Feuille d'exercices n°6

Intégrales impropres I, II et III

(du lundi 14 décembre 2009 au vendredi 29 janvier 2010)

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes ($(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$)

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}} dt$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) dt$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3+1} - \sqrt{t^2+1}) dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\alpha t} t^\beta dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha} dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln(t)}{1+t^{2\alpha}} dt$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{\alpha t}}{t^\beta} dt$

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ est convergente.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx$.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer par un changement de variable que

$$\int_{\alpha}^{1} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = -\int_{1}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx.$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ converge.

4. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 3

Notons $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$

1. a. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \to +\infty$?

   b. Montrer que I converge.

2. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$.

   a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $F_\varepsilon(x)$ par intégration par partie en fonction de x et ε.

   b. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$ en fonction de x.

   c. En déduire la valeur de I.

Exercice 4

Soient $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ et $\beta(x,y) = \displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ où $(\alpha,x,y) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $\{\alpha \in \mathbb{R}, \Gamma(\alpha) \text{ converge}\}$.
2. Former une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+1)$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \beta(x,y) \text{ converge }\}$.
5. Montrer que $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.
6. Montrer que $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\,\beta(x,y)$.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$$

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer en utilisant une intégration par parties que
$$I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$
3. On pose $J_n = nI_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Calculer J_1.
   b. Montrer que
$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Exercice 6

Considérons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big) dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big) dx$.

1. Montrer que I converge et que $I = J$.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big) dx$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 7

Considérons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)}$

1. Montrer que I converge.
2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer I.

Exercice 8

1. Posons $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.
   a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big|f(x)\big| dx$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$ converge.

c. Par une démarche similaire, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx$ est convergente.

2. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}dx$?

3. Posons $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ et $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\cos^2(x)}{x}$.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ diverge.

   b. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x)$.

   c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ sont-elles de même nature ?

   Expliquer pourquoi le critère de comparaison ne s'applique pas.

Exercice 9

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

1. Montrer que I est une intégrale impropre convergente.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$$

Considérons $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

1. Montrer que I et J existent.

2. Pour $x > 0$, on définit $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

   a. Effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale $F(x)$.

   b. Montrer que
$$F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$$

   c. Calculer $\lim_{x \to 0^+} \left(F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

3. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$$