ELECTROMAGNETISME SPE

INTRODUCTION & MOTIVATIONS

Daniela Cirigliano-Peschard & Assia Zellagui

MOTIVATIONS ET OBJECTIFS

- Les forces électromagnétiques ont été observées depuis plusieurs siècles
- Lois gouvernant ces forces ⟶ XIXe
- Les forces électromagnétiques représentent des lois naturelles fondamentales :
  - ✓ Existence et structure atomique, moléculaire et de la matière condensée
  - ✓ Macroscopiquement, on a les flux de charges, les courants et le champs électromagnétiques présents dans tous les phénomènes de la vie courante…

    ⬇

  - ✓ Les courants électriques exercent des forces, effectuent un travail, transmettent de l'information et produisent des ondes électromagnétiques

CHAPITRE 1:
OUTILS MATHÉMATIQUES D'ANALYSE VECTORIELLE

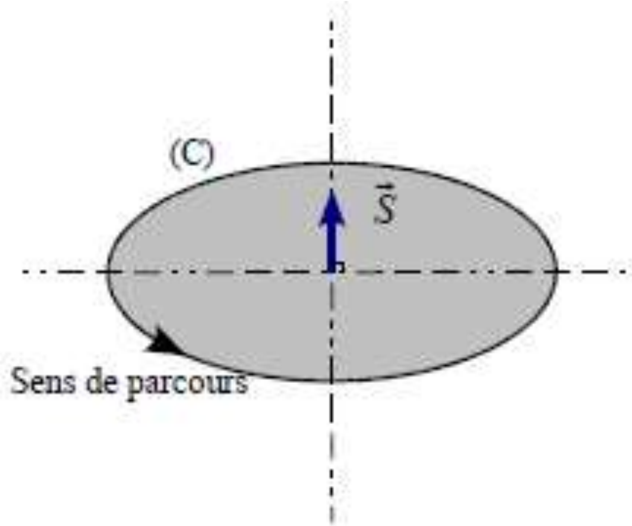
L'analyse vectorielle fait intervenir à la fois des outils analytiques (dérivées partielles) et du calcul vectoriel.
Les notions de base de l'analyse vectorielle sont indispensables en électrostatique et en électromagnétisme notamment.

Objectifs:

- Connaître les opérateurs de l'analyse vectorielle :nabla, gradient, divergence et rotationnel
- Savoir calculer des intégrales de surface simples.
- Connaître la définition du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée,
- Savoir ce qu'est un champ à flux conservatif.
- Connaître les théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes

VECTEUR SURFACE

1- Surface élémentaire:



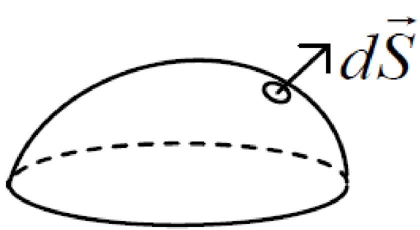
Soient :

- Un contour (C) fermé et orienté.
- Ce contour (C) forme une surface S.

On définit **le vecteur surface** *S* par :

- Sa norme : la surface S.
- Sa direction : perpendiculaire à la surface S.
- Son sens : celui de la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon.
- Son point d'application : un point de la surface.

2- Surface finie:

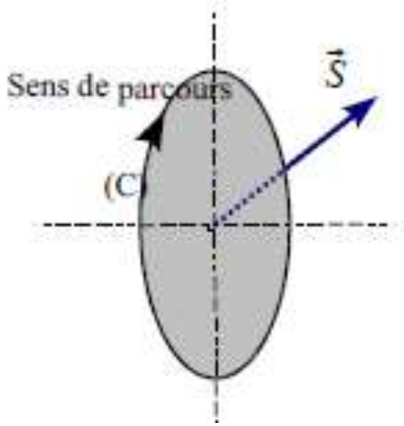


Le vecteur surface de cette surface est $\vec{S} = \iint d\vec{S}$

- $d\vec{S}$ orienté dans le même sens
- $\|\vec{S}\| \neq S$, par exemple pour une surface fermée $\vec{S} = 0$

VECTEUR SURFACE

Exemples :

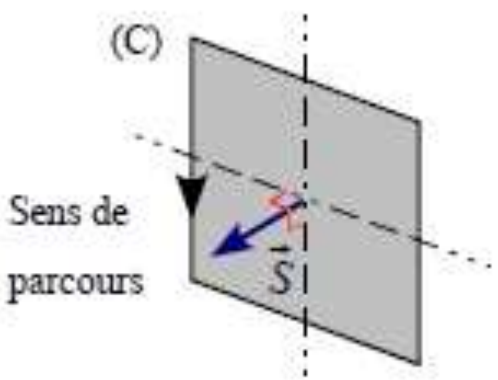


On définit le vecteur *S* d'un cercle de rayon R=2 cm.

On représente ce vecteur au centre du cercle.
Sa norme est :

$$\|\vec{S}\| = \pi R^2 = \pi(0{,}02)^2 m^2 = 1{,}256\ 10^{-3} m^2$$

Son sens : celui de la règle de la main droite.



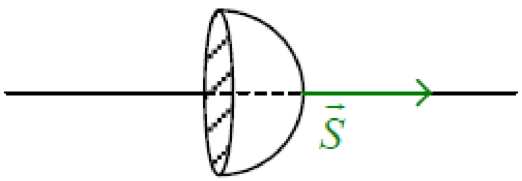
On définit le vecteur *S* d'un carré de coté L =1 m.
On représente ce vecteur au centre du carré.
Sa norme est :

$$\|\vec{S}\| = L^2 = (1)^2 m^2 = 1\ m^2$$

Son sens : celui de la règle de la main droite.

VECTEUR SURFACE

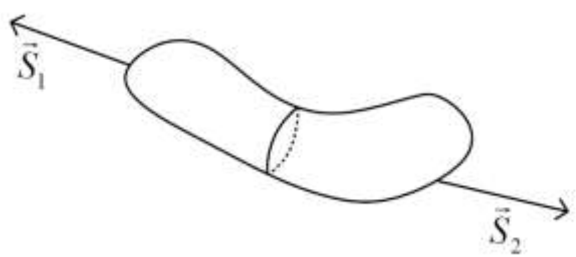
Exemple : Demi- sphère



Sphère invariante par rotation autour l’axe représenté, le vecteur S sera aussi invariant par une telle rotation, et sera donc sur l’axe.
La projection sur le plan orthogonal a l’axe donne l’aire hachurée (disque) ainsi:

$$\|\vec{S}\| = \pi R^2\ \hat{x} \text{ ou } \hat{x} \text{ est sur l’axe}$$

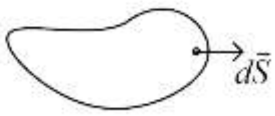
Exemple: Surface fermée



On "coupe" la surface fermée en deux surfaces ouvertes par un plan, on note $\overrightarrow{S_1}$ et $\overrightarrow{S_2}$ les deux vecteurs surface correspondant (qui sont alors orthogonaux au plan).

On a alors (puisque ce sont les vecteurs surface de la même surface mais chacun dans un sens) on a $\overrightarrow{S_1} = -\overrightarrow{S_2}$

- Orientation d’un surface fermée: par convention $d\vec{S}$ sera orienté vers l’extérieur.



