NOM : .... PRENOM :.. GROUPE :.........

Partiel 2 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet

1

Exercice 1 **Distribution continue de charges** (Sur 5 points)

On considère un fil infini, chargé avec une densité linéaire λ constante et positive. On montre à l'aide des règles de symétrie que le vecteur champ électrique est porté par (Ox) et que le champ élémentaire $dE_x(M)$ créé par une charge élémentaire dQ, en un point M extérieur au fil est : $dE_x(x) = \frac{k.\lambda}{x}\cos(\alpha)d\alpha$ (figure 1). On pose : OM = x.

1- Utiliser l'expression donnée ci-dessus pour exprimer le champ total E(M) créé par le fil **infini, en fonction de k, λ et x.**

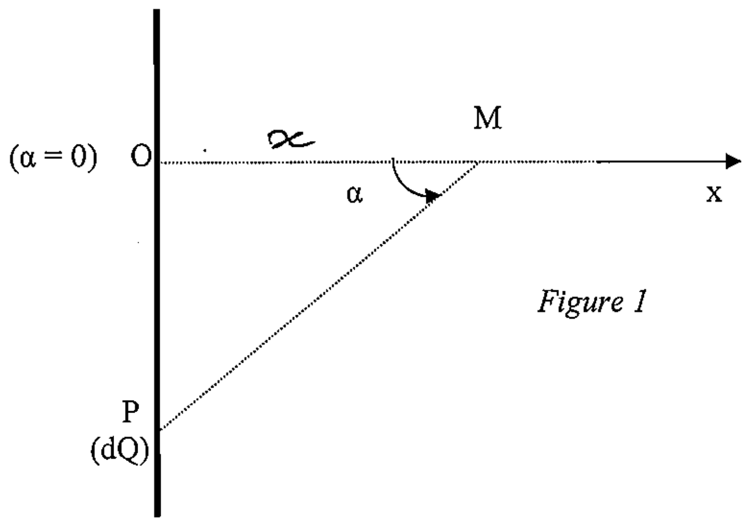


Figure 1

Pour un fil infini α varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\pi/2$

d'où $E(M) = \frac{k\lambda}{x} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha)\, d\alpha = \frac{k\lambda}{x} \cdot 2\underbrace{\sin(\pi/2)}_{1}$

$\Rightarrow \boxed{E(M) = \frac{2k\lambda}{x}}$

2- Soit un fil fini de longueur AB = a, chargé uniformément avec une densité linéaire λ positive. Le point O est le centre de AB et M un point de la médiatrice au fil, tel que OBM = β = π/6.

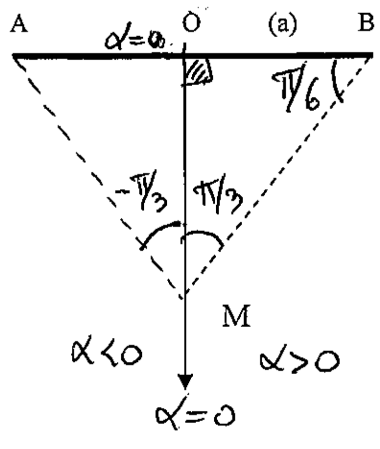


Figure 2

$-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq +\pi/3$.

$OB = OA = \frac{a}{2}$

A ⟶ B.

9

a- Utiliser l'expression du champ élémentaire en fonction de α (donnée plus haut), pour exprimer l'intensité du champ électrique créé par le segment AB, au point d'observation M. (en fonction de k, λ et a)

$$E(M) = \frac{k\lambda}{OM} \cdot \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(\alpha)\, d\alpha = 2\frac{k\lambda}{OM} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

avec $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $OM = ?$ on a $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{OM}{a/2}$.

$$\Rightarrow OM = \frac{a}{2}\, tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

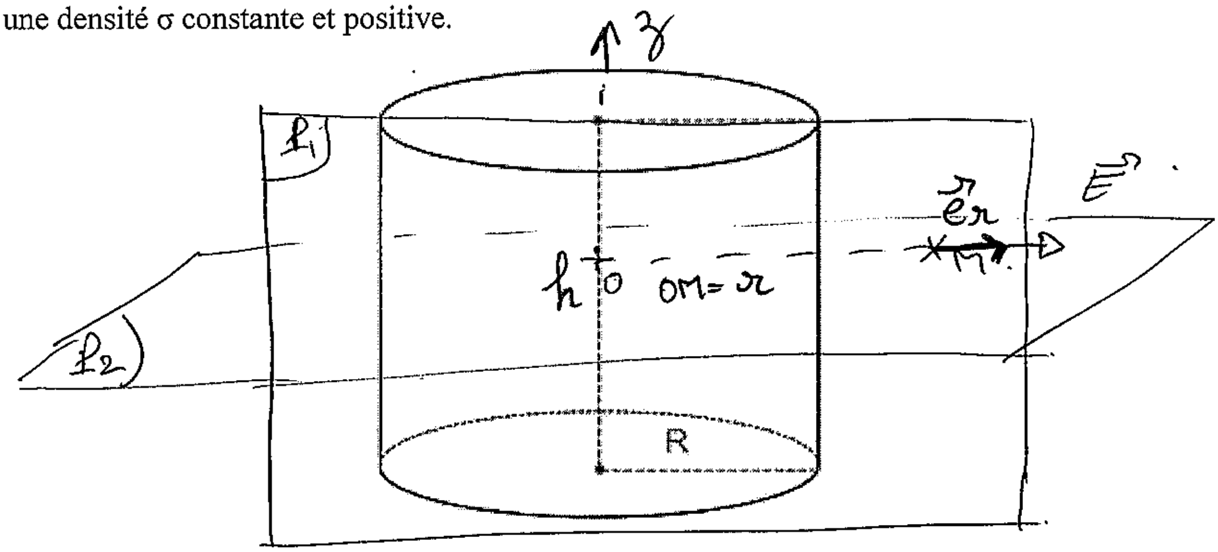
$$E(M) = \frac{2k\lambda \cdot \sqrt{3}/2}{a/2\sqrt{3}} = \frac{6k\lambda}{a}.$$

b- Représenter le champ $\vec{E}_{AB}(M)$ sur la figure 2.

Exercice 2 : *Théorème de Gauss*

Partie A (Sur 5 points)

Un cylindre creux d'axe Oz, de rayon R, de longueur infiniment grande h est chargé en surface latérale avec une densité σ constante et positive.



1- a. Utiliser les règles de symétrie pour trouver la direction du champ électrique $\vec{E}$.

P_1 : 1er plan de sym passant par M

P_2 : 2è " " (car h infini) passant par M.

$\vec{E} \in P_1 \cap P_2$ d'où $\vec{E}$ porté par (OM)

$\sigma > 0 \Rightarrow \vec{E}$ divergent et radial $\vec{E} = E.\vec{e}_r$

3

b- Utiliser les invariances pour déterminer les variables de dépendance du champ E.

• le cylindre est invariant par rotation d'angle θ autour de $\vec{Oz}$ d'où E ne dépend pas de θ.
• le cylindre est invariant par translation sur (Oz) car h est infini d'où E ne dépend pas de z.
Concl : $\vec{E} = E(r).\vec{e_r}$.

2- a. A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique, dans les régions r < R et r > R.

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS}$$

S_g = cylindre de rayon r et de hauteur h.

$$\Phi(\vec{E}) = \int_0^h\int_0^{2\pi} E.\, r\,d\theta\, dz \qquad (\vec{E} \text{ ne traverse que } S_{latérale})$$

$$= E.2\pi r h.$$

$r<R$ $Q_{int}=0$ (cyl creux) $\Rightarrow$ $E=0$.

$r>R$ $Q = \iint_S \sigma.dS = \sigma.2\pi R h \Rightarrow E.2\pi r h = \dfrac{\sigma.2\pi R h}{\varepsilon_0}$

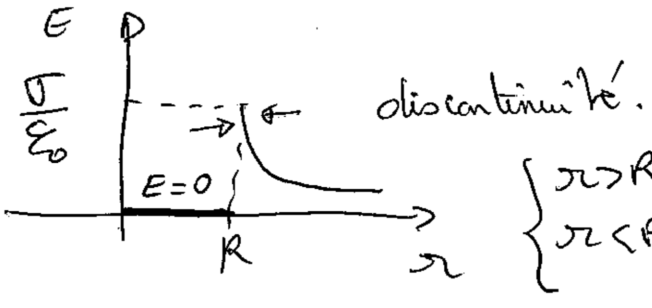
$$E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

b. Le champ E(r) est-il continu en r = R ? Justifier votre réponse.

$$\begin{cases} r<R & E=0 \\ r>R & E(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

cste $\lim\limits_{r \overset{<}{\to} R} E = 0$ et $\lim\limits_{r \overset{>}{\to} R} E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

les 2 limites n'étant pas égales, le champ est discontinu.



$$\begin{cases} r>R & E \text{ varie en } \frac{1}{r} \\ r<R & E \text{ est nul.} \end{cases}$$

3- En déduire la fonction potentiel V(r) pour (r < R et r > R).
(Ne pas calculer les constantes d'intégration)

4

on utilise $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$. *

E est radial et ne dépend que de r d'où

$* \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E\,dr$.

$\boxed{V(r) = -\int E\,dr}$ (pas de bornes !).

$\begin{cases} r < R & V = -\int 0\,dr = \text{cte} = C_1 . \\ r \geq R & V(r) = -\int \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\,dr = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + C_2 \end{cases}$

4- On suppose maintenant le cylindre chargé en volume avec une densité $\rho(r)$.

On montre que le champ électrique produit par ce système à l'extérieur (r > R) est de la forme :

$$E(r) = (\frac{\rho_0 . R^2}{3\varepsilon_0}).\frac{1}{r} \qquad \text{(Où } \rho_0, \varepsilon_0 \text{ et R sont des constantes).}$$

Retrouver l'expression de la charge Q_{int} (charge totale du cylindre), en fonction de ρ_0, h et R.

On a $\Phi(\vec{E}) = E . 2\pi r h$

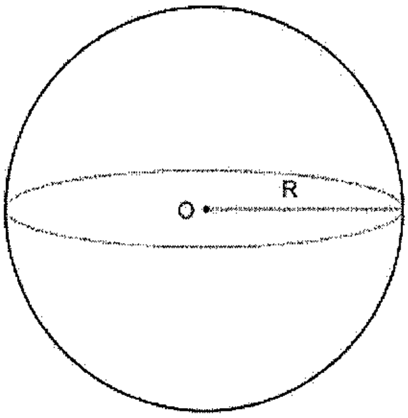
$\underline{r > R}$ $\Phi(\vec{E}) = E . 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} . \frac{1}{\cancel{r}} . 2\pi \cancel{r} h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{Q_{int} = \frac{2}{3}\pi \rho_0 R^2 h}$ en Coulomb

Partie B (Sur 3 points)

Une sphère creuse de centre O, de rayon R est chargée en surface avec une densité σ, constante et positive.



1- a. Utiliser les règles de symétrie pour trouver la direction du champ électrique.

5

Il existe une infinité de plans de symétries passant par M et le centre de la sphère O, dont l'intersection donne la droite (OM), $\vec{E}$ est porté par (OM) et il est donc radial $\vec{E} = E.\vec{e}_r$.

b. Utiliser les invariances pour déterminer les variables de dépendance du champ E.

la sphère est invariante par rotation d'angle θ (car σ cste)
" " " " φ (" ")
E ne dépend ni de θ, ni de φ $\Rightarrow E = E(r)$.

2- A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique, dans les régions r < R et r > R.

$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS}$ $\vec{E}$ radial et divergent

S_g = sphère de rayon r.

$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = E.S_g = E.4\pi r^2$

r<R $\quad Q_{int} = 0 \quad E = 0$.

r>R $\quad Q_{int} = \iint_{S_{sphère}} \sigma dS = \sigma.4\pi R^2$ cste.

$\Rightarrow E.4\pi r^2 = \dfrac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 . r^2}$

Exercice 3 : Electrocinétique (Sur 4 points)

Un conducteur en cuivre, de conductivité $\gamma = 10^8\,\Omega^{-1}.m^{-1}$, de longueur L = 1m, de section $S = 10^{-6}m^2$, est traversé par un courant I de densité $\vec{J}$ uniforme de valeur I = 16 A.

Calculer :

1- L'intensité du vecteur densité de courant $\vec{J}$ traversant le conducteur.

2- Le champ électrique à l'intérieur du conducteur. Représenter les grandeurs I, $\vec{J}$ et $\vec{E}$.

3- La différence de potentiel U entre les bornes du conducteur.

4- La résistance R du conducteur.

5- La vitesse moyenne des charges sachant que : $q_{e-} = -1.6.10^{-19}C$ et $n_{e-} = 10^{26}m^{-3}$.

6

1- $I = \iint \vec{J} \cdot \vec{dS}$ ($\vec{J}$ unif) $\Rightarrow I = J \cdot S$.

$J = \frac{I}{S} = \frac{16}{10^{-6}} = 16 \cdot 10^6 \ A/m^2$

2- $J = \gamma E \Rightarrow E = \frac{J}{\gamma} = \frac{16 \cdot 10^6}{10^8} = 0{,}16 \ V m^{-1}$

(I de m̂ sens que $\vec{J}$ et $\vec{J}$ colin à $\vec{E}$)

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ I $\vec{J}$

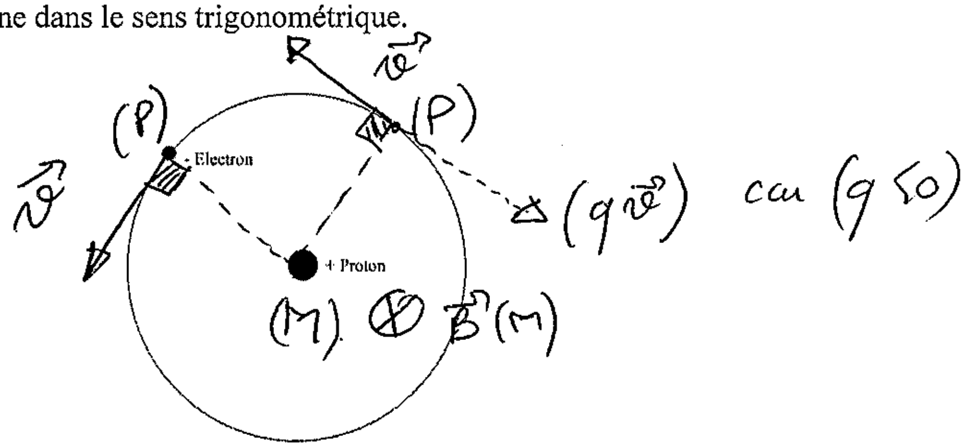
3- $U = E \cdot l = 0{,}16 \ V$

4- $U = RI \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{0{,}16}{16} = 10^{-2} \ \Omega = 10 \ m\Omega$

5- $J = n |q_{\bar{e}}| \langle v \rangle \Rightarrow \langle v \rangle = \frac{J}{n_e |q_{\bar{e}}|} = \frac{16 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{26}} = 1 \ m s^{-1}$

Partie Cours Magnétostatique (Sur 3 points).

L'électron est animé d'un mouvement de rotation autour du proton de l'atome d'hydrogène. On suppose que l'électron tourne dans le sens trigonométrique.



On montre qu'une particule de charge q et de vitesse V crée un champ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{V} \wedge P\vec{M}}{PM^3}$

1- Exprimer le module du champ magnétique créé au niveau du proton en fonction de V, e, μ_0 et R. (R : rayon de l'atome, $|q_{e-}| = e$).

$\|\vec{B}(M)\| = \mu_0 |q| \frac{v}{4\pi} \cdot \frac{PM}{(PM)^3} \cdot \sin(\pi/2)$ $(PM = R)$.

$\|\vec{B}\| = \mu_0 \cdot e \cdot \frac{v}{4\pi R^2}$

2- Représenter le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ en appliquant la règle du trièdre direct entre $(q\vec{v})$ et $(\vec{PM})$ on trouve $\vec{B}$ entrant $\otimes \vec{B}(M)$.

Formulaire

7

1- Théorème de Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{Sg} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

2- Elément de surface latérale en coordonnées cylindriques

$$dS_{lat} = r d\theta dz \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

3- Elément de surface en coordonnées sphériques

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta . d\varphi \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

4- Charge répartie en surface

$$Q = \iint_S \sigma . dS$$

5- Les composantes du gradient en coordonnées cylindriques

$$\vec{grad} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$