Info-Spé

2008/2009

Corrigé du Contrôle n°1 de Physique

Exercice I :

1) $\vec{E}$ est radial car $\begin{cases} * \ \rho \text{ ne dépend que de } r \\ * \text{ longueur du cylindre infiniment grande.} \end{cases}$

en effet : $\begin{cases} \text{si } \rho = \rho(r) \text{ alors } E_\theta = 0 \\ \text{si } l \text{ est infini alors } E_z = 0 \\ \text{d'où } \vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{champ radial.} \end{cases}$

2) Th de Gauss :

$$\oiint_{S_g} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ est radial et ne dépendant que de r

$$\rightarrow \Phi(\vec{E}) = E \cdot 2\pi r l = E \times S_g .$$

(la surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de m̂ longueur que le système).

$r < R$:

$$Q_{int} = \iiint \rho \cdot d\tau = \int_0^{2\pi}\int_0^{l}\int_0^{r} \underbrace{\rho}_{= K \cdot r} \, r\,dr\,d\theta\,dz .$$

$$= K \cdot \frac{r^3}{3} \cdot 2\pi \cdot l .$$

or $E . 2\pi r l = \frac{K . r^3}{3 \varepsilon_0} . 2\pi l .$

$$\boxed{E(r) = \frac{K r^2}{3 \varepsilon_0}} \quad r < R .$$

* Pour $r > R$:

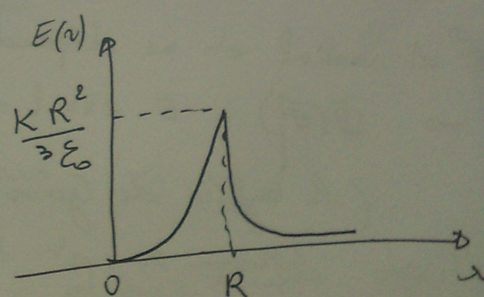
$$Q_{int} = \iiint \rho \, d\tau = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R K r . r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= K . \frac{R^3}{3} . 2\pi l .$$

or $E . 2\pi r l = \frac{K R^3}{3 \varepsilon_0} 2\pi l$

$$\boxed{E(r) = \frac{K R^3}{3 \varepsilon_0 . r}}$$

3) Le champ est continu car $\lim_{r \to R^-} E(r) = \lim_{r \to R^+} E(r)$



en effet $\lim_{r \to R^-} E(r) = \frac{K R^2}{3 \varepsilon_0}$

$$\lim_{r \to R^+} E(r) = \frac{K R^3}{3 \varepsilon_0 . R} = \frac{K R^2}{3 \varepsilon_0} .$$

et $\boxed{E_{max} = E(r = R) = \frac{K R^2}{3 \varepsilon_0}} .$

2) a) Calcul de $\overrightarrow{rot}(F)$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(Kxy) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K(xz - x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(K(yz - 2xy)\right) - \frac{\partial}{\partial x}(Kxy) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(K(xz - x^2)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K(yz - 2xy)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Kx - Kx \\ Ky - Ky \\ K(z - 2x) - K(z - 2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

b) <u>Conclusion</u>

Comme $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{0}\ \forall f$.

si $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = 0$ $\exists$ une fonction f dont dérive cette force tel que $\vec{F} = \overrightarrow{grad}(f)$. cette fonction est homogène à de l'énergie.

2

Ex2 :

1) a) $\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{V})) \stackrel{?}{=} 0$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\operatorname{rot}}(\vec{V})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{V})) = \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial x}}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial z \partial y}}$$

$$= 0$$

b) $$\operatorname{div}(f\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (f\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(fV_z)$$

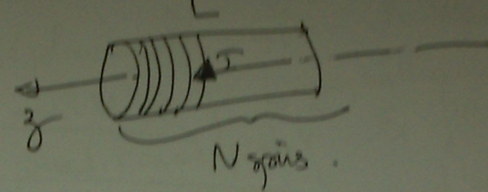
$$= \frac{\partial f}{\partial x} V_x + f\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot V_y$$

$$+ V_z \frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= f \operatorname{div}(\vec{V}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot \vec{V}$$

Ex 3 :

