Feuille d'exercices n°9

Algèbre linéaire I

(du lundi 18 mars 2013 au vendredi 29 mars 2013)

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ? Justifiez votre réponse.

1. $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \mathrm{d}^\circ(P) = 694\}$
4. $B = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \mathrm{d}^\circ(P) \geqslant 496\}$
5. $C = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \mathrm{d}^\circ(P) \leqslant 64\}$
6. $D = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' = 0\}$
7. $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ croissante}\}$
8. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$
9. $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ paire}\}$
10. $H = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty\}$
11. $I = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ continue}\}$
12. $J = \{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$
13. $K = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ convergente}\}$
14. $L = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ divergente}\}$
15. $M = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$
16. $N = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n^2\}$
17. $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$
18. $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
19. $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$
20. $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = z^2\}$

Exercice 2

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev E. Montrer que

$$F \cup G \text{ sev de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et F, G et H trois sev de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus H = E$. Peut-on en conclure que $G = H$? Justifier votre réponse.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E tels que $F + G = E$ et F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

Montrer que $E = F' \oplus G$

Exercice 5

Soient $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ telle que } f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ telle que } \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = k\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.

Exercice 6

Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$. On note F le sev de E des fonctions f de E telles que $\int_a^b f(t)dt = 0$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur $[a, b]$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 7

Considérons le sev F de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = f(2) = 0$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\} \subset E$

1. Montrer que $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$
2. Montrer que $\text{Vect}(X) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ \lambda_i \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 9

Exprimer les $\mathbb{R}$-ev suivants sous forme de sous-espaces vectoriels engendrés :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y \text{ et } z = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y\}$
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y = z\}$
4. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$
5. $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y + z = 0\}$

Feuilles d'exos n° 9

Exercice 1

1) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev

Car

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$, $\lambda x \in \mathbb{C}$
2. Soient $x, y \in \mathbb{C}$, $x+y = y+x$
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{C}^2$
   $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
4. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{C}$
   $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{C}$
   $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
6. $\forall x \in \mathbb{C}$, $1x = x.1 = x$

2) $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{R}$ev

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\quad 1 \times \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$1 \in \mathbb{Q}$

3) $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d°(P) = 694\}$

→ montrons que A sev de $\mathbb{R}[X]$
→ $A \subset \mathbb{R}[X]$-ev
→ $A \neq \emptyset$ mais $P=0 \notin A$
→ A est stable par combinaison linéaire

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $P, Q \in A$
a-t-on $(\alpha P + \beta Q) \in A$
Comme $P = 0 \notin A$ $\quad (d°(P) = 694)$

alors A n'est pas un ev.

4) $B = \{P \in \mathbb{R}[x], d^\circ(P) \geq 496\}$

<u>B n'est pas un ev</u>

car $P = 0 \notin B$ $(d^\circ(P) \not\geq 496)$

5) $C = \{P \in \mathbb{R}[x], d^\circ(P) \leq 64\}$

$\Rightarrow C \subset \mathbb{R}[x]$. ev

$\Rightarrow P = 0 \in C$ donc $C \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ SPCL : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P, Q \in C$

a-t-on $(\alpha P + \beta Q) \in C$

Soient $P = a_1 x_1 + \dots + a_n x^n$

$Q = b_1 x_1 + \dots + b_n x^n$

$$\alpha P + \beta Q = \alpha \underbrace{(a_1 x_1 + \dots + a_n x^n)}_{d^\circ \leq 64} + \beta \underbrace{(b_1 x_1 + \dots + b_n x^n)}_{d^\circ \leq 64}$$

$\Rightarrow d^\circ(\underbrace{\alpha P + \beta Q}_{\in C}) \leq 64$ <u>OK</u>

Donc $(\alpha P + \beta Q) \in C$

<u>SPCL</u>

Donc C est un ev Donc C est un ev

6) $D = \{ P \in \mathbb{R}[X] , P' = 0 \}$

1) ok

2) ok

3) SPCL :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P, Q \in D$

a-t-on $\alpha P + \beta Q \in D$

or $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha \underbrace{P'}_{=0} + \beta \underbrace{Q'}_{=0} = 0$

car $P \in D$ car $Q \in D$

Donc $(\alpha P + \beta Q) \in D$

D sev $\subset$ ev

7) $E = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} , f$ croissante $\}$

E n'est pas un ev car exemple :

$f : x \mapsto e^x$ croissante càd :

$f \in E$

mais $-f = -1 \times f \to -e^x \searrow \notin E$

Pas de SPCL

8) $F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} , f(0) = 0 \}$

$F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: ev

- F non nul : $F \neq \emptyset$ car $f = 0 \in F$
- SPCL :

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et f et $g \in F$

a-t-on

$(\alpha F + \beta G) \in F$?

on a $(\alpha f + \beta g)(0) = \underbrace{\alpha f(0)}_{\substack{0 \\ \text{car } f \in F}} + \underbrace{\beta g(0)}_{\substack{0 \\ \text{car } g \in F}} = 0$

donc on a SPCL

Donc Sev

Donc ev

9) $G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \text{ pair} \}$ ev car

. $G \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ev

. $f = 0 \in G$ ok

. soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et f et $g \in G$

a-t-on

$(\alpha f + \beta g) \in G$?

