Les équations de Maxwell

- Introduction
- Equations locales de l'électromagnétisme
- Equations aux potentiels
- Propagations des ondes électromagnétiques dans un milieu quelconque

Daniela Cirigliano-Peschard & Assia Zellagui

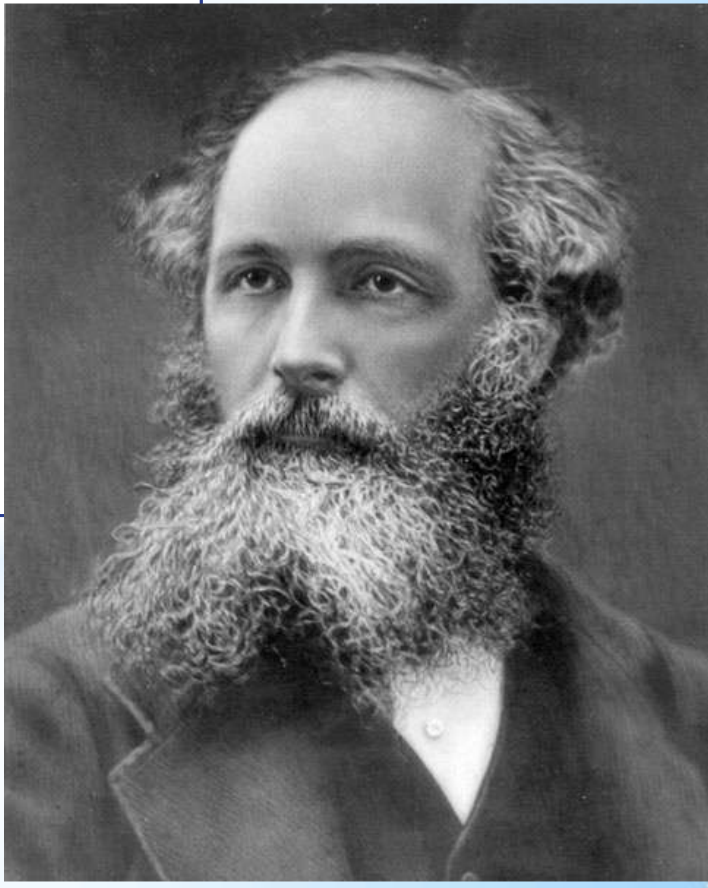
James Clerk Maxwell

Physicien Écossais

(1831-1879)

<u>Reconnu pour:</u>

- Unification des théorèmes de Gauss et Ampère, et la loi de Faraday, pour créer un théorie complète d'électromagnétisme.
- Découverte de l'induction électrique
- Reconnaissance que la lumière est un onde électromagnétique
- Théorie cinétique des gaz
- Photographie couleur



*Introduction

En électromagnétisme les champs variables s'induisent mutuellement.

Le couplage des champs électromagnétiques : une variation temporelle de B provoque une modification du champ E.

Les bases de l'électromagnétisme sont regroupées dans un ensemble d'équations appelées <u>équations de Maxwell</u>, qui s'appuient en partie sur les résultats de l'électrostatique et de la magnétostatique auxquels il faut ajouter deux effets supplémentaires qui n'existent qu'en régime variable :

- La loi de l'induction électromagnétique de Faraday-Maxwell,
- Un courant de déplacement qui vient compléter la loi d'Ampère

<u>Objectif</u>: généraliser toutes les équations aux problèmes dépendant du temps

*Rappels

- Equations de l'électrostatique
- Equations de la magnétostatique
- Régimes variables : phénomènes d'induction

1) Electrostatique

- Relation entre champ et source (charges)

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Théorème de Gauss

$$\iiint_{\tau} \overrightarrow{div}(\vec{E}) d\tau = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau} \rho \, d\tau$$

- Propriété du champ: $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0$

$$\iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

2) Magnétostatique

- Relation entre champ et source (courants)

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{rot}(A) \quad \rightarrow \; \Delta A + \mu_0 \vec{J} = 0$$

Théorème d'Ampère

$$\iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}).d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} = \oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$$

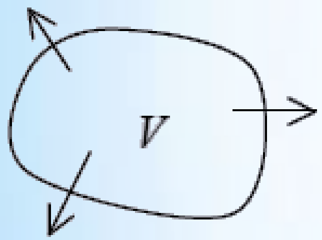
- Propriété du champ: $\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0$

$$\iiint_\tau \overrightarrow{div}(\vec{B}) d\tau = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

3) Régimes variables

- <u>Equation de continuité</u> : traduit la conservation de la charge

Soit une charge Q contenue dans un volume τ délimité par une surface S



$$Q = \iiint_{\tau} \rho \, d\tau$$

S'il y a variation de la charge en fonction du temps on écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -\oiint_{S} \vec{J}.d\vec{S} = \iiint_{\tau} \overrightarrow{div}(\vec{J}) \, d\tau$$

Equation de continuité $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{div}(\vec{J}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

- <u>Induction magnétique</u> : traduit la variation du champ magnétique avec l'apparition d'un champ magnétique

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}).d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$ *Flux magnétique*

$$\Rightarrow \quad \boxed{e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

- Un problème s'impose:

L'équation d' Ampère statique $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J}$ impose $\boxed{\overrightarrow{div}(\vec{J}) = 0}$

Cette équation n'est compatible avec la conservation de la charge électrique qu'en *régime permanent*.

$$\overrightarrow{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{div}(\vec{J}) \neq 0}$$

il y a incompatibilité entre les deux relations !!!

Maxwell introduit **le courant de déplacement**

étendre aux régimes variables dans le temps le théorème d'Ampère (valide que dans la magnétostatique)

Quelle relation changer ?

Renoncer à la conservation de la charge c'est renoncer à la conservation des particules ou renoncer à la notion de charge élémentaire indépendante de tout référentiel

- <u>La solution</u>:

Maxwell proposa de modifier l'équation d'Ampère en ajoutant un terme $\vec{J}_d$ qui porte le nom de densité de courant de déplacement, sous la forme

$$\vec{J} = \mu_0 \, (\vec{J} + \vec{J}_d)$$

de façon à rendre compte de la conservation de la charge électrique

On a par ailleurs $\overrightarrow{div}(\vec{J}) + \overrightarrow{div}(\vec{J}_d) = 0$ puisque $\overrightarrow{div}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0$ ce qui mène à la condition :

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Où selon l'équation de Gauss :

$$\overrightarrow{div}(\vec{J}_d) = \varepsilon_0 \, \overrightarrow{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Cette forme proposée par Maxwell présente l'avantage de symétriser les rôles des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

* Les équations de Maxwell

$$\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0$$ Equation de conservation du flux magnétique

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Equation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Equation de Maxwell-Gauss

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Equation de Maxwell-Faraday (phénomène d'induction)

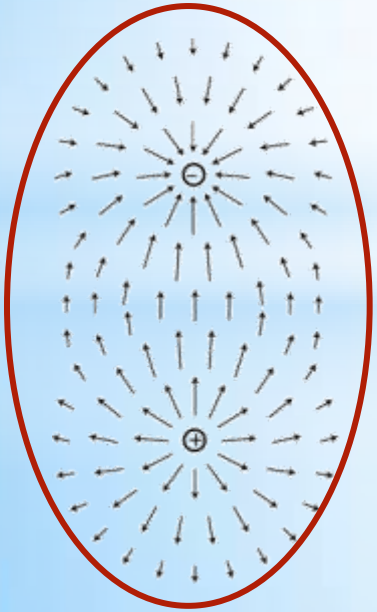
* Equations de Maxwell dans le vide

On appelle vide un milieu ayant les propriétés électriques du vide c'est-à-dire une permittivité ε_0 et une perméabilité magnétique μ_0 . Le vide peut contenir des charges électriques de densité volumique ρ et des courants de densité J

$$\boxed{\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0}$$

<u>1- Conservation du flux magnétique</u>: énonce que seuls les courants sont sources de champ magnétique.

Il n'existe aucun évidence pour les charges magnétiques isolées ou aussi appelés monopoles magnétiques. Ainsi les charges magnétiques se trouvent toujours en paires +/-



Étant donné un volume entourant un point quelconque. La manque des charges magnétiques isolées implique qu'à l'intérieur du volume il y existe au moins une charge magnétique positive ainsi qu'une charge magnétique négative.

N'importe la grandeur du volume, la charge totale dans son intérieur doit être nulle.

<u>Le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul</u>

1- Conservation du flux magnétique:

Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée est nul :

$$\boxed{\Phi(\vec{B})_{surface\ fermée} = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0}$$

En appliquant le théorème de Gauss- Ostrogradski :

$$\iiint_\tau \overrightarrow{div}(\vec{B})\,d\tau = 0 \quad \rightarrow \quad \text{D'où} \quad \overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0$$

- $\vec{B}$ est a flux conservatif
- Les lignes de $\vec{B}$ sont toujours fermées, d'où la divergence est nulle

2- Equation de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Cette équation relie le champ magnétique
à ses sources et au champ électrique

Il y a une dépendance du champ magnétique par rapport :

- ✓ à la densité des courants de déplacement (au taux de variation du champ électrique
- ✓ à la densité des courants de déplacement (au taux de mouvement des charges)

$$\boxed{\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}).d\vec{S} = \iint_S (\mu_0\vec{J} + \vec{J}_d).d\vec{S} = \left(\mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}\right)}$$

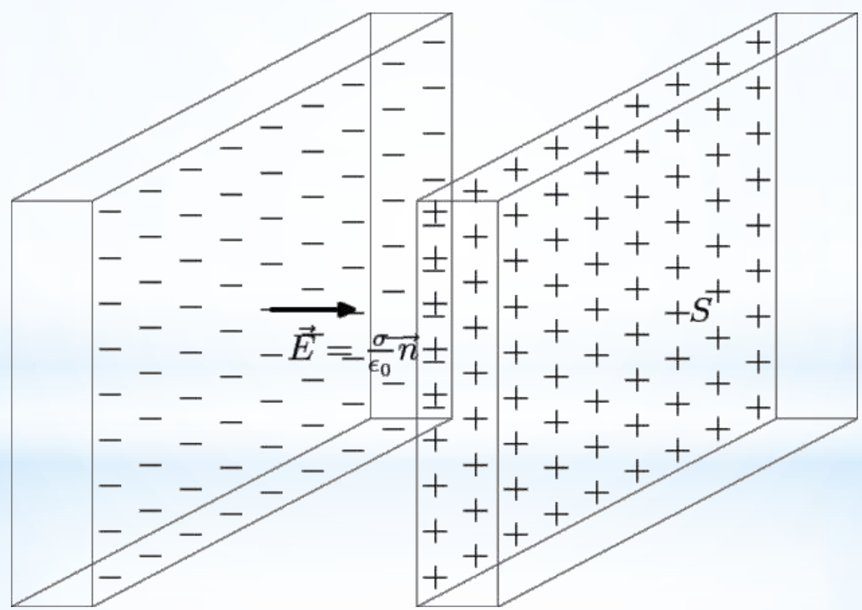
- La circulation de B sur un contour fermé C est égal à fois la somme du courant $I = \iint_S \vec{J}.d\vec{S}$ à travers une surface appuyée sur, et orientée par C et d'un terme supplémentaire, appelé courant de déplacement $I_d = \iint_S \vec{J}_d.d\vec{S}$.

- Il ne s'agit toutefois pas d'un déplacement lié au transport de charges électriques. Ce terme, introduit pour assurer la cohérence avec la loi de conservation de la charge, possède une interprétation physique différente.

- <u>Interprétation physique du courant de déplacement</u>:

Considérons, en régime variable, un circuit électrique avec un condensateur. Dans les fils conducteurs, le courant est du à un mouvement de charges. Entre les armatures, le mouvement de charges n'est plus possible.

Le courant de déplacement prolonge le courant électrique de conduction dans l’espace vide inter-armatures. Sans le courant de déplacement il n'y aurait pas possibilité de circuit électrique comprenant des condensateurs.



On parlera d’**A**pproximation des **E**tats **Q**uasi-**S**tationnaires (AEQS) si ce courant de déplacement peut être néglige.

3- Equation de Maxwell-Gauss

$$\boxed{\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges contenues dans le volume V intérieur à S, divisé par ε_0 (***Théorème de Gauss***, comme en régime permanent)

$$\boxed{\iiint_{\tau} \overrightarrow{div}(\vec{E})\, d\tau = \oiint_{S} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau} \rho\, d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

- Il montre que le champ électrique peut lui diverger à partir de points où se trouvent des charges électriques.
- Le « théorème de Gauss » est valable en régime variable aussi.

4- Equation de Maxwell-Faraday (phénomène d'induction)

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Cette équation exprime la circulation du champ électrique sur un contour fermé, s'oppose à la variation du flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface S appuyée sur le contour C

Par le Théorème de Stokes :

$$\boxed{\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}).d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B}.d\vec{S}\right) = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

- $\vec{E}$ est engendré par la variation de $\vec{B}$ en fonction du temps
- C'est aussi une équation locale de la ***loi de Faraday***
- Elle exprime l'auto-induction

*Les équations de Maxwell

✓ Nous allons considérer les 4 équations de Maxwell permettant de déterminer le champ électromagnétique

$$(E(r,t)\,,B(r,t))$$

en fonction de ses sources, les charges et courants volumiques

$$(\rho\,(r,t)\,,J\,(r,t))$$

- Densité volumique de charges : $Q = \iiint_\tau dQ = \iiint_\tau \rho(x,y,z)\,d\tau$
- Densité surfacique de charges : $Q = \iint_S dQ = \iint_S \sigma(x,y)\,dS$

- Densité de courant volumique : $I = \int di = \iint_S \vec{J}.d\vec{S}$
- Densité de courant surfacique : $\vec{J_s} = \int \vec{J}\,dl$ avec $\boxed{\vec{J} = n\,q\,\vec{v} = \rho(x,y,z)\,\vec{v}}$

Application: La sphère chargée

On a une sphère de rayon R avec une densité de charge volumique $\rho = kr$
Trouver le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère

On utilisera les équations de Maxwell, notamment celle de Maxwell-Gauss

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Par raisons de symétrie, on aura une seule composante: la radiale.
- Dans ce cas, il est raisonnable d'utiliser les coordonnées sphériques.
- L'expression de la divergence en coordonnées sphériques est :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}}$$

$$\overrightarrow{div}(\vec{E})_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{kr}{\varepsilon_0}$$

$$r < R$$

et

$$\overrightarrow{div}(\vec{E})_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = 0$$

$$r > R$$

* Application: La sphère chargée

On résoudre l'équation pour $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{kr}{\varepsilon_0}$ intégrant en r :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{k r^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad r^2 E_r = \frac{k r^4}{4\varepsilon_0} + C$$

Ou la constante d'intégration $C = 0$ pour que à $r = 0$ les deux cotés de l'égalité soient nuls. Ainsi le champ électrique à l'intérieur de la sphère vaut:

$$\vec{E} = \frac{k r^2}{4\varepsilon_0} \qquad r < R$$

À l'extérieur de la sphère, on a

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 E_r = B$$

Où B est une constante d'intégration. Ainsi le champ vaut: $E_r = \frac{B}{r^2} \qquad r > R$

* Application: La sphère chargée

Déterminons la valeur de cette constante B. Pour ceci on utilise l'hypothèse de continuité du champ électrique.

Pour $r = R$ on a

$$\frac{k R^2}{4\varepsilon_0} = \frac{B}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{k R^4}{4\varepsilon_0}$$

Ainsi l'expression totale pour le champ électrique est :

$$\vec{E} = \frac{k}{4\varepsilon_0} \frac{R^4}{r^2} \hat{r} \qquad r > R$$

$$\vec{E} = \frac{k r^2}{4\varepsilon_0} \hat{r} \qquad r < R$$

* Application: Détermination d'une composante du champ magnétique

On connait un champ magnétique duquel on connait deux de ses composantes :

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I \cdot S}{r^3}\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad B_z = 0$$

Calculer la composante manquante B_r

On utilisera les équations de Maxwell, notamment celle de flux de $\vec{B}$

$$\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0$$

- On utilise l'expression de la divergence en coordonnées sphériques
- Et que la composante B_z est nulle :

$$\overrightarrow{div}(\vec{B}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta\, B_\theta)}{\partial\theta} = 0$$

* Application: Détermination d'une composante du champ magnétique

On remplace par B_θ et on dérive :

$$\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\left(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,B_\theta\right)}{\partial\theta}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r^4}\cos\theta$$

Remplaçant dans l'expression de $\overrightarrow{div}(\vec{B})=0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right)=-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r^2}\cos\theta$$

On intègre l'expression pour r

$$r^2 B_r=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad B_r=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r^3}\cos\theta$$

* Application: Le condensateur plan

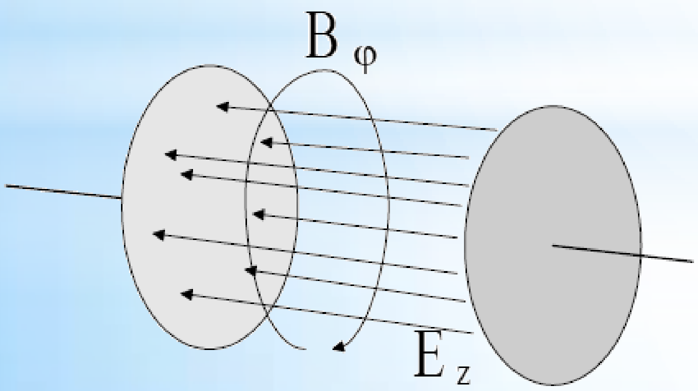
On a un condensateur plane formé par deux disques. En y considérant les effets de bord le champ électrique dans son intérieur peut être approxime par :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\operatorname{sen}\omega t\ \hat{z} \qquad \rho < \rho_0$$

ρ_0= rayon des disques

Trouver le champ magnétique entre les disques du condensateur

On utilisera les équations de Maxwell, notamment celle de Maxwell-Ampère



$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Par symétrie on considère que le champ magnétique seulement peut avoir des composantes dans la coordonnée φ

* Application: Le condensateur plan

Pour calculer le module du champ magnétique on calcule la variation temporelle du champ électrique:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\omega\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\cos\omega t\,\hat{z}$$

- On applique ici la forme intégrale : on calcule le flux de la variation du champ électrique
- Elle sera égale a l'intégrale de surface du rotationnel du champ B
- Par le théorème de Stokes, ceci sera égale a la circulation du champ magnétique

$$\boxed{\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}).d\vec{S} = \varepsilon_0\mu_0 \iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}}$$

$$= \mu_0\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} E_0\omega\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\cos\omega t\,\hat{z}\cdot\rho d\rho d\varphi\hat{z} = \mu_0\varepsilon_0 2\pi\omega E_0\left[\frac{\rho^2}{2}-\left(\frac{\rho^4}{4\rho_0^2}\right)\right]\cos\omega t$$

* Application: Le condensateur plan

On calcule maintenant la circulation du champ magnétique, sur le contour de la surface d'intégration. Par symétrie le champ magnétique sur le contour est Constante donc on obtient:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B\hat{\varphi} \cdot \rho \, d\varphi \, \hat{\varphi} = 2\pi \, \rho \, B$$

En comparant les résultats obtenus:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$$

$$2\pi \, \rho \, B = \mu_0 \varepsilon_0 2\pi \omega E_0 \left[\frac{\rho^2}{2} - \left(\frac{\rho^4}{4\rho_0^2} \right) \right] \cos\omega t$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \left[\frac{\rho}{2} - \left(\frac{\rho^3}{4\rho_0^2} \right) \right] \cos\omega t \, \hat{\varphi}}$$

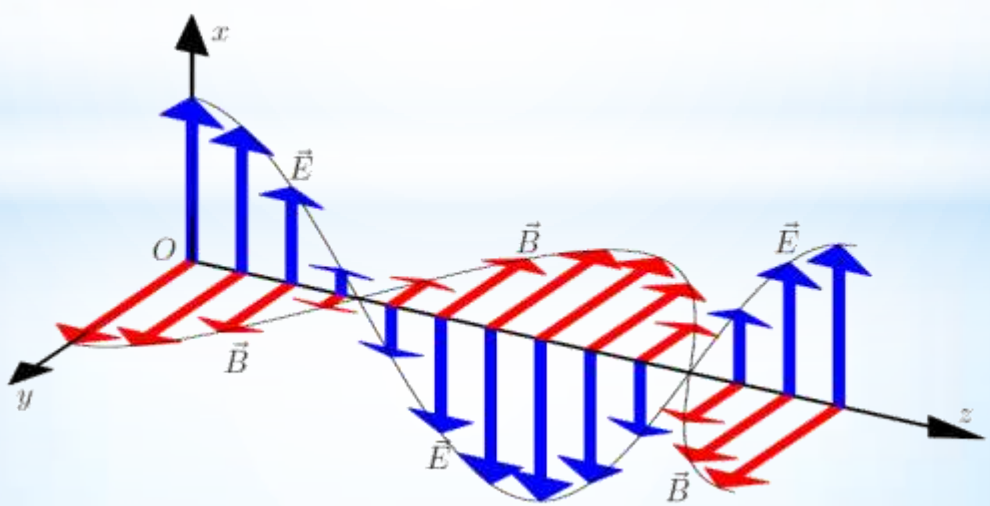
*Le champ électromagnétique

Ce système d'équations est un système couplé: Les champs E et B sont indissociables puisqu'ils apparaissent à deux reprises dans la même équation. On doit donc définir un nouveau type de champ le *champ électromagnétique*

- En régime non variable $\rightarrow$ 2 groupes d'équations $\rightarrow$ $\boldsymbol{E}$, ε_0 ; $\boldsymbol{B}$, μ_0

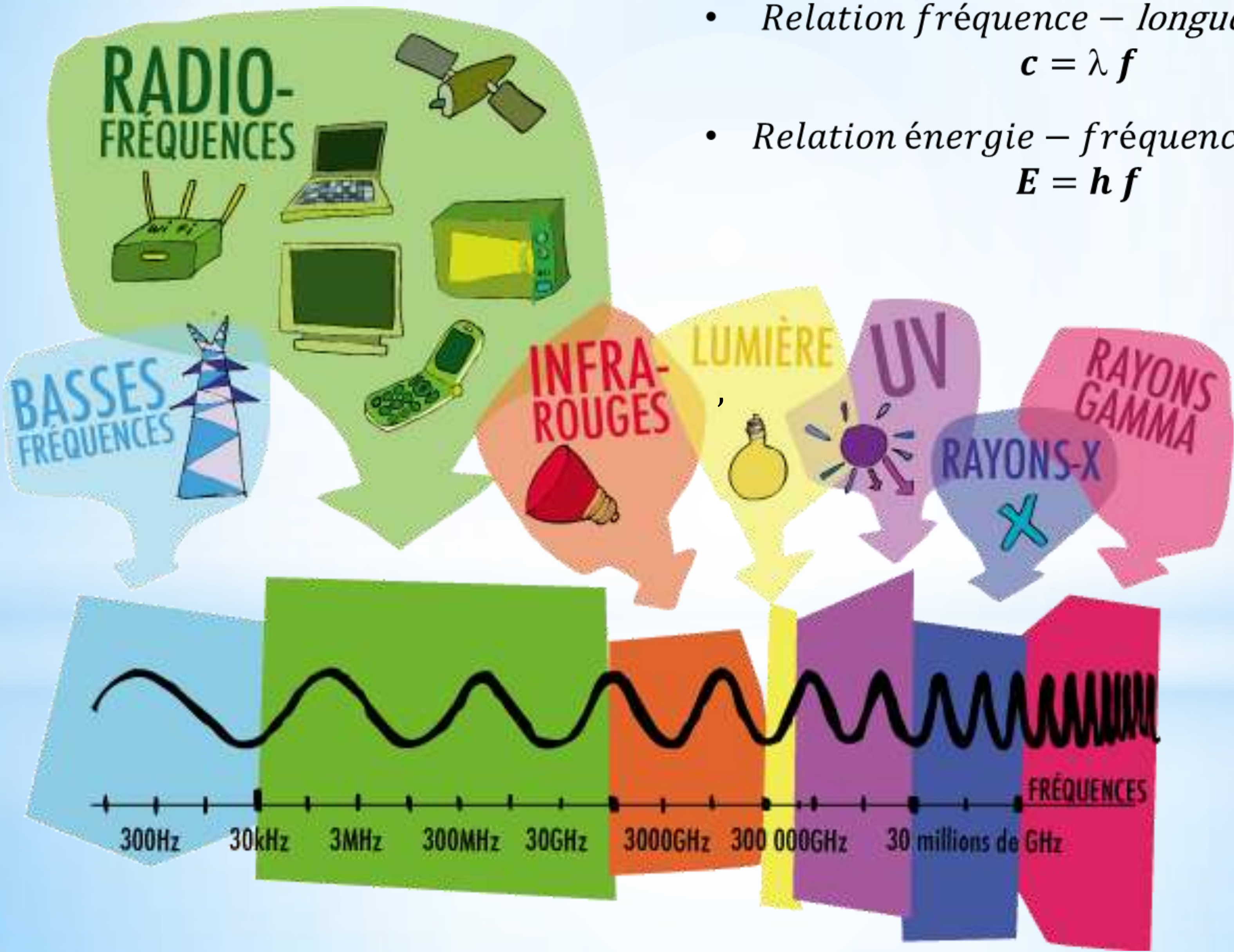
- En régime variable $\rightarrow$ système couplé $(E(r,t)\,,B(r,t))$

➢ Principale conséquence: définition et propagation des ondes électromagnétiques



*Le spectre électromagnétique

- $Relation\ fréquence - longueur\ d'onde$
  $$\boldsymbol{c = \lambda\, f}$$
- $Relation\ énergie - fréquence$
  $$\boldsymbol{E = h\, f}$$



- <u>Célérité caractéristique des équations de Maxwell</u>

Champ électromagnétique dans le vide

$$\boxed{\text{Si} \quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad J = 0}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ce couplage symétrique entre E et B rend compte de la propagation des onde électromagnétiques dans le vide et dans certains milieux matériels

on définit une célérités caractéristiques des équations de Maxwell dans le vide c_0 par la relation :

$$\boxed{c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$\varepsilon_0 = 8{,}854\ 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ permittivité électrique du vide

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\,\frac{H}{m}$ perméabilité magnétique du vide

$\Rightarrow \quad c_0 = 2.99\ 10^{8}\,\frac{m}{s}$

*Le régime Stationnaire

Il s'agit d'un régime dans lequel aucune des grandeurs physiques :

- *Courant* $\vec{I}$
- *Champ magnétique* $\vec{B}$
- *Champ électrique* $\vec{E}$,…

Ne varie en fonction du temps

Théorème d'Ampère stationnaire :

$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu \iint_S \vec{J}.d\vec{S} = \mu\, I \;\rightarrow$ Par le Théorème de Stokes on a :

$$\iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}).d\vec{S} = \mu \iint_S \vec{J}.d\vec{S} \;\rightarrow \iint_S \left(\overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \mu\,\vec{J}\right).d\vec{S} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \mu\,\vec{J} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu\,\vec{J}}$$

*Le régime Variable

Dans ce cas le système physique est traversé par des courants variables en fonction du temps: $J\ (x, y, z, t)$

On a donc $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu\, \vec{J}(x, y, z, t)$

En utilisant l'équation de conservation de la charge $\rightarrow \overrightarrow{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$Si\ \vec{r} = (x, y, z)$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}) + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Les courants: courant normal + courant de déplacement

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(\vec{r}, t)\right) = \mu\, \vec{J}(\vec{r}) + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

- On peut remonter à la valeur de la densité $\rho(\vec{r}, t)$ mesurant le champ $\vec{E}$
- On obtient le courant de déplacement $\varepsilon\ \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$, car comme $\vec{E}$ varie en fonction du temps, il provoque de déplacement des charges électriques

*Théorème de superposition

Si une distribution $(\rho_1, \vec{j}_1)$ produit un champ $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$

Autre distribution $(\rho_2, \vec{j}_2)$ produira un champ $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$

Alors la distribution « addition » $(\lambda.\rho_1 + \mu.\rho_2, \lambda.\vec{j}_1 + \mu.\vec{j}_2)$

produira un champ tel que

$$(\lambda.\vec{E}_1 + \mu.\vec{E}_2, \lambda.\vec{B}_1 + \mu.\vec{B}_2)$$

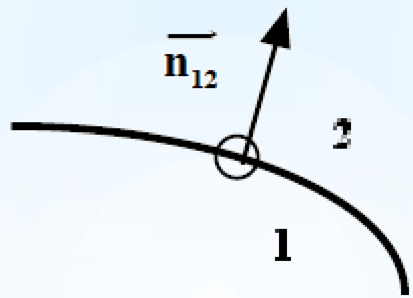
*Relations de passage :
Le problème de la continuité des champs

Le modèle limite des distributions surfaciques de charges et de courants entraîne des discontinuités des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à la traversée de telles distributions.

Les équations de Maxwell permettent de déterminer ces discontinuités :

- Pour une distribution **volumique**: les champs et les potentiels sont définis en tout point de l'espace et ne présentent **aucune discontinuité**.
- Pour une distribution **surfacique: le potentiel est continu partout** dans l'espace; les champs peuvent éventuellement présenter une **discontinuité à la traversée d'une surface chargée** (continu partout ailleurs).
- Pour une distribution **linéique**: les champs et les potentiels présentent des **discontinuités sur les charges** seulement.

Relations de continuité des champs



- Relation de continuité associé à l'équation de Maxwell-Gauss :
  La composante normale du champ $\vec{E}$ subit une <u>discontinuité</u> $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\overrightarrow{E_{n_2}} - \overrightarrow{E_{n_1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

- Relation de continuité associé à l'équation du flux magnétique :
  La composante normale du champ $\vec{B}$ est <u>continue</u>

$$\boxed{\overrightarrow{B_{n_2}} - \overrightarrow{B_{n_1}} = 0}$$

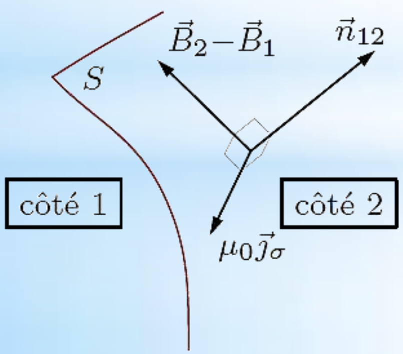
Composantes normales à la surface

Relations de continuité des champs

- Relation de continuité associé à l'équation de Maxwell-Faraday :
  La composante tangentielle du champ $\vec{E}$ est continue

$$\boxed{\overrightarrow{E_{t_2}} - \overrightarrow{E_{t_1}} = 0}$$

- Relation de continuité associé à l'équation de Maxwell-Ampère :
  La composante tangentielle du champ $\vec{B}$ est <u>discontinue</u>



$$\boxed{\overrightarrow{B_{t_2}} - \overrightarrow{B_{t_1}} = \mu_0 \vec{J} \wedge \overrightarrow{n_{12}}}$$

Composantes tangentielles à la surface

<u>Remarque</u>: ces relations de passage restent valables en régime variable

*Equations aux potentiels

Définition des potentiels : comme en régime statique, les équations de structure imposent l'existence de potentiels associes aux champs.

1- Le potentiel scalaire

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$$

2- Le potentiel vecteur

Puisque $\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0$ il existe au mois un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\boldsymbol{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$$

Alors, un système traversé par un courant I crée en tout point de l'espace M

- Un champ magnétique $\vec{B}$
- Un potentiel vecteur $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J}(\vec{r})}{PM} d\tau}$$

où $PM = distance\ entre$ $le\ courant\ et\ M$

$$\vec{A} = [Tesla\ .m]$$

Le potentiel vecteur

Calcul du potentiel $\vec{A}$:

- Déterminer la direction de $\vec{A}$ en utilisant sa colinéarité avec le courant I
- Déterminer les variables de dépendance grâce aux symétries du système
- Simplifier $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$ tenant en compte de sa direction et de ses variables de dépendance
- Calculer les constantes d'intégration par :
    - Conditions aux limites
    - Propriétés de continuité de $\vec{A}$

Le fil infini

Le fil est de symétrie cylindrique et est traversé
Par un courant I vers les $z > 0$

En appliquant la colinéarité du vecteur $\vec{A}$ au vecteur densité de courant on trouve:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 = A_r \\ 0 = A_\theta \\ A_z \end{pmatrix}$$

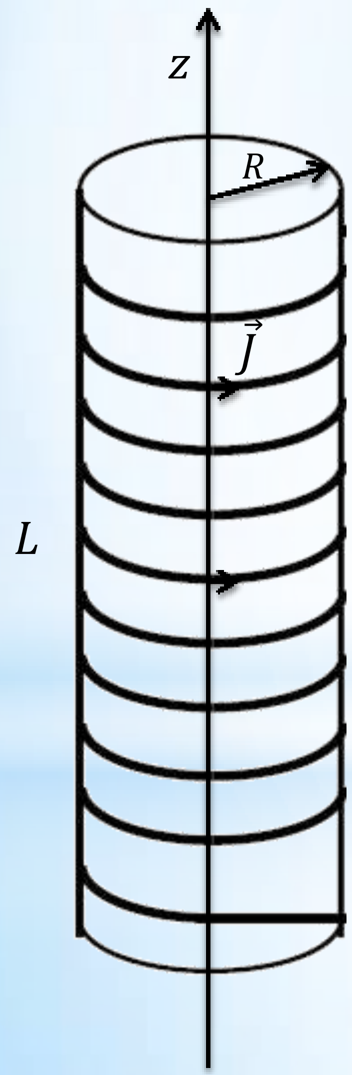
- Le fil étant infini, la composante du potentiel vecteur A_z ne dépend pas de z

