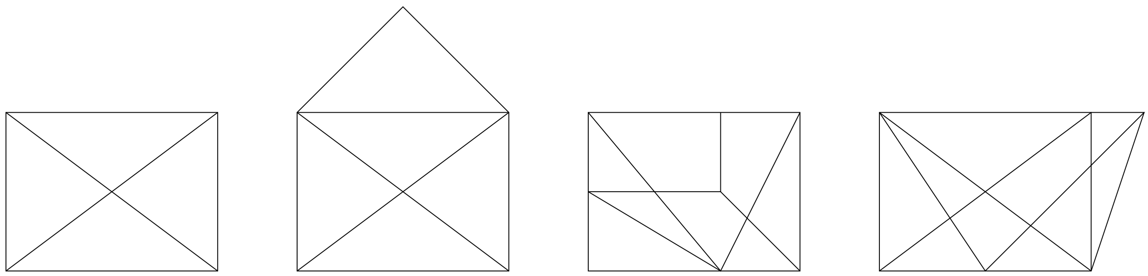
Des problèmes et des graphes

Les problèmes ci-dessous peuvent être résolus en utilisant les graphes. Les solutions sont, dans le désordre, dans la section 2.

1 Des problèmes

Problème 1 (Sans lever le crayon)

Quelles sont parmi les figures ci-dessous, celles que l'on peut dessiner sans lever une seule fois le crayon ?



Problème 2 (Meilleurs vœux)

Le directeur d'une école ayant des "antennes" dans plusieurs villes, veut savoir lesquelles il peut visiter, afin de présenter ses vœux. Très occupé, il ne peux s'absenter plus de cinq jours de suite de son bureau. Comment l'aider à établir un plan de visites, sachant qu'il ne peut visiter qu'une école par jour ?

Problème 3 (Le loup, Le chou, la chèvre, et le passeur. . .)

Une chèvre, un loup et un chou se trouvent sur la rive droite d'un fleuve. Un passeur veut leur faire traverser le fleuve, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. On ne peut laisser sans surveillance le loup en compagnie de la chèvre ou la chèvre en compagnie du chou. Expliquez au passeur ce qu'il peut faire.

Problème 4 (Des sculptures)

Combien faut-il de ballons pour réaliser cette sculpture ?

Problème 5 (Mangez des crêpes – *Partiel mai 2011*)

Ci-dessous la recette de la crêpe à la banane flambée, avec pour chaque tâche sa durée en secondes.

La recette	Durée (en sec.)	Réf.
Mettre la farine dans un saladier,	3	A
ajouter deux œufs,	30	B
ajouter le lait doucement et mélanger.	600	C
Dans une poêle mettre du rhum.	3	D
Couper les bananes en fines lamelles,	300	E
les mélanger au rhum.	30	F
Faire chauffer le mélange,	120	G
faire flamber le mélange.	10	H
Faire cuire une crêpe,	10	I
verser du mélange bananes-rhum sur la crêpe.	10	J

Quelques précisions concernant l'ordre des tâches :

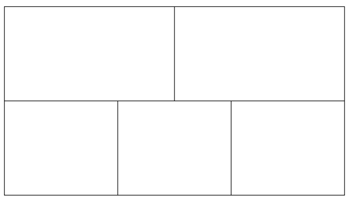
- la préparation de la pâte à crêpe et celle du mélange rhum-banane peuvent se faire en parallèle ;
- ce n'est que lorsque la crêpe sera cuite et que le mélange sera prêt qu'on pourra verser du mélange sur la crêpe et enfin la déguster ;
- les autres étapes se réalisent séquentiellement (on doit mettre la farine avant les œufs, on doit mettre le rhum avant les bananes).

Aidez le cuisinier à trouver à trouver l'ordre dans lequel il va pouvoir faire les différentes tâches.

Comment obtenir tous les ordres possibles ?

Problème 6 (Courbe)

Est-il possible de tracer une seule courbe, qui coupe, sans se recouper elle-même, chacun des 16 segments de la figure suivante ?



Problème 7 (Jeu de Nim)

Trouver une stratégie pour gagner pour chacune de ces versions du jeu de Nim.

① Jeu des allumettes 'basique" : Au départ il y a n allumettes, chaque joueur prend à tour de rôle 1, 2 ou 3 allumettes, et le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.

② "Inversé" : Cette fois-ci, celui qui gagne est celui qui enlève les dernières allumettes. De plus, on peut enlever jusqu'à 4 allumettes à chaque tour.

③ Jeu de Fibonacci-Nim : Au début de la partie, le premier joueur peut éliminer toutes les allumettes sauf une. Ensuite, chaque joueur peut retirer jusqu'au double des allumettes enlevées par son adversaire au tour précédent. Le gagnant est celui qui enlève les dernières allumettes.

2 Des solutions

Exercice 1 (Euler)

Un graphe non orienté est dit eulérien si on peut parcourir une fois et une seule toutes ses arêtes : si on peut trouver une chaîne eulérienne passant par toutes ses arêtes ou un cycle eulérien (on doit revenir au point de départ).

1. Quelles sont les propriétés d'un graphe eulérien (théorème d'Euler) ?
2. En déduire un algorithme qui détermine si un graphe est eulérien. Écrire l'algorithme dans les deux représentations.
3. Et si on veut connaître le chemin ?

Exercice 2 (Chemin)

1. Comment trouver un chemin (ou une chaîne) entre deux sommets donnés dans un graphe ? Donner deux méthodes différentes, les comparer.
2. Écrire l'algorithme qui cherche un chemin entre deux sommets, avec la représentation dynamique. Si un chemin a été trouvé, il devra être affiché.

Exercice 3 (Sous-graphe)

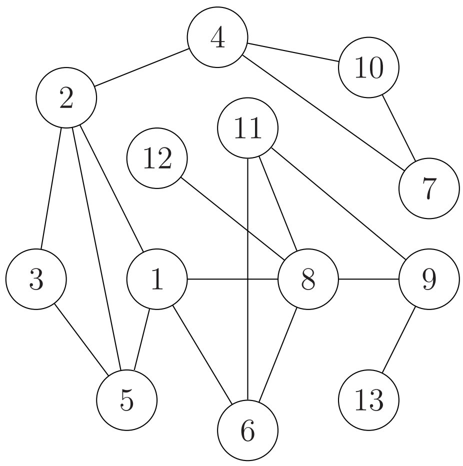


FIGURE 1 – Graphe G

1. Quels sont les sommets que l'on peut atteindre depuis le sommet 1 en une chaîne de longueur au plus 3 ?
2. Quel parcours peut nous permettre d'obtenir de tels sommets ?
3. Construire le sous-graphe issu de S', ensemble des sommets de la question 1.
4. Écrire un algorithme qui construit à partir d'un graphe (orienté ou non) un sous-graphe ne contenant que les sommets accessibles en un chemin (une chaîne) de longueur maximale donnée à partir d'un sommet source. Les deux graphes seront représentés statiquement.

Exercice 4 (Noyau)

Soit un graphe $G = <S, A>$.

☐ Un sous-ensemble S_1 de S est dit *stable* si tout sommet x de S_1 n'a aucun successeur (voisin) dans S_1. Les sommets du sous-ensemble stable sont donc deux à deux non adjacents (on parle aussi d'ensemble *indépendant*).

☐ Un sous-ensemble S_2 de S est dit *absorbant* (ou dominant) si tout sommet de S n'appartenant pas à S_2 possède au moins un successeur dans S_2.

☐ Un sous-ensemble de sommets est un *noyau* du graphe s'il est à la fois stable et absorbant.

1. Construire le graphe d'ordre 12 permettant de représenter le seul problème restant. . .
2. (a) Donner le noyau (il n'y en a qu'un ici) du graphe obtenu.
   (b) En quoi le noyau peut-il nous aider à trouver une solution ?
3. (a) Un graphe orienté sans circuit possède un et un seul noyau. Comment construire le noyau d'un tel graphe ?
   (b) Et si le graphe est quelconque ?

Exercice 5 (ddi)

Soit l' "algorithme" suivant, sur un graphe orienté :

Tant que le graphe n'est pas vide – choisir un sommet sans prédécesseur – supprimer ce sommet du graphe

1. Quelle propriété doit avoir le graphe pour que l'algo s'arrête ?
2. Comment implémenter cet algo sans réellement supprimer les sommets ?
3. Écrire l'algorithme qui récupère la liste des sommets dans l'ordre où ils sont choisis pour la représentation dynamique des graphes.