VECTEURS ET PSEUDO-VECTEURS

1- Vecteur polaires (vrais) :

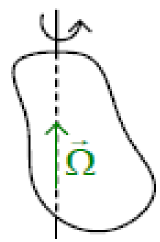
C'est un vecteur qui ne dépend pas de l'orientation de l'espace

- Exemples : les vecteurs vitesse, accélération.

2- Pseudo-vecteur (axiales) :

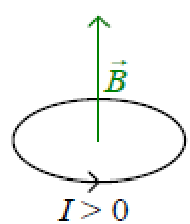
Ces vecteurs dépendent de l'orientation de l'espace

- Exemple : Vecteur rotation



Dans l'autre orientation, $\overrightarrow{\Omega}$ serait vers le bas

- Exemple : Champ magnétique



VECTEURS ET PSEUDO-VECTEURS

Conséquences dans le produit vectoriel

- Le produit vectoriel de deux vecteurs vrais donne un pseudo–vecteur

- Le produit vectoriel d'un vecteur vrai par un pseudo–vecteur donne un vecteur vrai.

Ainsi, avec comme avec la "règle des signes" (en notant + = vecteur vrai et – = pseudo–vecteur) :

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \wedge & \vec{b} & = \vec{c} \\ + & - & + & = - \\ + & - & - & = + \end{array}$$

- Exemple : Force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$vrai = vrai\,.\,pseudo$$

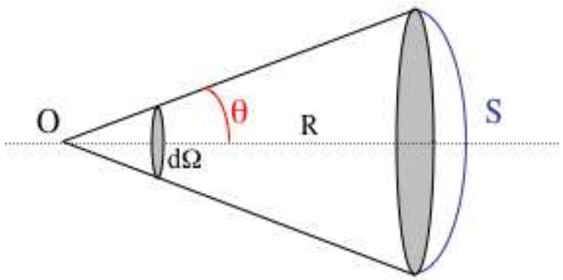
ANGLE SOLIDE

On cherche à caractériser la partie de l'espace délimitée par un cône de sommet O et de demi-ouverture θ

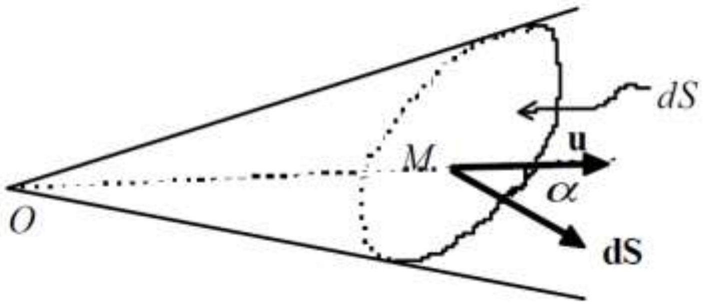
On considère la calotte sphérique de rayon R et d'aire $S(R)$ délimitée par ce cône.
La quantité

$$\Omega = \frac{S(R)}{R^2}$$

mesure l'angle solide défini par le cône.



Interprétation: Pour une sphère de centre O et de rayon r, $dS\cos(\theta)$ correspond à la surface projetée sur la sphère, ainsi Ω dépend uniquement du cône centré en O et s'appuyant sur la contour de dS (si on s'éloigne, r augmente et la surface augmentera en r^2)



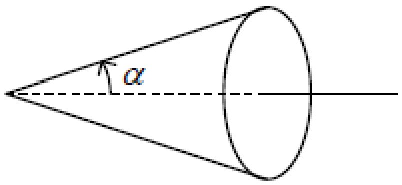
Expression générale de l'angle solide sous lequel on voit de O la surface S :

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{u}\,dS.\vec{n}}{r^2} = \iint_S \frac{dS\cos(\alpha)}{r^2}$$

ANGLE SOLIDE

- Exemple : Angle solide d'un demi-cône de révolution

$$\Omega = \int_0^{\alpha} 2\pi \sin(\theta)\, d\theta = 2\pi(1 - \cos(\alpha))$$



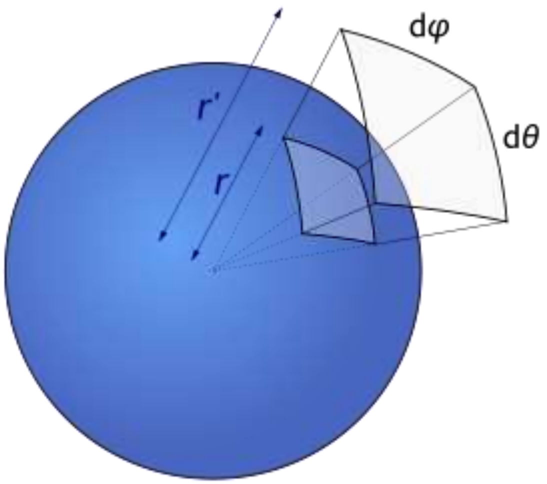
- Exemple : pour l'espace entier.

Cas particulier d'un demi-cône où $\alpha = \pi$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos(\pi\ )) = 4\pi$$

- Exemple : angle solide en coordonnées sphériques

$$d\Omega = 2\pi \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$$



LES CHAMPS SCALAIRES ET VECTORIELS

On définit un champ de scalaires ou un champ de vecteurs lorsque l'on associe à chaque point d'une région de l'espace une grandeur scalaire ou vectorielle.

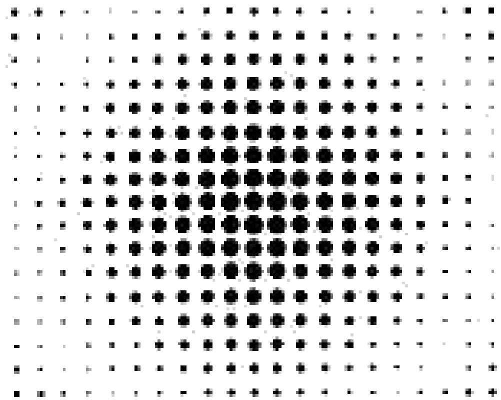
1- Champs Scalaires:

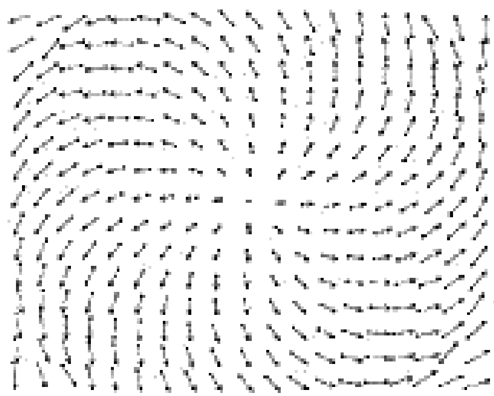
Un champ scalaire n'est pas orienté par définition. Sa description ne considère que la position respective des masses ponctuelles. Ex: pression, température, densité…

2- Champs vectoriels:

Un champ vectoriel est orienté dans l'espace-temps et, concernant la gravité, décrit la topologie de tous les points de l'espace. Ex: Force gravitationnelle, champ électrique…

Champ Scalaire





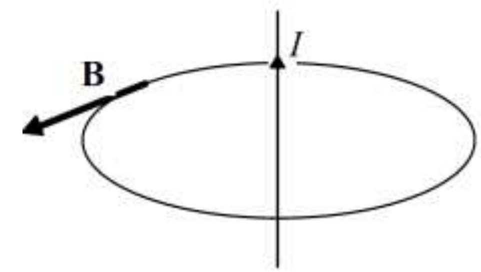
Champ vectoriel

On dit qu'un champ est *stationnaire* ou *permanent* dans une région *D* de l'espace si la grandeur définissant le champ ne dépend pas du temps en chaque point de *D*.

