**Partiel 2015 – Proposition de correction par Tien THACH (Tackounet ☺ )**

## Exercice 1 :

Soit

$$F(p) = \frac{p^2 + 6\,p + 9}{(p-1)(p-2)(p+4)}$$

On décompose en éléments simples :

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+4} \quad avec\ A = -\frac{16}{5}\ \ ;\ \ B = \frac{25}{6}\ \ et\ \ C = \frac{1}{30}$$

On en déduit :

$$f(t) = \left(-\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}\right)u(t)$$

Soit

$$G(p) = \frac{2\,p + 5}{(p-3)^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$G(p) = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{(p-3)^2} \quad avec\ A = 2 \ \ et\ \ B = 11$$

Et là, vous êtes bai… Enfin, pas tout à fait. Il y a un carré et une forme du genre $\frac{1}{p-3}$

Comme vous êtes super intelligent, vous vous dites que ça doit être un truc du genre $te^{3t}$ . Et là, vous testez :

Soit

$$x(t) = t\,e^{3t}$$

$$x'(t) = 3\,t\,e^{3t} + e^{3t} \;\rightarrow\; p\,X(p) = 3\,X(p) + \frac{1}{p-3}$$

$$(p-3)X(p) = \frac{1}{p-3} \;\rightarrow\; X(p) = \frac{1}{(p-3)^2} \quad BINGO\ !!$$

$$Donc, on\ en\ déduit \quad g(t) = (2e^{3t} + 11\, t\, e^{3t})u(t)$$

## Exercice 2 :

Soit la transformée en z suivante :

$$X(z) = \frac{z^2\,(2\,z - 1)}{(z-1)(z-0.6)\,(z-0.8)}$$

On divise par z cette fonction et on le décompose en élément simple :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z\,(2\,z-1)}{(z-1)(z-0.6)\,(z-0.8)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.6} + \frac{C}{z-0.8}$$

$$avec\ A = \frac{25}{2} \quad ; \quad B = \frac{3}{2} \quad et \quad C = 12$$

On multiplie par z pour retrouver notre transformée de départ, et par analyse, on en déduit :

$$x(nT) = \left(\frac{25}{2} + \frac{3}{2}0.6^n + 12 * 0.8^n\right)u(nT)$$

## Exercice 3 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$m\,x''(t) + k\,x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

Etant donnée les conditions initiales($x(0) = 0\ et\ x'(0) = 0$), l'équation peut s'écrire dans le domaine de Laplace comme :

$$m\,p^2\,X(p) + k\,X(p) = \frac{F_0}{2}\,L(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

Soit :

$$m\,p^2\,X(p) + k\,X(p) = \frac{F_0}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega_0} + \frac{1}{p + i\omega_0}\right)$$

$$m\,p^2\,X(p) + k\,X(p) = F_0 \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$X(p) = F_0 \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)\,(m\,p^2 + k)}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{X(p)}{F_0} = \frac{A}{p + i\omega_0} + \frac{B}{p - i\omega_0} + \frac{C}{p\sqrt{m} + i\sqrt{k}} + \frac{D}{p\sqrt{m} - i\sqrt{k}}$$

$$avec\ A = B = \frac{1}{2\,(-m\,\omega_0^2 + k)} = \alpha \quad et\ C = D = \frac{1}{2\sqrt{m}\,(-\frac{k}{m} + \omega_0^2)} = \beta$$

$$donc\ \frac{X(p)}{F_0} = \frac{2\,\alpha\,p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{2\,\beta\,p\,\sqrt{m}}{m\,p^2 + k}$$

$$\frac{X(p)}{F_0} = 2\,\alpha\,\frac{p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{2\,\beta}{\sqrt{m}}\,\frac{p}{p^2 + {}^{k}\!/_{m}}$$

En reprenant notre résultat avec le cosinus, on en déduit :

$$x(t) = F_0 \left[ 2\alpha\cos(\omega_0 t) + \frac{2\,\beta}{\sqrt{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right)\right] u(t)$$

$$En\ remplaçant\ \alpha\ et\ \beta\ :\ x(t) = F_0 \left[ \frac{\cos(\omega_0 t)}{-m\,\omega_0^2 + k} + \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right)}{(-k + m\omega_0^2)} \right] u(t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k - m\,\omega_0^2} \left[ \cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right)\right] u(t)$$