Feuille d'exercices n°8

Suites et séries de fonctions I à VI

(du lundi 1^er mars 2010 au vendredi 9 avril 2010)

Exercice 1

Etudier la convergence (simple et uniforme) des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$
3. $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} \quad (x \in \mathbb{R})$
4. $f_n(x) = xe^{-nx} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$
5. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$
6. $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n} \quad (x \in \mathbb{R})$
7. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$
8. $f_n(x) = nx^2e^{-nx} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$
9. $f_n(x) = nx^n(1-x) \quad (x \in [0,1])$
10. $f_n(x) = \left(\dfrac{1+nx}{n+x^2}\right)^{\alpha} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,2]$.
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,2]$.

Exercice 3

1. Montrer que (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

Exercice 4

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer que pour tout $a > 0$, (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

3. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 5

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

3. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

Exercice 6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \frac{n}{n+t} \text{ et } g_n(t) = \frac{n}{(n+t)^2}$$

1. Montrer que (f_n) et (g_n) convergent simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ et que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^+$ les fonctions F_n et G_n par

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt \text{ et } G_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$$

   a. Montrer que $F_n(x) = n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

   b. En déduire que (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
   La convergence est-elle uniforme ? $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est-elle convergente ?

   c. Montrer que (G_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais que la convergence n'est pas uniforme.
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ est-elle convergente ?

4. A-t-on les égalités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt \ ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} g_n(t)dt \ ?$$

Exercice 8

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad (x \in [0,1])$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 9

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur toute partie $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
2. Montrer que $\sum f_n$ n'est jamais absolument convergente.

Exercice 10

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = ne^{-nx}$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
2. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

Exercice 11

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 14

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, a]$ où $a > 0$.
3. Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 15

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Etudier la convergence absolue de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
4. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16

Soit $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ une série trigonométrique convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Cet exercice propose de montrer que cette série est nécessairement la série de Fourier de f.

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Rappeler une condition pour que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

2. En intégrant $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ sur $[-\pi, \pi]$, déterminer a_0.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_k en utilisant l'égalité

$$f(x)\cos(kx) = \frac{a_0}{2}\cos(kx) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos(kx)$$

4. Calculer b_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 17

On considère la fonction f, 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Donner la série de Fourier de f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 18

On considère la fonction f, 2π-périodique définie par $f(x) = x^2 - \pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Donner la série de Fourier de f.
2. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 19

On considère la fonction f, 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$ et prolongée par imparité sur $[-\pi, \pi]$.

1. Donner la série de Fourier de f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$

Exercice 20

On considère la fonction f, 2π-périodique définie par $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi]$ et $f(x) = 0$ sur $]\pi, 2\pi]$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $b_n = 0$.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1 - 4p^2}$.

Exercice 21

On considère la fonction f, 2π-périodique et impaire définie par $f(x) = 1 - \cos(x)$ sur $[0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x = \pi$.

1. Donner la série de Fourier de f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 22

Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \left|\sin(x)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin^2(nx)$$