DÉFINITIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

AFFINITÉ : voir dilatation

ALGÈBRE
Une K-algèbre E (K corps commutatif) est un K-espace vectoriel muni d'une troisième opération interne, notée multiplicativement, qui est une application bilinéaire de E^2 dans E.
Si de plus cette opération est associative, la K-algèbre est dite associative (et (E, +, .) est alors un anneau).
S'il y a un élément unité ≠ 0, la K-algèbre est dite unitaire (elle contient alors un corps isomorphe à K).
Exemples : tout surcorps de K, K[X], K[x], K^I.

ALTERNÉ
Une application n-linéaire est dite *alternée* lorsque l'image de tout n-uplet ayant deux coefficients égaux est nulle. Cette condition est équivalente à l'antisymétrie (en caractéristique différente de 2).
Lorsque l'on dit que le déterminant est «alterné par rapport aux lignes et aux colonnes», l'on dit donc qu'un déterminant est nul lorsque 2 lignes ou 2 colonnes sont identiques. C'est cette propriété qui est à la base du fait que si l'on ajoute à une ligne (ou à une colonne) d'un déterminant une combinaison linéaire des autres, on ne modifie pas la valeur du déterminant.

ANTISYMÉTRIQUE
1) Une application n-linéaire est dite *antisymétrique* lorsque l'image d'un n-uplet est changée en son opposé si l'on échange 2 coefficients du n-uplet (voir aussi alterné).

Soit $f \in \mathrm{L}_n(\mathrm{E},\mathrm{F})$.On a :

$$f \text{ est antisymétrique} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \sigma \in \mathrm{S_n} \ \forall \left(x_1, x_2, .., x_n\right) \in \mathrm{E^n} \\ f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, .., x_{\sigma(n)}\right) = \text{signature}(\sigma)\ f\left(x_1, x_2, .., x_n\right) \end{cases}$$

ex : le produit vectoriel et le produit mixte sont antisymétriques.
Lorsque l'on dit que le déterminant est antisymétrique par rapport aux lignes et aux colonnes, l'on dit donc que si l'on échange 2 lignes ou 2 colonnes, le déterminant est changé en son opposé.

2) Une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ est dite antisymétrique lorsqu'elle est égale à l'opposé de sa transposée.
Si dans K, 1+1 ≠ 0, les matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ en forment un sous-espace (mais pas une sous-algèbre) de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

ATTILA
La matrice Attila de format (n, p) est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Elle est en effet envahie par les uns...

AUTOMORPHISME
Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif.
L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E muni de l'opération $\circ$ est un groupe (non commutatif dès que dim(E) = 2) appelé groupe linéaire de E, noté GL(E) ou AUT(E).

BASE
1) Base d'un espace vectoriel.

Une *base* d'un espace vectoriel est une famille libre et génératrice de cet espace vectoriel. Il est équivalent de dire que c'est une famille libre maximale ou une famille génératrice minimale. En dimension *n*, une famille est une base si et seulement si elle possède *n* vecteurs et est libre, ou si et seulement si elle possède *n* vecteurs et est génératrice.
2) Base d'une dilatation (voir dilatation).

BIJECTIF
La bijectivité équivaut à la conjonction de l'injectivité et de la surjectivité, mais si *f* est une application linéaire d'un espace E vers un espace F et si E et F sont de *même* dimension finie *n*, alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective } &\Leftrightarrow f \text{ est injective} \\ &\Leftrightarrow f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

CARACTÉRISTIQUE (POLYNÔME /)
1) Le polynôme *caractéristique* d'un endomorphisme *f* d'un espace vectoriel de dimension finie *n* est le polynôme P_f de K[X] défini par :

$$\forall \lambda \in \mathrm{K} \quad \mathrm{P}_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{trace}(f) \lambda^{n-1} + \ldots + \det(f).$$

Ses racines sont les valeurs propres de *f*.
2) Le polynôme *caractéristique* d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ est le polynôme P_A de K[X] défini par :

$$\forall \lambda \in \mathrm{K} \quad \mathrm{P}_\mathrm{A}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{trace}(\mathrm{A}) \lambda^{n-1} + \ldots + \det(\mathrm{A}).$$

Ses racines sont les valeurs propres de A.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme *f* est le même que celui de toutes les matrices de *f* dans différentes bases de E (d'où le nom de "caractéristique").

CODIMENSION
La codimension d'un sous-espace vectoriel de E est la dimension commune de ses sous-espaces supplémentaires.
En dimension finie, codim(F) = dim(E) – dim(F).

