Examen de Théorie des Graphes

EPITA ING1 2014 Rattrapage S2; A. DURET-LUTZ

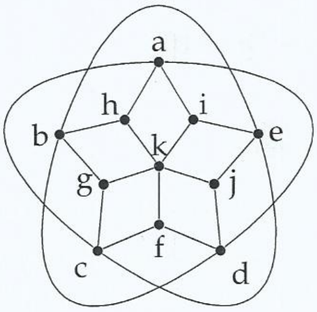
Durée : 1 heure 30

Janvier 2013

Consignes

- Cet examen se déroule **sans document** et **sans calculatrice**.
- Le barème est indicatif et correspond à une note sur 27.

1 Graphe de Grötzsch (5 points)



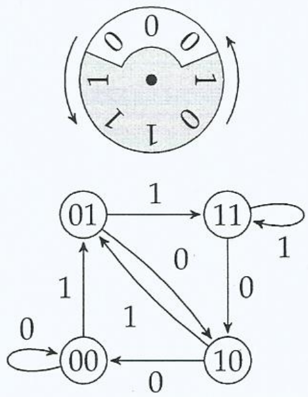
Précisez les caractéristiques du graphe ci-contre :

1. **(0,5pt)** Diamètre
2. **(0,5pt)** Rayon
3. **(0,5pt)** Liste des états du centre
4. **(0,5pt)** Maille (taille du plus petit cycle)
5. **(1pt)** Nombre chromatique
6. **(0,5pt)** Taille de la plus grande clique
7. **(1,5pt)** Ce graphe est-il planaire ? Justifiez votre réponse.

2 Divers (9 points)

1. **(2pts)** Montrez que tout graphe fini, non-orienté, et sans boucle (c'est-à-dire sans arc d'un sommet à lui-même), possède au moins deux sommets de même degré.
2. **(1pt)** Considérons une soirée avec n invités, dans laquelle certaines personnes se serrent la main. Montrez qu'à tout moment de la soirée, il y a toujours deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes. (Il est évidement interdit de se serrer la main à soi-même.)
3. **(2pts)** Donnez la définition d'un graphe planaire.
4. **(2pts)** Expliquez en quoi la résolution d'un Sudoku peut se voir comme un problème de coloration de graphe. (Vous préciserez à quoi correspondent les sommets, les arêtes, et les couleurs.)
5. **(2pts)** Je dispose d'une bibliothèque implémentant trois algorithmes de calcul de plus court chemin : DIJKSTRA, BELLMAN-FORD, et FLOYD-WARSHALL. Expliquez comment choisir entre ces algorithmes ; autrement dit dans quels cas l'algo X est-il préférable aux algos Y et Z. (Les complexités ne sont pas demandées.)

3 Séquence de De Bruijn (13 points)



Considérez la séquence de chiffres 00010111 imprimée sur un dispositif circulaire ne montrant qu'une fenêtre 3 chiffres à la fois. Lorsqu'on fait tourner cette séquence 8 fois en décalant tous ses chiffres d'un cran, on énumère l'ensemble $\{000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100\}$, c'est-à-dire toutes les valeurs de trois bits possibles. Une autre séquence énumérant ces valeurs mais dans un ordre différent est 00011101.

De telles séquence sont appelées des *séquences de De Bruijn d'ordre* 3 *sur* $\{0, 1\}$. De façon générale, une *séquence de De Bruijn d'ordre* n *sur* Σ est une séquence cyclique de lettres choisies dans l'alphabet Σ et qui énumère tous les mots de Σ^n exactement une fois lorsqu'on la fait tourner sous une fenêtre de taille n.

Les graphes orientés dont les cycles eulériens correspondent aux séquences de De Bruijn d'ordre n sur Σ sont appelés *graphes de De Bruijn*. L'exemple ci-dessus montre un tel graphe pour $\Sigma = \{0, 1\}$ et $n = 3$. Par exemple la séquence 00010111 y correspond au cycle eulérien suivant :

$$11 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{0} 00 \xrightarrow{0} 00 \xrightarrow{1} 01 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{1} 01 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{1} 11$$

La séquence 00011101 correspond à un autre cycle eulérien de ce même graphe :

$$01 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{0} 00 \xrightarrow{0} 00 \xrightarrow{1} 01 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{1} 01$$

Dans toutes les questions qui suivent, $k = |\Sigma|$ est la taille de l'alphabet.

1. **(1pt)** Exprimez, en fonction k et n, la taille des séquences de De Bruijn d'ordre n sur l'alphabet Σ.
2. **(2pts)** Expliquez comment construire le graphe de De Bruijn pour n et Σ donnés. (Que représentent les noms des sommets ? Comment placer les arcs ? On ne vous demande pas encore de justifier que ce graphe possède forcément un circuit eulérien.)
3. **(1pt)** Combien de sommets et d'arcs possède un graphe de De Bruijn pour un n et un $k = |\Sigma|$ donnés.
4. **(3pts)** Un graphe orienté possède un circuit eulérien, si et seulement si il est équilibré (chaque nœud a un degré entrant égal à son degré sortant) et fortement connexe.

   Justifiez que le graphe que vous avez décrit à la question 2 est (a) équilibré, et (b) fortement connexe.
5. **(5pts)** Donnez une séquence de De Bruijn d'ordre 3 sur l'alphabet $\Sigma = \{A, B, C\}$. Votre séquence devra commencer par $AAABBBCCC$.

   Notes :

   - Seule une séquence est demandée, inutile de justifier sa construction.
   - Soyez méticuleux. Cette question peut vous occuper une bonne dizaine de minutes, voir plus si vous n'avez pas su répondre à la question 2.
6. **(1pt)** Si l'on construit le graphe de De Bruijn G correspondant aux séquences de De Bruijn d'ordre n sur Σ, à quoi correspond un chemin hamiltonien de G ? (On rappelle qu'un chemin hamiltonien passe par tous les sommets exactement une fois, sans forcément emprunter tous les arcs.)