Formulaire : SERIES DE FOURIER

Fonctions continues par morceaux

Notation La limite de f en x_0 à droite est notée : $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou bien $f(x_0^+)$.

La limite de f en x_0 à gauche est notée : $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou bien $f(x_0^-)$.

Définition

Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur une partie I de R si, sur tout segment [a;b] inclus dans I:

1) f admet un nombre fini de points de discontinuité.

2) En chaque point de discontinuité x_0 , $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ sont **finies**.

Fonctions C^1 par morceaux

Définition

Une fonction f est dite C^1 **par morceaux** sur une partie I de R si, sur tout segment [a;b] inclus dans I:

1) f est dérivable sauf en un nombre fini de points.

2) La dérivée f' est continue par morceaux sur I.

Propriété : Une fonction C^1 **par morceaux** sur une partie I de R C^1 est nécessairement continue par morceaux sur I.

$$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ par morceaux sur I} \Rightarrow f \text{ est continue par morceaux sur I}}$$

- Remarque :

  Les fonctions manipulées en TD sont toutes C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

SERIE DE FOURIER

Remarque

$$\boxed{f \text{ est continue par morceaux sur un intervalle } \textbf{borné} \text{ I} \Rightarrow f \text{ est intégrable sur I}}$$

Définition :Soit f une fonction 2π périodique de la variable réelle, intégrable sur tout intervalle borné de R. (En particulier, une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ convient)

Les coefficients *de Fourier* de f sont:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.}$$

La série *de Fourier* de f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))}$$

- Remarques pratiques sur le calcul des coefficients de Fourier :
  - Intervalle d'intégration : on peut remplacer ci-dessus l'intervalle $[-\pi;\pi]$ par n'importe quel autre intervalle de longueur 2π.
  - Parité : $\boxed{\begin{array}{l} f \ \ paire \Rightarrow b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ f \ \ impaire \Rightarrow a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \ \ paire \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx. \\ \\ f \ \ impaire \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0. \end{array}}$$

- Le produit de deux fonctions paires est paire.
- Le produit de deux fonctions impaires est paire.
- Le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est une fonction impaire.

Formules de trigonométrie d'usage fréquent :

Cosinus et sinus d'une somme	*Des ces formules on déduit :*	
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$	$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ $\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$ $\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$	$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $=2\cos^2 a-1$ $=1-2\sin^2 a$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\forall n\in\mathbb{N}$: $\cos(n\pi)=(-1)^n$; $\sin(n\pi)=0$;

$\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})=(-1)^n$; $\cos((2n+1)\frac{\pi}{2})=0$

Convergence d'une série de Fourier

Théorème de Dirichlet : Soit *f* une fonction, C^1 par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Alors la série de Fourier de f, S_f, converge en tout point x vers $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$

En particulier, **si f est continue en *un point* x , alors** $S_f(x)=f(x)$.
(puisque, dans ce cas, $f(x^+)=f(x^-)=f(x)$)

- Remarque 1 Ce théorème est particulièrement utile lorsqu'on utilise la série de Fourier de *f* pour calculer les sommes de certaines séries numériques.
- Remarque 2 Il faut être vigilant avant d'écrire, pour un certain x_0, $f(x_0)=S_f(x_0)$.
  Vérifier d'abord que f est continue en x_0.

Théorème : Soit *f* une fonction **continue,** C^1 par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de *f* converge normalement vers *f* sur $\mathbb{R}$.

- Remarque Attention, il existe des fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier! (l'hypothèse ,f est C^1 par morceaux , n'est pas inutile !)

Egalité de Parseval :

Théorème de Parseval : Soit *f* une fonction continue par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$..
Alors on a l'égalité suivante : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{a_0^{\ 2}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})$