- Le système est invariant par rotation d'un angle θ autour de l'axe O_z d'où $\vec{A}$ ne dépendra pas de θ, on obtient donc:

$$\boxed{\vec{A} = A_z\ (r)}$$

Le potentiel vecteur: Application

Le solénoïde



$\vec{A}$ colinéaire à $\vec{J}$ $\rightarrow \vec{A}$ tangentiel : θ

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 = A_r \\ A_\theta \\ 0 = A_z \end{pmatrix}$$

- $L \gg R$ $\rightarrow$ *invariance en z* : ne dépende pas de z

- Le système est invariant par rotation d'un angle θ autour de l'axe O_z d'où $\vec{A}$ ne dépendra pas de θ

$$\boxed{\vec{A} = A_\theta\ (r)}$$

Le potentiel vecteur: # La condition de Lorentz

Unicité du couple solution $(\vec{A}, V)$ tel que ce des grandeurs doivent vérifier :

$$\boxed{\overrightarrow{div}(\vec{A}) + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

- L'introduction de cette condition impose un lien entre le **potentiel scalaire** et le **potentiel vecteur** associés aux champs électrique et magnétique
- Les composantes du potentiel vecteur et le potentiel scalaire forment alors le *quadrivecteur potentiel* $\overrightarrow{A^4} = \left(\frac{V}{c}, A_x, A_y, A_z\right) = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right)$
- Cette condition particulière permet une description totalement relativiste de l'électrodynamique.

Propriétés de $\overrightarrow{A}$

- La circulation du potentiel vecteur $\vec{A}$ est égale au flux de $\vec{B}$ à travers S

$$\oint_C \vec{A}.d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}).d\vec{S}$$

- Conservation du flux de $\vec{A}$ à travers S en *régime stationnaire*

$$\overrightarrow{div}(\vec{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad Flux_S(\vec{A}) = 0$$

A travers d'une surface quelconque fermée le flux de $\vec{A}$ est toujours nul car sa divergence est nulle en toutes circonstances (choix de la condition)

- Continuité du potentiel vecteur $\vec{A}$ à travers une interface: cette continuité est vraie en toutes circonstances.

*Formule générale du champ $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

A l'aide de deux équations locales :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right)}{\partial t} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0}$$

Or, après l'identité $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = 0 \quad \forall f$, on posse :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(f)$$

Si on prend $f = -V$ on doit retrouver la solution pour le régime stationnaire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \text{ puisque } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

On obtient donc,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ainsi l'équation peut d'écrire d'un forme générale :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) + \vec{E}_i}$$

Où $\vec{E}_i$ représente le champ induit : champ qui se crée lors du phénomène d'auto-induction, phénomène obtenue l'orque les deux grandeurs champs magnétique et potentiel vecteur varient en fonction du temps.

*Equations de propagation

- Les exemples de phénomènes de ***propagation*** sont multiples : nous parlons de propagation de la lumière, d'ondes électromagnétiques, du son ou de la "chaleur" sans que ces phénomènes soient de même nature.

- Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide, se réfléchissent, s'absorbent et se transmettent au niveau d'un milieu matériel.

- Les ondes mécaniques (qui comprennent le son -ondes acoustiques-) ont besoin d'un milieu matériel pour se propager.

- La propagation de la "chaleur" est plus complexe :

- c'est une onde électromagnétique dans le cas du rayonnement dit thermique
- une onde mécanique dans le cas de la conduction de la chaleur et
- un transfert de matière dans le cas de la convection

*Equations de propagation

Mathématiquement, deux équations aux dérivées partielles rendent compte du type de phénomène de ***propagation*** :

- **Equation hyperbolique** ou de **D'Alembert :** Cette équation régit la **propagation** *d'ondes électromagnétiques*

$$\boxed{\nabla^2 f - K\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g}$$

- **Equation parabolique** : Cette équation est plus souvent appelée équation de diffusion: elle régit la conduction de la chaleur, la diffusion de matière.

$$\boxed{\nabla^2 f - C\frac{\partial f}{\partial t} = h}$$

Propagation d'ondes électromagnétiques (eq. de D'Alembert)

$$\boxed{\nabla^2 f - K\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g}$$

- $K = constante$
- $g = terme\ souce$ (en fonction des grandeur locales du milieu dans lequel se propage l'onde).
  - Si la propagation se fait dans le vide $g = 0$
  - Pour l'OEM, la source g, dépend des grandeur responsables de la création du couple $(\vec{E}, \vec{B})$ qui sont respectivement $(\rho, \vec{J})$
- $Laplacien(f) = \nabla^2 f = \Delta f = Variation\ spatiale$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = Variation\ temporelle\ de\ f$

* Equation de propagation du champ $\vec{E}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell montrent qu'un champ électrique oscillant génère un champ magnétique oscillant et réciproquement (équations couplées)

Essayons de découpler ces équations, prenons par exemple le rotationnel de la première équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)$$

A l'aide de la deuxième équation de Maxwell on peut écrire : $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Remplaçant on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\left(\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

* Equation de propagation du champ $\vec{E}$

Si maintenant on utilise les relations existantes entre les différents opérateurs vectoriels :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}\,\vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}\,\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\left(\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$$

On sait que : $\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$

On obtient finalement une équation ne contenant que $\vec{E}$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{grad}(\rho)$$

Equation de propagation du champ électrique

* Equation de propagation du champ $\overrightarrow{B}$

Le même raisonnement peut être appliqué au champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pour découpler les équations de Maxwell, et obtenir une équation que pour $\vec{B}$, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(\mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu \vec{\nabla} \wedge \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}\,\vec{B}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

On sait que : $\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) = -\vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu \vec{\nabla} \wedge \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t}$$

Equation de propagation du champ $\overrightarrow{B}$

$$-\vec{\nabla}^2\vec{B} = \mu\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{J}\right) + \mu\varepsilon\frac{\partial(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})}{\partial t}$$

Ici on remplace $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

On obtient finalement une équation ne contenant que $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{J}\right)}$$

