Feuille d'exercices n°3

Algèbre linéaire I

(du lundi 22 octobre 2012 au vendredi 23 novembre 2012)

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E.

1. Donner un exemple pour lequel $F \cup G$ n'est pas un sev de E.
2. Montrer que
$$(F \cup G \text{ sev de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F).$$

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E. Montrer que

$$F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$$

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x - y + 2z$.

   Déterminer Ker(f) (en précisant une base) et Im(f).

2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $g(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z)$.

   Déterminer Ker(f) (en précisant une base) et Im(f).

Exercice 4

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $(f, g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$.

   Montrer que $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$

2. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 2id = 0$ où id désigne l'application identique de E dans E.

   a. Montrer que $\mathrm{Im}(f - id) \subset \mathrm{Ker}(f + 2id)$ et $\mathrm{Im}(f + 2id) \subset \mathrm{Ker}(f - id)$.

   b. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - id) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2id)$

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(u,v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v) \Longrightarrow \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v) \text{ et } \operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(u)$$

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

1. Soit p un projecteur de E i.e. $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
2. Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que
   a. $(p \circ q = q \wedge q \circ p = p) \Longleftrightarrow \big(\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)\big)$
   b. $(p \circ q = p \wedge q \circ p = q) \Longleftrightarrow \big(\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)\big)$
   c. On suppose $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$.
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $q = \alpha p \Rightarrow \alpha p = \alpha^2 p$. En déduire que (p,q) forme une famille libre dans $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 7

Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?

1. $\big(1, X-1, (X+1)^2\big) \qquad \big(E = \mathbb{R}_2[X]\big)$
2. $(x \mapsto e^{2x},\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$
3. $(x \mapsto e^{x},\ x \mapsto e^{x+1},\ x \mapsto e^{x+2}) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$
4. $\big(x \mapsto \sin(x),\ x \mapsto \cos(x),\ x \mapsto x\big) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\big\{x, f(x), f^2(x)\big\}$ est une base de E.

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\big(\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)\big) \Longleftrightarrow \big(E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)\big)$$

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1}.

Exercice 11

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer (sous forme factorisée) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I)$ et $\det(B - \lambda I)$

Exercice 12

Soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le déterminant (sous forme factorisée) des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer sous forme factorisée $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Exercice 14

Soit $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$ définie par $f(P) = P'$.
En ayant vérifié que f est linéaire, écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX - XA \end{cases}$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)$.
2. f est-elle bijective ?
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.