LIGNES DE CHAMPS

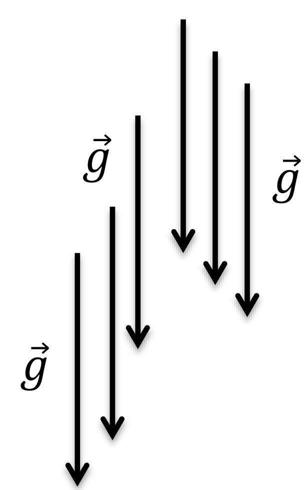
Une *ligne de champ* est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ **V** défini en ce point.

Exemple:
Les lignes de champ du champ magnétique **B** créé par un fil infiniment long parcouru par un courant d'intensité I sont des cercles.



Exemple:
Champ de pesanteur au voisinage du sol $\vec{E} = -g\,\vec{k}$

Les lignes de champ sont les droites verticales



SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

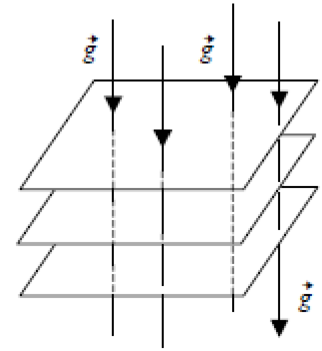
Supposons maintenant que le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V.
On appelle *surface équipotentielle* toute surface où les points sont au même potentiel, c'est-à-dire d'équation $V = C$, où C est une constante donnée.

<u>Exemple:</u>

Soit $\vec{E} = -g\,\vec{k}$ le champ de pesanteur au voisinage du sol.
On sait que $\vec{E}$dérive du potentiel scalaire $V = gz$.
Donc une surface équipotentielle a pour équation $gz = C$, c'est-à-dire

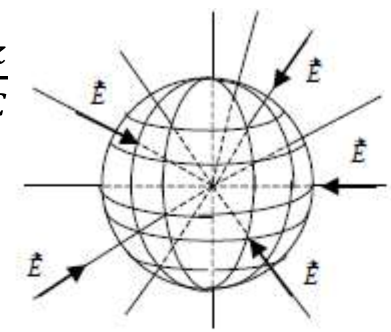
$$z = \frac{C}{g}$$

Les surfaces équipotentielles sont donc les plans horizontaux $z = cte$



<u>Exemple:</u>

Soit $\vec{E} = \frac{-k}{r^2}\,\hat{r}$ un champ newtonien d'origine O.
Il dérive du potentiel scalaire $V = \frac{k}{r}$
Les surfaces équipotentielles ont pour équation $\frac{k}{r} = C$, c'est-à-dire $r = \frac{k}{C}$
Ce sont les sphères à $r = cte$.



LES OPERATEURS

L'espace étant rapporté à la base ortho-normale directe $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ on défini l'opérateur aux dérivées partielles ***nabla*** par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$$

On notera que *nabla* est un *opérateur aux dérivées partielles*, et pas un vecteur.
Il opère *à gauche* en utilisant les trois types de multiplication :

$$\overrightarrow{\nabla} f \rightarrow \quad gradient$$

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{U} \rightarrow \quad divergence$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{U} \rightarrow \quad rotationel$$

LES OPERATEURS
LE GRADIENT

Soit un champ scalaire $f(x, y, z)$, le gradient est l'application de l'operateur nabla $\vec{\nabla}$ à la fonction f :

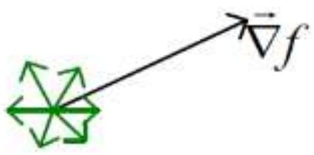
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

- Interprétation: Le $\overrightarrow{grad} f$ mesure l'intensité de la variation d'un fonction scalaire selon les 3 directions de l'espace. Il donne ainsi le sens de croissance de la grandeur de cette fonction, c'est une dérivée directionnelle. Le résultat est un vecteur

- Exemple :

Soit la fonction f, on cherche les conséquences sur f d'un déplacement élémentaire:



Pour un déplacement dans le plan orthogonal à $\vec{\nabla} f$, f ne varie pas

C'est au contraire en se déplaçant dans la direction de $\vec{\nabla} f$, que la variation sera la plus importante

LES OPERATEURS
LE GRADIENT

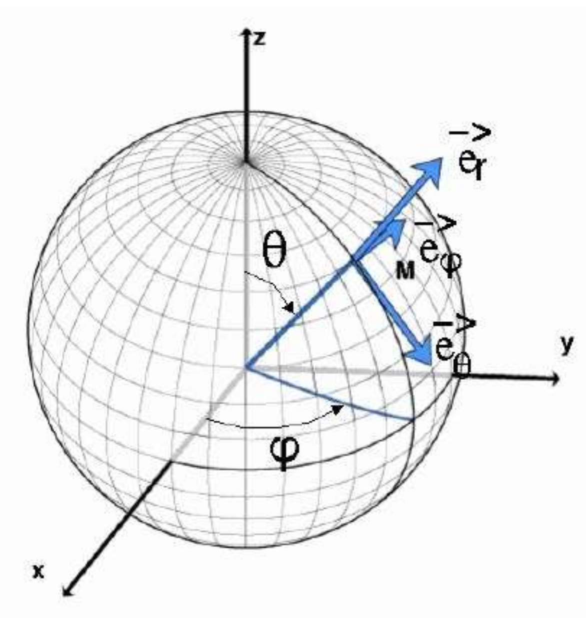
Exemple : $f = Pression$

$$P_A < P_B < P_C$$

Le vecteur $\overrightarrow{grad}(P)$ est orienté vers les $z < 0$

Les surfaces horizontales = surfaces à pression constante=isobares, tel que le vecteur $\overrightarrow{grad}(P)$ est perpendiculaires a ces surfaces

LES OPERATEURS
LE GRADIENT

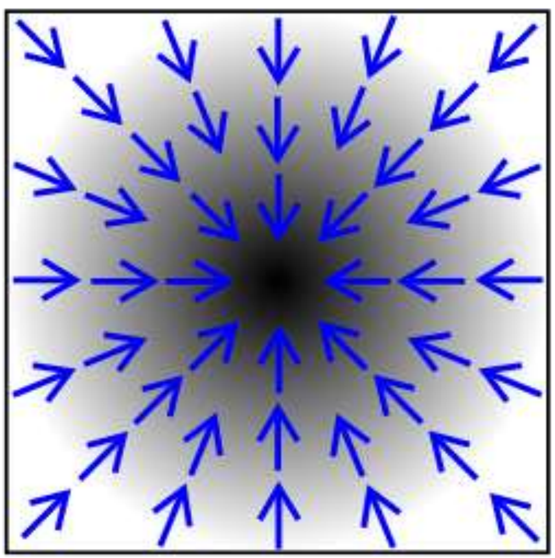


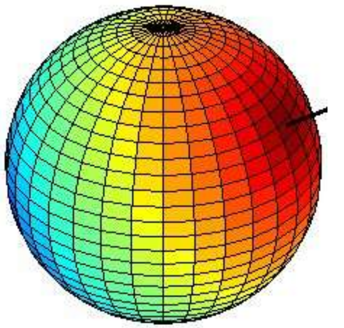
Gradient en coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Gradient en coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

