectes :
  - décomposition en éléments simples de $F(p)$.
  - déconposition des fonctions trigonométriques (Euler).

2.5 Principales propriétés de la transformation en z

2.5.1 Linéarité

$$Z\{\lambda f(t)+\mu g(t)\}=\lambda\mathscr{F}(z)+\mu\mathscr{G}(z),\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$$

2.5.2 Théorème du retard

$$Z\{f(t-kT)\}=z^{-k}\mathscr{F}(z)$$

2.5.3 Convolution

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}f(kT)g((n-k)T) &= f(kT)*g(kT)\\
Z\{f(kT)*g(kT)\} &= \mathscr{F}(z)\mathscr{G}(z)
\end{aligned}$$

2.5.4 Théorème de la valeur initiale / Théorème de la valeur finale

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0} f(kT) &= \lim_{z\to+\infty} \mathscr{F}(z)\\ \lim_{k\to+\infty} f(kT) &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}\mathscr{F}(z)\right]\end{aligned}$$

Définition : $Z^{-1}[\mathscr{F}(z)] = \{f(kT)\}_{k=0}^{+\infty}$. La transformée inverse n'est qu'une collection d'échantillons. **On ne retrouve pas le signal continu d'origine :** $Z^{-1}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}\right] \neq tu(t)(= \{kTu(kT)\}_{k=0}^{+\infty})$
Si l'on prend deux fonction différentes qui prennent la même valeurs aux points d'échantillonage, alors

$$Z\{f(t)\} = Z\{g(t)\} \Rightarrow \mathscr{F}(z) = \mathscr{G}(z) \Rightarrow Z^{-1}[\mathscr{F}(z)] = Z^{-1}[\mathscr{G}(z)] = \{f(kT)\} = \{g(kT)\}$$

Il existe une infinité de fonctions continues du temps qui possèdent la même transformée en z. Toutes ces fonctions continues prennent les mêmes valeurs aux instants $t = kT$.
Il existe 4 méthodes pour calculer Z^{-1} :

- 2 méthodes analytiques :résultat sous la forme $f(kT) =$ formule en fonction de k et T.
- 2 méthodes numériques : résultat sous la forme $f(0) = \dots, f(T) = \dots, \dots$.

1. Méthode des résidus :

$$f(kT) = \sum \text{ résidus de } \mathscr{F}(z).z^{n-1}$$

Fonction auxiliaire : $\mathscr{G}(z) = \mathscr{F}(z)z^{n-1}$.
Hypothèse : la fonction auxiliaire $\mathscr{G}(z)$ ne possède que des pôles simples, soit z_i. On pose $\mathscr{G}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow f(kT) = \sum_i \frac{N(z_i)}{D'(z_i)}$ en posant $D'(z) = \frac{dD(z)}{dz}$.
Exemple : Soit $\mathscr{F}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}$. Calculer sa transformée en z inverse par la méthode des résidus.
On a $\mathscr{G}(z) = \frac{z^n(z+1)}{(z-a)(z-b)} = \frac{N(z)}{D(z)}$. On a 2 pôles simples : $z_1 = a$ et $z_2 = b$. Donc $D(z) = (z-a)(z-b) \Rightarrow D'(z) = 2z - a - b$.

$$f(nT) = \sum_i \frac{N(z_i)}{D'(z_i)} = \frac{a+1}{a-b}a^n + \frac{b+1}{b-a}b^n$$

Donc au final,

$$Z^{-1}\left\{\frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}\right\} = \left\{\frac{a+1}{a-b}a^n + \frac{b+1}{b-a}b^n\right\}_{n=0}^{+\infty}$$

2. Développement en fractions élémentaires : s'inspire de la méthode de décomposition en éléments simples pour le calcul d'une transformée de Laplace inverse.
Rappel : $F(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \cdots \xrightarrow[\mathscr{L}^{-1}]{} f(t) = Ae^{-at}u(t) + Be^{-bt}u(t) + \cdots$.
On peut être tenté de décomposer $\mathscr{F}(z)$ en éléments simples, mais ensuite on est bloqué car $\frac{1}{z+a}$ n'est pas une transformée en z élémentaire. On procède donc en 2 phases :
   (a) On considère une fonction auxiliaire : $\mathscr{G}(z) = \frac{\mathscr{F}(z)}{z}$ et on décompose $\mathscr{G}(z)$ en éléments simples :

$$\mathscr{G}(z) = \frac{A}{z+a} + \frac{B}{z+b} + \cdots = \frac{\mathscr{F}(z)}{z}$$

   (b) On multiplie les deux membres par z :

$$\mathscr{F}(z) = \frac{Az}{z+a} + \frac{Bz}{z+b} + \cdots$$

Exemple $\mathscr{F}(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z-0,5)}$ *:* Calculer $Z^{-1}[\mathscr{F}(z)]$ par la méthode 2.