Partie A

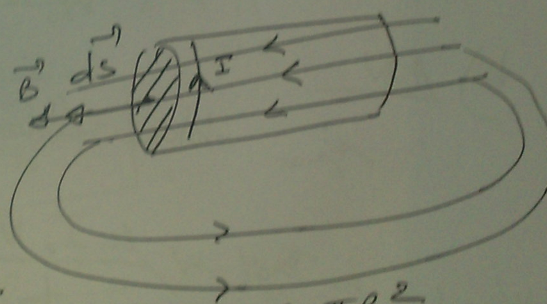


1) flux de $\vec{B}$

$$\Phi(\vec{B}) = N \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}.$$

ds ce cas les lignes de champ $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde sont parallèles à l'axe $\vec{Oz}$ (donné par la loi de Biot-Savart) ce qui montre que les surfaces traversées par $\vec{B}$ sont les sections des spires, d'où

$dS = r dr d\theta.$



$$\Phi(\vec{B}) = N \iint B . r dr d\theta.$$

$$= N B . \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta = N B . \pi R^2$$

car B est constant.

$$\boxed{\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 N^2}{L} \pi R^2}$$

3

2) a) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 N^2 I_0 \cos \omega t \, \pi R^2}{L}\right)$$

$$\boxed{e(t) = \frac{\mu_0 I_0 N^2}{L} \pi R^2 \omega \sin(\omega t)}$$

f.e.m autoinduite.

<u>courant induit</u>

$i = \dfrac{e}{r}$ (Loi d'Ohm).

$$\boxed{i(t) = \frac{\mu_0 I_0 N^2 \pi R^2}{L \cdot r} \omega \sin(\omega t)}$$

courant induit alternatif.

b) <u>A.N</u>

i_{max} obtenu lorsque $\sin(\omega t) = 1$.

$$i_{max} = \frac{\mu_0 I_0 N^2 \pi R^2 \omega}{L \cdot r}$$

$$i_{max} = \frac{\cancel{4}\cancel{\pi} 10^{-7} \cdot 10 \; 10^4 \cdot \cancel{\pi} \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 10^3}{\cancel{4}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cancel{10}}$$

$$i_{max} = 16 \cdot 10^{-7} \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 10$$

$$= 16 \cdot 10^{-7} \cdot 10^5 = 16 \cdot 10^{-2} = 160 \, 10^{-3}$$

$$\boxed{i_{max} = 160 \, mA}$$

Partie B :

1) a- lorsqu'on déplace le cache le long de l'axe $\vec{Ox}$, le champ magnétique $B(x)$ varie et par conséquent le flux aussi. On a donc un phénomène d'autoinduction qui se manifeste par l'apparition d'un courant induit traversant le cache.

b- Dans ce cas B reste cst et le flux aussi. Il ne se passe donc rien.

2) a- Calcul du flux magnétique à $t=0$.

$$\underset{t=0}{\Phi(\vec{B})} = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = + \int_0^b \int_0^a Kx^2 \, dx \, dy$$

$$= K \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \boxed{K \frac{a^3}{3} . b.}$$

b- Calcul du flux à $t = 4s$.

$$\underset{t=4s}{\Phi(\vec{B})} = \iint \vec{B} . \vec{dS} = + \int_0^b \int_{d-a}^{d} Kx^2 dx dy$$

$$= \frac{K.}{3} b. \left[d^3 - (d-a)^3\right]$$

c- Le cache se déplace progressivement, le flux varie donc lentement d'où

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$= -\frac{\left[\Phi(t=4s) - \Phi(t=0)\right]}{4}$$

$$= -\frac{Kb}{4\cdot 3}\left[d^3 - (d-a)^3 - a^3\right].$$

$$\Rightarrow \quad e = -\frac{K.b}{12}\left[d^3 - (d^3 - 3ad^2 + 3a^2d - a^3) - a^3\right]$$

$$= -\frac{K.b}{12}\left(\cancel{d^3} - \cancel{d^3} + 3ad^2 - 3a^2d + \cancel{a^3} - \cancel{a^3}\right)$$

$$\boxed{e = -\frac{K.b\,a.d}{4}(d-a)}$$

Rq : e est <0 car $d-a>0$ $(d>a)$.

d) Courant induit :

$$i = \frac{e}{r}$$

$$i = -\frac{Kbad}{4.r}(d-a)$$

i est aussi <0 d'où i circule dans le sens inverse au sens trigo.