2 min – Maths du signal

Pré-requis :

Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (cf. cours de sup)
Produit de convolution : $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$
Fonction complexe d'une variable complexe

Laplace

Définition : $F(p) = \int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$
Signal causal: $x(t) = 0 \; \forall t \leq 0$
Propriété : Linéarité, dérivation (multiplication par p), intégration (division par p), convolution ($L[*] = .$)
Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty}[p.F(p)]$
Théorème de la valeur finale $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0}[p.F(p)]$
Théorème du retard : $L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p}.F(p)$
Résolution d'une équation différentielle avec Laplace :

- Etape 1 : Appliquer la transformée de Laplace
- Etape 2 : Décomposé le résultat en éléments simple (cf. cours de sup)
- Etape 3 : Transformée inverse

Démarche générale pour les applications :

- L[entrée(t)] = E(p)
- Calcul de la fonction de transfert H(p)
- Sortie(p) = E(p).H(p) -> transformée inverse -> sortie(t)

Signal échantillonné

$f(t) causal \rightarrow f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT)$ avec T la période et $\delta(t)$ le pic de Dirac

$f^*(t)$ est un signal échantillonné -> moyen de transport de l'information
$F^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\mathrm{nT})\mathrm{e}^{-\mathrm{nTp}}$
Transformée en Z -> changement de variable avec $z = e^{Tp} \Rightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\mathrm{nT})\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}$
Théorème de Shannon (choix de la période T)
Lorsqu' on échantillonne un signal continu à spectre fréquentiel borné entre [-N ; N], on ne perd aucune information si la fréquence f est supérieur au double de la plus haute fréquence N continue dans le signal continu. => $N < \frac{1}{2T}$
Si Shannon n'est pas respecté, le signal est brouillé.

Reconstitution approchée (bloqueur d'ordre 0)

$B_o(p) = \frac{L[entrée]}{L[sortie]} = \frac{L[f_{Bo}(t)]}{L[f^*(t)]}$ avec
$f_{Bo}(t) = f(0) quand\ 0 \leq t \leq T\ et\ f_{Bo}(t) = f(t)\ quand\ T \leq t \leq 2T$
$\Rightarrow f_{Bo}(t) = f(0).[u(t) - u(t-T)] + f(T).[u(t-T) - u(t-2T)]$

Transformation en Z

➔ A partir de F(p) : lister les pôles de F(p) (qui peuvent être simple ou double)

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Formule des résidus : Pôle p_i simple : $r_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{Tp}.z^{-1}}$
Pôle p_i multiple : $r_i = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{d^{n-1}}{dp}\left((p - p_i)^n . \frac{F(p)}{1 - e^{Tp}.z^{-1}}\right)\right]_{p=p_i}$

Théorème du retard : $Z[f(t-kT)] = z^{-k}.F(z) pour\ k > 0$
Convolution : Z[*] = .
Théorème de la valeur initiale : $\lim_{n\to 0} f(nT) = \lim_{z\to +\infty}[F(z)]$
Théorème de la valeur finale $\lim_{n\to +\infty} f(t) = \lim_{z\to 1}[\frac{z-1}{z}.F(z)]$

t	P	Z
$\boldsymbol{u(t)}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\boldsymbol{e^{-at}u(t)}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-at}}$
$\boldsymbol{t.u(t)}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^{-2}}$

Transformée en Z inverse

Le résultat de la transformée inverse est une collection de donnée

/* FIXME */