Feuille d'exercices n°3

Algèbre linéaire I et II

(du lundi 26 octobre 2009 au vendredi 13 novembre 2009)

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ? Justifiez votre réponse.

1. $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \ d°(P) = 694\}$
4. $B = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \ d°(P) \geqslant 496\}$
5. $C = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \ d°(P) \leqslant 64\}$
6. $D = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' = 0\}$
7. $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ croissante}\}$
8. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$
9. $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ paire}\}$
10. $H = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ continue}\}$
11. $I = \{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)dt = 0\}$
12. $J = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ convergente}\}$
13. $K = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ divergente}\}$
14. $L = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n^2\}$

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E.

1. Donner un exemple pour lequel $F \cup G$ n'est pas un sev de E.
2. Montrer que
$$(F \cup G \text{ sev de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \vee G \subset F).$$

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Montrer que

$$F + G = Vect(F \cup G)$$

Exercice 4

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $(f, g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$.
   Montrer que $g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g)$
2. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 2id = 0$ où id désigne l'application identique de E dans E.
   a. Montrer que $Im(f - id) \subset Ker(f + 2id)$ et $Im(f + 2id) \subset Ker(f - id)$.
   b. Montrer que $E = Ker(f - id) \oplus Ker(f + 2id)$

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $(u, v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$$

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Soit p un projecteur de E i.e. $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus Im(p)$.
2. Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que
   a. $(p \circ q = q \wedge q \circ p = p) \iff \big(\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)\big)$
   b. $(p \circ q = p \wedge q \circ p = q) \iff \big(\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)\big)$
   c. On suppose $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$.
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $q = \alpha p \Rightarrow \alpha p = \alpha^2 p$. En déduire que (p, q) forme une famille libre dans $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 8

Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?

1. $\big(1, X-1, (X+1)^2\big) \qquad \big(E = \mathbb{R}_2[X]\big)$
2. $(x \mapsto e^{2x},\, x \mapsto x^2,\, x \mapsto x) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$
3. $(x \mapsto e^{x},\, x \mapsto e^{x+1},\, x \mapsto e^{x+2}) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$
4. $\big(x \mapsto \sin(x),\, x \mapsto \cos(x),\, x \mapsto x\big) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note pour tout $i \in \mathbb{N}$, f_i la fonction définie par $\begin{cases} f_i(i) = 1 \\ f_i(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq i \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_0, ..., f_n)$ est libre.

Exercice 10

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\big\{x, f(x), f^2(x)\big\}$ est une base de E.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n paire et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\left(f^2 = 0 \ \text{ et } \operatorname{rg}(f) = \frac{n}{2}\right) \Longleftrightarrow \big(\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)\big)$$

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\big(\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)\big) \Longleftrightarrow \big(E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)\big)$$