Chapitre IV

Dynamique du point matériel

Plan

I. Eléments de la dynamique
   1. Torseur force
   2. Torseur cinétique
   3. Torseur dynamique

II. Principes fondamentaux de la dynamique

III. Energétique
   1. Puissance
   2. Travail d'une force
   3. Energie potentielle
   4. Energie cinétique
   5. Energie mécanique
   6. Théorème d'énergie cinétique
   7. Théorème d'énergie mécanique

A. Zellagui

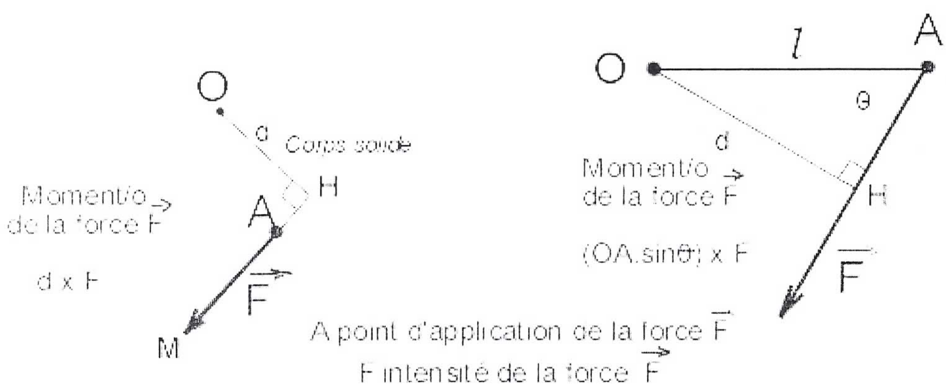
La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie les causes du mouvement.

I. Eléments de la dynamique.

1. Torseur force

$$\{\vec{F}\} = \begin{pmatrix} \sum \vec{F}_{ext} \\ \sum \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{ext}) \end{pmatrix}$$

Moment d'une force par rapport à un point



rotation : moment de longueur (ou : ω.)

Si v → translation

2- Torseur cinétique.

$$\{\vec{p}\} = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{M}_{/\Delta}(\vec{P}) = \vec{L} \end{pmatrix}$$

moment de $\vec{P}$

$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$
$$= m(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}}_{\text{moment de } \vec{v}}) = \vec{L}$$

moment cinétique

C'est la grandeur composée de 2 entités :

- Quantité de mouvement : $\vec{P}$
- Moment de quantité de mouvement = moment cinétique = $\vec{L}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underbrace{m\vec{v}}_{\vec{P}})$$

$\vec{P}$: Vect qté de mvmt

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

Collision (ou choc) élastique

Lorsque la nature des éléments reste la même avant et après le choc

$$\underset{\text{avant le choc}}{\vec{P}_{total}} = \underset{\text{après le choc}}{\vec{P}_{total}}$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \underbrace{\vec{P}_{mur}}$$

qté de mvmt transmise au mur.

qté de mvmt incidente

$$\vec{P}_{mur} = \vec{P} - \vec{P}' = \Delta \vec{P}$$

Cas particulier :

la balle arrive $\perp$ au mur :

$\xleftarrow{\vec{P}'}$

$\xrightarrow[\vec{p}]{}$

$$\vec{P} = -\vec{P}'$$

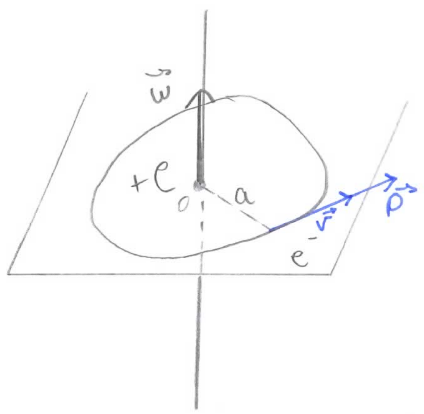
or $\vec{P}_{mur} = \vec{P} - \vec{P}'$

$$\vec{P}_{mur} = \vec{P} - (-\vec{P})$$

$$\vec{P}_{mur} = 2\vec{P}$$

exemples :

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{p} \quad \text{(par déf)}$$



Sens et direction :

(trièdre direct) $\vec{L} = L\vec{e_z}$

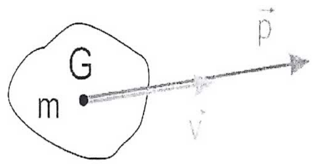
2.1 *<u>Définition d'une quantité de mouvement.</u>*

On introduit cette grandeur lorsqu'on étudie une interaction entre deux points matériels ou entre deux solides, par exemples lors des chocs ou des collisions entre particules.