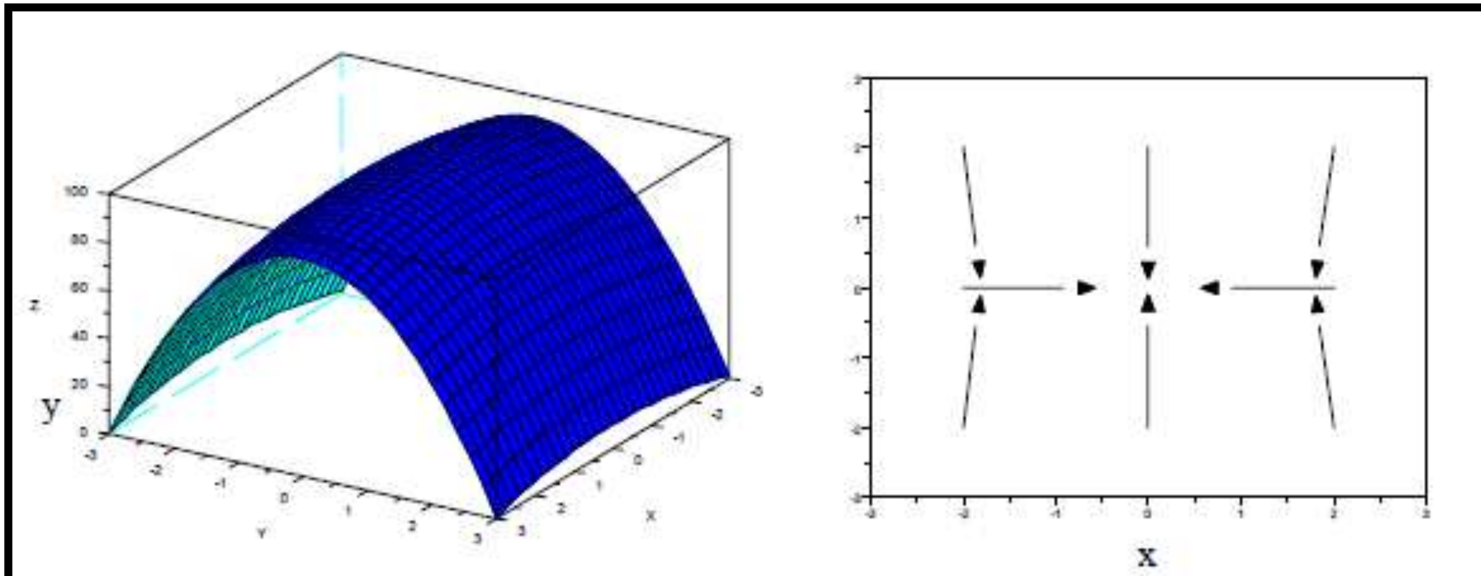




LES OPERATEURS
LE GRADIENT

Exemple : $f(x, y) = 100 - x^2 - 10y^2$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-2x, -20\, y, 0)$$



LES OPERATEURS
LA DIVERGENCE

La divergence s'obtient lorsque l'operateur nabla $\vec{\nabla}$ est appliqué en produit *scalaire* à un vecteur. Pour un vecteur $\vec{u}$ quelconque :

$$div(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).(u_x, u_y u_z)$$

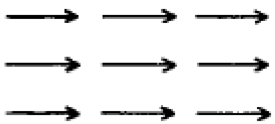
$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- Interprétation: La $\mathrm{div}(\vec{f})$ représente le flux du vecteur $\vec{f}$ à travers une surface délimitant un volume.
- Exemple: la fonction $\vec{f}$ représente la vitesse d'un écoulement d'un fluide a travers une certaine surface

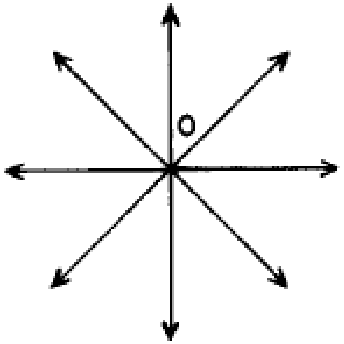
$div(\vec{v}) = 0$	Fluide homogène et incompressible
$div(\vec{v}) > 0$	Accumulation locale de matière (excès de masse)
$div(\vec{v}) < 0$	Perte locale de matière de matière

LES OPERATEURS
LA DIVERGENCE

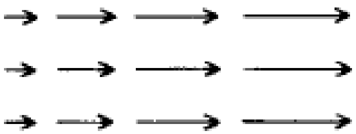
Exemples:



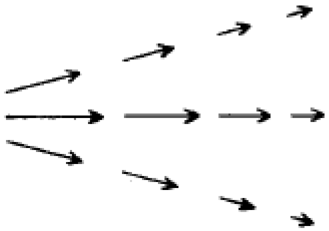
a) Ecoulement uniforme :$\overrightarrow{\nabla}.\vec{v} = 0$



b) Source ponctuelle isotrope : $\overrightarrow{\nabla}.\vec{v} = 0$ (sauf en O)



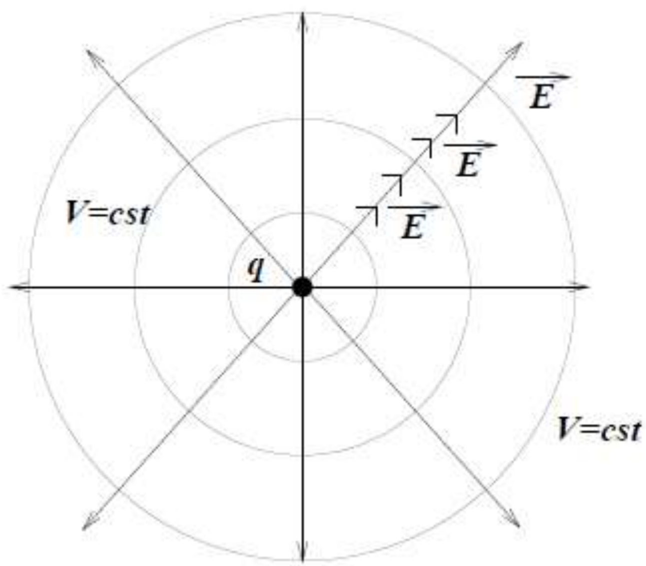
c) Détente rectiligne d'un fluide compressible$\overrightarrow{\nabla}.\vec{v} \neq 0$



d) Détente d'un fluide incompressible dans un tuyau évasé $\overrightarrow{\nabla}.\vec{v} \neq 0$

LES OPERATEURS
LA DIVERGENCE

Exemples en électromagnétisme



Lignes de champ et surfaces équipotentielles d'une charge ponctuelle, ici positive.

