Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Entourer votre professeur de cours : Mme Trémoulet (amphi A,C et D) / M. Rodot (amphi B) / M. Laïb (classe E1)

Consignes :

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (3 points)

Imaginons tous les étudiants d'EPITA réunis autour d'une dégustation de bières du monde entier. On note E l'ensemble des étudiants et B l'ensemble des bières. Associer les assertions 1, 2, 3, 4, 5 et 6 aux phrases a, b, c, d, e, f :

1. $\forall x \in E\ \forall b \in B$, x goûte b
2. $\exists x \in E\ \forall b \in B$, x goûte b
3. $\forall x \in E\ \exists b \in B$, x goûte b
4. $\forall b \in B\ \exists x \in E$, x goûte b
5. $\exists b \in B\ \forall x \in E$, x goûte b
6. $\exists b \in B\ \exists x \in E$, x goûte b

a. Certains étudiants goûtent à toutes les bières.

b. Toutes les bières sont entamées.

c. Chaque étudiant goûte à chaque bière.

d. Il y a au moins un étudiant qui goûte une bière.

e. Tous les étudiants goûtent au moins une bière.

f. Il y a une bière qui fait l'unanimité.

Exercice 2 (2,5 points)

Donner la négation des phrases suivantes :

1. « si l'hiver n'est pas trop rude, je ferai des économies d'énergie »

2. « Théo se joint à nous si et seulement si je sors de chez moi »

3. « tous les TGV sont rapides »

4. « certains étudiants s'endorment en cours de maths ! »

5. « certains étudiants n'aurons pas la moyenne au contrôle de maths »

Exercice 3 (2,5 points)

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \times 6 \times \cdots \times (4n-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

[suite du cadre page suivante]

Exercice 4 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $71x + 19y = 2$.

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $71x + 19y = 2$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (3 points)

Soit p un nombre premier.

1. Soit k un entier tel que $0 < k < p$. Montrer que p divise C_p^k.

2. Montrer le petit théorème de Fermat : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n\,[p]$.

Exercice 6 (2 points)

Déterminer l'ordre exact de multiplicité de la racine 2 du polynôme $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

Exercice 7 (3 points)

Dans chacune des deux questions suivantes, vous devez utiliser obligatoirement le théorème de Bézout.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : $(a+b)$ et ab premiers entre eux $\Longrightarrow a$ et b premiers entre eux

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : a et b premiers entre eux $\Longrightarrow (a+b)$ et ab premiers entre eux

Exercice 8 (2 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X - 16$.