Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (3 points)

1.

$$\begin{aligned}
\left(\cos(x)\right)^x - 1 &= e^{x\ln\left(\cos(x)\right)} - 1 = e^{x\ln\left(1-x^2/2+o(x^2)\right)} - 1 \\
&= e^{x\left(-x^2/2+o(x^2)\right)} - 1 = e^{-x^3/2+o(x^3)} - 1 \\
&= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&\sim -\frac{x^3}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\left(\cos(x)\right)^x - 1}{x^3} \sim -\dfrac{1}{2}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\longmapsto 0} \frac{\left(\cos(x)\right)^x - 1}{x^3} = -\frac{1}{2}$

2.

$$\begin{aligned}
e^{x^2} - \ln(e+x^2) &= 1 + x^2 + o(x^2) - \left(\ln(e) + \ln(1+x^2/e)\right) = 1 + x^2 - 1 - \frac{x^2}{e} + o(x^2) \\
&\sim \left(1 - \frac{1}{e}\right)x^2
\end{aligned}$$

D'autre part $x\ln(1+x) = x\left(x + o(x)\right) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$

Ainsi $\dfrac{e^{x^2} - \ln(e+x^2)}{x\ln(1+x)} \sim 1 - \dfrac{1}{e}$ donc $\displaystyle\lim_{x\longmapsto 0} \frac{e^{x^2} - \ln(e+x^2)}{x\ln(1+x)} = 1 - \frac{1}{e}$

3.

$$\begin{aligned}
\sin(x^2) - x\sin(x) &= x^2 + o(x^4) - x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
&= \frac{x^4}{6}
\end{aligned}$$

D'autre part $1 - \cos(x^2) = 1 - \left(1 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)\right) \sim \dfrac{x^4}{2}$

Donc $\dfrac{\sin(x^2) - x\sin(x)}{1 - \cos(x^2)} \sim \dfrac{x^4}{6} \times \dfrac{2}{x^4} = \dfrac{1}{3}$

D'où $\displaystyle\lim_{x\longmapsto 0} \frac{\sin(x^2) - x\sin(x)}{1 - \cos(x^2)} = \frac{1}{3}$

Exercice 2 (4 points)

1. Notons $(u_n) = \left(\dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}\right)$

   Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^2(n+1)^2} = \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^2 \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

   Donc, via la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. Notons $(v_n) = \left(\dfrac{2^n}{n(3^n+n)}\right)$

   Alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)(3^{n+1}+n+1)} \times \frac{n(3^n+n)}{2^n} \\ &= \frac{2n}{n+1} \times \frac{1+\frac{n}{3^n}}{3+\frac{n+1}{3^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3} < 1\end{aligned}$$

   Donc, via la règle de d'Alembert, $\sum v_n$ converge.

3. Notons $(w_n) = \left(\dfrac{(p!)^n}{n^n}\right)$

   Alors $\sqrt[n]{w_n} = \dfrac{p!}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

   Donc, via la règle de Cauchy, $\sum w_n$ converge.

4. $\sum \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge via le critère spécial des séries alternées et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

   Donc $\sum \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ diverge.

Exercice 3 (5 points)

1. $\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

2.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

3. Via la question précédente, on a

$$\left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta}\left(1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta}\left(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

   d'où

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

4. Si $\beta \leqslant \alpha$, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge.

5. Etude du cas $\beta > \alpha$.

   a. Immédiat

b. On a $|v_n| \sim \dfrac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}}$

Or, comme $2+\beta-\alpha > 1$, $\sum \dfrac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}}$ est une série de Riemann convergente.

Ainsi $\sum v_n$ converge absolument donc converge.

c. $\sum w_n$ est une série alternée telle que $(|w_n|)$ est décroissante et converge vers 0 donc $\sum w_n$ converge.

d. $\sum u_n = \sum(w_n + v_n)$ converge car somme de deux séries convergentes.

Exercice 4 (6 points)

1. On a $\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{u_n}{u_{n-1}} & \leqslant & \dfrac{v_n}{v_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{u_{N+1}}{u_N} & \leqslant & \dfrac{v_{N+1}}{v_N} \end{array}\right.$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on a

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{v_{N+1}}{v_N}$$

soit $\dfrac{u_n}{u_N} \leqslant \dfrac{v_n}{v_N}$ ou encore $0 < u_n \leqslant \dfrac{u_N}{v_N} v_n$.

Donc si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

2. a. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$. Alors, via la question précédente,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-\beta}{n} > 0$$

Donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ soit encore $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

Or $\sum v_n$ converge donc $\sum u_n$ converge via la question 1.

c. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 1$. Alors cette fois-ci, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta-\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\beta-\alpha}{n} > 0$

Donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

Or $\sum v_n$ diverge $(\beta < 1)$ donc $\sum u_n$ diverge via la contraposée de la question 1.

3.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-1}.$$

Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où finalement

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, via la question 2.c., $\sum u_n$ diverge car $\dfrac{1}{2} < 1$

4.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n(a+n+1)} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{a+1}{n}} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1}$$

d'où par un développement limité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{a+1}{n}+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

soit finalement

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{a-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, via les questions 2.b. et 2.c., si $a-1>1$ i.e. $a>2$ alors $\sum u_n$ converge et si $a-1<1$ i.e. $a<2$ alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5 (3 points)

Soit $(u_n) = \left(\frac{n^\beta}{\alpha^n}\right)$

Si $\alpha = 1$, $(u_n) = (n^\beta) = \left(\frac{1}{n^{-\beta}}\right)$ donc $\sum u_n$ est donc une série de Riemann qui converge ssi $\beta < -1$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta$

or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha}$

Ainsi, via la règle de d'Alembert, si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge et si $0 < \alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge.