Circuits au régime sinusoïdal forcé

I Généralités : signaux variables

1- Définitions

Signal variable ≠ Signal continu

Notation : On utilise les lettres minuscules

Signaux variables → Non périodiques
Signaux variables → Périodiques → sinusoïdes
Périodiques → Tous les autres

Signaux périodiques : Oscillation / Motif qui se répète à intervalles de temps réguliers

Période : T = (Durée d'un motif oscillation) en s.

Fréquence : $f = \frac{1}{T}$ Nombre d'oscillation par s en Hz.

2- Signaux sinusoïdaux

Soit $s(t)$, signal sinusoïdal

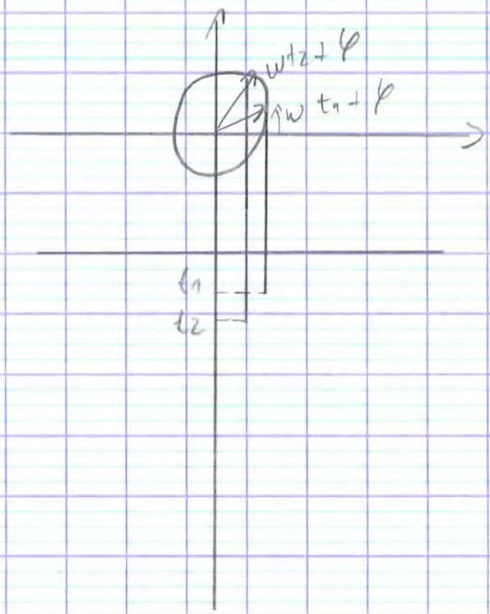
$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$$

(ou $s(t) = S\sin(\omega t + \varphi)$)

- $s(t)$ = Valeur instantanée
- S = valeur max de $s(t)$

S = constante $\in \mathbb{R}^{+*}$

• ω = pulsation en rad.s^{-1}
= vitesse angulaire



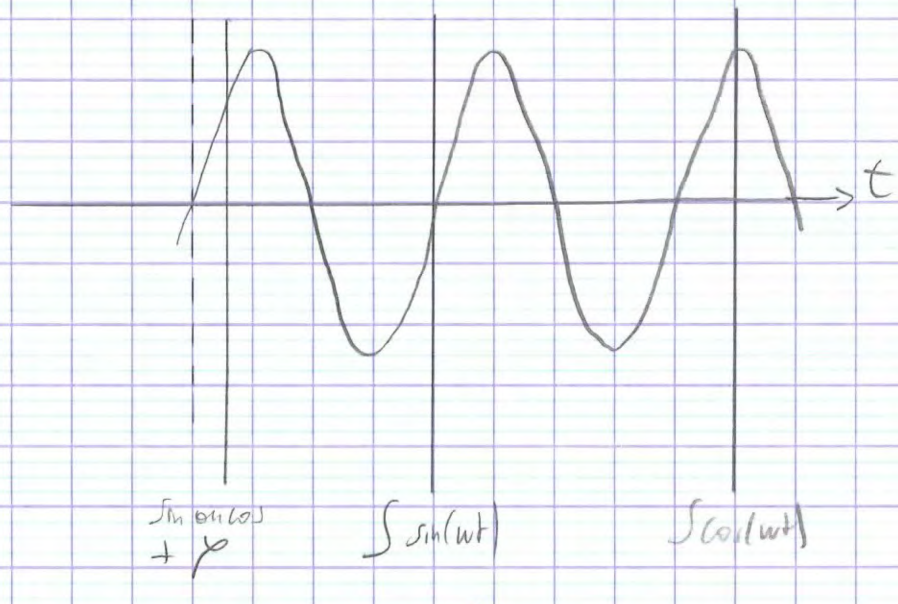
$1s \rightarrow \omega$

$Ts \rightarrow 2\pi$

$2\pi = \omega . T \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = 2\pi f$

φ = phase à l'origine des tps (en rad)



$S_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$S_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$\varphi_2 - \varphi_1$ = Déphasage de s_2 par rapport à s_1

3- Valeurs moyenne et efficace

a. Valeur moyenne

× Cas d'un courant variable $i(t)$

La valeur moyenne de $i(t)$ est la valeur du courant continu I qui transporterait la même quantité d'électricité que $i(t)$ pendant la même durée.

Traduction en équation

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i\,dt$$

Entre t_2 et t_1, I transporte

$$Q_C = \int_{t_1}^{t_2} I\,dt = I\int_{t_1}^{t_2} dt = I\,(t_2 - t_1)$$

Entre t_2 et t_1, $i(t)$ transporte $Q_T = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$

I = Valeur moyenne de $i(t)$ si $Q_C = Q_T$

si $I\,(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$

si $I = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$

× Généralisation

La valeur moyenne S_{moy} d'un signal variable $s(t)$ est

$$S_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s(t)\,dt$$

× Cas des signaux T - périodiques

$$S_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)\,dt$$

b- Valeur efficace

× Cas d'un courant variable i(t)

La valeur efficace de i(t) est la valeur du courant continu I qui dissiperait, dans une même résistance, la même énergie que i(t) pendant la même durée.

Traduction en équations

$$P = u.i = Ri^2 \Rightarrow E = \int Ri^2\,dt$$

Entre t_1 et t_2, I dissipe

$$E_c = \int_{t_1}^{t_2} RI^2\,dt = RI^2 \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$= RI^2 (t_2 - t_1)$$

Entre t_1 et t_2, i(t) dissipe

$$E_v = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\,dt = R\int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$$

I = valeur efficace de i(t)

si $\cancel{R}I^2 (t_2 - t_1) = \cancel{R} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t)\,dt$

si $I = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t)\,dt}$

× Généralisation

La valeur efficace S_{eff} d'un signal variable $s(t)$ est :

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\, dt}$$

× Cas des signaux T-périodiques

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)\, dt}$$

Exemples :

→ Cas des signaux sinusoïdaux

Déterminer les valeurs moyennes et efficaces de $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$

$$S_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T S\cos(\omega t + \varphi)\, dt$$

$$= \frac{S}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^T$$

$$= \frac{S}{T\omega} \left(\underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{\sin\varphi} - \sin(\varphi) \right)$$

$= 2\pi$

$$= 0 \,.$$

$$S_{eff}^2 = \frac{S^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt$$

$$\cos\theta = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4}\left(e^{2j\theta} + 2e^{j\theta}\cdot e^{-j\theta} + e^{-2j\theta}\right)$$

$= 2\cos(2\theta)$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos(2\theta) + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right)$$

$$= \frac{S^2}{2T}\int_0^T \cos\left(2(\omega t + \varphi)\right) + 1\,dt$$

$$= \frac{S^2}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi) + t\right]_0^T$$

$$= \frac{S^2}{2T}\left(\frac{1}{2\omega}\left(\underbrace{\sin(2\omega T + 2\varphi)}_{\sin(2\varphi)} - \sin(2\varphi)\right) + T\right)$$

$$= \frac{S^2}{2T}(0 + T) = \frac{S^2}{2}$$

$$\boxed{S_{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

II Circuits en régime sinusoïdal : Définitions

1) Introduction

En régime sinusoïdal, dans un circuit linéaire, tous les courants et toutes les tensions sont des signaux sinusoïdaux de même fréquence

2) Notion d'amplitude complexe

Soit $s_1(t)$, un signal sinusoïdal, de pulsation ω, de valeur max S_1 et de phase à l'origine φ_1 | φ_2

Soient $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ tq

$$s_1 = S_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

$$s_2 = S_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

$$s_1 = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + j S_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_1 = S_1 e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_1} = \underbrace{S_1 e^{j\varphi_1}}_{\text{amplitude complexe}} \cdot e^{j(\omega t)}$$

$$s_2 = \underbrace{S_2 e^{j\varphi_2}} \cdot e^{j(\omega t)}$$

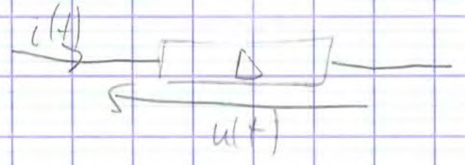
Def : On appelle amplitude complexe du signal sinusoïdal $s(t)$, le complexe

$\underline{S}$ tq $|\underline{S}| =$ Valeur max de $s(t)$

$\arg(\underline{S}) =$ Phase à l'origine de $s(t)$

3) Notion d'impédance complexe

Soit D, un dipôle linéaire



$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$

Déf On appelle impédance complexe du dipôle linéaire D le complexe $\underline{Z}$ tq $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$

où $\underline{U}$ = Amplitude Complexe de la tension aux bornes de D

$\underline{I}$ = Amplitude Complexe du courant dans D.

Rq: $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \dfrac{U}{I}$ (en Ω)

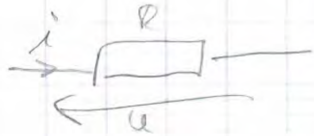
• $\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$

$= \varphi_u - \varphi_i$

= Déphasage de u(t) par rapport à i(t)

$\underline{U} = \underline{Z}\cdot\underline{I}$: Loi d'Ohm généralisée

a) Cas de la résistance



On impose $u(t) = U\cos(\omega t)$
(On dit qu'on a choisi u comme origine des phases)

On sait que $u(t) = R\,i(t)$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{U}{R}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitudes complexes :

- $\underline{U} = U e^{j0} = U e^{j\varphi_u}$
- $\underline{I} = \frac{U}{R} e^{j\varphi_u}$

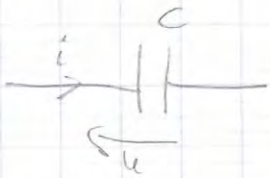
$$\Rightarrow \quad Z_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{U/R}$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_R = R}$$

- $|Z_R| = R$

$\arg(Z_R) = 0$ On dit alors que u et i sont en phase

b) Cas du condensateur



C = Capacité (en F)

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

(formule récepteur)

$\Rightarrow Z_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{U/R}$

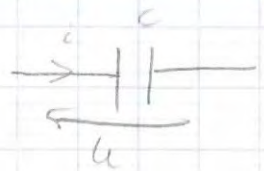
$$\Rightarrow \boxed{Z_R = R}$$

- $|Z_R| = R$
- $\arg(Z_R) = 0$ On dit que u et i sont en phase.

Rq régime continu, $u = cste \Rightarrow I = 0$

$\Rightarrow$ C se comporte comme 1 interrupteur ouvert.

Impédance complexe :



On impose $u(t) = U\cos(\omega t)$

On sait que $i(t) = C\frac{du}{dt}$

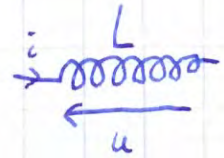
Amplitudes complexes :

- $\underline{U} = U$
- $\underline{I} = CU\omega e^{j\pi/2}$ $\quad i(t) = CU\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow Z_C = \frac{\cancel{U}}{C\cancel{U}\omega e^{j\pi/2}} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

$$|Z_C| = \frac{1}{C\omega}$$

c) Cas de la bobine



L = Inductance (en Henry H)

$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

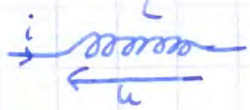
Remarque : En régime continu, I = constante $\Rightarrow U = 0$

$\Rightarrow L$ se comporte comme un fil.