Le champ électrostatique est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles

Le champ électrique créé par une charge localisée n'a une divergence non nulle que dans la région de l'espace occupée par la charge.

LES OPERATEURS
LA DIVERGENCE

- Exemple numérique :

Calcul de la divergence d'un champ vectoriel : résultat un scalaire
Un champ vectoriel est caractérise par la donnée de 3 nombres en chaque point de l'espace: ce sont les trois coordonnées du vecteur en ce point.
Par exemple, un champ des vitesses est un vecteur que l'on peut noter :

$$\vec{v}(x,y,z) = (v_x(x,y,z), v_y(x,y,z), v_z(x,y,z))$$

Soit le champ de vitesse tridimensionnel $\vec{v}(x,y,z)$

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(2x^3 + z^2,\ \frac{1}{5}y - z,\ x^4 - 3y\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

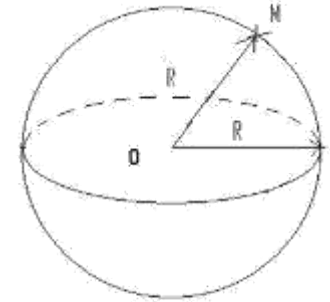
$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\partial(2x^3 + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{5}y - z\right)}{\partial y} + \frac{\partial(x^4 - 3y)}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 6x + \frac{1}{5}$$

Qu'on évaluera pour tout valeur de x

LES OPERATEURS
LA DIVERGENCE

- Exemple pour un champ Newtonien:



Soit un champ newtonien avec $k = cte$ ➡ $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M) = \dfrac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

Puisque $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$ ⟶ $\overrightarrow{E} = k\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}$

Où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right)$$

Calculons $\overrightarrow{div}(\vec{E})$:

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$$

Ainsi ➡ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2-3x^2) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x^2+y^2+z^2)$$

LES OPERATEURS
LA DIVERGENCE

- Exemple pour un champ Newtonien *(suite):*

  Les dérivées partielles par rapport à *y* et *z* s'obtiennent sans calcul, en permutant les rôles de *x* et *y* et ceux de *x* et *z* respectivement. Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x^2 + y^2 + z^2) \ ....$$

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}[(-2x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 - 2y^2 + z^2) + (x^2 + y^2 - 2z^2)]$$

Où x, y et z s'annulent respectivement

$$\overrightarrow{div}(\vec{E}) = 0$$

La divergence d'un champ Newtonien $\sim \left(\frac{1}{r^2}\right)$ est nulle

LES OPERATEURS
LE ROTATIONNEL

Le rotationnel s'obtient lorsque l'operateur nabla $\vec{\nabla}$ est appliqué en produit *vectoriel* à un vecteur. Pour un vecteur $\vec{E}$ quelconque :

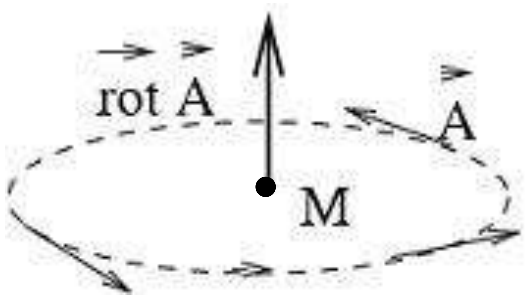
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{dx} \\ \dfrac{\partial}{dy} \\ \dfrac{\partial}{dz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}}$$

Si $\vec{E}$ *est un vecteur vrai,* $\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$ *sera une pseudo-vecteur (et vice-versa)*

LES OPERATEURS
LE ROTATIONNEL

- Interprétation: Le $\overrightarrow{rot}\,(\vec{f})$ représente le tourbillonnement ou cisaillement du vecteur $\vec{f}$, montrant si le champ du vecteur a tendance à tourner autour de certains points.



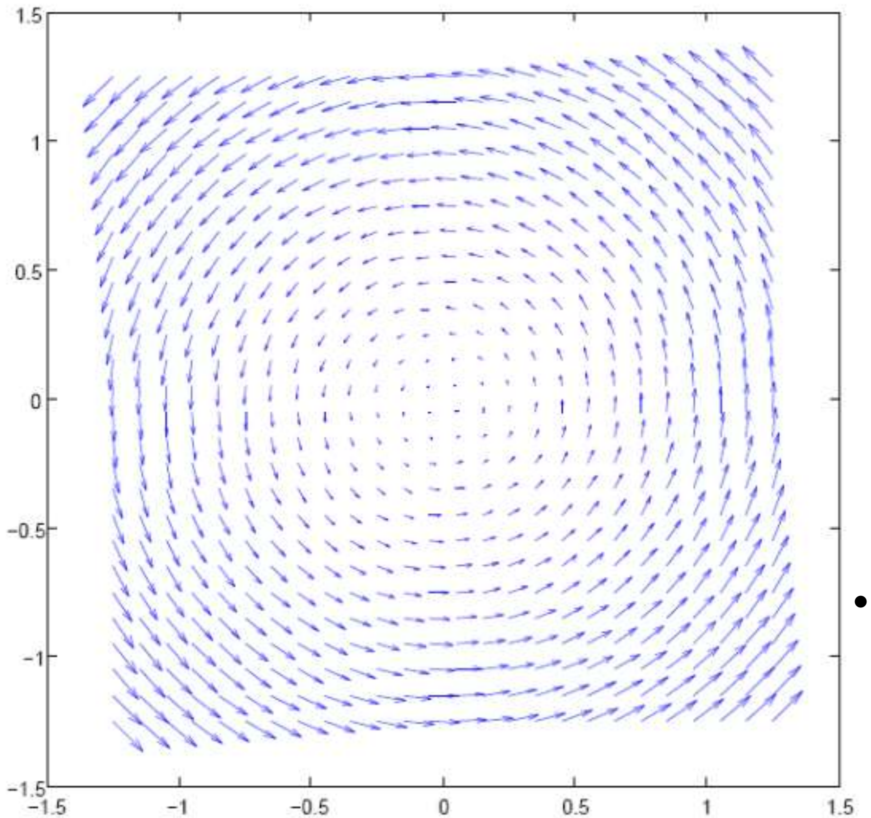
Le rotationnel d'un champ permet d'exprimer comment, localement en un point M, le champ $\vec{A}$ tourne autour de M

- Propriété: Un champ $\vec{A}$ dérive d'un potentiel si $\overrightarrow{rot}\,(\vec{A}) = 0$. Sa circulation sur un contour fermé est nulle. Sa circulation sur un circuit quelconque ne dépend que des extrémités du circuit.

LES OPERATEURS
LE ROTATIONNEL

Le rotationnel comme son nom l'indique nous permettra de savoir à quel endroit le champ tourne autour d'une de ses sources.
Ainsi le champ magnétique tournoie autour des courants localisés, à l'endroit desquels son rotationnel est non nul. En mécanique des fluides une tornade présente des vitesses qui tournent autour de leur source

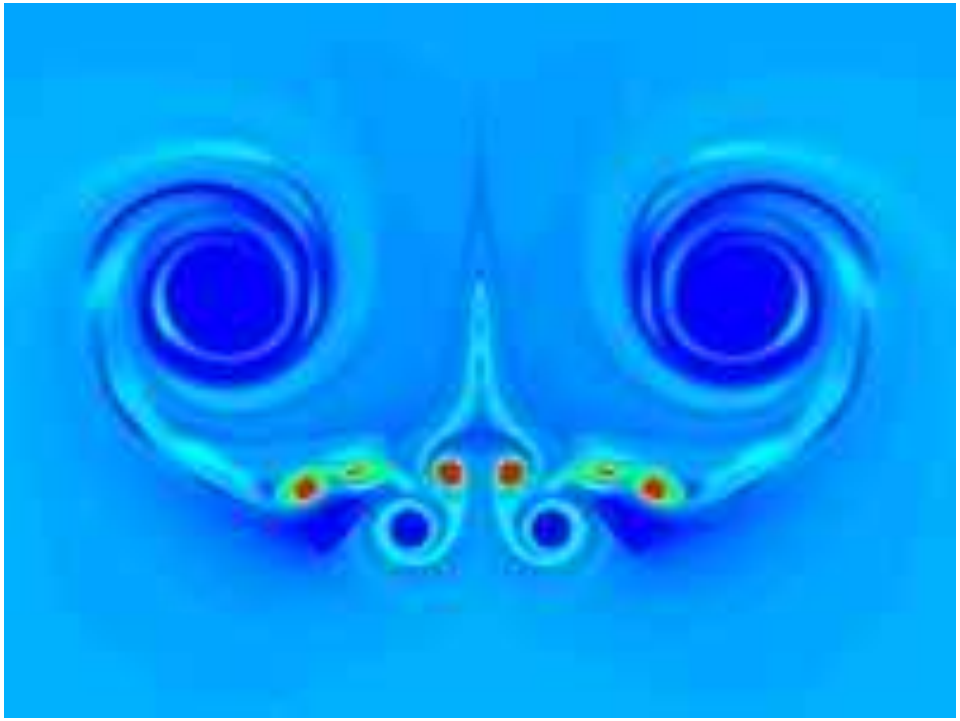
Vecteur vorticité $\vec{w} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}(\vec{v})$



- <u>Exemple</u>: Cartographie d'un champ magnétique créé par une source de courant localisée ; le rotationnel est non nul à l'intérieur de la source

LES OPERATEURS
LE ROTATIONNEL

Les tourbillons qui se forment dans le sillage des avions sont dangereux pour les appareils qui se suivent. Pour atténuer ces remous, l'injection de petits tourbillons supplémentaires semble prometteuse



Simulation numérique des tourbillons de sillage d'un avion de transport

LES OPERATEURS
LE ROTATIONNEL

- Exemple numérique :

Calcul de d'un rotationnel d'un champ vectoriel : résultat un vecteur

Soit le champ vectoriel bidimensionnel de vitesse d'un fluide :

$$\vec{v}(x,y) = (v_x(x,y), v_y(x,y)) = (y, -x)$$

Calculons le vecteur vorticité pour $\vec{v}(x,y)$

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x},\; -\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\hat{y}, \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z},\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{\partial(-x)}{\partial z}\right)\hat{x},\; -\left(-\frac{\partial(y)}{\partial z}\right)\hat{y}, \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right)\hat{z},\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(0)\hat{x}, (0)\hat{y}, (-1-1)\hat{z},\right] = \frac{1}{2}\;(0{,}0,-2)$$

$$\vec{w} = (0{,}0-1)$$

Le champ vitesse du fluide tourne dans le sens horaire autour de l'axe des *z*

LES OPERATEURS
LE LAPLACIEN

- Laplacien scalaire:

  Soit un champ scalaire f

$$\boxed{\Delta f = \overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f}$$

❖ La divergence du gradient d'un champ scalaire définit son Laplacien scalaire.

❖ En fait on dit aussi que le Laplacien scalaire est l'application au champ scalaire du carré (en fait les dérivées partielles secondes) de l'opérateur nabla.

❖ Le Laplacien obtenu est lui aussi (par construction) un champ scalaire

LES OPERATEURS
LE LAPLACIEN

- Laplacien vectoriel:

Soit un champ vectoriel $\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} = \vec{\nabla}^2 A_x\vec{u}_x + \vec{\nabla}^2 A_y\vec{u}_y + \vec{\nabla}^2 A_z\vec{u}_z}$$

Le Laplacien vectoriel est tout simplement pour chaque composante le Laplacien scalaire appliquée à chacune des composantes

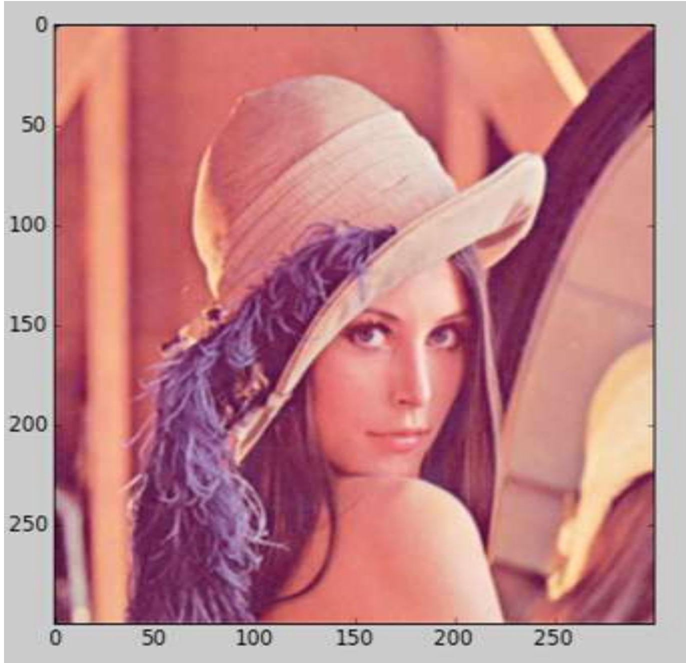
$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} & + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} & + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} & + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} & + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} & + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} & + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\vec{A}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$$

LES OPERATEURS
LE LAPLACIEN

- <u>Interprétation</u>: Le $Laplacien$ représente une courbure moyenne locale de la fonction scalaire ou du champ vectoriel. Il donne la mesure de la différence entre la valeur de f en un point quelconque P et la valeur moyenne f au voisinage du point P.

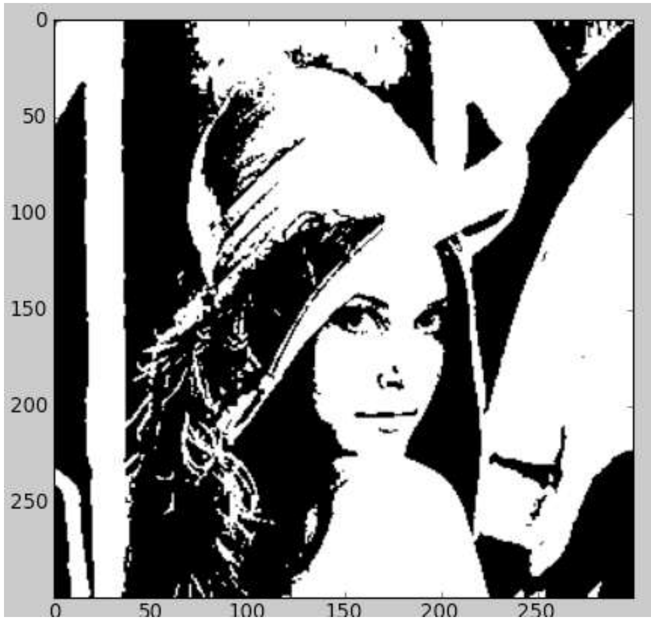
- <u>Exemple</u>: ***Traitement d'image***: Une méthode simple pour produire une image en niveaux de gris consiste à remplacer les trois canaux de couleur par leur moyenne. Ensuite, à partir de l'image en niveaux de gris, vous devez calculer et afficher l'image binaire (noir et blanc) en faisant une opération de seuillage.