COFACTEUR
Le *cofacteur* $\mathrm{A}^*(i,j)$ de la place (*i*,*j*) (ou par abus : "de $\mathrm{A}(i,j)$") d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ est le *mineur* de la place (*i*, *j*) multiplié par $(-1)^{i+j}$.
Développement suivant une ligne ou une colonne :

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}(k,j)\,\mathrm{A}^*(k,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}(i,k)\,\mathrm{A}^*(i,k) \quad \forall i, \forall j.$$

COLINÉAIRE
Voir lié.

COLONNE (VECTEUR- ou MATRICE-)
Élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.

COMATRICE
Matrice des cofacteurs A^*.
On a : $\mathrm{A}\mathrm{A}^* = (\mathrm{A}^*)\mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$.

COMBINAISON LINÉAIRE

Une combinaison linéaire de n vecteurs x_1, ... x_p, de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ appartenant à K, est une expression du type $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

COMPOSANTE

Lorsque $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$, tout vecteur x de E se décompose en $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, avec $x_i \in \mathrm{F}_i$; x_i est la *composante* de x sur F_i.
Parfois aussi utilisé comme synonyme de coordonnées.

COORDONNÉES

La famille des coordonnées d'un vecteur x dans une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un espace vectoriel est l'unique n-uplet de K^n : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

CRAMER (système et formules de -)

Un système d'équations linéaires est dit de *CRAMER* lorsque sa matrice est carrée et de déterminant non nul. Il possède alors une solution unique donnée par les formules de CRAMER ci - après.

Le système $\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \right.$ $(i=1,..,n)$ possède pour unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

donnée par : $x_j = \dfrac{\det(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)}{\det(\mathrm{A})}$, où $A = (a_{ij}) = (C_1, .., C_n)$.

DÉPENDANCE LINÉAIRE

Voir à lié

DÉTERMINANT

1) Déterminant d'une famille de n vecteurs en dimension n.
Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}$.
Il existe une unique forme n-linéaire alternée (de E^n vers K) notée $\det_{\mathcal{B}}$.
telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
Le *déterminant* de $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est par définition $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
On a : $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
et la formule de passage (dite de Chasles) : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
D'après la définition ci -après, le déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est aussi le déterminant de la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) Déterminant d'une matrice carrée.
Le *déterminant* d'une matrice carrée d'ordre n est le déterminant de ses vecteurs-colonnes dans la base canonique de K^n. En vertu de la formule : $\det({}^t\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A})$, c'est aussi le déterminant de ses vecteurs-lignes.

Notation: $\det(\mathrm{A}) = \det((a_{ij})) = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$.

On a la formule développée : $\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

et les propriétés : $\begin{cases} \text{A inversible} \Leftrightarrow \det(\text{A}) \neq 0 \\ \det(\text{AB})=\det(\text{A})\det(\text{B}) \text{ ; } \det(\lambda\text{A})=\lambda^n \det(A) \end{cases}$

3) Déterminant d'un endomorphisme.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E ; le déterminant d'un endomorphisme *f* de E est le déterminant de la matrice de *f* dans la base $\mathscr{B}$, soit $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ (qui est indépendant de cette base).

DIAGONALE
1) La *diagonale* (principale) d'une matrice carrée A est le *n*-uplet (A(1,1),..., A(*n,n*)) dont les coefficients sont dits "coefficients diagonaux" de la matrice.
2) Une matrice carrée est dite *diagonale* lorsque ses éléments non diagonaux sont nuls. On note $\text{diag}\left(a_1,..,a_n\right)$ la matrice diagonale qui a pour diagonale $\left(a_1,..,a_n\right)$.

DIAGONALISATION
1) Un endomorphisme *f* d'un K-espace vectoriel de dimension finie est dit *diagonalisable* s'il existe une base dans la quelle sa matrice est diagonale (on dit qu'il diagonalise dans cette base).
On a les CNS suivantes :

a) il existe une base de vecteurs propres pour *f*.

b) la somme des sous-espaces propres de *f* est égale à l'espace entier.

c) 1e polynôme caractéristique de *f* possède toutes ses racines dans K (c'est à dire qu'il est scindé sur K) et l'ordre de multiplicité de chacune de ses valeurs propres est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant (alors qu'en général il lui est supérieur ou égal).

2) Une matrice carrée d'ordre *n* à coefficient dans K A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale (c'est à dire qu'il existe P $\in$ GL$_n$(K) telle que P^{-1}AP soit diagonale). Il est équivalent de dire que l'endomorphisme de K^n que A représente est diagonalisable (et alors tous les endomorphismes qu'elle représente le sont aussi).