(a) On pose $\mathscr{G}(z) = \dfrac{\mathscr{F}(z)}{z} = \dfrac{2}{(z-1)(z-0,5)} = \dfrac{4}{z-1} - \dfrac{4}{z-0,5}$

(b) On multiplie par z les deux membres : $\mathscr{F}(z) = \frac{4z}{z-1} - \frac{4z}{z-0,5}$. Posons $0,5 = e^{-aT}$. Au final, on a

$$f(nT) = 4 \times 1 - 4e^{-anT} = 4(1-0,5^n) \Rightarrow Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-1)(z-0,5)}\right\} = \{4(1-0,5^n)\}_{n=0}^{+\infty}$$

3. Division selon les puissances coirssantes de z^{-1} : l'id'ee est de reprendre la d'efinition de la transformée en z : $\mathscr{F}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F(nT)z^{-n}$. On s'intéresse au problème inverse en considérant $f(nT)$ comme cœfficients de z^{-n} si on exprime $\mathscr{F}(z)$ comme un polynôme à varialbes z^{-1}. Le développement polynômial de $\mathscr{F}(z)$ fourni par division polynômiale.

Exemple $\mathscr{F}(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z^2-0,4z+0,1)}$ *:* Déterminer la transformée en z inverse de $\mathscr{F}(z)$.

On a

$$\mathscr{F}(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2-0,4z+0,1)} = \frac{z^{-1}}{1-1,4z^{-1}+0,5z^{-2}-0,1z^{-3}}$$

$$\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1-1,4z^{-1}+0,5z^{-2}-0,1z^{-3} \\ \cline{2-2}
1,4z^{-2}-0,5z^{-3}+0,1z^{-4} & z^{-1}+1,4z^{-2}+1,46z^{-3}+1,44z^{-4} \\
1,46z^{-3}-0,6z^{-4}+0,14z^{-5} & \\
1,44z^{-4}-0,59z^{-5}+0,146z^{-6} &
\end{array}$$

Le quotient peut être représenté comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$. Donc $f(0) = 0$, $f(T) = 1$, $f(2T) = 1,4$, $f(3T) = 1,46$, $f(4T) = 1,44\ldots$

On aurait pu retourver ce résultat avec le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} f(nT) &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}\mathscr{F}(z)\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}\frac{z^2}{(z-1)(z^2-0,4z+0,1)}\right] \\
&= \frac{1}{1-0,4+0,1} \approx 1,42857
\end{aligned}$$

Avantage : méthode générale, pas de condition pour son application. Inconvénient : risque d'accumulation des erreurs d'arrondi.

4. Équation aux différences : d'un point de vue théorique, l'équation aux différences est la transposition en discret de l'équation différentielle en continu. On s'appuie sur le théorème du retard : $Z[f(t-kT)] = z^{-k}\mathscr{F}(z), k > 0 \Rightarrow Z^{-1}[z^{-k}\mathscr{F}(z)] = \{[f(t-kT)]_{t=nT}\}$.

Exemple $\dfrac{X(z)}{Y(z)} = \dfrac{0,3z}{z-0,2}$ *:* On cherche la transformée en z inverse de $X(z)$. On suppose connues la transposée en z inverse de $Y(z)$, c'est-à-dire $\{y(nT)\} = \{y_n\}$. On divise en haut et en bas par la plus grande puissance de z pour n'avoir que des puissance négatives ou nulles.

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{0,3}{1-0,2z^{-1}} \Rightarrow X(z) - 0,2z^{-1}X(z) = 0,3Y(z)$$

On égale les transformées en z inverses des deux membres : c'est l'équation aux différences.

$$Z^{-1}[X(z)] = \{x(nT)\} = \{x_n\} \Rightarrow x_n - 0,2x_{n-1} = 0,3y_n$$

On a besoin d'une condition initiale $x_{-1} = 0$ et on suppose connus $y_n = 1, \forall n$.

n	$0,2x_{n-1}$	$0,3y_n$	x_n
0	0	0,3	0,3
1	0,06	0,3	0,36
2	0,072	0,3	0,372

Exemple $f(t) = (2 + 5t + 3t^2)u(t)$ *:* Trouver $\mathscr{F}(z)$.

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2}$. En dérivant par rapport à z, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-n^2)z^{-n-1} = \frac{(z-1) - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z-1}{(z-1)^3}$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{-n} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$. Au final, on a

$$\mathscr{F}(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{5Tz}{(z-1)^2} + \frac{3T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$$

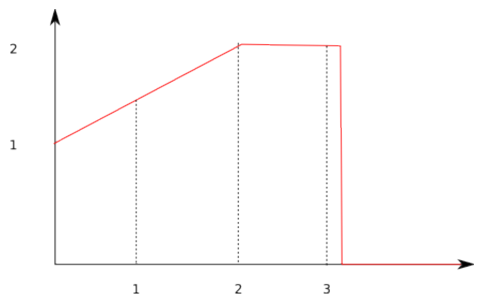


FIG. 14 – $x(t)$

Exemple Figure 14 : En prenant $t = 0,5s$, calculer $X(z)$.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)z^{-n} = 1 + 1,25z^{-1}1,5z^{-2} + 1,75z^{-3} + 2z^{-4} + 2z^{-5} + 2z^{-6}$$

Exemple $X(z) = \frac{1}{z-1}$ *:* Calculer la transformée en z inverse.

$$X(z) = z^{-1}\frac{z}{z-1} \Rightarrow x(nT) = \{f((n-1)T)\} \Rightarrow Z^{-1}[X(z)] = \{0, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$$