Evènements aléatoires

Variables aléatoires

Nb de Pages : 12	**Taille :** 1774592 bytes	**Version :** 1.0
Référence : Evènements et variables aléatoires		
Auteurs : Mohamed Regragui		

Participants à ce document:

Nom	Email
Mohamed Regragui	

Historique du document:

N° de version	Date	Auteur	Description des modifications
Version 1	*01/02/03*	*Mohamed Regragui*	*Evènements et variables aléatoires*

Sommaire:

1 Evénements

Un événement peut, à la suite d'une expérience ou épreuve, être réalisée ou ne pas être réalisée. Pour qu'on puisse lui appliquer le calcul des probabilités, un événement doit être défini avec précision, c'est-à-dire que sa réalisation ne doit pas prêter à ambiguïté.

1.1 Exemple

Quand on lance une pièce de monnaie en l'air, on peut considérer l'évènement « **la pièce de monnaie retombe et laisse apparaître pile** », ce que nous appellerons l'évènement « **pile** ».

On représente le résultat d'une expérience comme un élément A de l'ensemble N de tous les résultats possibles.

2 Algèbres des événements

Soit ε l'ensemble des événements; à tout événement A on associe son contraire $\bar{A}$

$\bar{A}$ est la partie complémentaire de A dans Ω .

ε est défini par trois axiomes :

$(i)\ \forall A \in \varepsilon, \bar{A} \in \varepsilon$

(ii) Pour tout ensemble fini dénombrable $A_1, \ldots A_3, \ldots\ldots, A_n \in \varepsilon$

$$\bigcup_i A_i \in \varepsilon$$

$(iii)\ \Omega \in \varepsilon$

2.1 Remarque

$\phi \in \varepsilon$ et $\bigcap_i A_i \in \varepsilon$

Ces propriétés définissent ce que l'on appelle une algèbre de BOOLE ou TRIBA.

2.2 Définition

On appelle espace probabilisable le couple (Ω, ε)

3 Axiome de Kolmogorov

A chaque événement on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité.

3.1 Définition

On a appelle probabilité sur (Ω, ε) une application P de $\varepsilon \to [0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles $(A_i \cap A_j = \phi, \forall i \neq j)$

3.2 Définition

On appelle espace probabilisé le triplet (Ω, ε, P)

3.2.1 Exercice

(1) $P(\phi) = 0$

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A) \leq 1 - P(B)$ si $A \subset B$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4 Lois de probabilités conditionnelles

4.1 Définition

Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

4.2 Définition

A est indépendant de B si $P(A / B) = P(A)$. La connaissance de B ne change pas les chances de réalisations de A.

4.2.1 Remarque

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ssi A et B sont indépendants.

4.3 Formules de Bayes

La première formule est $P(B/A) = \frac{P(A/B).P(B)}{P(A)}$ (1) on a $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

et $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B).P(B)}{P(A)}$.

Soit B_i un système complet d'événements:

$B_i \cap B_j = \phi$, $i \neq j$ et $\bigcup_i B_i = \Omega$.

$$A = \bigcup_i (A \cap B_i), P(A \cap B_i) = P(A/B_i).P(B_i)$$

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A/B_i).P(B_i)$$

En appliquant (1) : $P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i).P(B_i)}{\sum_k P(A/B_k).P(B_k)}$ (2)

C'est la deuxième formule de Bayes.

5 Variables

5.1 Exemple

Considérons le lancer de 2 dés parfaitement équilibrés. Cette expérience se traduit par:

$\Omega = \{(1,1); (1,2);...; (6,6)\}$ muni de la probabilité $P(w) = \frac{1}{36}$ si on s'intéresse à la somme des points marqués par les deux dés. On définit ainsi une application:

$S : \Omega \rightarrow E = \{2,3,..., 12\}$

$w \rightarrow S(w)$

5.2 Exemple

$$P(S = 5) = \{(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

et généralement $P(S = s) = P(\{S^{-1}(s)\})$.

Si X est une application de (Ω, ε, P) dans E il faut que E soit probabilisable c'est-à-dire muni d'une tribu $\Im$ et que l'image réciproque de tout élément de $\Im$ soit un élément de ε on dit que la variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \varepsilon, P) \rightarrow (E, \Im)$.

Lorsque $E = \Re$ on utilise comme tribu la σ algèbre engendré par les intervalles de $\Re$ (tribu Borélienne).

5.3 Définition

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable de (Ω, ε, P) dans $\Re$ muni de sa tribu borélienne $(\Re, B)$. Pour tout borélien $B : P(B) = P(\{X^{-1}(B)\})$.

