

EPITA

Mathématiques

Partiel (S1)

janvier 2018

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Classe :

NOTE :

Exercice 1 (2 points)

Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. « Certains étudiants aiment bien organiser des soirées festives ».

2. « Certains étudiants ne partiront pas dans la destination de leur choix au S4 ».

3. « Tous les étudiants de l'EPITA s'investissent dans leurs projets de prépas ».

4. « Aucun diplômé de l'EPITA n'est déçu par la formation de l'école axée sur le savoir-faire ».

Exercice 2 (2 points)

$$\text{Soit } f : \begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}.$$

Soit $x \in]-1, +\infty[$. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Exercice 3 (2 points)

Écrire en langage mathématique (avec les quantificateurs) les phrases suivantes :

1. « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré ».

0,5

2. « Il existe un entier naturel multiple de tous les autres ».

3. « Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres ».

4. « Tout réel possède une racine carrée dans \mathbb{R} ».

Exercice 4 (4 points)

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ p & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } p=0 \\ p-1 & \text{si } p \geq 1 \end{cases} \end{cases}$

1. f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Justifier votre réponse.

2. Donner l'expression de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 5 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $972x + 504y = 72$.

2. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $972x + 504y = 72$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 6 (2 points)

« Je suis un entier naturel. Quand on me divise par 4, le reste est 3, mais quand on me divise par 5, le reste est 1 et le quotient inchangé. Qui suis-je ? »

Exercice 7 (2 points)

Quel est le reste de la division euclidienne de 1357^{2013} par 5 ?

Exercice 8 (2 points)

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$.

2

Exercice 9 (2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

Vous devez obligatoirement utiliser le théorème de Bézout dans les deux questions.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.

1. On suppose $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc$. Montrer que $a \mid c$.

2. On suppose $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$. Montrer que $a \wedge (bc) = 1$.