IV

Algorithmes de calcul de Tri Topologique

Tri topologique : motivation

- Chercher dans un ensemble de tâches à exécuter liées par une relation de précédence (exemple : un *MakeFile*), un séquencement qui respecte cette relation

- Les graphes sont utilisés pour représenter cette relation de précédence (ils forment la classe des graphes orientés acycliques)

- Une séquence respectant cette précédence est un **tri topologique**

Algorithme du tri topologique

Il y a deux algorithmes pour faire un tri topologique

1) On cherche un évènement qui peut se produire.
On enregistre cet évènement puis on recommence

Tri_topologique_1 (graphe G)

```
TANT-QUE resteSommet(G) FAIRE
    chercher sommet s tq degréEntrant(s) = 0
    enregistrer s
    supprimer tous arcs sortant de s
    supprimer s
FIN-TANT-QUE
```

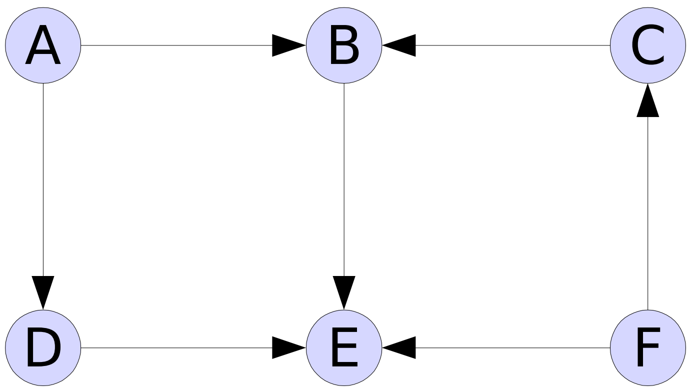
2) On utilise le parcours en profondeur

Tri_topologique_2 (graphe G)

```
DFS_run(G)
Ordonner les sommets suivant dateFin(s) par ordre décroissant
```

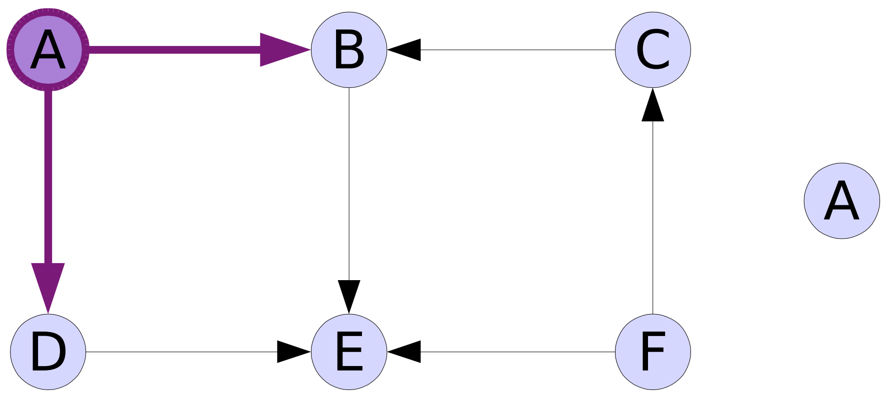
Exemple du tri topologique

- On considère le graphe de précédence suivant



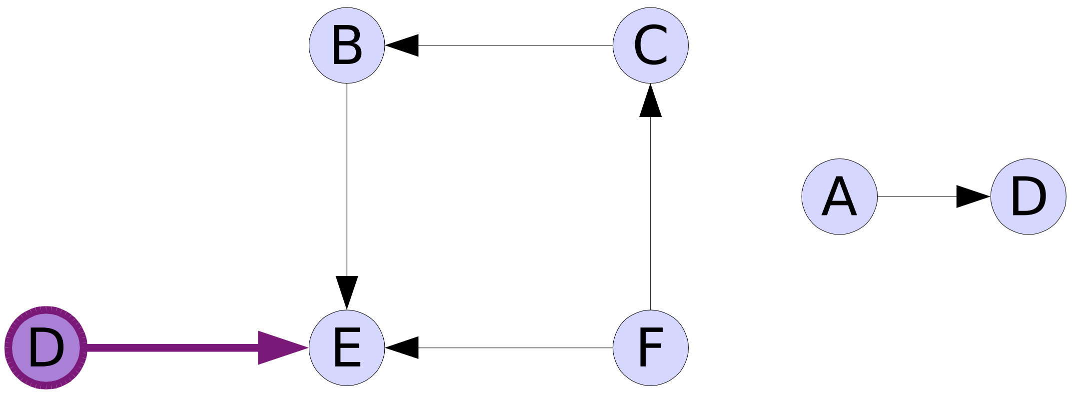
Exemple du tri topologique

- degreEntrant(A) = 0
- Enregistrement et supression du sommet A
- Supression des arcs partant de A



