Contrôle 2

Durée : 3h
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (3 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer, sous forme factorisée, $det(A - \lambda I)$ et $det(B - \lambda I)$ en précisant les transformations effectuées sur les lignes et les colonnes.

Exercice 2 (4 points)

1. Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (z, y+z, x+y+z) \end{cases}$

   Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $(u,v,w) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\begin{cases} u(t) = e^t \\ v(t) = e^{2t} \\ w(t) = te^{2t} \end{cases}$ et $E = Vect(u,v,w)$.

   a. Montrer que $\mathscr{B} = (u,v,w)$ est une base de E.

   b. Montrer que $f \in E \Longrightarrow f' \in E$.

   c. Soit $D : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$

   Déterminer la matrice de D relativement à $\mathscr{B}$.

Exercice 3 (3 points)

Déterminer la dimension des $\mathbb{R}$-ev suivants :

1. $\mathscr{L}\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^8\big)$
2. $\mathscr{L}\big(\mathbb{R}_4[X], \mathbb{R}^3\big)$
3. $\mathscr{L}\big(\mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X]\big)$

Exercice 4 (3 points)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n paire et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\left(f^2 = 0 \text{ et } dim\big(Im(f)\big) = \frac{n}{2}\right) \Longleftrightarrow \big(Im(f) = Ker(f)\big)$$

Exercice 5 (4 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\big(Ker(g \circ f) = Ker(f)\big) \Longleftrightarrow \big(Ker(g) \cap Im(f) = \{0\}\big)$
2. Montrer que $\big(Im(g \circ f) = Im(g)\big) \Longleftrightarrow \big(Ker(g) + Im(f) = E\big)$

Exercice 6 (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(f,g,h) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$Im(h \circ f) \subset Im(h \circ g) \Longleftrightarrow Im(f) + Ker(h) \subset Im(g) + Ker(h)$$