5.4 Formule de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application:
$F : \Re \to [0,1]$ définie par $F(x) = P[X < x]$ telle que F est monotone croissante continue à gauche et $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

5.5 Définition

Soit X une v.a réelle continue une loi de probabilité $P_x(I) = \int_i f(x)dx$. F est alors dérivable et admet f pour dérivée: $P[a < X < b] = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Une densité de f est donc une fonction positive telle que $\int_\Re f(x)dx = 1$

6 Espérance mathématique et variance

6.1 Espérance mathématique

Pour une variable discrète X, on d''finit l'espérance $E(X)$ par la formule: $E(X) = \sum_i P[X = x_i]$ pour une variable continue X admettant une densité: $E(X) = \int_\Re xf(x)dx$

6.1.1 Propriété

E est un opérateur linéaire.

6.2 Définition

Soit $\varsigma(X)$ une fonction de la v.a X :

$E[\varsigma(X)] = \sum_i \varsigma(x_i P[X = x_i])$ si X est discrète et $E[\varsigma(X)] = \int_{\Re} \varsigma(x) f(x) dx$

Si X est continue.

6.2.1 Remarque

Lorsque X et Y sont indépendantes $E(XY) = E(X)E(Y)$

6.3 Variance

On appelle variance de X notée $V(X)$ ou σ^2 la quantité définie par $\sigma^2 = E((X - m)^2)$ où $m = E(X)$.

σ : s'appelle l'écart-type.

La variance mesure la dispersion de X autour de $m = E(X)$.

6.3.1 Propriétés

(1) $E((X - a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2, \forall a \in \Re$ formule de König Huggens

(2) $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$

6.4 Définition

On appelle covariance de X et Y : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

6.4.1 Exercice

Démontrer que $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\text{cov}(X, Y)$

7 Lois discrètes usuelles

7.1 Loi discrète uniforme

$$X = \{1,2,3,\ldots,n\} \quad P[X = k] = \frac{1}{n} \qquad E(X) = \frac{n+1}{2}, V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

7.2 Loi de Bernouilli de paramètres $B(p)$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité p} \\ 0 & \end{cases}$$

$$E(X) = p, V(X) = p(1-p)$$

7.3 Loi de Binomiale de paramètres $B(n,p)$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ somme de v.a indépendantes de Bernouilli $E(X) = np, V(X) = np(1-p)$.

Loi de probabilité $P[X = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

7.4 Loi de Poisson $\rho(\lambda)$

C'est la loi d'une v.a entière positive ou nulle qui vérifie $P[X = k] = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \quad \forall k \in IN$.

On vérifie bien que $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda} X^k / k! = 1$.

On obtient alors la loi de Poisson comme approximation de la loi binomiale: Soit A un événement de probabilité p très faible $(p < 0{,}1)$ que l'on essaie d'obtenir quelques fois en répétant l'expèrience un grand nombre de fois $(n > 50)$ alors $B(n,p) \sim \rho(np)$.

7.5 Théorème

X_n une suite de variables binomiales $B(n,p)$ telles que $n \to +\infty$ et $p \to 0$ avec $np \to \lambda$ alors la suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers une variable de poisson $\rho(\lambda)$.

7.5.1 Démonstration

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{(n-1)...(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{(np)^x}{x!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-p)^{n-x}}_{1}$$

Quand $n \to +\infty$

Or $(1-p)^{n-x} = (1-p)^n (1-p)^{-x}$ avec $(1-p)^{-x} \to 1$ car $p \to 0$.

$$(1-p)^n \sim (1-\frac{\lambda}{n})^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda}$$

Finalement $C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}]{} (\frac{np}{x!})^x e^{-\lambda}$ Poisson $\rho(\lambda)$

7.5.2 Exercice

Montrer que $E(X) = \lambda, V(X) = \lambda$ si $X \to \rho(\lambda)$ (Poisson).

7.6 Loi hypergéométrique $H(N,n,p)$

Soit une population N individus parmi lesquels une proportion p possède une propriété. On prélève un échantillon de n individus (tirage sans remise).
Soit X le nombre aléatoire d'individus de l'échantillon possédant le caractère:

$$P[X = n] = \frac{C_{Np}^x C_{N-Np}^{n-x}}{C_{Np}^n}$$

7.7 Loi géométriques

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p .

$$P[X = x] = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1,2,...$$

7.7.1 Exercice

$E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$ où $q = 1 - p$