EPITA
ING 1 - Promo 2007

Février 2005
T2

Partiel Approximations

Exercice 1 :

Soit $f(x)$ une fonction continue donnée par points :
$f(0)=1, f(1)=1, f(2)=2, f(4)=5$

1. Donner le tableau des différences divisées et en déduire le polynôme d'interpolation de Newton
2. Evaluer l'erreur d'interpolation
3. En utilisant la division synthétique, approximer les dérivées :
   $f'(-1), f''(-1), f'''(-1)$
4. On considère la méthode d'intégration numérique :
   $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a.f(0)+b.f(1)+c.f(2)+d.f(4)$$
   Déterminer les constantes a, b, c, d pour que la méthode d'intégration soit d'ordre trois et calculer la valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

Exercice 2 :

1. Soit la fonction $g(x) = \exp(x)$ définie sur l'intervalle [-1,1]
   Interpoler $g(x)$ par un polynôme de degré 2 aux points
   $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   Majorer l'erreur d'interpolation

2. Soit $f(x)$ une fonction de classe n+1 ($f(x)$ est n+1 fois dérivable et ses dérivées sont continues jusqu'à l'ordre n+1) sur l'intervalle [-1,1].
On veut déterminer les abscisses $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ qui minimisent l'erreur d'interpolation au sens suivant :
$\|q\|^2 = \int_{-1}^{1} (q(x))^2 p(x)dx$ minimale où $q(x) = \prod_{i=0}^{i=n} (x - x_i)$ et $p(x)$ une fonction poids positive

3. Montrer que le polynôme $q(x)$ est orthogonal, sur [-1,1] relativement à la fonction poids $p(x)$ à tout polynôme de degré $r \leq n$

→

4. On donne la fonction poids $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ de Tchebyshev

   Quelles sont alors les abscisses $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, \; x_n$ qui minimisent l'erreur

   d'interpolation au sens $\|q\|^2 = \int_{-1}^{1} (q(x))^2 \, p(x) \, dx$ minimale

   Donner une majoration de l'erreur d'interpolation