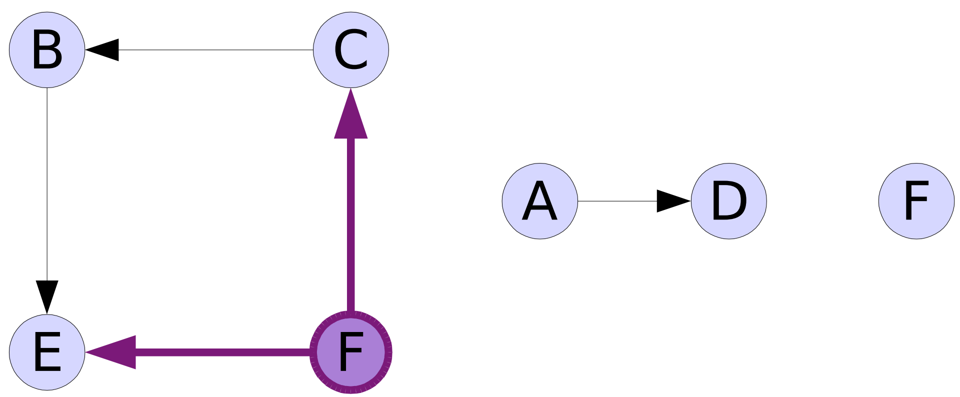
Exemple du tri topologique

- degreEntrant(D) = 0
- Enregistrement et supression du sommet D
- Supression des arcs partant de D



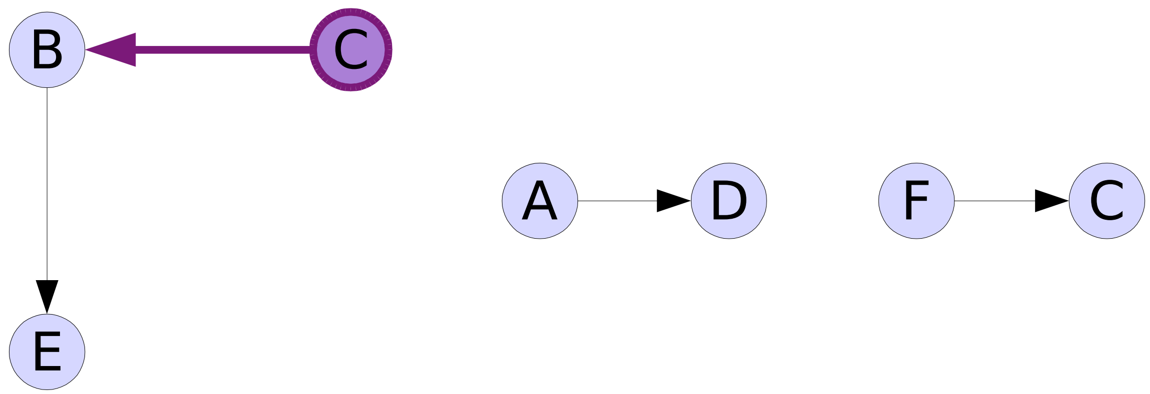
Exemple du tri topologique

- degreEntrant(F) = 0
- Enregistrement et supression du sommet F
- Supression des arcs partant de F



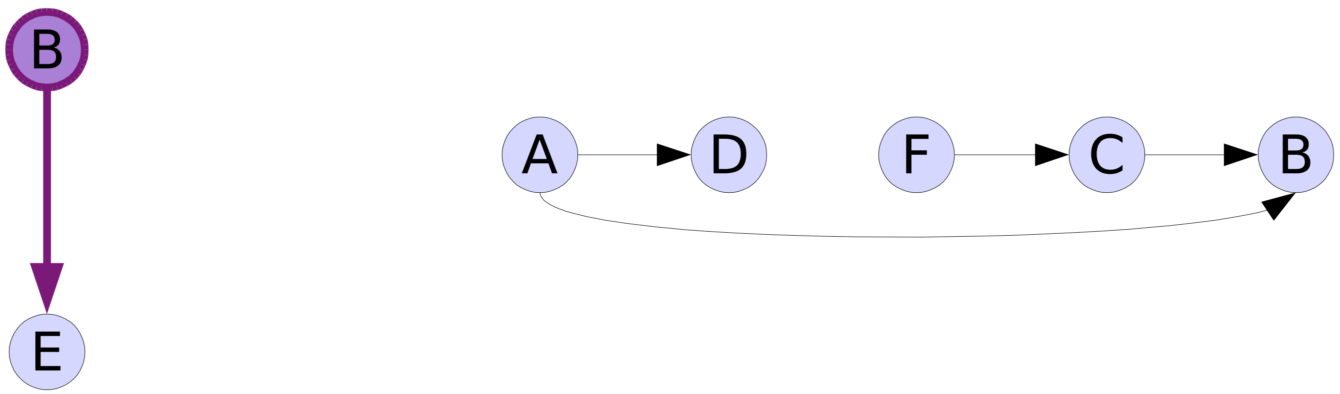
Exemple du tri topologique

- degreEntrant(C) = 0
- Enregistrement et supression du sommet C
- Supression des arcs partant de C