- Pour un solide de masse m, animé d'une vitesse $\vec{V}$

$\vec{P}$ est toujours colinéaire à $\vec{V}$
et même sens si $+$ (
de sens inverse si $-$

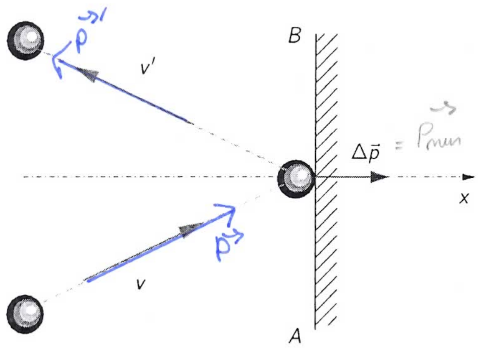
$$\boxed{\vec{P} = m.\vec{V}}$$

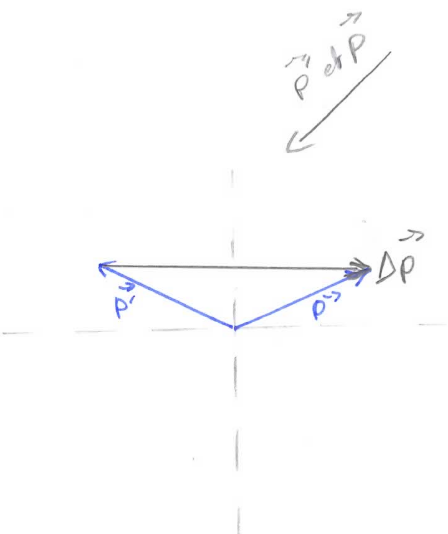


- Pour **une distribution discrète** (un nombre fini N de points matériels)

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{v}_i}$$

<u>Exemple de collision sur les parois</u>



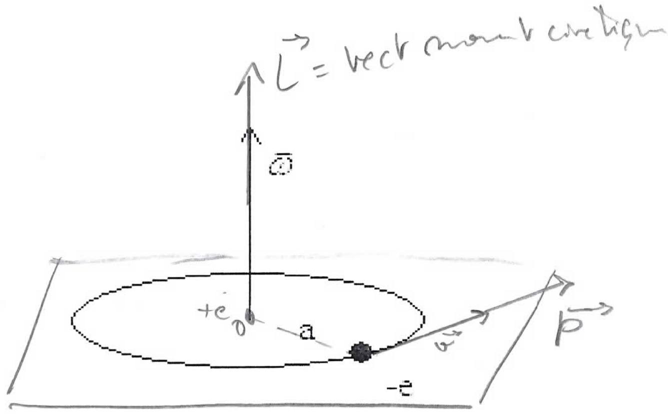


2.2 *Moment cinétique*

C'est le moment de la quantité de mouvement $\vec{P}$. Pour un point matériel de masse m, de vitesse $\vec{V}$ tournant autour du point O, le moment cinétique est :

$$\boxed{\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \vec{OM} \wedge m.\vec{V}}$$

Exemples



$\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{P}$ (par déf)

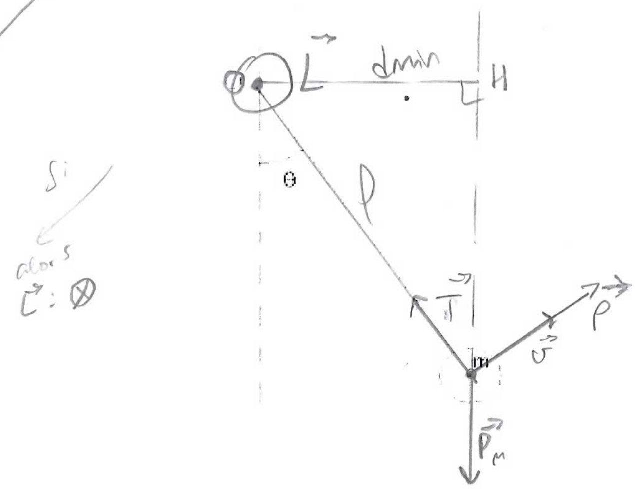
. Sens et direction
(trièdre direct) $\vec{L} = L\vec{e_z}$

. norme de $\vec{L}$

$||\vec{L}|| = ||\vec{OM}|| . ||\vec{P}|| . \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= a . m (\underbrace{a\omega}_{r\dot{\theta}}) \Rightarrow$

$||\vec{L}|| = m a^2 \omega$



pendule simple : masse (m) accrochée à un fil de longueur l, on écarte le fil par rapport à la verticale d'un angle θ_0 et on lâche la masse sans vitesse initiale.