Equation de propagation du champ magnétique

* Equation de propagation du potentiel électrique V

On peut déterminer les équations de propagation des potentiels en reportant l'expression du champs $(\vec{E}, \vec{B})$ en fonction de ces champs dans les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère

- Pour la propagation du potentiel électrique V, on part de l'équation de Maxwell-Gauss, où on remplace le potentiel V

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$-\overrightarrow{div}\left(\overrightarrow{grad}\left(V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\ \right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

- On utilise l'identité pour obtenir un $Laplacien$: $\overrightarrow{div}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \nabla^2 f$

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial \overrightarrow{div}(\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Equation de propagation du potentiel électrique V

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial \overrightarrow{div}(\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Or, $\overrightarrow{div}(\vec{A}) + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$ fixé par la *condition de Lorentz*

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial\left(\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

On obtient finalement une équation ne contenant que V

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Equation de propagation du potentiel électrique

* Equation de propagation du potentiel vecteur $\vec{A}$

- A partir de l'équations de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu \vec{J} + \varepsilon\, \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Et avec la relation $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right)$$

- On utilise l'identité

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}(\vec{A})\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

- Par la condition de Lorentz $\overrightarrow{div}(\vec{A}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

Ainsi :

$$-\overrightarrow{grad}\left(\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \vec{J} + \varepsilon\, \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

Equation de propagation du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$

Remplaçant ici $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$-\overrightarrow{grad}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu\,\vec{J} + \varepsilon\,\mu\frac{\partial\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

$$-\mu\varepsilon\cancel{\frac{\partial\left(\overrightarrow{grad}(V)\right)}{\partial t}} - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu\,\vec{J} - \mu\varepsilon\cancel{\frac{\partial\left(\overrightarrow{grad}(V)\right)}{\partial t}} - \varepsilon\,\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

On obtient finalement une équation ne contenant que $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\vec{J}}$$

$Equation\ de\ propagation\ du\ potentiel\ vecteur$

*Conclusions

- ✓ Les sources du champ électromagnétique sont les charges et courants volumiques $(\rho\,(r,t)\,, J\,(r,t))$

- ✓ L' électromagnétisme dans un régime stationnaire $\rightarrow$ 2 groupes d'équations séparées : $E(r)$
$B(r)$

- ✓ L' électromagnétisme dans un régime variable en fonction du temps $\rightarrow$ système couplé $(E(r,t)\,, B(r,t))$. Ou la variation de $\vec{E}$ engendre $\vec{B}$ et vice-versa.

- ✓ Les 7 équations locales de l' électromagnétisme montrent que il y a un couplage entre les champs $(\vec{E}, \vec{B})$ et permettent de calculer $\vec{E}\ et\ \vec{B}$ dans tout l'espace

Equations de Maxwell

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{div}(\vec{B}) = 0 \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

*Conclusions

✓ Les équations de structures des champs imposent l'existence des potentiels associés : V (potentiel électrique) et $\vec{A}$ (potentiel vecteur), pour lesquels la condition de Lorentz est imposée

Equations aux potentiels

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

$$\overrightarrow{div}(\vec{A}) + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Perméabilité magnétique

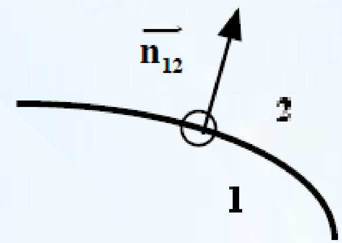
$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\frac{Tm}{A} = 4\pi\ 10^{-7}\frac{H}{m}$$

Permittivité électrique

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi\ 10^9}\frac{F}{m} = 8{,}854\ 10^{-12}\frac{F}{m}$$

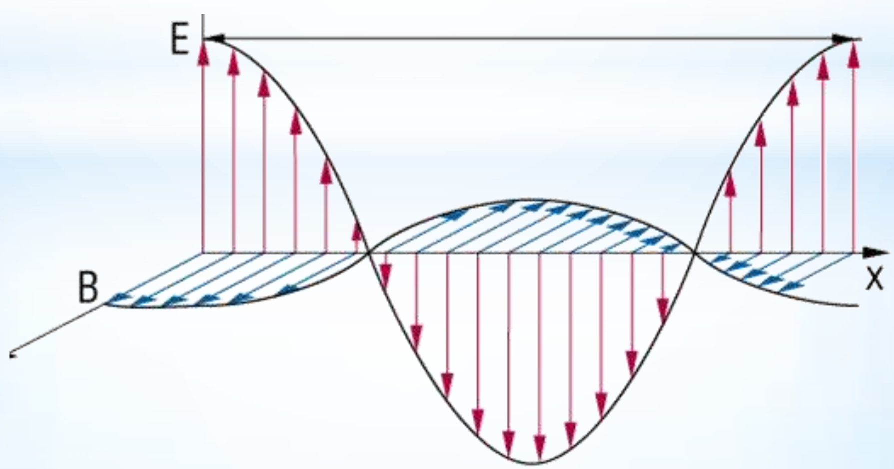
*Conclusions

✓ La continuité de champs traversant une interface



Composantes normales	$\overrightarrow{E_{n_2}} - \overrightarrow{E_{n_1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{B_{n_2}} - \overrightarrow{B_{n_1}} = 0$
Composantes tangentielles	$\overrightarrow{E_{t_2}} - \overrightarrow{E_{t_1}} = 0$	$\overrightarrow{B_{t_2}} - \overrightarrow{B_{t_1}} = \mu_0 \vec{J} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$

✓ La propagation des champs $E(r,t), B(r,t)$ → Propagation des ondes électromagnétiques



*Conclusions

- ✓ Equations de propagation des champs $\vec{E}(r,t), \vec{B}(r,t)$ et des potentiels $\vec{A}, V$ donne par l'équation de D'Alembert

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{grad}(\rho)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{J}\right)$$

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$$