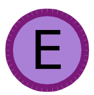
Exemple du tri topologique

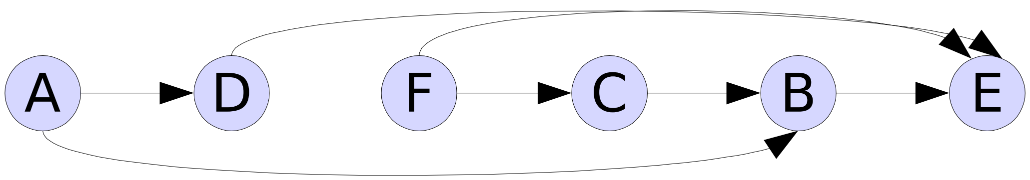
- degreEntrant(B) = 0
- Enregistrement et supression du sommet B
- Supression des arcs partant de B



Exemple du tri topologique

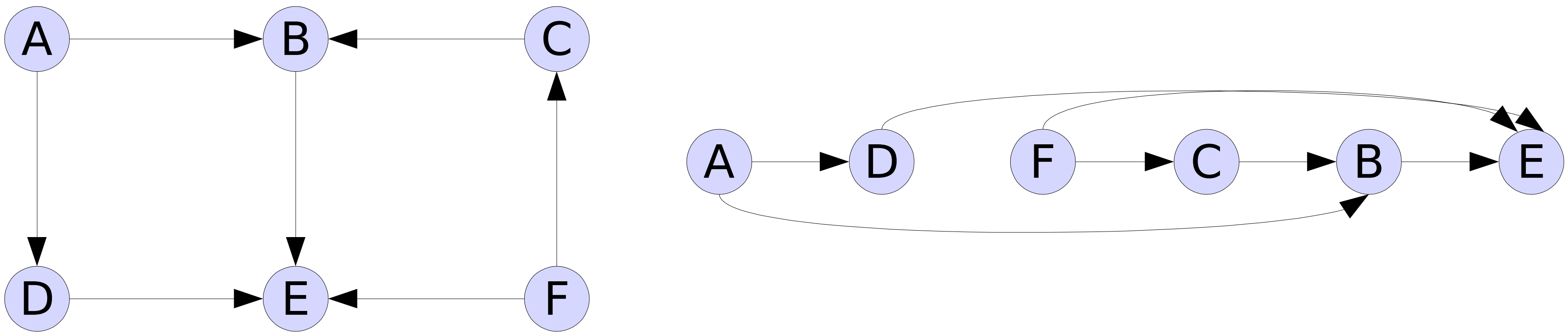
- degreEntrant(E) = 0
- Enregistrement et supression du sommet E
- Supression des arcs partant de E





Exemple du tri topologique

- Fin de l'algorithme
- On a obtenu un tri topologique du graphe de départ
- Tous les arcs sont orientés vers l'avant

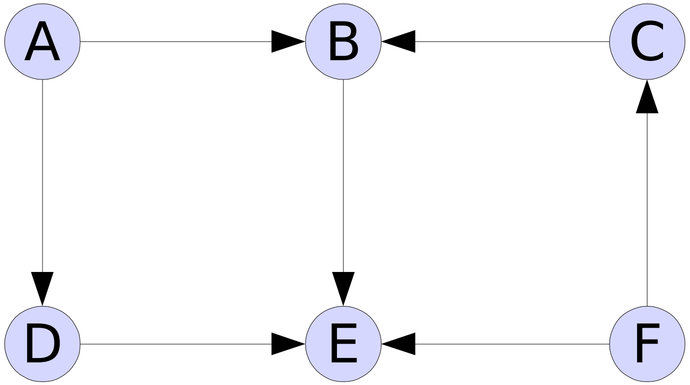


Exemple du tri topologique

- On considère maintenant :

la **matrice d'adjacence** du même graphe de précédence

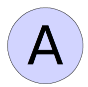
$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D & E & F \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Exemple du tri topologique

- degreEntrant(A) = 0 ⇔ colonne 1 ne contient que des 0
- Suppression du sommet A ⇔ suppression colonne 1
- Suppression des arcs partant de A ⇔ suppression ligne 1

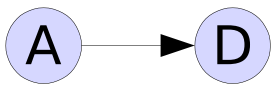
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} \mathbf{A} & B & C & D & E & F \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} \mathbf{A} \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



Exemple du tri topologique

- degreEntrant(D) = 0 ⇔ colonne 3 ne contient que des 0
- Suppression du sommet D ⇔ suppression colonne 3
- Suppression des arcs partant de D ⇔ suppression ligne 3

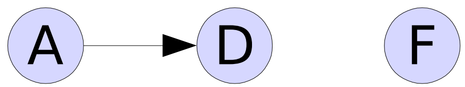
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} B & C & \mathbf{D} & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ \mathbf{D} \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Exemple du tri topologique

- degreEntrant(F) = 0 ⇔ colonne 4 ne contient que des 0
- Suppression du sommet F ⇔ suppression colonne 4
- Suppression des arcs partant de F ⇔ suppression ligne 4

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B & C & E & \boldsymbol{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \\ E \\ \boldsymbol{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$