Dans une bobine, le courant ne peut pas varier brutalement

$\Rightarrow$ On dit qu'il y a continuité du courant dans L

Détermination de Z_L



On impose $u(t) = U\cos(\omega t)$

$Z_L =$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\,dt$$

$$= \frac{U}{L}\int \cos(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{U}{L\omega}\sin(\omega t)$$

$$= \frac{U}{L\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$$

Amplitudes complexes

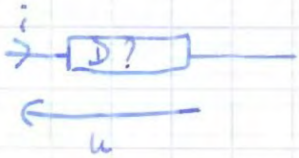
- $\underline{U} = U e^{j0} = U$
- $\underline{I} = \frac{U}{L\omega} e^{j(-\pi/2)} = \frac{-jU}{L\omega}$

$$Z_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{-jU/L\omega} = \frac{-L\omega}{j}\quad \frac{1}{j} = -j$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_L = jL\omega}$$

- $|Z_L| = L\omega$ (Ω)
- $\operatorname{Arg}(Z_L) = \pi/2$: u est en avance de $\pi/2$ par rapport à i.

Rq : Identification de dipôle



$i = I\cos(\omega t + \varphi_i)$

$u = U\cos(\omega t + \varphi_u)$

Si $\varphi_u - \varphi_i = 0 \Rightarrow D =$ Résistance

$$R = \frac{U}{I}$$

Si $\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow D =$ Condensateur

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{U}{I} \Rightarrow C = \frac{I}{U \cdot \omega}$$

Si $\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D =$ Bobine

$$L = \frac{U}{I\omega}$$

III Études de circuit

1) Associations de dipôles

Soient n dipôles linéaires. On note Z_i l'impédance complexe du ième dipôle

a) Association série

$$\underline{U} = Z_1 \underline{I} + Z_2 \underline{I} + \dots + Z_n \underline{I}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Z_i \underline{I}$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Ex :

$$Z_{eq} = Z_L + Z_C$$

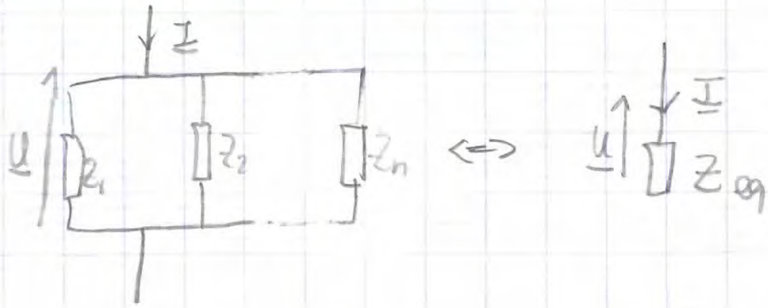
$$= jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

$$= j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$\omega \uparrow$ importance de L / C

$\omega \downarrow$ importance de C / L

b) Association parallèle

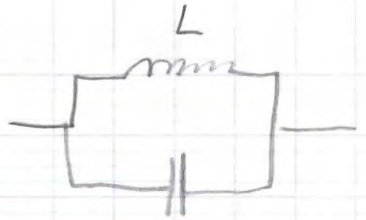


$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z_1} + \frac{\underline{U}}{Z_2} + \dots + \frac{\underline{U}}{Z_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}$$

Rq : $Y = \frac{1}{Z}$ = Admittance

Ex :



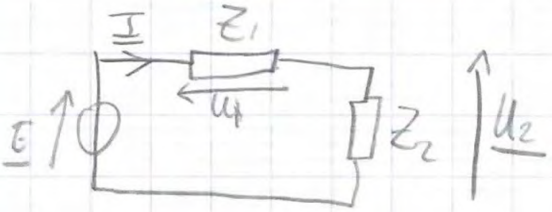
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{jL\omega \cdot \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{(jL\omega)(jC\omega) + 1}$$

$$= \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

2) Ponts diviseurs

a) De Tension



Loi d'ohm

$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}$

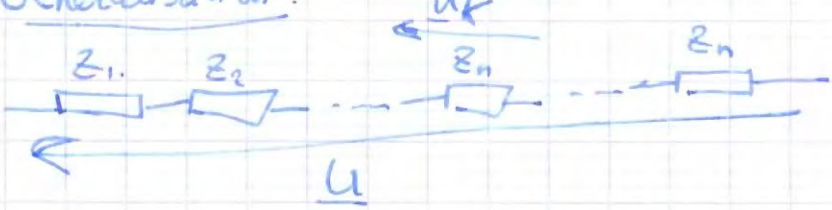
$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}$

Loi des mailles

$\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \Rightarrow \underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

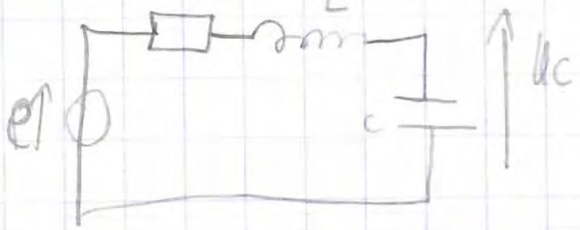
$$\Rightarrow \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{E}$$

Généralisation :



$$\underline{u}_R = \frac{Z_R}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}\,\underline{u}$$

Ex



$e(t) = E\cos(\omega t)$

Déterminer $u_C(t)$

PDT : $$\underline{u}_C = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_c}\,\underline{E}$$

$$\underline{u}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}\,E$$

$$\underline{u}_C = \frac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

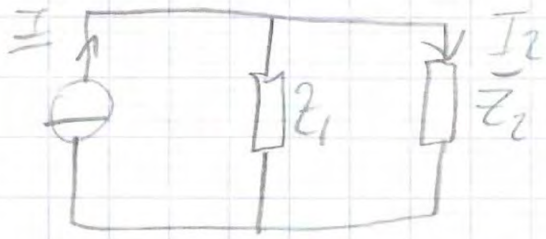
$\Rightarrow u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_C)$ avec

- $U_C = |\underline{u}_C| = \dfrac{|\underline{E}|}{|1 + jRC\omega - LC\omega^2|} = \dfrac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$

- $\varphi_C = \arg(\underline{u}_C) = \arg(\underline{E}) - \arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega)$
  $= 0 - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right)$

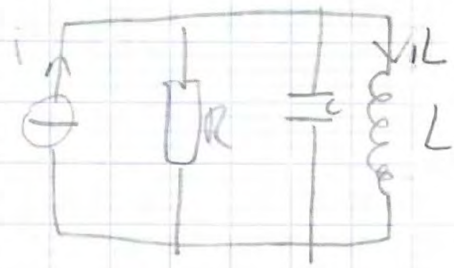
Partiel

b) De courant



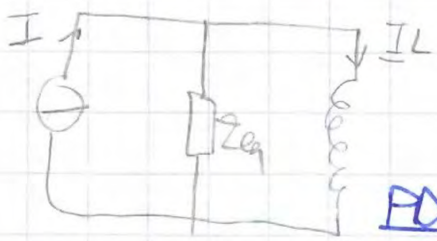
On mq $\underline{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{I}$

Ex



$i(t) = I \sin(\omega t)$

Déterminer $\underline{I}_L$



$Z_{eq} = \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$

PDC : $\underline{I}_L = \underline{I} \cdot \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + jL\omega}$

$\underline{I} = I e^{j0}$
$= I$

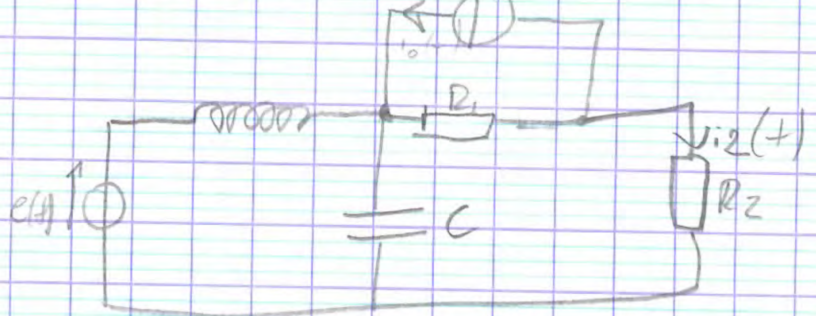
$= \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{1 + jRC\omega} + jL\omega} \underline{I}$

$$\boxed{\underline{I}_L = \frac{R}{R + jL\omega - RLC\omega^2}}$$

3) Analyse de circuits linéaires

Rappel : En modélisation complexe, les relations entre les courants et les tensions sont des relations de "proportionalité".

⇒ les méthodes exploitées pour l'analyse des circuits en régime continu sont applicables en utilisant les amplitudes et les impédances complexes.



partiel

$e(t) = E\cos(\omega t)$

$i_0(t) = I_0 \sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Déterminer $i_2(t)$

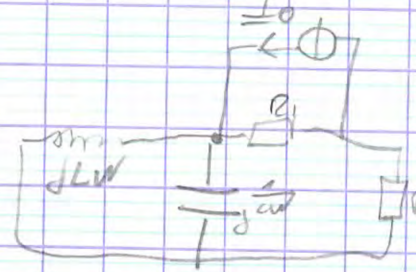
Amplitudes complexes

PDT :

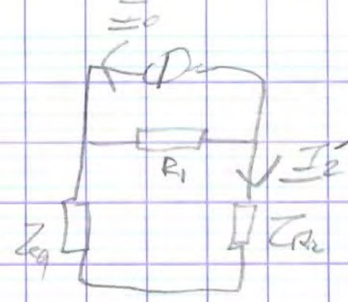
- $\underline{E} = E$
- $\underline{I_0} = I_0 e^{-j\pi/2} = -jI_0$

a) théorème de superposition

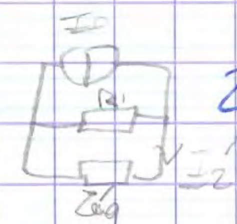
État 1 : On conserve i_0



⇒



$$\underline{Z_{eq}} = \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$$



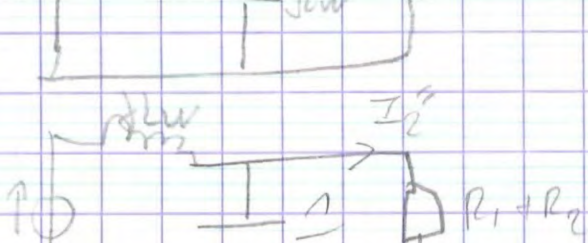
$$Z'_{eq} = R_2 + j\frac{L\omega}{1-LC\omega^2}$$

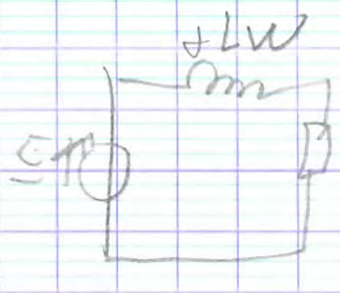
<u>PDC</u> :
$$\underline{I}'_2 = \underline{I}_0 \times \frac{R_1}{R_1 + Z'_{eq}}$$

$$= - \frac{R_1}{R_1+R_2 + j\dfrac{L\omega}{1-LC\omega^2}}$$

$$= \frac{R_1(1-LC\omega^2)}{(R_1+R_2)(1-LC\omega^2)+jL\omega}\,\underline{I}_0$$

