Contrôle 3

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (4 points)

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$

Exercice 2 (4,5 points)

On rappelle la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Considérons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)dx$.

1. Montrer (rigoureusement) que $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

2. Montrer que I converge et que $I = J$ en utilisant par exemple le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$

3. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)dx$.

4. En déduire la valeur de I.

Exercice 3 (4 points)

On considère un espace vectoriel E de dimension finie et un produit scalaire sur E noté $< .,. >$. Dans la suite, f désigne un endomorphisme de E. On dit que f est une isométrie si $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

1. Soient x et y deux vecteurs de E. Montrer que
$$< x, y >= \frac{1}{2}\big(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\big).$$

2. Montrer que si f est une isométrie alors f est bijectif.

3. Montrer que
$$f \text{ est une isométrie} \iff \forall (x,y) \in E^2, < f(x), f(y) >=< x, y > .$$

4. Soit f une isométrie telle que $f^2 = -id$. Montrer que pour tout x dans E, $f(x)$ est orthogonal à x.

Exercice 4 (4 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On rappelle le résultat suivant :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \quad \text{converge ssi} \quad \alpha > 1$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx$ converge.

2. Soit

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

   a. Déterminer la nature de $I(\alpha)$ en fonction de α.

   b. Effectuer le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ dans $I(2)$. En déduire la valeur de $I(2)$.

Exercice 5 (4 points)

On définit sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire $<,>$ défini pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$< A, B >= tr({}^tAB)$$

Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre 2 à coefficients réels et $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre 2. Déterminer $\mathscr{D}^\perp$ et $\mathscr{S}^\perp$.
N.B. : vous exhiberez une base de $\mathscr{D}^\perp$ et $\mathscr{S}^\perp$.