DILATATION, ou AFFINITÉ (vectorielle)
Soit E un K-espace vectoriel décomposé en une somme directe E = F $\oplus$ G et λ un élément de K.
La dilatation (ou affinité) (vectorielle) de base F, de direction G, de rapport λ (bijective si $\lambda \neq 0$) est l'endomorphisme de E défini par : $\begin{array}{ccc} \text{E} & \rightarrow & \text{E} \\ z = \underset{\in\text{F}}{x} + \underset{\in\text{G}}{y} & \mapsto & x+\lambda y \end{array}$, autrement dit, c'est $\text{id}_\text{F} \oplus \lambda\text{id}_\text{G}$.

> Si F={0} (et donc G = E) on retrouve les homothéties.
> Les projections sont les affinités de rapport nul.
> les symétries sont les affinités de rapport -1.

En dimension finie, on peut définir une affinité de rapport λ comme étant «un endomorphisme diagonalisable dont l'ensemble des valeurs propres est inclus dans $\{1, \lambda\}$» ou encore «la somme directe d'une homothétie et d'une identité» .
En dimension *n*, un endomorphisme diagonalisable est décomposable en un produit de *n* affinités au plus.

DIMENSION
La *dimension* d'un espace vectoriel E est le nombre d'éléments d'une de ses bases (finies) (et c'est alors le nombre d'éléments de *toutes* ses bases). Elle est dite infinie s'il n'y a pas de base finie.
Notation : dim(E).

DIRECTE (SOMME)
Voir à somme directe.

DIRECTION
Voir dilatation.

DROITE (VECTORIELLE)
Espace vectoriel de dimension 1.

ÉCHELONNÉE (FAMILLE / DANS UNE BASE)
Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i=1..p}$ une famille de vecteurs de matrice A dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1..n}$. La famille $\mathcal{F}$ est dite échelonnée dans $\mathcal{B}$, si, après un éventuel renumérotage des vecteurs de $\mathcal{F}$ et de ceux de $\mathcal{B}$, la matrice A vérifie : $\forall j \in [1, p] \quad \exists i_j \in [1, n] \quad A\left(i_j, j\right) \neq 0$ et $\forall i \in [i_j + 1, n] \quad A\left(i_j, j\right) = 0$, avec $i_1 < ... < i_p$.
Exemple : une famille de polynômes de degrés ou de valuations distinctes est échelonnée dans la base canonique de $K_n[X]$.
Une famille échelonnée est libre.

ENDOMORPHISME
Un *endomorphisme* d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E. Leur ensemble forme un sous-espace vectoriel de E noté L(E) ou END(E).
Plus généralement, un endomorphisme pour une structure donnée est un morphisme pour cette structure dont l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée.

ENGENDRÉ (SOUS-ESPACE -)
Le sous-espace vectoriel engendré par une famille (x_1,..., x_n) de vecteurs est l'ensemble (noté Vect(x_1,..., x_n)) des combinaisons linéaires de x_1,..., x_n.
C'est le "plus petit" sous-espace contenant tous les x_i, en ce sens que tout sous-espace contenant les x_i le contient.

ÉQUIVALENTE
1) Deux matrices A et B de $M_{np}(K)$ sont *équivalentes* si elles sont matrices d'une même application linéaire, dans des bases quelconques.
CNS 1 : $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})\ \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathrm{K}) \ \ \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AQ}$.
CNS 2 : A et B ont même rang.

2) Deux applications linéaires f et g d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F sont équivalentes si, pour un certain choix de bases pour E et F elles ont même matrice.
CNS 1 : $\exists p \in \mathrm{GL(E)}\ \exists q \in \mathrm{GL(F)} \ \ g = q^{-1} \circ f \circ p$.
CNS 2 : f et g ont même rang.

ESPACE VECTORIEL
Un K-espace vectoriel E (K corps commutatif) est un ensemble muni d'une opération interne notée additivement et d'une opération externe de K×E dans E, notée multiplicativement vérifiant:

$$\begin{cases} \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \text{ (pseudo associativité)} \\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y \text{ (pseudo distributivité à droite)} \\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \text{ (pseudo distributivité à gauche)} \\ 1_K\, x = x \end{cases}$$

pour tous λ, μ, appartenant à K, x, y appartenant à E.

Exemple général : K^I.

FORME LINÉAIRE, MULTILINÉAIRE

C'est une application linéaire, multilinéaire dont l'ensemble d'arrivée est K.

GÉNÉRATRICE (famille)

Une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite *génératrice* (de E) lorsque le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est E lui-même. Il revient au même de dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de cette famille.

GROUPE LINÉAIRE

1) Le *groupe linéaire* d'un espace vectoriel E est l'ensemble de ses automorphismes, muni de l'opération $\circ$. C'est un sous-groupe du groupe des bijections de E dans E.
Notation : GL(E).

2) Le *groupe linéaire de dimension n* sur un corps K est l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients dans K inversibles, muni de la multiplication des matrices.
Notation : $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$.