$\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

(direction et sens : trièdre direct porté par l'axe $\vec{Oz}$)

$||\vec{L}|| = ||\vec{OM}|| . m||\vec{v}|| . \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (car $\vec{OM} \perp \vec{v}$)

$= l . m . l\dot{\theta} . 1$

$\boxed{||\vec{L}|| = m . l^2 . \dot{\theta}}$

et $\boxed{\mathcal{M}/_O(\vec{P_m}) = -P_m \, l \sin(\theta)}$

Moment des forces : $\mathcal{M}/_O(\vec{T}) = 0$ car la droite de force $\vec{T}$ passe par l'axe de rotation (dmin = bras de levier = 0)

3. *Torseur dynamique.*

Quand la vitesse varie, on définit l'accélération et on introduit le torseur dynamique $\vec{D}$.

petit volume (m^3) (3 variables)

* Pour une distribution discrète :

$m_i \longrightarrow dm = \rho \, d\tau$

↳ la masse volumique

$$\{\vec{D}\} = \begin{pmatrix} \sum m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{OM}_i \wedge m_i.\vec{a}_i) \end{pmatrix}$$

$\Sigma \longrightarrow \iiint$

$\vec{a}_i$: vecteur accélération du point matériel de masse m_i

M_i : Point qui repère la position du point matériel par rapport au centre de rotation.

$+ \Rightarrow$

II. Principes fondamentaux de la dynamique

1. *Enoncé mathématique du P.F.D* : (Principe fondamental de la dynamique).

Dans un référentiel R, le mouvement d'un système de points matériels par rapport à un point fixe O. La force représente la variation de la quantité de mouvement au cours du temps.

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underbrace{m\vec{v}}_{\vec{p}}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En grandeur torsorielle :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad * \Rightarrow \underbrace{\{\vec{F}\}}_{\text{torseur force}} = \frac{d}{dt}\underbrace{\{\vec{P}\}}_{\text{torseur cinétique}}$$

$$\begin{pmatrix} \sum \vec{F}_{ext} \\ \sum \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{ext}) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m\vec{v} \\ \vec{L} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} \\ \sum \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{ext}) = \frac{dL}{dt} \end{cases}$$

(PFD de translation)

(PFD de rotation)

théorème du moment cinétique

(avec $\vec{L}$: moment cinétique : $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$)

4. Torseur Cinématique

$$\left\{\vec{V}\right\} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{V} \end{pmatrix}$$ vecteur vitesse angulaire (porté par l'axe de rotation)

Opérations sur les torseurs :

Combinaison linéaire

$$\left\{\vec{T}\right\} = \lambda_1 \left\{\vec{T_1}\right\} + \lambda_2 \left\{\vec{T_2}\right\}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} \vec{R_1} \\ \vec{M_1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \vec{R_2} \\ \vec{M_2} \end{pmatrix}$$

avec λ_1 et λ_2 sont 2 constante

$$\left\{\vec{T}\right\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{R_1} + \lambda_2 \vec{R_2} \\ \lambda_1 \vec{M_1} + \lambda_2 \vec{M_2} \end{pmatrix}$$

produit "scalaire" entre 2 torseurs : $\left\{\vec{T_1}\right\} \cdot \left\{\vec{T_2}\right\} = \begin{pmatrix} \vec{R_1} \\ \vec{M_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{R_2} \\ \vec{M_2} \end{pmatrix}$

$$= \underbrace{\vec{R_1} \cdot \vec{M_2}}_{\text{vrai produit scalaire}} + \underbrace{\vec{R_2} \cdot \vec{M_1}}_{\text{vrai produit scalaire}}$$

III. Energétique

1. Puissance

Pour un point matériel, la puissance Pui d'une force correspond au produit scalaire entre le vecteur force et le vecteur vitesse.

$$P_{ui} = \vec{F}.\vec{v}$$

$\left(P_{ui} = \frac{\delta W}{dt} = \vec F \cdot \frac{\vec{dl}}{dt}\right)$, $\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec v$; $P_{ui} = \vec F \cdot \vec v$ (watts : J/s)

En grandeur torsorielle :

$$P_{ui} = \{\vec F\}\cdot\{\vec v\}$$

$$\underbrace{P_{ui}}_{\text{puissance totale}} = \begin{pmatrix}\sum \vec{F_{ext}} \\ \sum \vec M_{/\Delta}(\vec{F_{ext}})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec w\\ \vec v\end{pmatrix} = \underbrace{\sum \vec{F_{ext}}\cdot\vec v}_{\text{Puissance de translation}} + \underbrace{\sum \vec M_{/\Delta}(\vec{F_{ext}})\cdot\vec w}_{\text{Puissance de rotation}}$$