<u>Etat 2</u> : On conserve e





$$\underline{Z}_{eq}'' = \frac{R_1 + R_2}{1 + j(R_1+R_2)C\omega}$$

PDT : $$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{eq}''}{\underline{Z}_{eq}'' + jL\omega}\,\underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{\dfrac{R_1+R_2}{1+j(R_1+R_2)C\omega}}{\dfrac{R_1+R_2}{1+j(R_1+R_2)C\omega} + jL\omega}\,\underline{E}$$

$$= \frac{R_1+R_2}{(R_1+R_2) + jL\omega - (R_1+R_2)LC\omega^2}\,\underline{E}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}}{(R_1+R_2)(1-LC\omega^2) + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{E} - R_1(1-LC\omega^2)\underline{I}_0}{(R_1+R_2)(1-LC\omega^2) + jL\omega}$$

Cl : $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ avec

$$I_2 = |\underline{I}_2| = \frac{|\underline{E} - R_1(1-LC\omega^2)\underline{I}_0|}{|(R_1+R_2)(1-LC\omega^2) + jL\omega|}$$

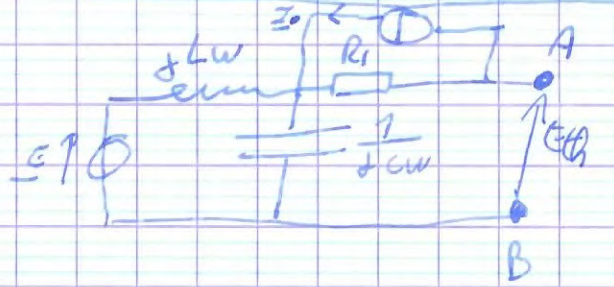
$$= \frac{\sqrt{E^2 + R_1^2(1-LC\omega^2)^2 I_0^2}}{\sqrt{(R_1+R_2)^2(1-LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\varphi_2 = \arg(\underline{I}_2)$$

$$= \mathrm{Arctan}\left(\frac{R_1(1-LC\omega^2)\underline{I}_0}{\underline{E}}\right)$$

$$= \mathrm{Arctan}\left(\frac{L\omega}{(R_1+R_2)(1-LC\omega^2)}\right)$$

b- Théorème de Thevenin et Norton



Rappels

valeur

$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude complexe

$$\underline{S} = S e^{j\varphi}$$

$\Rightarrow |\underline{S}| = S$

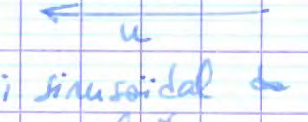
$\arg(\underline{S}) = \varphi$

	déphasage de s_1 par rapport à s_2
$s_1(t) = S_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ $s_2(t) = S_2\cos(\omega t + \varphi_2)$	$\varphi_1 - \varphi_2$
$s_1(t) = S_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ $s_2(t) = S_2\sin(\omega t + \varphi_2)$	$\varphi_1 - \varphi_2$
$s_1(t) = S_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ $s_2(t) = S_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ $= S_2\cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{\pi}{2})$	$\varphi_1 - (\varphi_2 - \frac{\pi}{2})$

Rq si $s_1(t) = S_1\sin(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2})$

$$\varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

- Impédance complexe



i sinusoïdal de pulsation ω $\Rightarrow$ u sinusoïdal de pulsation ω

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$\underline{Z}$ = Impédance complexe

• $|Z| = \frac{|U|}{|I|} = \frac{U}{I}$ en Ω

• $\arg(Z) = \arg(U) - \arg(I)$

= Déphasage de u par rapport à i.

• Résistance : $\boxed{Z_R = R}$

$$\begin{cases} |Z_R| = R \\ \arg(Z_R) = 0 \end{cases}$$

• Condensateur $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

$|Z_C| = \frac{1}{C\omega}$

$\arg(Z_C) = -90° = \arg(1) - \arg(jC\omega)$

$= 0 - \frac{\pi}{2}$

• Bobine $Z_L = jL\omega$

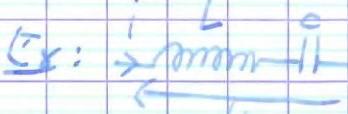
$|Z_L| = L\omega$

$\arg(Z_L) = \frac{\pi}{2}$

• Associations de dipôles

→ En série : $Z_{eq} = \sum Z_i$

→ En // : $\frac{1}{Z_{eq}} = \sum \frac{1}{Z_i}$

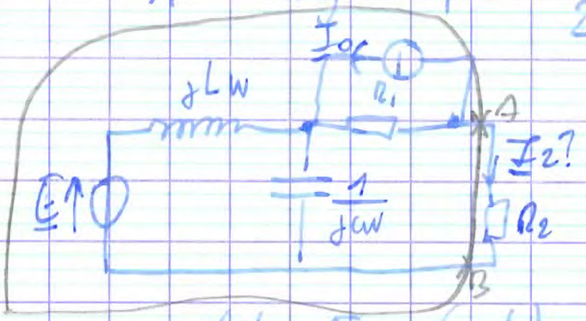
Ex : 

Déphasage de u par rapport à i ?

$Z_{eq} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow$

$|Z_{eq}| = \left| j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \right| = \left| L\omega - \frac{1}{C\omega} \right|$

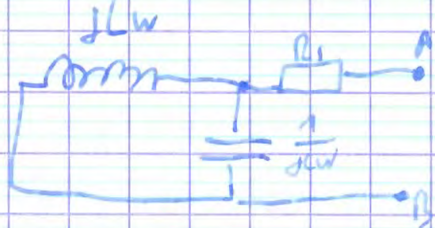
$$\varphi_{u/i} = \arg(\underline{Z}_{eq}) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ selon } \omega$$



$$e(t) = E\cos(\omega t) \rightarrow \underline{E} = E$$

$$i_0(t) = I_0 \sin(\omega t) \rightarrow \underline{I}_0 = -j\, I_0$$

. $\underline{Z}_{th}$:

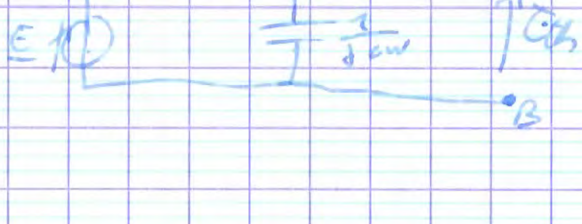


$$Z_1 = \frac{jL\omega * \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \times \frac{jC\omega}{jC\omega} = \frac{jL\omega}{1 + j^2 LC\omega^2}$$

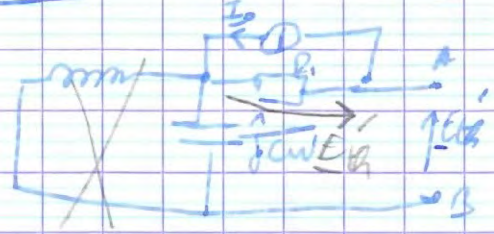
$$= \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\underline{Z}_{th} := R_1 + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

. $\underline{E}_{th}$ =

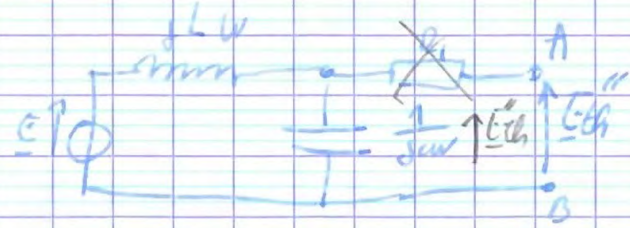


État 1 : On conserve $\underline{I_0}$



$$\underline{E'_{th}} = -R_1 \underline{I_0}$$

État 2 : On conserve $\underline{E}$



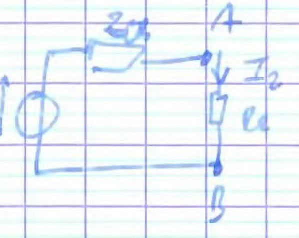
Circuit ouvert entre A et B

$\Rightarrow$ Pas de courant dans R_1

PDT
$$\underline{E''_{th}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \underline{E}$$

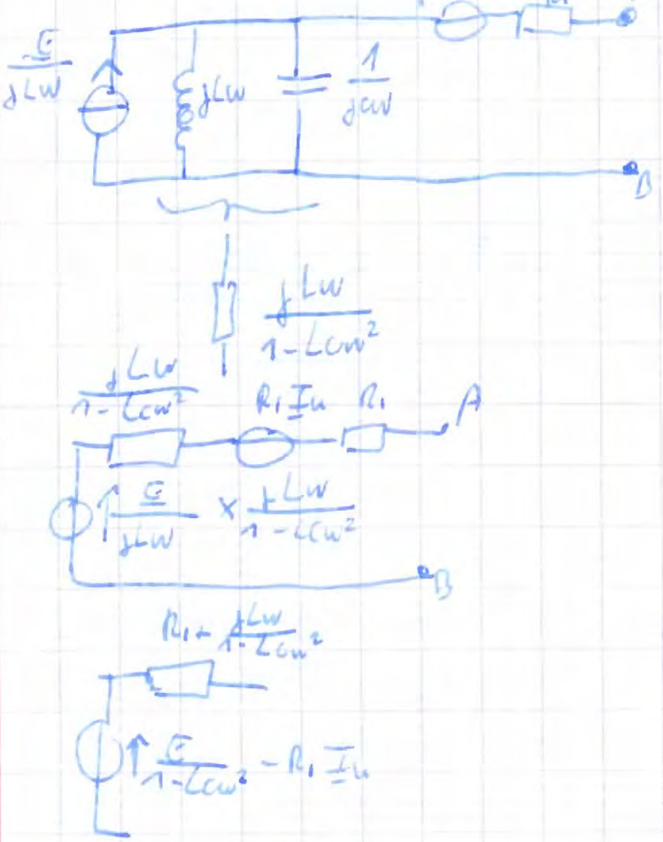
$$= \frac{E}{1 - LC\omega^2}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{th}} = \frac{\underline{E}}{1 - LC\omega^2} - R_1 \underline{I_0}$$

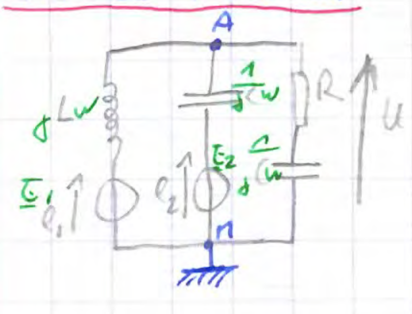


$$\Rightarrow \underline{I_2} = \frac{\underline{E_{th}}}{Z_{th} + R_2}$$

Équivalence Thévenin/Norton



Th. de Millman



$e_1(t) = E\cos(\omega t)$

$e_2(t) = E\sin(\omega t)$

Déterminer $u(t)$: sera de la forme $u\cos(\omega t + \varphi)$

$e_2(t) = E\cos(\omega t - \pi/2)$

Modélisation Complexe :

Amplitude complexe :

$\underline{E_1} = E$

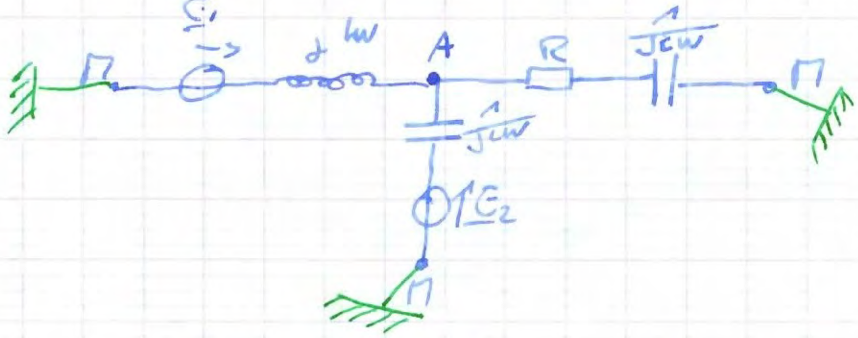
$\underline{E_2} = E e^{-j\pi/2} = -jE$

Impédance Complexes :