Si E est un espace vectoriel de dimension *n* de base $\mathcal{B}$, l'application : $\begin{array}{l} \mathrm{GL(E)} \to \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \\ \quad f \quad \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$

est un isomorphisme de groupes.

HOMOTHETIE (VECTORIELLE)

Soit E un K-espace vectoriel λ un élément de K.

L'homothétie(vectorielle) de rapport λ (bijective si $\lambda \neq 0$) est l'endomorphisme de E défini par : $\begin{array}{l} \mathrm{E} \to \mathrm{E} \\ x \mapsto \lambda x \end{array}$, autrement dit $\lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

L'ensemble des homothéties de E, noté H(E) ou $\mathrm{K.id}_{\mathrm{E}}$, est une sous-algèbre de L(E) isomorphe au corps K.

HYPERPLAN

Un *hyperplan* (vectoriel) d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel dont un supplémentaire est une droite vectorielle. Si E est de dimension *n*, il revient au même de dire que c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E et, réciproquement, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

IDENTITÉ

L'identité de E est l'application $\begin{array}{l} \mathrm{E} \to \mathrm{E} \\ x \mapsto x \end{array}$, notée id_{E}.

La matrice identité d'ordre *n* est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, notée I_n.

IMAGE

L'image d'une application linéaire *f* est l'ensemble des images des vecteurs de l'espace de départ. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.
Notation : Im(*f*).

INJECTIF

Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

INVERSIBLE

Un élément *inversible* d'un anneau unitaire est un élément qui possède un inverse (à droite et à gauche) pour la multiplication.

Une matrice carrée inversible (ou régulière) est donc une matrice possédant un inverse pour la multiplication. On peut démontrer que si une matrice d'ordre n possède un inverse à droite (c'est à dire un élément B tel que AB = I_n) alors B est aussi inverse à gauche et A est inversible.
On a les CNS :
A inversible $\Leftrightarrow$ $\det(\text{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(\text{A}) = n \Leftrightarrow \text{A}$ est la matrice d'un automorphisme.

INVOLUTIF - INVOLUTION
Si f est un endomorphisme involutif (autrement dit : une involution linéaire) d'un espace vectoriel E, f est une symétrie de base $\text{Ker}(f - \text{id}_\text{E}) = \text{Im}(f + \text{id}_\text{E})$ et de direction $\text{Ker}(f + \text{id}_\text{E}) = \text{Im}(f - \text{id}_\text{E})$

Exemples : $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{cases}$, $\mathbb{C}$ étant considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; la base est $\mathbb{R}$ et la direction i$\mathbb{R}$.

$\begin{cases} \text{M}_n(\text{K}) \to \text{M}_n(\text{K}) \\ \text{A} \mapsto {}^t\text{A} \end{cases}$; la base est formée des matrices symétriques et la direction des matrices antisymétriques.

$\begin{cases} K^K \to K^K \\ f \mapsto \sigma(f) / \sigma(f)(x) = f(-x) \end{cases}$: la base est formée des applications paires et la direction des applications impaires.

ISOMORPHISME - ISOMORPHE
De façon générale, un *isomorphisme* est un morphisme bijectif dont la réciproque est aussi un morphisme.
En particulier :
Un *isomorphisme* d'espaces vectoriels est une application linéaire bijective.
Un *isomorphisme* d'algèbres est une application linéaire bijective qui est de plus un morphisme pour la multiplication.

Exemple : $\begin{array}{l} \text{L(E)} \to \text{M}_n(\text{K}) \\ f \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$ (E de dimension n et de base $\mathcal{B}$) est un isomorphisme d'algèbres.

Deux espaces vectoriels (ou deux algèbres) sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

LIBRE
Une famille finie d'un espace vectoriel est dite *libre* lorsque la seule combinaison linéaire des éléments de cette famille qui soit nulle est la combinaison linéaire triviale. Les éléments de cette famille sont alors dits *linéairement indépendants.*

LIGNE (VECTEUR- ou MATRICE-)
Élément de $\text{M}_{1,n}(\text{K})$.

LIÉ
C'est le contraire de libre. Une famille finie d'un espace vectoriel est donc *liée* lorsqu'il existe une relation de dépendance linéaire entre ses éléments, c'est-à-dire une combinaison linéaire non triviale qui est nulle.
Une condition équivalente est que l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres. Les éléments d'une famille liée sont dits *linéairement dépendants.*

On a : $\begin{cases} (u,v) \text{ lié} \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont colinéaires} \\ \qquad\qquad \Leftrightarrow \exists \lambda \in \text{K} \;\; u = \lambda v \text{ ou } v = \lambda u \end{cases}$.