LES OPERATEURS
LE LAPLACIEN

<u>Exemple</u>: ***Traitement d'image***: Cette opération consiste à simplement remplacer l'intensité des pixels de l'image soit par 1 lorsque celle-ci est supérieure ou égale au seuil, soit par 0 lorsque celle-ci est inférieure au seuil.

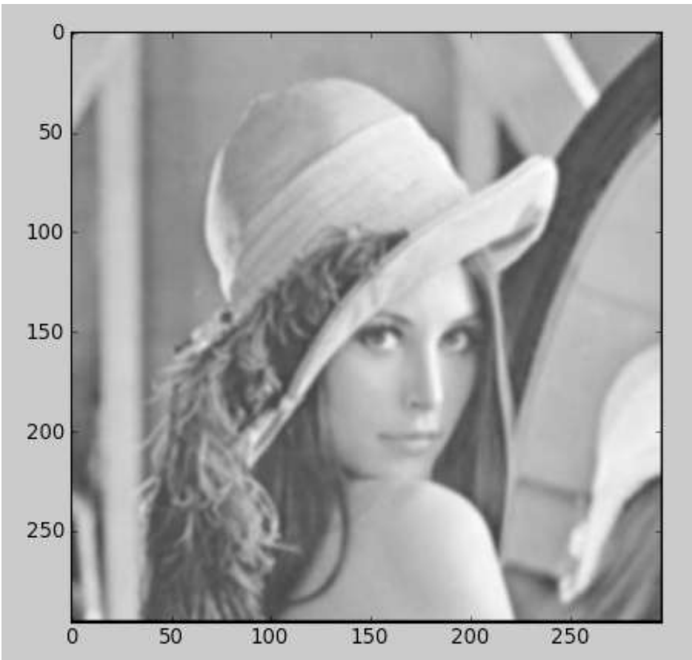
Image en niveaux de gris



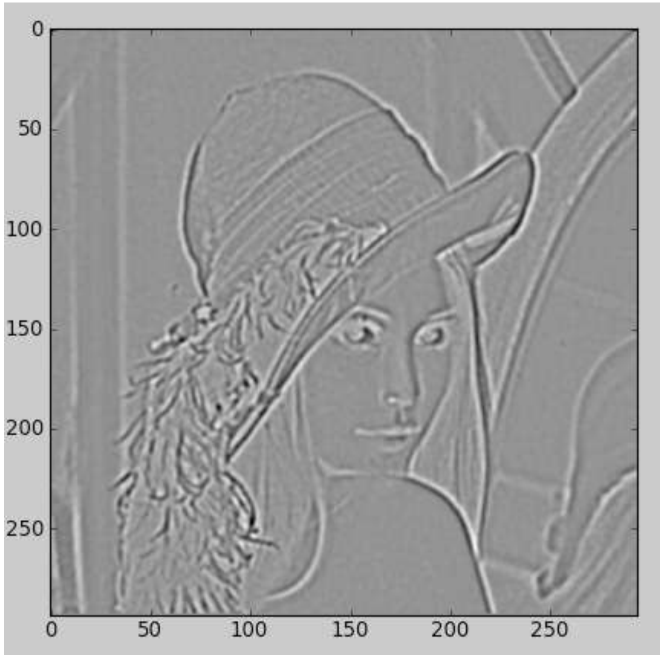
Opération de seuillage

LES OPERATEURS
LE LAPLACIEN

Exemple: ***Traitement d'image***: Ensuite on applique un filtre passe-bas à effet de filtrer les hautes fréquences dans l'image (la rendant floue). Et pour finir, appliquer à votre image filtrée un deuxième filtre de type Laplacien pour faire ressortir les arêtes de l'image.



Filtre passe-bas



Filtre Laplacien

RÉCAPITULATIF → OPERATEURS

Les opérateurs mathématiques **gradient**, **divergence**, **rotationnel**, et **Laplacien** sont construits à partir de l'opérateur fondamental **Nabla** :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad}(f) \\ \vec{\nabla}.\vec{A} = \overrightarrow{div}(\vec{A}) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \\ \vec{\nabla}^2 f = \Delta f \text{ ou } \vec{\nabla}^2\vec{A} = laplacien \end{array}\right.$$

Relations fondamentales	**(1)**	div(grad) = Laplacien	Par construction le Laplacien (scalaire) est la divergence du gradient du champ
	(2)	div(rot) = 0	La divergence du rotationnel d'un champ est toujours nulle
	(3)	Laplacien = grad(div) - rot(rot)	Le rotationnel du rotationnel d'un champ est égal au gradient de la divergence de ce champ moins son Laplacien (vectoriel évidemment)

RÉCAPITULATIF → OPERATEURS

Relations impossibles	(1)	grad(rot)	Le gradient d'un rotationnel n'existe pas puisque l'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire alors que le rotationnel est un vecteur
	(2)	rot(div)	Le rotationnel d'une divergence n'existe pas puisque l'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel alors que la divergence est un scalaire
	(3)	rot(Laplacien scalaire)	Le rotationnel d'un Laplacien scalaire n'existe pas puisque l'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel alors que par construction le Laplacien scalaire est un scalaire

FORMULES SUR LES OPERATEURS

On considère f et g deux champs scalaires ainsi que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux champ de vecteurs.
On démontre les relations suivantes :

$$\overrightarrow{grad}\,(fg) = g\ \overrightarrow{grad}\,f + f\ \overrightarrow{grad}\,g$$

$$div\,(f\vec{a}) = f div\,(\vec{a}) + \left(\overrightarrow{grad}\,f\right)\ \vec{a}$$

$$\overrightarrow{rot}\,(f\vec{a}) = f\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{a}) + \left(\overrightarrow{grad}\,f\right) \wedge \vec{a}$$

$$div\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b}.\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{a}) - \vec{a}.\ \overrightarrow{rot}\left(\vec{b}\right)$$

LES THÉORÈMES

- Théorème de Green - Ostrogradski Théorème de flux-divergence

$$\oiint dS \rightarrow \iiint_{\tau} d\tau$$

- Théorème de Stokes – Ampère Théorème de circulation-rotationnel

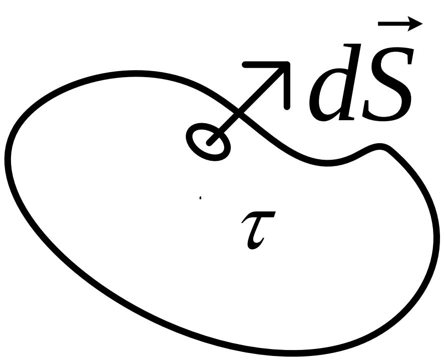
$$\oint dl \rightarrow \iint_{S} dS$$

THÉORÈME DE GREEN-OSTROGRADSKI

Ceci est un théorème reliant la divergence d'un champ vectoriel à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ.

