Rappels sur les équivalents

Prop : • Lorsque le quotient de $\frac{f}{g}$ est défini au voisinage de a (sauf eventuellement en a)
On dira que f et g sont équivalentes en a si
$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

Premiers exemples :

• $-3x^5 - 4x^2 + x - 1 \underset{+\infty}{\sim} -3x^5$

• $3x^3 + x \underset{0}{\sim} x$

• $e^x + x - 3 \underset{+\infty}{\sim} e^x$

Prop :

• $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ donc $f \underset{a}{\sim} h$

• $f \sim f'$ et $g \sim g'$ donc $\begin{cases} fg \sim f'g' \\ \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \end{cases}$

• Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim_a f$ existe ssi $\lim_a g$ existe, et ces limites sont égales

En revanche :

• On ne peut pas additionner des équivalents
• On ne compose pas les équivalents (cf. exo 1.4)

Equivalents classiques

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ $\quad$ $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ $\quad$ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

1 Révisions

Taylor Young :

$$\begin{cases} f\ C^n \text{ sur un voisinage de } 0 \\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \end{cases}$$

Exercice 1

1) $f(x) = e^x = \underbrace{1 + x}_{\text{tangente}} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} \dots + \dfrac{x^6}{6!} + o(x^n)$

2) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + o(x^6)$

3) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-5)}{6!}x^6 + o(x^6)$

4) $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)$

5) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$

Exercice 2

1) $f(x) = \cos(x)e^x = \left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}\right)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}\right) + o(x^2)$

ordre 4

$= 1 + x + \cancel{\dfrac{x^2}{2!}} - \cancel{\dfrac{x^2}{2!}} - \cancel{\dfrac{x^3}{3!}} - \cancel{\dfrac{x^4}{2!2!}} + o(x^4) + \cancel{\dfrac{2x^4}{4!}} + \cancel{\dfrac{x^3}{3!}} \cancel{\dfrac{x^4}{4!}}$

$-\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$

$= 1 + x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{12}$

$\dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

2) $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x =$

ordre 3

$\left(1 + x + \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{6}{3!}x^3\right) - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}\right) + o(x^3)$

$\cancel{1} + \cancel{x} + x^2 + x^3 - \cancel{1} - \cancel{x} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)$

À retenir :

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

3) $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}} = \cos(x)\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

ordre 3

$$= \left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{15}{48}x^3+o(x^3)\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{15}{48}x^3-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$

$$= 1-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}-\underbrace{\frac{3}{48}}_{\frac{1}{16}}x^3+o(x^3)$$

4)

$$= \ln 2 + \ln\left(1 \quad \underbrace{-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+o\left(\frac{x^4}{2}\right)}_{X}\right)$$

$$= \ln 2 + \left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+o\left(\frac{x^4}{2}\right)\right) - \frac{\left(\frac{x^4}{16}+o\left(\frac{x^4}{2}\right)\right)}{2}$$

$$= \ln 2 - \frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}-\frac{x^4}{32}+o\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$= \ln 2 - \frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o\left(\frac{x^4}{\cancel{\pi}}\right)$$

5) $f(x) = e^{\cos(x)} = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$

ordre 4

$= e^1 \, e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$

$e^{\cos(x)} - e = \frac{-x^2}{2}$

$= e \times \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\right)$

$= e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + o(x^4)\right)$

reg en dessous

de sa tangente e.

$= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)$

6) $\frac{xe^x}{1-x^2} = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) + o(x^2)\left(1 + x^2 + o(x^2)\right)$

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 \ldots$

ordre 3

$= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2!}\right)\left(1 + x^2 + o(x^2)\right)$

$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 + o(x^3)$

$= x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$

7) $f(x) = \left(\cos(x)\right)^{\sin(x)}$

$= e^{\ln\left(\left(\cos(x)\right)^{\sin(x)}\right)}$

$= e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$

$= e^{\sin(x) \times \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)}$

$$= e^{\sin(x)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}$$

$$= e^{\left(x \quad + o(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}$$

$$= e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^4)}$$

$$= \varphi\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right) = 1-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$$

<u>Exercice 3.</u>

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$= e^{1+o(1)}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} e$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}-e}{x}$$

$$= \frac{e^{1-\frac{x}{2}+o(x^4)}-e}{x}$$

$$= \frac{e^1\times e^{-\frac{x}{2}+o(x)}-e}{x}$$

$$= \frac{e\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)-e}{x}$$

$$= \frac{\cancel{e}-\frac{ex}{2}+o(x)-\cancel{e}}{x}$$

513

Ou $\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{ex}{2}}{x} = -\dfrac{e}{2} \\ \text{donc } \lim_{x \to 0} \left(\dots \right) = -\dfrac{e}{2} \end{array}\right.$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln(\cos(\frac{1}{x}))} = e^{x^2 \ln\left(1 - \frac{(\frac{1}{x})^2}{2} + o(x^2)\right)}$

