29/03 Exc : Soient $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

1) Montrer que (φ_0, φ_1) est une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$

$(\omega(x) = 1)$

2) Déterminer l'approximation linéaire au sens des moindres carrés de $f(x) = e^x$

1) $\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0$?

$\|\varphi_0\| = \|\varphi_1\| = 1$

$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi_0 \varphi_1(x)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$ car x est impaire

$\|\varphi_0\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \varphi_0^2(x) dx}$

$\|\varphi_0\|^2 = \int_{-1}^{1} \varphi_0^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{1}$

$\|\varphi_1\|^2 = \int_{-1}^{1} \varphi_1^2(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \int_0^1 x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= \cancel{3} \frac{1}{\cancel{3}}$

$\boxed{= 1}$

(φ_0, φ_1) base orthonormé

$\boxed{1}$

2) Méthodes des moindres carrés

$$\Phi^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x)$$

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{1} a_k^* \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle \\ j = 0, 1 \end{array} \right.$$

$j = 0$

$$a_0^* \underbrace{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}_{=1} + \cancel{a_1^* \underbrace{\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle}_{=0}} = \langle f, \varphi_0 \rangle$$

$$a_0^* = \langle f, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi_0 f(x)\,dx$$

$j = 1$

$$\cancel{a_0^* \underbrace{\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle}_{=0}} + a_1^* \underbrace{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}_{=1} = \langle f, \varphi_1 \rangle$$

$$a_1^* = \langle f, \varphi_1 \rangle$$

$$a_0^* = \int_{-1}^{1} \varphi_0(x) f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^x \right]_{-1}^{1} = \frac{e - e^{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$a_1^* = \int_{-1}^{1} \varphi_1(x) f(x)\,dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x e^x\,dx$$

$$a_1^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\left[x e^x \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(e + e^{-1} - \left[e^x \right]_{-1}^{1} \right)$$

$$a_1^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(e + e^{-1} - e + e^{-1} \right) = 2e^{-1} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

29/03 Y approximation linéaire de $f(x) = e^x$

$$\Phi^*(x) = \frac{(e - e^{-1})}{\sqrt{2}} \varphi_0(x) + 2e^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\varphi_1(x)$$

$$= \frac{(e - e^{-1})}{\cancel{\sqrt{2}}\,2} + 2e^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$$

$$\Phi^*(x) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}x$$

Integration numerique

On se propose d'étudier quelques méthodes numériques permettant d'approcher :

$\int_a^b f(x)dx$. De telles méthodes s'imposant en particulier lorsque :

- La primitive F de f n'est pas connue
- $f(x)$ n'est connue que par les valeurs $f(x_i)$ $(i = 0 \dots n)$

Soit l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,\underbrace{p(x)}_{\text{poids } p(x) > 0}\,dx$

l'idée de base est

$$E(f) = \int_a^b f(x)p(x)dx - \sum_{i=0}^{m} \omega_i f(x_i)$$

Err. d'intégration

ω_i sont des coeffs à déterminer :

$$f(x) = P_n(x) + \overbrace{\varepsilon(x)}^{\text{erreur}}$$

$\downarrow$

polynôme d'interpolation de f

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)$$

(Lagrange)

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) p(x) dx + \underbrace{\int_0^1 \varepsilon(x)p(x)\,dx}_{E}$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b L_j(x)p(x)dx\right)}_{\omega_j} f(x_j) + E$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\omega_j = \int_a^b L_j(x)p(x)dx \\ \forall j\end{array}}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)p(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j)}$$

Exemples :

$\alpha = \alpha_0 \quad \alpha_i \; \alpha_{i+1} \quad \beta = \alpha_k$

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{2}\left(f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})\right)$$

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{k-1} [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{2} \left(f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})\right)$$

formule des trapèzes

29/03 <u>Exemple</u> : si on interpôle $f(x)$ par $P_0(x) = f(t_i)$ sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i)$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i)}_{\text{Somme de Riemann}}}$$ Méthode des rectangles

<u>Etude générale de l'erreur</u>

$$(*) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)p(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k} w_i f(x_i)$$

<u>Def</u> : Nous dirons que la méthode $(*)$ est d'ordre N <u>ssi</u> elle est exacte pour tout polynôme de degré $\leq N$

$$\Leftrightarrow E(f) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{P}_N$$

$$E \quad f \longmapsto E(f) \in \mathbb{R}$$

E est linéaire

Soit $u_+ = \max(u, 0) = \begin{cases} u \text{ si } u \geq 0 \\ 0 \text{ si } u < 0 \end{cases}$

Def : pour ~~tout~~ t fixé

$$K_N(t) = E\left(x \longmapsto (x-t)_+^N\right)$$ s'appelle le noyau de Péano

29/03 <u>Exemple</u> : si on interpole $f(x)$ par $P_0(x) = f(t_i)$ sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i)$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx \simeq \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i)}_{\text{Somme de Riemann}}}$$ Méthode des rectangles

<u>Etude générale de l'erreur</u>

(*) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)p(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k} \omega_i f(x_i)$

<u>Def</u> : Nous dirons que la méthode (*) est d'ordre N <u>ssi</u> elle est exacte pour tout polynôme de degré $\leq N$

$\Leftrightarrow E(f) = 0$
$\forall f \in \mathbb{P}_N$

$E \quad f \longmapsto E(f) \in \mathbb{R}$

E est linéaire

Soit $u_+ = \max(u, 0) = \begin{cases} u \text{ si } u \geq 0 \\ 0 \text{ si } u < 0 \end{cases}$

Def : pour t fixé

$K_N(t) = E\left(x \longmapsto (x-t)_+^N\right)$ s'appelle le noyau de Péano

$N=0$ $\begin{cases} (x-t)_+^0 = 1 \text{ si } x > t \\ (x-t)_+^0 = 0 \text{ si } x < t \end{cases}$

<u>Théorème de Péano</u> : Supposons que (*) est <u>d'ordre N</u>

et $f \in \mathcal{C}^{N+1}_{[a,b]}$ alors

$$\boxed{E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t)\,dt}$$

<u>Corollaire</u> :

La méthode est d'ordre N.

f est de $\mathcal{C}^{N+1}$. on suppose que $K_N(t)$ garde un signe constant $\exists t \in [a, b]$ /

$$E(f) = \frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!} E(x \to x^{N+1})$$

<u>Ex</u> (Int / numérique)

on considère les 2 méthodes

(1) $\int_0^h f(x)dx \simeq h f\left(\frac{h}{2}\right)$

(2) $\int_0^h f(x)dx \simeq h \frac{(f(0) + f(h))}{2}$

1) Déterminer l'ordre N

29/03 2) Déterminer le noyau de Péano

3) Etudier l'erreur d'intégration

1) $\int_0^h f(x)dx \simeq h f\left(\frac{h}{2}\right)$

1) l'ordre N

$f(x) = 1$ $\quad \left.\begin{array}{l}\int_0^h dx = h \\ h f\left(\frac{h}{2}\right) = h\end{array}\right)$ ok

$f(x) = x$ $\quad \left.\begin{array}{l}\int_0^h x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{h^2}{2} \\ h f\left(\frac{h}{2}\right) = h \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{2}\end{array}\right)$ ok

$f(x) = x^2$

$\int_0^h x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{3}$ //

$h f\left(\frac{h}{2}\right) = h \frac{h^2}{4} = \frac{h^3}{4}$

$E(x \to x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4} = \frac{h^3}{12}$ donc $N = 1$

2) <u>Noyau de Péano</u> $K_1(t)$

$K_1(t) = E(x \mapsto (x-t)_+)$

$K_1(t) = \int_0^h (x-t)_+ dx - h\left(\frac{h}{2} - t\right)_+$ $\qquad (x-t)_+ \begin{cases} x-t & x \geq t \\ 0 & x < t \end{cases}$

$\boxed{4}$

$$\int_0^h (x-t)_+ \, dx = \int_t^h (x-t)\, dx = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^h = \boxed{\frac{(h-t)^2}{2}}$$

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2} - h\left(\frac{h}{2}-t\right)_+ \begin{cases} h\left(\frac{h}{2}+t\right) & \text{si } t \leq \frac{h}{2} \\ 0 & \text{si } t > \frac{h}{2} \end{cases}$$

1^er cas $\frac{h}{2} > t > 0$

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2} - h\left(\frac{h}{2}-t\right)$$

$$= \frac{h^2}{2} - ht + \frac{t^2}{2} - \frac{h^2}{2} + ht$$

$$K_1(t) = \frac{t^2}{2}$$

2^ème cas

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2}$$

D'après le corollaire de Peano

$$\exists t \in [0,h] \quad E(f) = \frac{f''(t)}{2!} E(x \to x^2)$$

$$E(f) = \frac{f''(t)}{2} \cdot \frac{h^3}{12} = f''(t)\frac{h^3}{24}$$

$$|E(f)| \leq C\frac{h^3}{24} \qquad C = \operatorname{Max}|f''(x)|$$

La 2^ème méthode (2) $\quad \int_0^h f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{f(0)+f(h)}{2}\right)$

29/03 1) L'ordre N

$f(x) = 1$ $\quad \int_0^h dx = h$

$h\left(\frac{f(0)+f(h)}{2}\right) = \frac{2h}{2} = h$

$f(x) = x$ $\quad \int_0^h x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]^h = \frac{h^2}{2}$

$h\left(\frac{f(0)+f(h)}{2}\right) = \frac{h^2}{2}$

$f(x) = x^2$

$\int_0^h x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{3}$

$\frac{h\left(f(0)+f(h)\right)}{2} = \frac{h^3}{2}$

$E(x \to x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6}$

L'ordre est $N=1$

2) $K_1(t) = E\left(x \to (x-t)_+\right)$

$= \int_0^h (x-t)_+ dx - h\left(\frac{(-t)_+ + (h-t)_+}{2}\right)$

$= \int_t^h (x-t)dx - \frac{h}{2}(h-t)$

$K_1(t) = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^h - \frac{h}{2}(h-t)$

$$= \frac{(h-t)^2}{2} - \frac{h}{2}(h-t)$$

$$= \cancel{\frac{h^2}{2}} - ht + \frac{t^2}{2} - \cancel{\frac{h^2}{2}} + \frac{ht}{2}$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{ht}{2} = \frac{t}{2}(t-h) \leq 0$$

$$K_1(t) = \frac{t}{2}(t-h) \leq 0$$

<u>Corollaire</u> : si $f \in \mathcal{C}^2[0,h]$

$K_1(t)$ garde un signe constant