Contrôle 1

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Consignes:

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\left(\cos(x)\right)^x - 1}{x^3}$

[suite du cadre page suivante

2. Déterminer $\lim_{x \longmapsto 0} \frac{e^{x^2} - \ln(e + x^2)}{x \ln(1 + x)}$

3. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - x\sin(x)}{1 - \cos(x^2)}$

Exercice 2 (4 points)

eterminer, en u	tilisant obligatoire	ement la règle d	e d'Alembert, la	nature de la sé	$\frac{n^2(n+1)}{n!}$	1)2

2. Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum \frac{2^n}{n(3^n+n)}$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(p!)^n}{n^n}$

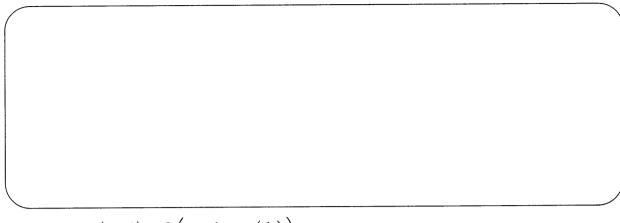
4.	Déterminer	la nature	de l	a série	7	$\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$
		100 1100 0110				n

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n n^{\alpha} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \right)^{\beta}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, on a $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

[suite du cadre page suivante]



2. Montrer que $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

CONTRÔLE 1 – novembre 2010

3. En déduire que $u_n=(-1)^n\frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\Biggl(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\Biggr)$

4. Montrer que si $\beta \leqslant \alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.

5. Etude du cas $\beta > \alpha$.

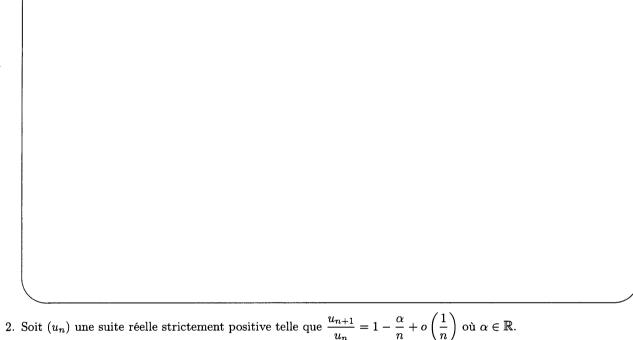
a. Vérifier que $u_n = (-1)^n \frac{2^{\beta}}{n^{\beta-\alpha}} + v_n$ avec $v_n = (-1)^n \frac{\beta 2^{\beta}}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right)$.

Montrer que $\sum v_n$ converge.				
Montrer que la série de term	ne général $w_n = (-$	$(1)^n \frac{2^{\beta}}{2}$ est conv	ergente.	
		$n^{\beta-\alpha}$		
En déduire la nature de $\sum v$	Um -			
Zin dedune in instance do Zie	~~~			
\				

Exercice 4 (6 points)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que pour tout $n \ge N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Montrer que $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

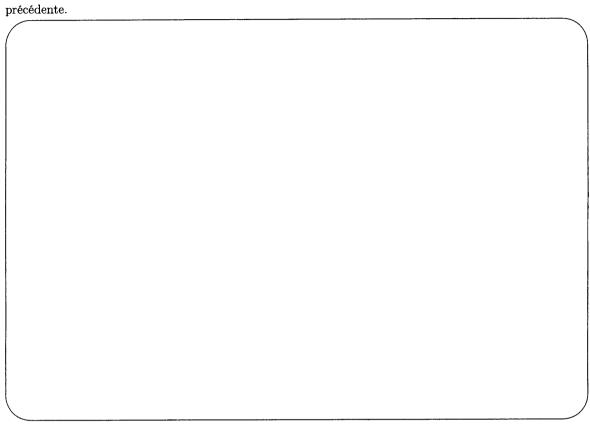


2. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Soit $(v_n) = \left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ où $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

b.	On suppose que	$\alpha > 1$. Montre	r que $\sum u_n$ converge.
υ.	On suppose que	a > 1. 141011010	1 que Z un converge.

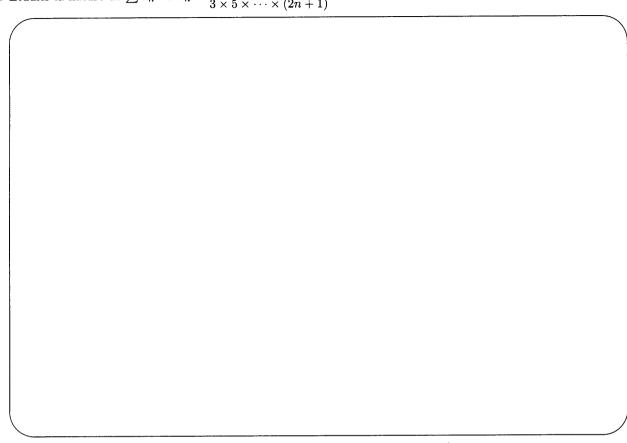
N.B. : on pourra considérer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$ et utiliser la suite (v_n) introduite dans la question précédente



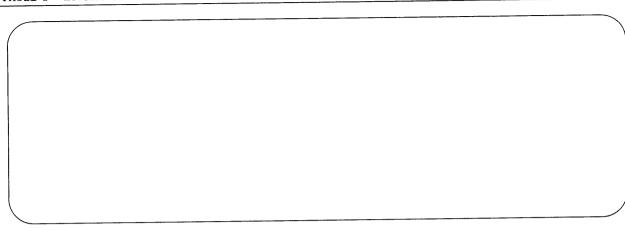
c. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

N.B. : on pourra considérer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 1$ et utiliser la suite (v_n) introduite dans la question a.

3. Etudier la nature de $\sum u_n$ où $u_n=\frac{2\times 4\times \cdots \times 2n}{3\times 5\times \cdots \times (2n+1)}$



4. Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ de la nature $\sum u_n$ où $u_n = \frac{n \times n!}{(a+1) \times \cdots \times (a+n)}$



Exercice 5 (3 points)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$. Discuter, suivant les valeurs de α et β , la nature de $\sum \frac{n^{\beta}}{\alpha^n}$