Exemple du tri topologique

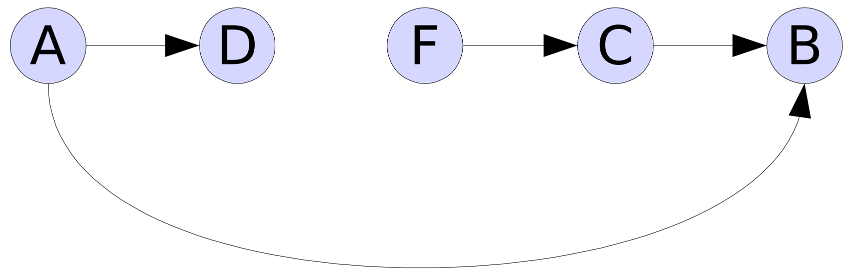
- degreEntrant(C) = 0 ⇔ colonne 2 ne contient que des 0
- Suppression du sommet C ⇔ suppression colone 2
- Suppression des arcs partant de C ⇔ suppression ligne 2

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B & \boldsymbol{C} & E \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ \boldsymbol{C} \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple du tri topologique

- degreEntrant(B) = 0 ⇔ colonne 1 ne contient que des 0
- Suppression du sommet B ⇔ suppression colonne 1
- Suppression des arcs partant de B ⇔ suppression ligne 1

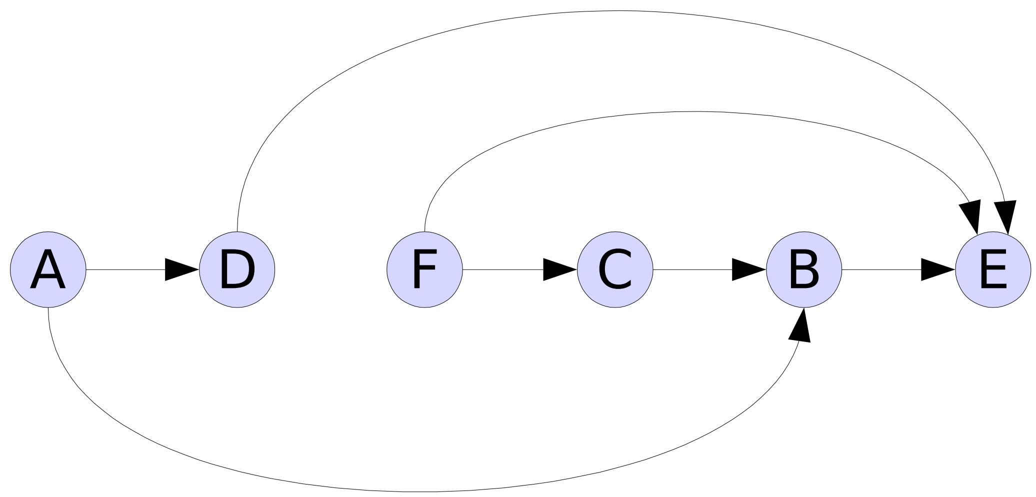
$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{B} & E \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ E & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$



Exemple du tri topologique

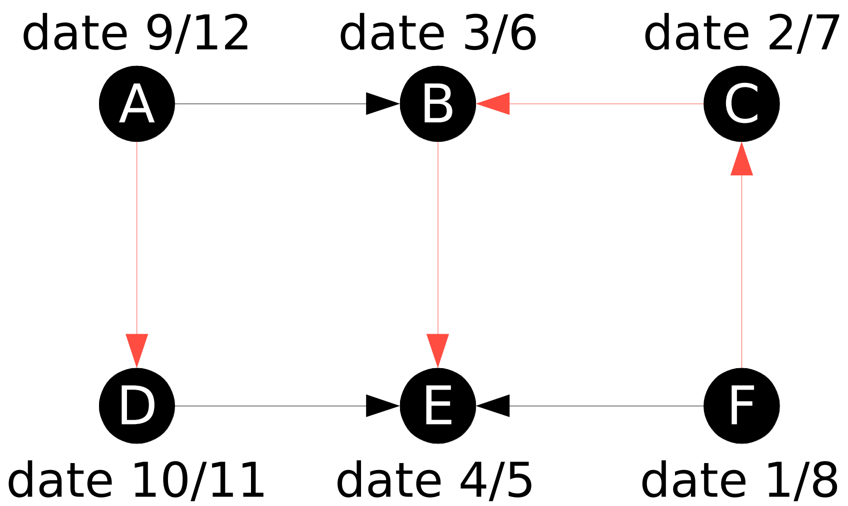
- degreEntrant(E) = 0 ⇔ colonne 2 ne contient que des 0
- Suppression du dernier sommet E ⇔ dernière case 0
- On a obtenu le même tri topologique

$$\begin{array}{cc} & E \\ E & \left\{ \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right\} \end{array}$$



Exemple du tri topologique

- Deuxième algorithme de tri topologique
- On considère maintenant un parcours en profondeur sur le même graphe de précédence.

