NOM : .... PRENOM :.. GROUPE :........

Partiel n°1 de Physique (Durée 1h 30)

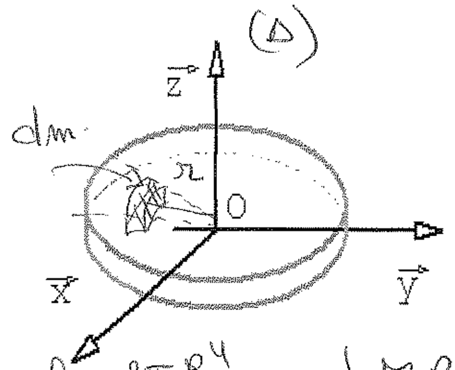
Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet

Exercice 1 (Sur 3 points) BONUS !

1- Calculer le moment d'inertie I_{Oz}, d'un disque plein de rayon R, d'axe Oz, de masse M et de masse volumique constante ρ. (Donner le résultat en fonction de M et de R. ($d\tau_{cyl} = r dr d\theta dz$)

$$I_{Oz} = \iiint_\tau \rho \cdot d^2 \cdot d\tau .$$

avec $d = r$: distance entre l'axe de rotation $(\Delta) = Oz$ et la masse dm.

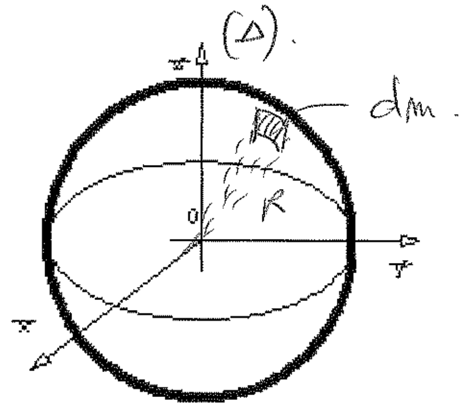


$$I_{Oz} = \int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{M}{\pi R^2 h} \cdot r^2 \cdot r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$I_{Oz} = \frac{M}{\pi R^2 h} \cdot \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r^3\, dr = \frac{M}{\pi R^2 h} \cdot h \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

2- Calculer le moment d'inertie I_Δ d'une sphère creuse de rayon R, de masse M et de masse surfacique ρ_S constante. Donner le résultat en fonction de M et de R. (Calculer d'abord I_O). On donne : $dS_{sph} = R^2 \sin(\theta) d\theta . d\varphi$.

"dm" situé à R du centre.



$$I_O = \iint_S \rho_S \cdot R^2 \cdot dS .$$

$$= \rho_S \cdot R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

$$= \underbrace{\frac{M}{S_{sphère}}}_{\rho_S} \cdot R^4 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2}$$

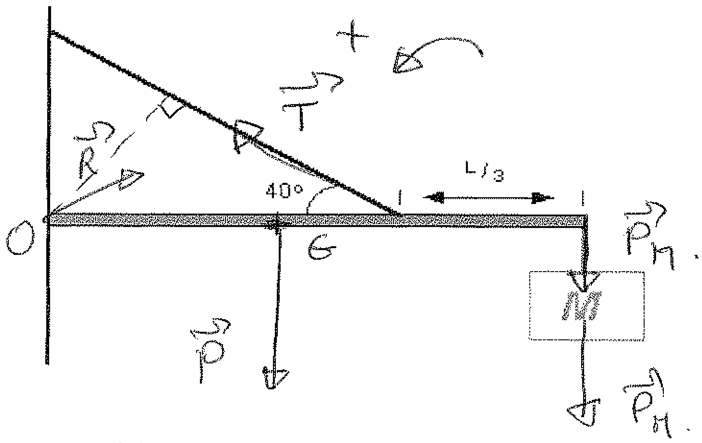
$$S_{sphère} = 4\pi R^2$$

$$I_O = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot R^4 \cdot 4\pi = M R^2 \quad \text{Or} \quad \boxed{I_\Delta = \frac{2}{3} I_O}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_\Delta = \frac{2}{3} M R^2}$$

Exercice 2 Etude d'un système en équilibre (Sur 6 points)

Une poutre de 100 N et de 1 m de longueur supporte une charge de 200 N à son extrémité droite. Un câble relié à un mur maintient la poutre en équilibre. $\alpha = 30°$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(30°) = \frac{1}{2}$



1-Représenter les forces extérieures exercées sur la poutre.

2- Enoncer les deux conditions d'équilibre.

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ équilibre de translation.

$\sum \vec{M}/_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ " de rotation.

3- Calculer la tension T du câble.

