Corrigé du partiel 1

Exercice 1 (3 points)

1. Soit $(u_n) = \left(\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \times \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}\\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4 > 1\end{aligned}$$

Donc, via la règle de D'Alembert, la série $\sum u_n$ diverge.

2. $\left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument donc converge.

Exercice 2 (5 points)

Via les transformations $C_3 \longleftarrow C_3 + C_1$ puis $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, on a $P_A = (2-X)^3$.

Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2\}$ avec $m(2) = 3$.

$$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\quad (A-2I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\quad \left|\begin{array}{c} x+4y-z=0\\ -x-y+z=0\\ 3y=0\end{array}\right.\right\}$$

soit encore $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

Ainsi $\dim(E_2) = 1 \neq m(2)$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $\left\{\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1\end{array}\right.$, on a $P_B(X) = X^2(1-X)$.

Donc P_B est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0, 1\}$ avec $m(0) = 2$.

$$E_0 = \mathrm{Ker}(B) = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left|\begin{array}{c} 2x-y-z=0\\ 2x-y-z=0\\ x-y=0\end{array}\right.\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi $\dim(E_0) = 1 \neq m(0)$ donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 (4 points)

Via les transformations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on a $P_A = (2-X)(1-X)^2$.

Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$ avec $m(1) = 2$ et $m(2) = 1$.

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I) = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\quad (A-I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\quad \left|\begin{array}{c} \alpha(y+z)=0\\ -x-z=0\\ x+z=0\end{array}\right.\right\}$$

soit encore $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \middle| \begin{array}{c} \alpha(y+z) = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$

Si $\alpha = 0$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x + z = 0 \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc $\dim(E_1) = 2 = m(1)$.

D'autre part comme $m(2) = 1$, $\dim(E_2) = 1$.

Ainsi B est diagonalisable.

Si $\alpha \neq 0$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \middle| \begin{array}{c} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc $\dim(E_1) = 1 \neq m(1)$ d'où B n'est pas diagonalisable.

Exercice 4 (3 points)

1. Notons $\mathscr{B} = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (4 points)

Via les transformations $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$ puis $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, on a $P_A = (1 - X)(X^2 - 2(a+1)X + a^2 + 2a + 1)$ soit encore $P_A = (1 - X)\big(X - (a+1)\big)^2$

Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, $P_A = (1 - X)^3$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ avec $m(1) = 3$.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \middle| \begin{array}{c} x + z = 0 \\ -x - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc $\dim(E_1) = 2 \neq m(1)$ donc A n'est pas diagonalisable.

Si $a \neq 0$, $P_A = (1 - X)\big(X - (a+1)\big)^2$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, a+1\}$ avec $m(a+1) = 2$.

$$E_{a+1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \middle| \begin{array}{c} (1-a)x + (1-a)z = 0 \\ -x - ay + (a-1)z = 0 \\ (a-1)x + (a-1)z = 0 \end{array} \right\}$$

Deux cas sont alors à envisager :

- Si $a = 1$, $E_{a+1} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim(E_{a+1}) = 2 = m(a+1)$ et d'autre part $\dim E_1 = 1$ car $m(1) = 1$ donc A est diagonalisable.

- Si $a \neq 1$, $E_{a+1} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim(E_{a+1}) = 1 \neq m(a+1)$ d'où A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6 (2 points)

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$. Alors il existe une suite réelle (x_n) *non nulle* telle que $f\big((x_n)\big) = \lambda(x_n)$ i.e. telle que $(y_n) = \lambda(x_n)$.

Donc par définition de (y_n), on a $\begin{cases} 0 = \lambda x_0 \quad (1) \\ x_0 = \lambda x_1 \quad (2) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \quad (n) \\ \vdots \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} 0 = \lambda x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$

Si $\lambda = 0$, alors via l'équation (2), $x_0 = 0$ donc via les équations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 0$ donc (x_n) est la suite nulle d'où une contradiction avec l'hypothèse.

Si $\lambda \neq 0$, alors via l'équation (1), $x_0 = 0$ et via les équations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 0$ donc à nouveau (x_n) est la suite nulle d'où une contradiction avec l'hypothèse.

Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset$.