LINÉAIRE

1) Une application f d'un espace vectoriel E vers un espace F est dite *linéaire* lorsque

$$\forall x,\ y \in \mathrm{E}\ \ \forall \lambda \in \mathrm{E}\ \ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

C'est, autrement dit, un morphisme d'espaces vectoriels.

2) Une équation *linéaire* à coefficient dans K est une équation du type : $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$ d'inconnue $(x_1,..., x_n) \in \mathrm{K}^n$, avec $(a_1,..., a_n,b) \in \mathrm{K}^n$.

Si les a_i sont non tous nuls, l'ensemble des solutions est un hyperplan affine de K^n (c'est à dire le translaté d'un hyperplan vectoriel de K^n).

3) Système linéaire.
Voir à système.
3) Linéairement dépendants, indépendants (voir lié, libre).
4) Combinaison linéaire : voir à combinaison.

MANIPULATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES ET LES COLONNES D’UNE MATRICE

Multiplication d’une ligne par une constante non nulle, ajout d’une ligne à une autre, échange de deux lignes (idem pour les colonnes).
Ces opérations ne modifient pas le rang.

MATRICE

1) Une *matrice* A de format (n,p) à coefficients dans K est une famille $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ d’éléments de K.

On emploie aussi la notation fonctionnelle : $a_{ij} = A\left(i, j\right)$.

Leur ensemble est noté $\mathrm{M}_{np}(\mathrm{K})$; c’est un K-espace vectoriel isomorphe à K^{np} .

A est dite carrée si $n = p$ et la notation $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$ est réduite en $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

1) Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, matrice de passage.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1..n}$.

La *matrice* de $\mathcal{F} = (x_1,..., x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les familles des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{A} \in M_{np}(\mathrm{K}) \text{ définie par } \forall j \in [1, p]\ \ x_j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}\left(i, j\right) e_i \, .$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est une autre base $\mathcal{C}$ de E, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, notée aussi $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est appelée la *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est donc aussi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l’automorphisme de E transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, ainsi que $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

2) Matrice d'une application linéaire dans deux bases.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, de bases $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1..p}$ et $\mathcal{C} = (f_i)_{i=1..n}$, f une application linéaire de E vers F.

La matrice de f dans les (ou relativement aux) bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{i=1..p}$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \in M_{np}(\mathrm{K}) \text{ définie par } \forall j \in [1, p]\ \ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}\left(i, j\right) f_i \, .$$

Si X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs x de E dans $\mathcal{B}$ et y de F dans $\mathcal{C}$, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow \mathrm{Y} = \mathrm{AX}$.

3) Matrice d'un endomorphisme dans une base.

Soient E un espace vectoriel de dimension *n*, de base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1..n}$, *f* un endomorphisme de E.
La matrice de *f* dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{i=1..p}$ dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit la matrice de l'application linéaire *f* relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.
4) Matrice d'un système linéaire
Voir à linéaire.

MINEUR
1) Matrice mineure.
La matrice mineure pour la place (*i*, *j*) (ou par abus : "de $\mathrm{A}(i, j)$") d'une matrice A= $\in M_n(\mathrm{K})$ est la matrice de $M_{n-1}(\mathrm{K})$ obtenue en barrant dans A la ligne *i* et la colonne *j*.

2) (Déterminant) mineur.
C'est le déterminant de la matrice mineure.

MORPHISME
Si E et F sont 2 ensembles munis des opérations internes $\uparrow$ et $\downarrow$, un *morphisme* de (E,$\uparrow$) vers (F,$\downarrow$) est une application de E vers F vérifiant :

$$\forall x,\ y \in \mathrm{E} \quad f(x \uparrow y) = f(x) \downarrow f(y)$$

On définit de même des morphismes concernant les opérations externes. Un morphisme pour une structure algébrique est un morphisme pour les opérations de cette structure.

Sont à connaître : les morphismes de groupes, d'espaces vectoriels (c'est à dire les applications linéaires), d'anneaux (pour + et .) et d'algèbres (combinant les deux précédents).

NOYAU
Le *noyau* d'une application linéaire *f* d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est l'ensemble des éléments de E ayant une image nulle par *f*.
Notation : Ker(*f*) (en allemand, noyau se dit Kern).
Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

n-LINÉAIRE
Soient E et F 2 espaces vectoriels, *n* un entier ≥ 2.
Une application de E vers F est dite *n-linéaire* lorsque, si l'on fixe $n - 1$ vecteurs d'un élément de K^n (et quelles que soient les façons de le faire) l'application de E vers F obtenue en faisant varier le vecteur restant est linéaire.
Notation de l'ensemble des applications *n*-linéaires de E vers F : L_n(E, F).

Exemples : > le produit scalaire et le produit vectoriel sont bilinéaires
> le produit mixte est trilinéaire.
> le déterminant (des matrices d'ordre *n*) est n-linéaire par rapport aux lignes et aux colonnes.

OPÉRATEUR LINÉAIRE
Synonyme d'application linéaire, surtout utilisé en analyse pour des applications agissant dans des ensembles de fonctions ou de suites (opérateur de dérivation par exemple).

ORDRE (DE MULTIPLICITÉ) (d'une valeur propre)
L'ordre d'une valeur propre d'un endomorphisme de dimension finie ou d'une matrice carrée est l'ordre de multiplicité de cette valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique de l'endomorphisme ou de la matrice.

Cet ordre est toujours supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé.

PASSAGE (MATRICE DE -)
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont 2 bases d'un espace vectoriel E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc aussi $\mathrm{mat}_{(\mathcal{C},\mathcal{B})}(\mathrm{id_E})$.
Notation : $\mathrm{P}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}$.

On a : $\mathrm{P}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}=\mathrm{P}_{(\mathcal{B},\mathcal{D})}\ \mathrm{P}_{(\mathcal{D},\mathcal{C})}$ (relation de Chasles) d'où $\left(\mathrm{P}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}\right)^{-1}=\mathrm{P}_{(\mathcal{C},\mathcal{B})}$.

PLAN (VECTORIEL)
Espace vectoriel de dimension 2.

PRODUIT (de matrices)
Si A et B sont 2 matrices de $\mathrm{M}_{np}(\mathrm{K})$ et $\mathrm{M}_{pq}(\mathrm{K})$ respectivement, AB est une matrice de $\mathrm{M}_{nq}(\mathrm{K})$ définie par : $\mathrm{AB}(i,j)=\sum_{k=1}^{p}\mathrm{A}(i,k)\mathrm{B}(k,j)$.

Ce produit a été fabriqué de façon à ce que si E, F, G sont 3 espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $f\in\mathrm{L(E,F)}$ et $g\in\mathrm{L(F,G)}$.
on ait : $\mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{D})}(g\circ f)=\mathrm{mat}_{(\mathcal{C},D)}(g)\ \mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$.

PROJECTEUR
Un *projecteur p* d'un espace vectoriel est un endomorphisme vérifiant $p\circ p = p$.
C'est alors une projection de base $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id_E}) = \mathrm{Im}(p)$ et de direction $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - \mathrm{id_E})$.

PROJECTION (vectorielle)
Une projection est une dilatation de rapport nul.
CNS : projecteur.

PROPRE (éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice)
1) Valeurs propres
a) Une *valeur propre* d'un endomorphisme *f* d'un K-espace vectoriel E est un élément λ de K tel qu'il existe un *x* non nul de E vérifiant $f(x)=\lambda x$.
Autrement dit :
λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f-\lambda id_E)\neq\{0_E\} \Leftrightarrow f-\lambda id_E$ n'est pas injective.
Si E est de dimension finie, on a : λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \det(f-\lambda id_E)=0$.
(voir caractéristique).

b) Les *valeurs propres* d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme de K^n qu'elle représente (et ce sont aussi les valeurs propres de *tout* endomorphisme qu'elle représente).
Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres (la réciproque est fausse!).
On les recherche comme racines du polynôme caractéristique.
Attention : lorsque K = $\mathbb{R}$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ étant plongé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il faut bien spécifier si l'on recherche les valeurs propres complexes ou seulement réelles.

2) Vecteurs et sous-espaces propres
a) Le *sous-espace propre* relatif à la valeur propre λ d'un endomorphisme *f* est l'ensemble des vecteurs *x* de E vérifiant $f(x) = \lambda x$, vecteurs appelés (sauf le vecteur nul) *vecteurs propres* relatifs à λ. C'est donc $\ker(f-\lambda id_E)$.

Des sous-espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe.

b) Les vecteurs et sous espaces propres d'une matrice de $M_n(K)$ sont les vecteurs et sous-espaces propres de l'endomorphisme de K^n qu'elle représente.
K^n étant identifié à $M_{n,1}(K)$ on a :
$X \in K^n$ est vecteur propre de A relatif à la valeur propre $\lambda \Leftrightarrow$ A X =λ X.

ATTENTION : lorsque A $\in M_n(\mathbb{R})$, il faut bien préciser si l'on recherche les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$.

RANG
1) le *rang* d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace qu'elle engendre.
Il est toujours inférieur ou égal au nombre de vecteurs de la famille et à la dimension de l'espace ambiant.

2) le *rang* d'une application linéaire est la dimension de son image.
C'est aussi la codimension de son noyau (théorème du rang).
Il est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace de départ et à la dimension de l'espace d'arrivée.
En dimension finie, c'est aussi le rang de n'importe qu'elle matrice représentative de l'application linéaire.