Calcul de T

on utilise $\sum \vec{M}/_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ (pour éliminer R)

$$\vec{M}/_O(\vec{R}) + \vec{M}/_O(\vec{T}) + \vec{M}/_O(\vec{P}_M) + \vec{M}/_G(\vec{P}) = 0.$$

$$\vec{0} + T \cdot \frac{2}{3}L \cdot \sin(40°) - P_M L - P_G \cdot \frac{L}{2} = 0.$$

$$T \cdot \frac{2}{3}\sin(40°) = \frac{P}{2} + P_M.$$

$$\boxed{T = \frac{3}{2\sin 40°}\left(\frac{P}{2} + P_M\right)}$$

4- Calculer les composantes horizontale : $\overline{R}_x$ et verticale : $\overline{R}_y$ de la réaction du mur sur la poutre.

on utilise $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{P}_H + \vec{P} = \vec{0}.$$

projection $\begin{cases} \text{sur } \vec{Ox} : & \overline{R_x} - T\cos 40° + 0 + 0 = 0 \ (1) \\ \text{sur } \vec{Oy} : & \overline{R_y} + T\sin 40° - P - P_H = 0 \ (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \begin{cases} \overline{R_x} = T\cos 40° \\ \overline{R_y} = P + P_H - T\sin 40° \end{cases}$ $(2) \Rightarrow$ avec $T = \dfrac{3}{2\sin 40}\left(\dfrac{P}{2} + P_H\right)$

Exercice 3 *Cinématique (Sur 7 points)*

Le vecteur position en coordonnées polaires est donné par : $O\vec{M} = r.\vec{e}_r$

1- Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

On donne : $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{e}_r).$$

$$= \frac{d}{dt}(r)\,\vec{e}_r + r.\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + (\dot{\theta} r)\,\vec{e}_\theta.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right).$$

$$= \frac{d}{d}(\dot{r})\,\vec{e}_r + \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{\dot{\theta}\vec{e}_\theta} + \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\dot{r}}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\underbrace{\frac{d\dot{\theta}}{dt}}_{\ddot{\theta}}\vec{e}_\theta$$

$$+ r\dot{\theta}\,\underbrace{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}}_{-\dot{\theta}\vec{e}_r}$$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta.$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$

2- Utiliser les résultats trouvés ci-dessus pour exprimer le vecteur **vitesse** et le vecteur **accélération d'un mouvement en spirale**, sachant que les équations horaires sont données par :

$$\begin{cases} r = b.\exp(-\frac{t}{\tau}) \\ \theta = \omega.t \end{cases} \quad b,\ \omega,\ \text{et } \tau \text{ sont des constantes.}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = -\frac{1}{\tau} b e^{-t/\tau} . \vec{e}_r + b\omega e^{-t/\tau} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \underbrace{r\ddot{\theta}}_{0 \text{ car } \dot{\theta} = \omega = \text{cste}})\,\vec{e}_\theta .$$

$$= \left(\frac{b}{\tau^2} e^{-t/\tau} - b e^{-t/\tau} . \omega^2\right)\vec{e}_r + \left(2\left(-\frac{1}{\tau} b e^{-t/\tau}\right)\right)\vec{e}_\theta .$$

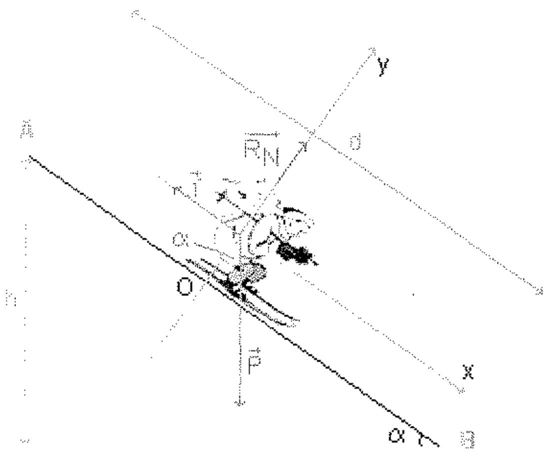
$$a_r = b\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right) e^{-t/\tau} .$$

$$a_\theta = -\frac{2b}{\tau} e^{-t/\tau} .$$

Exercice 4 **Dynamique** (Sur 7 points)

On étudie le système {skieur} de masse M, soumis aux deux forces extérieures: son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$. La force $\vec{R}$ se décompose en deux composantes:

- $\vec{R}_N$ la réaction normale perpendiculaire à la piste.
- $\vec{f}$ la force de frottement opposée au mouvement. Sachant que $f = 0.2R_N$



1- a) Exprimer la réaction R_N en fonction du poids et de l'angle α.