Appliqué à l'exemple :

$$W_{A\to B}(\vec F) = \int_A^B \vec F\cdot\vec{dl} = \int_{x_A}^{x_B} F\, dl \cos(\alpha)$$

$dl \to dx$

$$W_{A\to B}(\vec F) = F\cos\alpha \int_{x_A}^{x_B} dx$$

$$W_{A\to B}(\vec F) = F\cdot\cos(\alpha)\cdot[x]_{x_A}^{x_B} = F\cdot\cos\alpha\,\underbrace{(x_B - x_A)}_{L}$$

(F, et α sont des constantes)

2. Travail d'une force

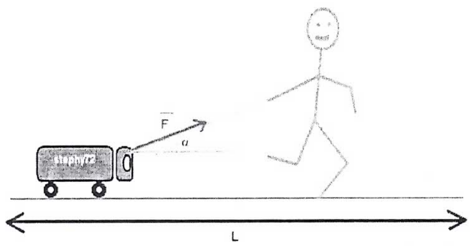
Le travail élémentaire d'une force δW pour un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ est :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.\vec{dl}}$$

"δ" car le travail pour certaines forces s'appellent "forces non conservatives dépendant du chemin suivi".

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec F) = \int_A^B \vec F\cdot\vec{dl}}$$

- $\vec{dl} = \vec v\, dt$ $(t_A \to t_B)$ $(dl = v\,dt)$
- $dl = R\,d\theta$ $(\theta_A \to \theta_B)$
- $dl = dx$ $(x_A \to x_B)$



3. *Energie potentielle*

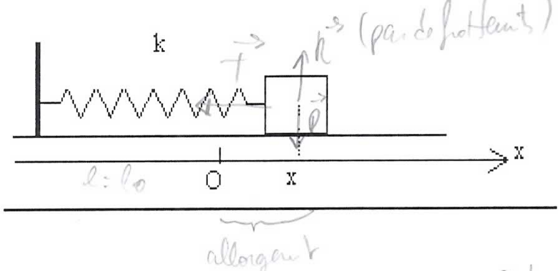
L'énergie potentielle élémentaire n'existe que pour les force conservatives, en effet dE_p est reliée au travail élémentaire δW par :

$$\boxed{dE_p = -\delta W^{cons}}$$

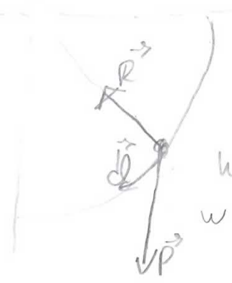
δW^{cons} : travail élémentaire des **forces conservatives**

Forces conservatives *:*

Forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais ne dépend que de l'état final et de l'état initial, exemple : (Poids, tension d'un ressort, force électrostatique,……)



ex :



$W(\vec{R}) = 0$
$W(\vec{P}) \neq 0$

$W(\vec{P}) = 0$ car $\vec{P} \cdot \vec{dl} = 0$ $(\vec{P} \perp \vec{dl})$
$(dl = dx)$

$W(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R} \cdot \vec{dl} = 0$ $(\vec{R} \perp \vec{dl})$

$dE_{pe} = -\delta W(\vec{T})$

$\|\vec{T}\| = k.x$

coef de raideur du ressort

$dE_{pe} = -(\vec{T} \cdot \vec{dl})$

$dE_{pe} = -\left(\underbrace{\|\vec{T}\|}_{kx} \cdot \underbrace{dl}_{dx} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\right) = kx\,dx$

$E_{pe}(x) = \int kx\,dx \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$ cste d'intégration

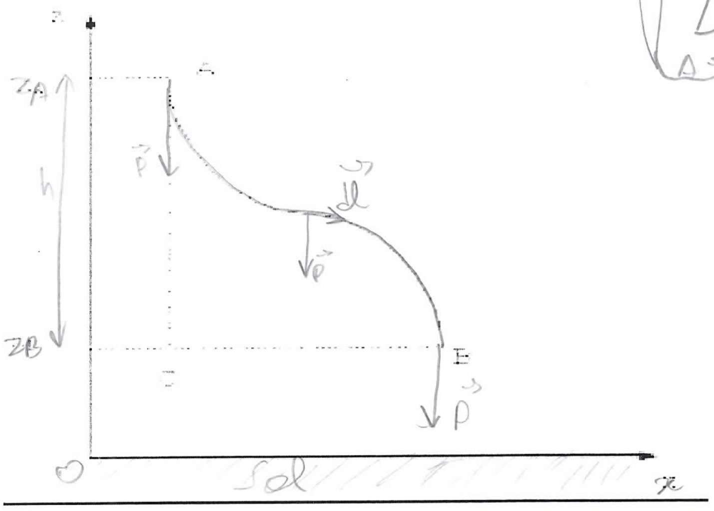
Si en $x = 0$ $E_{pe}(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}kx^2$