Énoncé: Le flux d'un vecteur $\vec{A}$ à travers une surface fermée S (orienté vers l'extérieur) est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume τ délimité par cette surface S.

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) d\tau$$



L'idée du théorème de Green-Ostrogradsky est de transformer une intégrale triple étendue à un certain volume τ en une intégrale double étendue à la surface S limitant ce volume.

CONSÉQUENCES SUR LE FLUX D'UN VECTEUR

$$Flux = \phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Définitions équivalentes :

- ✓ $\phi_1 = 0$ pour toute surface fermée
- ✓ $\overrightarrow{div}(\vec{A}) = 0$ en tout point de l'espace
- ✓ Il existe un champ de vecteurs $\vec{B}$ tel que $\vec{A} = \overrightarrow{rot}(\vec{B})$ parce que $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot}) = 0$
- ✓ On dit alors que $\vec{A}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{B}$ ($\vec{B}$ n'est pas unique, le potentiel vecteur est donc défini « à un gradient près » ($\overrightarrow{B'} = \vec{B} + \vec{\nabla}\varphi$)

- $\vec{A}$ est à flux conservatif
- $\vec{A}$ est à divergence nulle (solénoïdal)
- $\vec{A}$ dérive d'un potentiel vecteur

THÉORÈME DE GREEN-OSTROGRADSKI

- Application : Calculer le flux du champ de vecteurs : $\vec{V}(x^3, y^3, z^3)$ sortant à travers la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Par le théorème de Green-Ostrogradski nous pouvons écrire:

$$\oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) d\tau$$

Calculons $\vec{\nabla}.\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{x^3}{\partial x} + \frac{y^3}{\partial y} + \frac{z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\phi = \iiint_\tau \vec{\nabla}.\vec{V}\, d\tau = \iiint_\tau 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \iiint_\tau 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Sur la sphère τ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ on passe aux coordonnées sphériques

THÉORÈME DE GREEN-OSTROGRADSKI

- Application *(suite): Coordonnées sphériques*

$$x = r\sin(\varphi)\ \cos(\theta) \qquad r \in [0{,}1]$$
$$y = r\sin(\varphi)\ \sin(\theta) \quad \textit{Avec les intervalles:} \quad \theta \in [0,\pi] \quad \textit{Où :}$$
$$z = r\cos(\varphi) \qquad \varphi \in [0{,}2\pi]$$

$$dx = r\sin(\varphi)\ \cos(\theta)$$
$$dy = r\sin(\varphi)\ \sin(\theta)$$
$$dz = r\cos(\varphi)$$

$$\phi = \iiint_\tau \ 3(x^2 + y^2 + z^2)\ dx\ dy\ dz = \iiint_\tau \ 3(r^2)\ r^2 \sin(\theta)\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

$$\phi = \int_0^1 3r^4 dr \int_0^\pi \sin(\theta)\ d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left(\frac{3}{5} r^5 \Big|_0^1\right)\left(-\cos(\theta)\Big|_0^\pi\right)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)$$

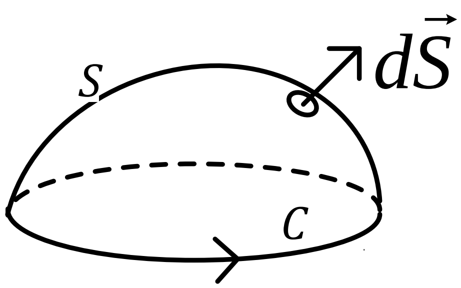
$$\phi = \left(\frac{3}{5}\right).(1+1).(2\pi) = \frac{12}{5}\pi$$

THÉORÈME DE STOKES

Ceci est un théorème reliant le <u>rotationnel d'un champ vectoriel</u> à la valeur de <u>l'intégrale de la circulation</u> de ce champ sur le contour de cette surface.

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot d\vec{S}}$$

<u>Énoncé</u>: La circulation du vecteur $\vec{A}$ prise le long d'un contour fermé sur lequel s'appuie une surface ouverte S, est égal à l'intégrale du rotationnel de ce vecteur sur la surface S.



La formule de stokes permet de transformer une intégrale double étendue à une surface ouverte S en une intégrale simple étendue au contour C fermé sur lequel S s'appuie

CONSÉQUENCES SUR LA CIRCULATION D'UN VECTEUR

$$C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

- Champ à circulation conservative si $C = \int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Définitions équivalentes :

✓ Pour toute courbe fermée C : $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$

✓ En tout point de l'espace : $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0$

✓ Il existe un champ scalaire f tel que : $\vec{A} = \vec{\nabla} f$
si $\vec{A} = \overrightarrow{grad}(f)$, $\vec{A} =$ consevative

- $\vec{A}$ est à circulation conservative
- $\vec{A}$ est irrotationnel
- $\vec{A}$ dérive d'un potentiel scalaire
- $\vec{A}$ est un champ de gradient

THÉORÈME DE STOKES

- Application : Calculer la circulation du champ de vecteurs : $\vec{V}(-y, x, xy)$ sur le contour s' appuyant de la surface d'équation : $x^2 + y^2 = 1$

Par le théorème de Stokes nous pouvons écrire :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

Calculons $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{x},\ - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \hat{y}, \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{z}, \right]$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\left(\frac{\partial (xy)}{\partial y} - \frac{\partial (x)}{\partial z} \right) \hat{x},\ - \left(\frac{\partial (xy)}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial z} \right) \hat{y}, \left(\frac{\partial (x)}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) \hat{z}, \right]$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = [(x - 0)\hat{x},\ -(y - 0)\hat{y}, (1 - (-1))\hat{z},] = (x, -y, 2)$$

THÉORÈME DE STOKES

- Application *(suite)*

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} = [(x-0)\hat{x},\ -(y-0)\hat{y}, (1-(-1))\hat{z},] = (x,-y,2)$$

On change de coordonnées (polaires) pour mieux décrire ce contour (cercle)

$$x = r\cos(t)$$
$$y = r\sin(t)$$

$$dx = (\cos(t), \sin(t), 0)dr$$
$$dy = (-r\sin(t), \mathrm{r}\cos(t), 0)dt$$

$$r \in [0,1]$$
Avec $t \in [0,2\pi]$

$$(rcos(t), r\sin(t), 0)$$

$$d\vec{S} = \vec{n}\,dS = dx\wedge dy = (0,0,r\cos^2(t) + r\sin^2(t))\ drdt$$
$$= (0,0,r) = (0,0,1)r\ dr\ dt$$

Ainsi l'intégrale double devient: $C = \oiint_S\ (x,-y,2).\,d\vec{S} = \oiint_S\ (x,-y,2).\,(0,0,1)r\ dr\ dt$

$$C = \oiint_S\ 2\ r\ dr\ dt\ = \int_0^1 2\ r\ dr\quad \int_0^{2\pi} dt = \left(r^2\,\Big|_0^1\right)\left(t\Big|_0^{2\pi}\right) = 2\pi$$