3) le *rang* d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.
Il est toujours inférieur ou égal au nombre de lignes et au nombre de colonnes.
On démontre que c'est aussi le rang des vecteurs lignes (donc rang (A)= rang(${}^tA$)).
C'est aussi le plus grand ordre d'une matrice carrée extraite inversible.

4) Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice.
S'il est compatible, il y a indétermination d'ordre n - r où n est le nombre d'équations et r le rang.

RAPPORT
Voir dilatation, homothétie.

RÉGULIÈRE
Synonyme d'inversible pour les matrices carrées (car pour la multiplication, une matrice est régulière (c'est-à-dire simplifiable) si et seulement si elle est inversible).

RESTRICTION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE
Si f est une application linéaire de E vers F, E_1 et F_1 des sous-espaces respectifs de E et F, *F contenant l'image de* E_1 *par f*, la restriction de f à E_1 et F_1, notée $f_{|E_1|F_1}$ définie par $\begin{matrix} E_1 \to F_1 \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$.
Le rang de la restriction ne change pas.
Voir aussi à stable.

SCALAIRE
1) nom des éléments de K.

2) Matrice scalaire.
Une matrice *scalaire* est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux, autrement dit une matrice d'homothétie (son produit avec une autre matrice revient à la multiplication par un scalaire).

L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n noté $H_n(K)$ ou $K.I_n$, est une sous-algèbre de $M_n(K)$ isomorphe au corps K.

SCINDÉ

Un polynôme P de degré n de K[X] est dit scindé s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et a appartenant à K tels que $P = a\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

> si K = C, tout polynôme est scindé.

> un polynôme de R[X] est scindé (sur R) ssi ses racines complexes sont toutes réelles.

SEMBLABLE

1) Deux matrices carrées A et B de $M_n(K)$ sont *semblables* si elles sont matrices d'un même endomorphisme (en prenant la même base pour le départ et l'arrivée).

CNS : $\exists P \in GL_n(K) \quad B = P^{-1}AP$.

Deux matrices semblables ont même rang, même déterminant et même trace (mais ces trois dernières conditions ne suffisent pas pour que deux matrices soient semblables).

2) Deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E sont semblables si, pour un certain choix de base pour E, ils ont même matrice.

CNS : $\exists p \in GL(E) \quad g = p^{-1} \circ f \circ p$.

S_n

C'est le groupe symétrique de $[1, n]$, c'est à dire l'ensemble des bijections de $[1, n]$ dans lui-même (ou permutations de $[1, n]$), muni de l'opération $\circ$. Son ordre est $n!$.

SOMME DIRECTE

1) Somme directe de sous-espaces.

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous espaces de E ; soit $F = F_1 + \ldots + F_p$.

On dit que $F_1, \ldots, F_p$ sont *en somme directe* (ou que la somme $F_1 + \ldots + F_p$ est *directe*) lorsque chaque F_i a une intersection réduite à $\{0\}$ avec la somme des F_j, $j \neq i$ (si $p = 2$, cette condition revient à $F_1 \cap F_2 = \{0\}$).

Une CNS est : $\forall (x_i) \in \prod_{i=1}^{p} F_i \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, p] \ \ x_i = 0$.

Notation : $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Une autre CNS est : $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p \Leftrightarrow \forall x \in F \ \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

Les x_i sont alors appelés les *composantes* de x dans la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$.

On a $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

2) Somme directe d'endomorphismes.

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous espaces de E vérifiant $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$, et $f_1, \ldots, f_p$ des endomorphismes de $F_1, \ldots, F_p$.

La somme directe des f_i est l'endomorphisme f de E défini par $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i)$ où les x_i sont les composantes de x dans la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$.

SOUS-ESPACE VECTORIEL

Une partie F d'un K-espace vectoriel est dite *sous-espace vectoriel* de E lorsqu'on peut définir les restrictions des 2 opérations interne et externe à F (autrement dit que F est *stable* pour ces opérations), et que F muni de ces 2 restrictions est un K-espace vectoriel.

On a la CNS : F est un sous espace vectoriel de E $\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \ 0 \in \mathrm{F} \\ 2)\ \ \forall x, y \in \mathrm{F} \quad x+y \in \mathrm{F} \\ 3)\ \ \forall \lambda \in \mathrm{K}\ \ \forall x \in \mathrm{F} \quad \lambda x \in \mathrm{F} \end{cases}$

2) et 3) peuvent être regroupées en $\forall x, y \in \mathrm{F}\ \forall \lambda \in \mathrm{K} \quad x+\lambda y \in \mathrm{F}$.

SPECTRE

Le *spectre* d'un endomorphisme d'espace vectoriel est l'ensemble de ses valeurs propres.

STABLE

1) Stabilité pour une opération interne.
Soit E un ensemble muni d'une opération $*$.
Une partie F de E est dite *stable* pour $*$ lorsque $\forall x, y \in \mathrm{F} \quad x * y \in \mathrm{F}$.

2) Stabilité pour une opération externe : . à opérateurs dans K.
Une partie F de E est dite *stable* pour . lorsque $\forall x \in \mathrm{F}\ \forall \lambda \in \mathrm{K} \quad \lambda x \in \mathrm{F}$.

3) Stabilité d'un sous espace par un endomorphisme.
Soit *f* un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E.
Un sous espace F de E est dit stable par *f* lorsque $\forall x \in \mathrm{F} \quad f(x) \in \mathrm{F}$, autrement dit lorsque $f(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$.

On peut alors définir la restriction de *f* à F $f_{|\mathrm{F}}$ définie par $\begin{array}{l} \mathrm{F} \to \mathrm{F} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.

SUPPLÉMENTAIRE

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E, un *supplémentaire* de F dans E est un sous-espace G tel que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$. Si E est de dimension finie, tout sous-espace possède au moins un supplémentaire dans E.

SURJECTIF

Une application linéaire est surjective si et seulement si son image est égale à l'espace d'arrivée.

SYMÉTRIE (vectorielle)

Dilatation de rapport -1.
CNS : endomorphisme involutif.

SYMÉTRIQUE (MATRICE)

Une matrice A de $M_n(K)$ est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.
Les matrices symétriques de $M_n(K)$ en forment un sous-espace (mais pas une sous-algèbre) de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

SYSTÈME LINÉAIRE

Un *système linéaire* est une conjonction d'équations linéaires : $(\mathrm{S})\left\{\forall i \in [1,n] \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i\right.$, équivalent à AX=B où $\mathrm{A}=(a_{ij})\in M_{np}(\mathrm{K})$, X=$\begin{bmatrix} x_1 \\ .. \\ x_p \end{bmatrix}$,B=$\begin{bmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$.

Sa *matrice* est $\mathrm{A}=(a_{ij})\in M_{np}(\mathrm{K})$, son *rang* celui de A.

TRACE

1) La *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux :

Si $\mathrm{A}\in M_n(\mathrm{K})$, $\mathrm{tr}(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}(i,i)$.

Les traces de 2 matrices semblables sont égales.

2) La *trace* d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est la trace commune à ses matrices.

TRANSPOSÉE

La *transposée* de la matrice $\mathrm{A}\in M_{np}(\mathrm{K})$ est la matrice $\mathrm{B}\in M_{pn}(\mathrm{K})$ définie par :

$$\mathrm{B}(i,j)=\mathrm{A}(j,i).$$

Notation : ${}^t\mathrm{A}$.

L'application $\mathrm{A}\to{}^t\mathrm{A}$ est une symétrie de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ de base l'espace des matrices symétriques et de direction l'espace des matrices antisymétriques.

TRIANGULAIRE (MATRICE)

Une matrice carrée $\mathrm{A}\in M_n(\mathrm{K})$ est dite *triangulaire* :

> *supérieure* si $\forall i,j \quad i>j\Rightarrow \mathrm{A}(i,j)=0$.

> *inférieure* si $\forall i,j \quad i<j\Rightarrow \mathrm{A}(i,j)=0$.

Une matrice triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale.

TRIGONALISATION

1) Un endomorphisme *f* d'un espace vectoriel de dimension finie est dit *trigonalisable* s'il existe une base dans laquelle sa matrice soit triangulaire supérieure (si l'on prend les vecteurs de la base en sens inverse, on obtient une matrice triangulaire inférieure). On dit qu'il *trigonalise* dans cette base.

On a la CNS : *f* est trigonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme caractéristique de *f* possède toutes ses racines dans K (c'est à dire qu'il est scindé sur K).

Par conséquent, si K = $\mathbb{C}$ tout endomorphisme est trigonalisable.

Mais dans $\mathbb{R}^2$, par exemple, les rotations vectorielles ne sont pas trigonalisables.

2) Une matrice carrée A d'ordre *n* à coefficient dans K est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), (c'est à dire qu'il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit triangulaire).

Il est équivalent de dire que l'endomorphisme de K^n que A représente est trigonalisable (et alors tous les endomorphismes qu'elle représente le sont aussi).

TRIVIAL

1) La combinaison linéaire *triviale* des (x_i) est $\sum_{i=1}^{n}0x_i$.

2) Les sous-espaces *triviaux* de E sont $\{0\}$ et E.