X Variation d'énergie potentielle élastique entre A et B.

$$\boxed{\Delta E_{pe_{A\to B}} = E_{pe_B} - E_{pe_A} = \frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)}$$

(en Joules)



$dE_{pp} = -\delta W(\vec{P})$

$dE_{pp} = -\vec{P}.\vec{dl}$

$dE_{pp} = -\begin{pmatrix}0\\-P\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}dx\\dz\end{pmatrix}$

$dE_{pp} = +mg\,dz$ ($P = mg$ et $0.dx = 0$)

$E_{pp}(z) = \int mg\,dz = mg\int dz = mgz + C$

en $z = 0$ (au sol) $E_{pp} = 0$

$\Rightarrow C = 0$ $\boxed{E_{pp}(z) = mgz}$

X Variation d'énergie potentielle de pesanteur

$\Delta E_{pp_{A\to B}} = mg(z_B - z_A) = -mgh$

conclusion : $\boxed{W(\vec{P}) = \pm mgh}$ + si le poids "descend" → travail moteur
− " " "monte" → travail résistant

Remarque :

Une force de frottement ~~une force~~ est une force non conservatri~~ce~~ve car elle de la forme :

$\vec{f} = -\alpha.\vec{V}$ Où α est le coefficient de frottement, et $\vec{V}$ la vitesse du mouvement.

$$\delta W = \vec{f}.\vec{dl} = -\alpha\vec{V}.\vec{dl}$$

Le travail dépend donc de la vitesse du mobile.

4. *Energie cinétique* (Joules)

L'énergie cinétique est définit pour un point matériel de masse m comme:

$$Ec_{total} = \frac{1}{2} m v^2$$

en grandeur torseur $$Ec = \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \vec{P} \right\}}_{\text{torseur cinétique}} \cdot \underbrace{\left\{ \vec{\theta} \right\}}_{\text{torseur cinématique}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m\vec{v} \\ \vec{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} m\vec{v}.\vec{v} + \frac{1}{2} \vec{L}.\vec{w}$$

$$\boxed{Ec_{totale} = \underbrace{\frac{1}{2} m\vec{v}^2}_{\text{Ec de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{L}.\vec{w}}_{\text{Ec de rotation}}}$$

* $\vec{L}$ et $\vec{w}$ sont 2 vecteurs portés par l'axe de rotation (colinéaires et de même sens)

5. *Energie mécanique*

C'est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (propre aux forces conservatives).

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

6. *Théorème de l'énergie cinétique*

Il correspond à la mise en relation des grandeurs énergétiques au travers du principe fondamental de la dynamique :

en grandeur infinitésimale
$$dEc = \delta W^{non\ cons} + \delta W^{cons} = \delta W(\underbrace{\vec{F_{ext}}}_{\vec{F}_{cons} + \vec{F}_{non\ cons}})$$

Après intégration entre 2 points A et B

$$\boxed{\Delta Ec_{A \to B} = \sum W(\underbrace{\vec{F_{ext}}}_{\vec{F}_{cons} + \vec{F}_{non\ cons}})}$$

7. *Théorème de l'énergie mécanique*

Le but de définir le théorème de l'énergie mécanique est de faire apparaître une distinction entre forces conservatives et non conservatives.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$dE_M = dE_c + dE_p$$

$$\cancel{\delta W^{cons}} + \delta W^{non\,cons} - \cancel{\delta W^{cons}}$$

$$dE_M = \delta W^{non\,cons}$$

après intégration entre 2 points A et B

$$\boxed{\Delta_{A \to B} E_M = \sum W(\vec{F}_{non\,cons})}$$

Théorème :

La variation de l'énergie mécanique entre 2 points donnés est égale à la somme des travaux des forces non conservatives.

Remarque

- Pour un mouvement avec **frottement**, on obtient

$$\boxed{\Delta E_m = W(\vec{f})}$$

$\vec{f}$: **force de frottement, force non conservative**

- Pour un mouvement sans frottement,

$$\boxed{\Delta E_m = 0}$$

L'énergie mécanique est la même en tout point ; on dit que E_m est conservée.