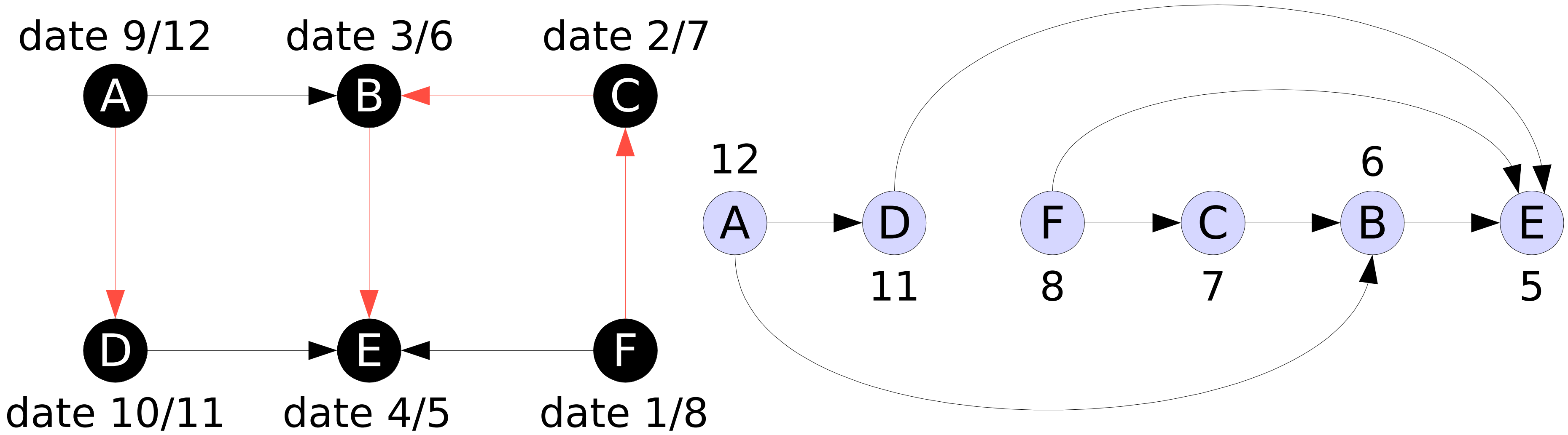


Exemple du tri topologique

- On aligne les sommets du graphe sur une ligne suivant

  les dates de fin dans l'ordre décroissant

- On obtient alors un tri topologique du graphe



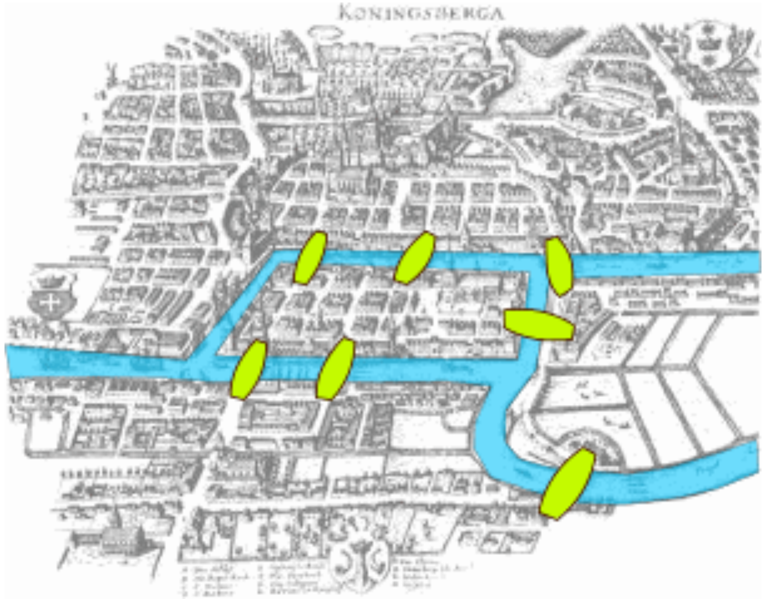
V

Graphes eulériens

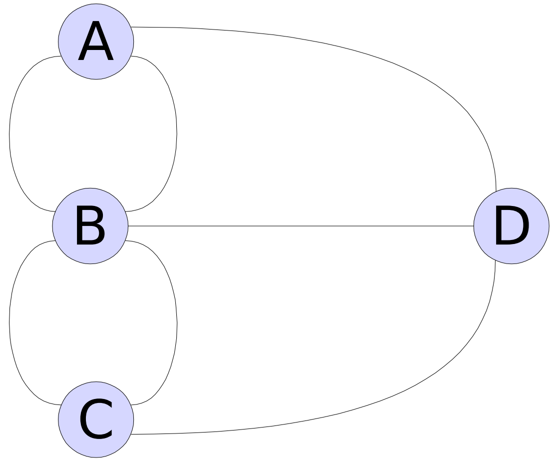
&

Graphes hamiltoniens

Problème des 7 ponts



1726



« Lors d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville de Königsberg une et une seule fois ? »

« Existe-t-il dans le graphe, un chemin où les arêtes sont différentes deux à deux et qui revient sur le sommet de départ ? »

Lemme des poignées de mains

- **Théorème - (lemme des poignées de main)**

  i. La somme de tous les degrés est un nombre pair. C'est le double du nombre d'arêtes

  ii. Le nombre de sommets de degré impair est pair.

- ***Démonstration (i)***
  - Chaque arête est comptée deux fois :
    Une fois pour le sommet de départ.
    Une fois pour le sommet d'arrivée.

Lemme des poignées de mains

- ***Démonstration (ii)***
  - Soit S_{total} le nombre de sommets du graphe
  - Soit S_{imp} le nombre de sommets de degré impair
  - $$\mathit{Somme\ des\ degrés} = \sum_{i=1}^{S_{imp}} degImp_i + \sum_{i=S_{imp}+1}^{S_{total}} degPaire_i$$
    $$= \sum_{i=1}^{S_{imp}} (2k_i+1) + \sum_{i=S_{imp}+1}^{S_{total}} (2k_i)$$
    $$= 2\sum_{i=1}^{S_{total}} (k_i) + S_{imp}$$
  - Somme des degrés est paire ⇒ S_{imp} est paire

Lacet de Jordan

- Dans un graphe non orienté, on dit qu'un chemin $(v_0,v_1,v_2, \ldots v_{k-1},v_k)$ est un :
  - **Chemin de Jordan** si les arêtes qu'il emprunte sont distinctes deux à deux :

$$\forall i, j \in \{0,\ldots, k\text{-}1\},\ i \neq j \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$$

  - **Lacet de Jordan** si c'est un chemin de Jordan

$$avec\ v_0 = v_k$$

  - **Cycle de Jordan** si c'est un lacet de Jordan et si les sommets intermédiaires sont distincts 2 à 2

$$\forall\ i, j \in \{1,\ldots, k\text{-}1\},\ i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$$

Graphe Eulérien

- On dit qu'un graphe non orienté est :
  - **Eulérien** s'il existe un lacet de Jordan contenant toutes les arêtes du graphe.
  - **Semi-Eulérien** s'il existe un chemin de Jordan contenant toutes les arêtes du graphe (mais pas de lacet de Jordan).
  - **Pré-eulérien** ou **chinois** s'il existe un lacet contenant au moins une fois chacune des arêtes du graphe.

Théorème de caractérisation

- **Théorème de caractérisation :**
  - *Un graphe connexe est* ***Eulérien*** *ssi tous ses sommets sont de degré paire*
  - *Un graphe connexe est* ***Semi-Eulérien*** *ssi il ne contient que 2 sommets de degré impaire*

Démonstration

- *Eulérien ⇒ Tous les sommets ont un degré pair*
  - Eulérien ⇒ un lacet de Jordan qui passe par toutes les arrêtes.
  - En suivant ce lacet on passe par tous les arcs une et une seul fois
  - On suit ce lacet en enregistrant pour :
    - Le sommet départ :

      l'arc sortant ⇒ *DEG + 1*
    - Les sommets intermédiaires :

      l'arc entrant et l'arc sortant ⇒ *DEG + 2*
    - Le sommet d'arrivée :

      l'arc entrant ⇒ *DEG + 1*
  - Cycle ⇒ sommet départ = sommet arrivée ⇒ *DEG + 1 + 1*
  - Tous les degrés obtenus sont paires

Démonstration

- *Semi-eulérien* $\Rightarrow$ *Exactement 2 degrés impairs*
  - On applique la même méthode
  - Semi-eulérien $\Rightarrow$ sommet départ $\neq$ sommet arrivée
  - Si un sommet n'est ni le départ ni le sommet d'arrivée :
    - A chaque occurrence de ce sommet dans le chemin on fait

$$DEG + 2$$

    - Le degré obtenu pour ce sommet est paire
  - Pour le sommet de départ (resp. d'arrivé) :
    - On fait $DEG + 1$ au départ (resp. a l'arrivée)
    - A chaque occurrence de ce sommet dans le chemin on fait

$$DEG + 2$$

    - Le degré obtenu pour ce sommet est impaire

$$DEG = (nbOccurrences \times 2) + 1$$

Démonstration

- **Lemme :**

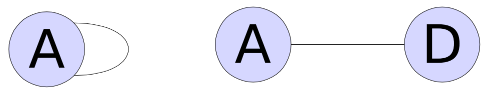
Si tous les sommets ont un degré pair,
on peut toujours étendre un chemin de Jordan
vers un lacet de Jordan

- **Démonstration :**
  - Soit un chemin de Jordan de u a v si $u \neq v$ alors :

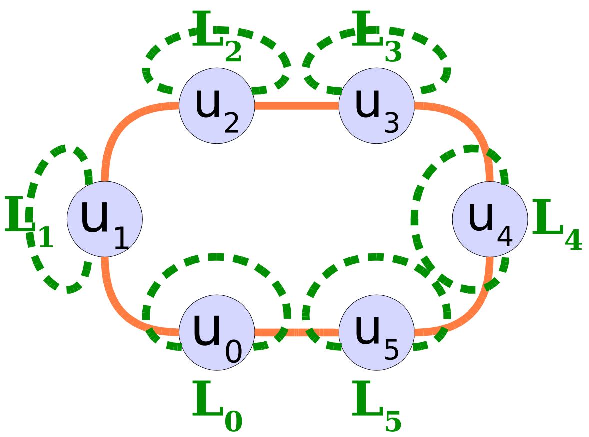
    On a emprunter un nombre impaire arêtes de v
  - Puisque par hypothèse v a un nombre paire d'arêtes, il reste au moins une arrête qui n'appartient pas au chemin de Jordan.
  - Donc $u \neq v \Rightarrow$ on peut étendre le chemin
  - Or il y a un nombre fini d'arêtes ⇒ extension pas infini
  - On finit donc par avoir $u = v$
  - On peut toujours étendre ce chemin vers un lacet de Jordan

Démonstration

- Tous les sommets ont un degré pair ⇒ Eulérien
- Raisonnements par récurrence sur *n* le nombre d'arêtes
  - **Pour *n* = *1***, il n'existe que deux graphes :



    - Seul le premier n'a que des degrés paires et il est Eulérien
  - **Supposons la proposition vraie pour les graphes à *n-1* arêtes**
    - D'après le lemme on peut construire un **lacet de Jordan**
    - Les arêtes n'appartenant pas au lacet forment des **comp. connexes**



- Dans ces **composantes** tous les degrés sont paires
- Par hypothèse de récurrence **elles** sont Eulériennes
- Soit L_i les lacets de Jordan les couvrant totalement
- $u_0\, L_0\, u_0\, u_1\, L_1\, u_1\, u_2\, L_2 u_2\, u_3\, L_3\, u_3\, u_4\, L_4\, u_4\, u_5\, L_0\, u_5\, u_0$
  Forme un lacet de Jordan qui couvre tout le graphe
  ⇒ **le graphe est Eulérien**

Démonstration

- **Lemme :**

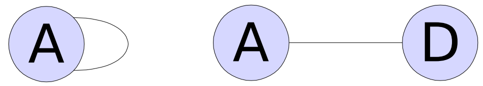
Si exactement 2 sommets u et v ont un degré impair,
on peut toujours étendre un chemin de Jordan partant de u vers un chemin de Jordan reliant u et v

- Démonstration :
  - Soit un chemin de Jordan de u a w
    - si w $\neq v$ *et* w $\neq u$ alors : On a emprunté un nombre impair d'arêtes de w qui avait par hypothèse un nombre pair d'arêtes.

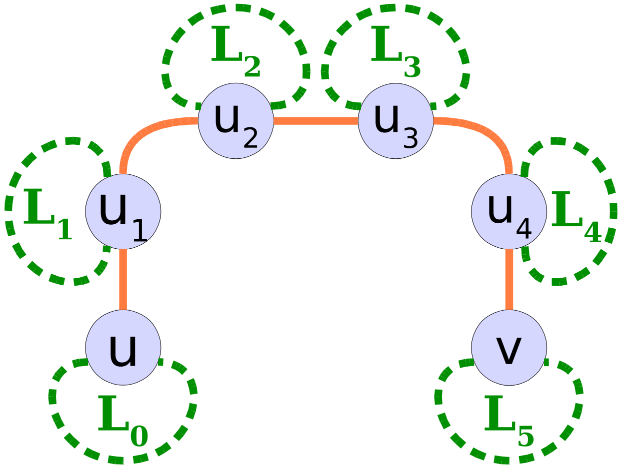
      si w = u :On a emprunté un nombre pair d'arêtes de u qui avait par hypothèse un nombre impair d'arêtes.
  - Dans les 2 cas il reste au moins une arête qui n'appartient pas au chemin de Jordan. $\Rightarrow$ on peut étendre le chemin
  - Or il y a un nombre fini d'arêtes $\Rightarrow$ extension pas infinie
  - On finit donc par avoir w = v et donc chemin de Jordan reliant u et v

Démonstration

- 2 sommets (*u* et *v*) avec un degré impair ⇒ Semi-Eulérien
- Raisonnements par récurrence sur *n* le nombre d'arêtes
  - **Pour *n* = *1***, il n'existe que deux graphes :

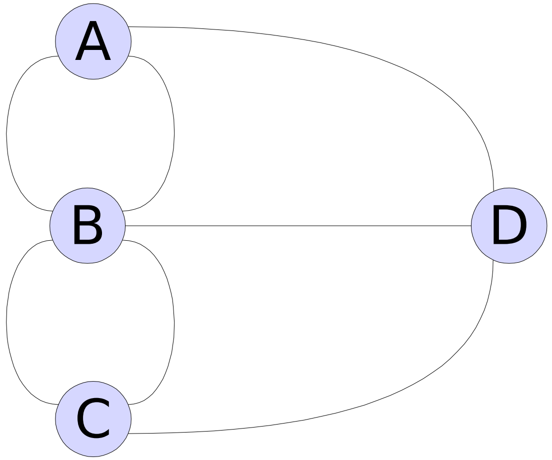


    - Seul le deuxième a deux degrés impairs et il est Semi-Eulérien
  - **Supposons la proposition vraie pour les graphes à *n-1* arêtes**
    - D'après le lemme on peut construire un **chemin de Jordan**
    - Les arêtes n'appartenant pas au chemin forment des **comp. connexes**



- Dans ces **composantes** tous les degrés **sont pairs**
- Par hypothèse de récurrence **elles** sont **Eulériennes**
- Soit L_i les **lacets** de Jordan les couvrant totalement
- **$u\ L_0\ u\ u_1\ L_1\ u_1\ u_2\ L_2 u_2\ u_3\ L_3\ u_3\ u_4\ L_4\ u_4\ v\ L_0\ v$**
  Forme un chemin de Jordan qui couvre tout le graphe
  ⇒ **le graphe est Eulérien**

Les 7 ponts : La solution



- Degré(A) = 3
- Degré(B) = 5
- Degré(C) = 3
- Degré(D) = 3

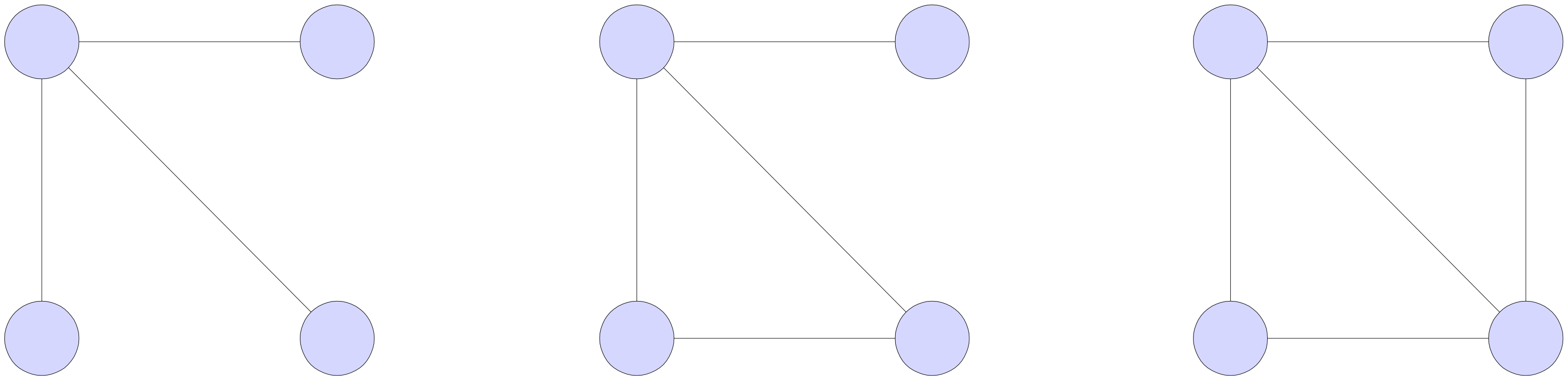
- Des théorèmes précédents on peut déduire que :
  - Königsberg n'est pas un graphe Eulérien
  - Königsberg n'est pas un graphe Semi-Eulérien
- Il n'y a pas de promenade possible
- Et ce même si on ne revient pas au point départ

Graphe Hamiltonien

- On dit qu'un graphe non orienté connexe est :
  - **hamiltonien** s'il existe un cycle de Jordan contenant toutes les sommets du graphe.
  - **semi-hamiltonien** s'il existe un chemin de Jordan élémentaire contenant toutes les sommets du graphe (mais pas de cycle de Jordan).
- <u>Rappel :</u>
  - Un chemin $(v_0, v_1, v_2, \ldots v_{k-1}, v_k)$ est **élémentaire** ssi $\forall\, i, j,\, v_i \neq v_j$
  - Un cycle est toujours élémentaire

Exemple

Les graphes suivants sont :



Non Hamiltonien **Semi Hamiltonien** **Hamiltonien**

Caractérisation

- Contrairement au cas des graphes eulériens : on n'a encore trouvé aucune **condition nécessaire et suffisante** assurant qu'un graphe soit hamiltonien ou semi-hamiltonien.
- Il existe, cependant, de nombreux théorèmes donnant des **conditions suffisantes**.

Caractérisation

- **Théorème de caractérisation de O. Ore** :
  - *Soit G un graphe simple possédant n>2 sommets :*

$$\forall u,v \text{ non adjacents, } degré(u) + degré(v) \geqslant n$$

$$\Rightarrow$$

Le graphe G est Hamiltonien

- Rappel :
  - Un graphe est **simple** s'il ne contient pas de boucle et que deux sommets sont reliés par au plus une arête.
  - La propriété intéressante d'un graphe simple :
    degré(s) = nbVoisin(s)

Caractérisation

- **Corollaire de Dirac** :
  - *Soit G un graphe simple possédant n>2 sommets :*

$$\forall u,\ \mathit{degré}(u) \geqslant n/2$$
$$\Rightarrow$$
Le graphe G est Hamiltonien