$= e^{x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o(x^2)\right)}$

$= e^{x^2\left(-\frac{1}{2x^2} + o(x^2)\right)}$

$= e^{-\frac{1}{2} + o(1)}$

$= \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}$

4) $\lim_{x \to +\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 =$

$= x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{(\frac{1}{x})^3}{3!} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x^2$

$= x^2 - \frac{x^3}{6x^3} + o(1) - x^2$

$= -\frac{1}{6} + o(1)$

$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}$

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)} = \dfrac{1 + x + \frac{x^2}{2!} - 1 + \frac{x^2}{2} - x}{x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)}$

$= \dfrac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2}} = 2$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \frac{1+x \quad -1+x + o(x)}{x + o(x)}$

$= \frac{2x}{x} + o(x) = 2 + o(1)$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = 2$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\ln(1+\sin(x))}^{A} - \overbrace{\sin(\ln(1+x))}^{B}}{\underbrace{x^2 \sin(x^2)}_{C}}$

$A = \ln(1+\sin(x))$

$= \ln(1 + x \quad + o(x^3))$

$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\left(= \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \right.$

$= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$

$- \frac{x^4}{12}$

$B = \sin(\ln(1+x))$

$= \sin\left(x - \frac{x^2}{2} \right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$= \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$- \frac{x^3}{6}$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \; \frac{7x^4}{4} + o(x^4)$

$C = x^2 \sin(x^2)$

$= x^2\left((x^2) + o(x^2)\right)$

$= x^4 + o(x^4)$

$= \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) - \left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} \; \frac{7x^4}{4} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)}$

$=$

Correction 2) :

A $\quad \ln(1+\sin(x)) = \ln\Big(1+\underbrace{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}_{u}\Big)$

$= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$

$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$

$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{2x^4}{24} + o(x^4)$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

B $\quad \sin(\ln(1+x)) = \sin\Big(\underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}_{u}\Big)$

$= u - \frac{u^3}{6} + o(u^4)$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)^3 + o(x^4)$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\times 3 \times x^2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

$\frac{A-B}{C} = \dfrac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12} + o(x^4)$

$\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}$

$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

__Exercice 4 :__ $e^f : x \longmapsto e^{f(x)}$ et $\ln(f) : x \mapsto \ln(f(x))$

1)

__mq__ $f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$

$$x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$$

$$\frac{e^{x+1}}{e^x} = e \underset{x \to +\infty}{\not\to} 1 \quad \text{donc} \quad e^{x+1} \not\sim e^x$$

__Rq__ : L'exponentielle "amplifie" les écarts et ne conserve pas l'ordre de grandeur.

2)

$$\frac{e^f}{e^g} \xrightarrow[a]{} 1$$

$$\Rightarrow e^{f-g} \xrightarrow[a]{} 1$$

ln est continue

exp est continue.

$$\Rightarrow f-g \xrightarrow[a]{} \ln(1) (=0)$$

3) __mq__ $f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$

$f = e^{2x}$

$g = e^x$ $\Big\} \to +\infty$

$\ln(e^{2x}) \to 2x$

$\ln(e^x) \to x$

$= 2 \neq 1 \Big\} \not\sim$

4)

- **Cas $\ell \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$**

On suppose $f \underset{a}{\sim} g$, et on veut montrer que

$$\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$$

$$\frac{\ln(f)}{\ln(g)} \longrightarrow 1$$

Comme $g \xrightarrow[a]{} \ell$, alors $\ln(g) \xrightarrow[a]{} \ln(\ell)$

De plus $f \underset{a}{\sim} g$ donc $f \xrightarrow[a]{} \ell$, et par continuité de ln,
$$\ln(f) \xrightarrow[a]{} \ln(\ell)$$

D'où :
$$\frac{\ln(f)}{\ln(g)} \xrightarrow[a]{} \frac{\ln(\ell)}{\ln(\ell)} = 1$$

Donc $\ln(f) \sim \ln(g)$

- **Cas $\ell = +\infty$** : On suppose $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \xrightarrow[a]{} +\infty$

$f/g = 1$

$$\frac{\ln f}{\ln g} = \frac{\ln\left(\frac{f}{g} \times g\right)}{\ln(g)} = \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right) + \ln(g)}{\ln(g)}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} 1$$