Création de la matrice

Ici se trouve le coeur de la résolution du problème: la construction de la matrice. L'équation du problème est

$$-k\Delta T(x,y) = f(x,y)$$

Une approximation est nécessaire; on remarque que de manière générale on a:

$$T(x+\varepsilon_1,y) = T(x,y) + \varepsilon_1\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) + \frac{\varepsilon_1^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) + O(\varepsilon_1^3)$$

De même, on a :

$$T(x-\varepsilon_2,y) = T(x,y) - \varepsilon_2\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) + \frac{\varepsilon_2^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) + O(\varepsilon_2^3)$$

En les sommant, on obtient:

$$T(x+\varepsilon_1,y)+T(x-\varepsilon_2,y) = 2T(x,y)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\partial T}{\partial x}(x,y)+\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)+O(\varepsilon_1^3+\varepsilon_2^3)$$

Enfin, en supposant que $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$, on a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}(T(x+\varepsilon_1,y)+T(x-\varepsilon_2,y)-2T(x,y))$$

On peut injecter cette équation (et son équivalent en y) dans l'équation du problème, afin de modéliser ΔT à partir des valeurs du point et de ses voisins.

Ceci est la version avec un maillage homogène. Si l'on veut que notre modélisation marche avec un maillage non-homogène, nous devons utiliser une combinaison linéaire. On a donc :

$$\varepsilon_2 T(x+\varepsilon_1,y) = \varepsilon_2(T(x,y) + \varepsilon_1\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) + \frac{\varepsilon_1^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)) + O(\varepsilon_2\varepsilon_1^3)$$

Et :

$$\varepsilon_1 T(x-\varepsilon_2,y) = \varepsilon_1(T(x,y) - \varepsilon_2\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) + \frac{\varepsilon_2^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)) + O(\varepsilon_1\varepsilon_2^3)$$

La somme devient maintenant :

$$\varepsilon_2 T(x+\varepsilon_1,y)+\varepsilon_1 T(x-\varepsilon_2,y) = (\varepsilon_1\varepsilon_2)T(x,y)+(\varepsilon_2\varepsilon_1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\frac{\partial T}{\partial x}(x,y)+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)+O(\varepsilon_2\varepsilon_1^3+\varepsilon_1\varepsilon_2^3)$$

Le résultat final est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{\varepsilon_2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2^2}(\varepsilon_2 T(x+\varepsilon_1,y) + \varepsilon_1 T(x-\varepsilon_2,y) - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)T(x,y))$$

En développant on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) = 2(\frac{T(x+\varepsilon_1,y)}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2} + \frac{T(x-\varepsilon_2,y)}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} - \frac{T(x,y)}{\varepsilon_1\varepsilon_2})$$