$Z_R = R \qquad Z_L = jL\omega$

$Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}$

Th de Millman en A :



$$\underline{V}_A = \frac{\dfrac{\underline{E}_1}{jL\omega} + \dfrac{\underline{E}_2}{\frac{1}{jC\omega}} + \dfrac{0}{R+\frac{1}{jC\omega}}}{\dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{1}{\frac{1}{jC\omega}} + \dfrac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}}$$

$$\underline{V}_A = \frac{\dfrac{\underline{E}_1}{jC\omega} + jC\omega\,\underline{E}_2}{\dfrac{1}{jC\omega} + jC\omega + \dfrac{jC\omega}{1+jRC\omega}}$$

$$\underline{U} = \underline{V}_A - \underline{V}_M = \underline{V}_A$$

$$= \frac{\underline{E}_1 - LC\omega^2\,\underline{E}_2}{1 - LC\omega^2 - \dfrac{LC\omega^2}{1+jRC\omega}}$$

$$\underline{u} = \frac{(\underline{E}_1 - LC\omega^2 \underline{E}_2)(1 + jRC\omega)}{(1 - LC\omega^2)(1 + jRC\omega) - LC\omega^2}$$

$$\underline{u} = \frac{(E + jLC\omega^2 E)(1 + jRC\omega)}{1 + jRC\omega - LC\omega^2 - RLC^2\omega^3 j - LC\omega^2}$$

$$\underline{u} = \frac{E(1 + jLC\omega^2 + jRC\omega - RLC^2\omega^3)}{(1 - 2LC\omega^2) + j(RC\omega - RLC^2\omega^3)}$$

$$\underline{u} = \frac{E\left((1 - RLC^2\omega^3) + j(RC\omega + LC\omega^2)\right)}{(1 - 2LC\omega^2) + j(RC\omega - RLC^2\omega^3)}$$

valeur max = cst en V.

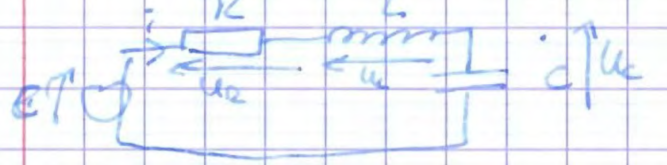
$$\to u = E\,\frac{\sqrt{(1 - RLC^2\omega^3)^2 + (RC\omega + LC\omega^2)^2}}{\sqrt{(1 - 2LC\omega^2)^2 + (RC\omega - RLC^2\omega^3)^2}} \qquad \frac{1}{1}E = \text{Volts}$$

$$\underbrace{\underset{\Omega}{R} \times \underset{\Omega}{L\omega} \times \underset{(\Omega^{-1})^2}{(C\omega)^2}}_{1} \qquad \underbrace{\underset{\Omega}{R}\,\underset{\Omega^{-1}}{C\omega}}_{1} \qquad LC\omega^2 = \underbrace{\underset{\Omega}{L\omega} \times \underset{\Omega^{-1}}{C\omega}}_{1}$$

$$\varphi = \arg(\underline{u}) = \arg(E) + \arg(\text{Numérateur}) - \arg(\text{dénominateur})$$

$$= \arctan\left(\frac{RC\omega + LC\omega^2}{1 - RLC^2\omega^3}\right) - \arctan\left(\frac{RC\omega - RLC^2\omega^3}{1 - 2LC\omega^2}\right)$$

IV La résonance



$e(t) = E \sin(\omega t)$

→ Déterminer $i(t)$:

Rq : Sans utiliser la modélisation complexe, on sait que $i(t)$ est de la forme $I \sin(\omega t + \varphi)$

Loi des mailles

$$e(t) = u_R + u_L + u_C$$

$$u_R = Ri = R \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L \cdot I\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

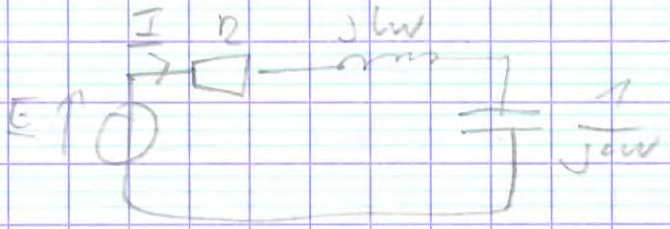
$$= L \cdot I \cdot \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = -\frac{I}{C\omega}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{I}{C\omega}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E \sin(\omega t) = RI\sin(\omega t + \varphi) + LI\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I}{C\omega}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

→ Modélisation complexe :



$$\underline{E} = R\underline{I} + jL\omega\,\underline{I} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi)$ avec

$$I = |\underline{I}| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{E}) - \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$
$$= -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$I = f(\omega)$
$\varphi = g(\omega)$

Étude de $I(\omega)$:

$I \xrightarrow{\omega \to 0} 0$

$I \xrightarrow{\omega \to \infty} 0$

I est max qd $\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ min

qd $L\omega = \frac{1}{C\omega} = ?$

qd $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

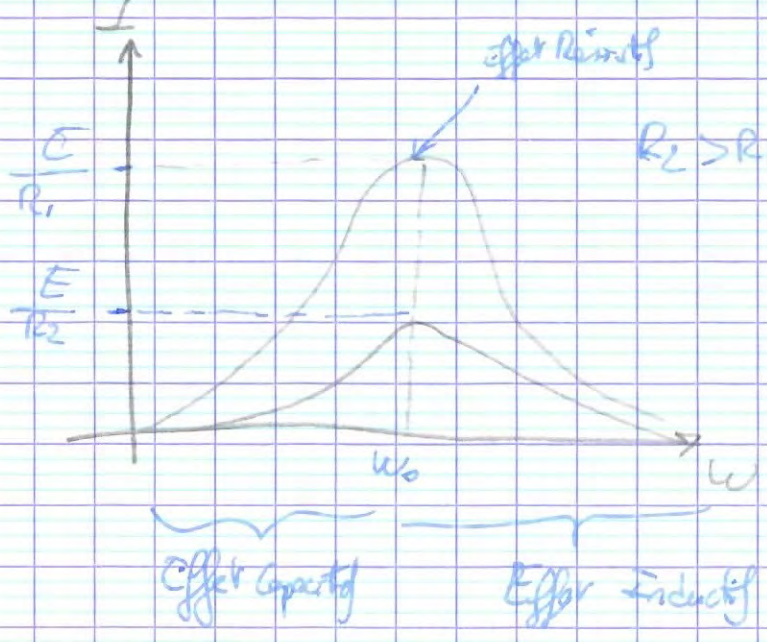
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ = pulsation propre
= pulsation de resonance
en courant.

$$Z_{eq} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

→ A la résonance,

$$Z_{eq} = R + j\underbrace{\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)}_{0}$$

$$= R$$



$$\varphi = -\mathrm{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$$\varphi \xrightarrow{\omega \to 0} -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(\omega_0) = 0$$

$$\varphi \xrightarrow{\omega \to \infty} -\frac{\pi}{2}$$

Bande Passante

= Ensemble des pulsations tel que la puissance dissipée dans le circuit soit au moins égale à la moitié de la puissance dissipée à la résonance.

Puissance dissipée = Puissance dans la résistance.

$$P = RI^2$$

À la résonance : $P_0 = R I_0^2$

$\omega \in BP$ si $P(\omega) = \cancel{R} I^2(\omega) \geq \frac{\cancel{R} I_0^2}{2}$

$$I^2(\omega) \geq \frac{I_0^2}{2}$$

$$I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$BP = \left\{ \omega \; ; \; I(\omega) \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}} \right\}$$

On appelle pulsation de coupure les pulsations tq :

$$I(\omega_c) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Contrôle 2

Q8. Déterminer les pulsations de coupure :

$$I(\omega) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} E = U \\ \sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2} = R\sqrt{2} \end{cases} \qquad R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 2$$

$$\cancel{R^2 + L^2\omega^2 - \frac{2L\omega}{C\omega} + \frac{1}{C^2\omega^2} = R}$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R$$

$$LC\omega^2 - 1 = RC\omega$$

$$\Delta = (RC)^2 + 4LC > 0$$

Donc $\omega_{c_1} = \dfrac{RC+\sqrt{(RC)^2+4LC}}{2LC} > 0$

$$\cancel{\omega_2 = \frac{RC-\sqrt{(RC)^2+4LC}}{2LC} < 0}$$

Bande passante : $[\omega'_{c_1}, \omega_{c_1}]$

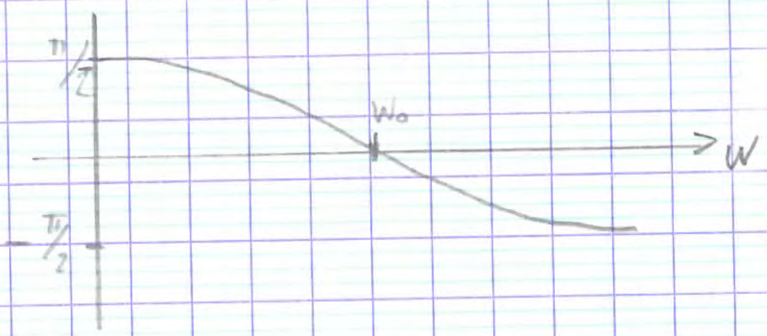
Largeur de la BP :

$$\Delta\omega = \omega_{c_1} - \omega'_{c_1}$$

$$= \frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2LC} - \left(\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}\right)$$

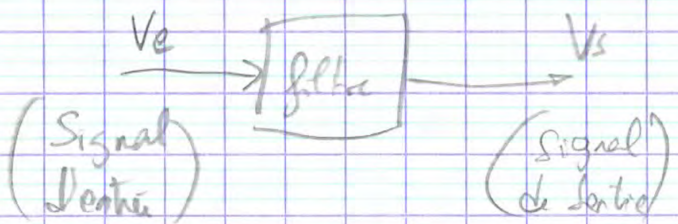
$$= \frac{2RC}{2LC} = \frac{R}{L}$$

Courbe de phase :



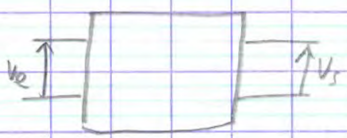
Le Filtrage

I Introduction cf. p. 64-67



Filtre passif : Circuit linéaire dont le comportement dépend de la fréquence des signaux.

II Etude de filtres - Généralités et définition



Si $V_e(t) = V_E \sin(\omega t)$ alors :

$$V_s(t) = V_S(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$V_e \to \underline{V_E} = E$$

$$V_s \to \underline{V_S} = V_S \cdot e^{j\varphi}$$

Def : On appelle fonction de transfert d'un filtre, et on note $\underline{T}(\omega)$, la fonction complexe définie par

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$$

Rq : • $|\underline{T}(\omega)| = \frac{V_s}{V_E} = A(\omega) =$ Amplification $(\in \mathbb{R}^+)$

• $\mathrm{Arg}(\underline{T}(\omega)) = \varphi(\omega) =$ Déphasage de V_s par rapport à V_E