$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x)$

$= \alpha f(x) + \beta g(x)$

$= (\alpha f + \beta g)(x)$

10) $H = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} , \lim_{+\infty} f = +\infty \}$

H n'est pas un ev car

$\lim_{x \to +\infty} f = 0 \neq +\infty$

donc $0 \notin H$.

11) $I = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} , f \text{ continue} \}$

~~Restringe : ... f = 0 ...~~

→ $I \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: ev

→ $I \neq \emptyset$ car $f = 0$ continue

→ SPCL

$(\alpha f + \beta g) \in I$ comme somme de fonctions continues = fonction continue.

12) $J = \{ f \in C^0([a,b], \mathbb{R}) , \int_a^b f(t)dt = 0 \}$

→ $J \subset C^0([a,b], \mathbb{R})$: ev

→ $J \neq \emptyset$ car $f = 0 \in J$

$\alpha f + \beta g \in J$

$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

car $f, g \in J$

$\rightarrow (\alpha f + \beta g) \in J$

13) $K = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (U_n) \text{ convergente}\}$

. $K \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ev

. $K \neq \emptyset$ car $U_n = 0 \in K$

. SPCL

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (U_n) et $(V_n) \in K$

a-t-on

$(\alpha U_n + \beta V_n) \in K$

on a la somme de 2 suites cv donc

$(\alpha U_n + \beta V_n)$ cv <u>ok</u>

Donc $(\alpha U_n + \beta U_n) \in K$

Donc K est un sev

Donc K est un ev

14) $L = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (U_n) \text{ divergente}\}$

n'est pas un ev

<u>car</u> $U_n = n \in L$
$V_n = n \in L$

$U_n + V_n = 0 \nrightarrow +\infty$

| $U_n = 0$ faux

15) $M = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n\}$

$M = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ U_n = 2U_{n+1} - U_{n+2}\}$

. $M \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ev

. $M \neq \emptyset$, $U_n = 0 \in M$

. SPCL

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(U_n), (V_n) \in M$

a.t. on :

$(\alpha U_n + \beta V_n) \in M$

On a $\alpha U_n + \beta V_n = \alpha(2U_{n+1} - U_{n+2}) + \beta(2V_{n+1} - V_{n+2})$

$= 2(\alpha U_{n+1} + \beta V_{n+1}) - (\alpha U_{n+2} + \beta V_{n+2})$

Donc $(\alpha U_n + \beta V_n) \in M$

Donc M est un sev donc M est un ev

16) $N = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n^2\}$

N n'est pas un ev.

Car

cex : $U_n = 1$, $U_{n+2} = 3$, $U_{n+1} = 2$ $\Big\}$ $3 \neq 2 \times 2 - 1 = 1$

12) $\theta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x + y + z = 0\}$

$\theta \subset \mathbb{R}^3$ ev

$\theta \neq \emptyset \quad 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in \theta$

SPCL

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $X, Y \in \theta$

$$\left.\begin{array}{l} X = (x, y, z) \\ Y = (x', y', z') \end{array}\right\} \in \theta$$

q.t-on :

$$\alpha X + \beta Y \in ? \ \theta$$

On a

$$\alpha X + \beta Y = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \\ \alpha z + \beta z' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \underbrace{(x + y + z)}_{0} + \beta \underbrace{(x' + y' + z')}_{0}$$

car $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \theta$ car $Y \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \theta$

$= 0 \ (\alpha X + \beta Y) \in \theta$

Donc θ est un sev → ev.

18) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1\}$

Non pas ev

Car

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

$0+0+0=0 \neq 1$

19) $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy=0\}$

. $Q \in \mathbb{R}^3$: ev

. $Q \neq \emptyset$ $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

$\Rightarrow 0 \times 0 = 0$ Ok

. SPCL

$X = (1,0,0) \in Q$

$Y = (0,1,0) \in Q$

$X + Y = (1,1,0) \notin Q$

$\to$ Faux $\to$ pas de sev $\to$

20) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 = z^2\}$

n'est pas un Rev.

Car

$X(2,1,-2) \in R$

$Y(1,0,1) \in R$

$X+Y=(3,1,1) \notin R$

Exercice 2 : mq $F \cup G$ sev de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$

F, G sev de E

1/ le sens indirect $\Leftarrow$

(H) $F \subset G$ ou $G \subset F$

ex: on a $F \subset G$

q.t.m $F \cup G$ sev de E

on a $F \subset G$ donc

$F \cup G = G$

or G sev

donc $F \cup G$ sev.

$\rightarrow$ pareil.

$\hookrightarrow$ $F \cup G$ sev.

2) le sens direct $\boxed{\Rightarrow}$

(H) $F \cup G$ sev de E

mq $F \subset G$ ou $G \subset F$

absurde. Montrons par contraposée cad

Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ alors $F \cup G$ n'est pas un sev

Si $F \not\subset G$ alors

$\exists x \in F$ tq $x \notin G$

et $G \not\subset F$ alors $\exists y \in G$ tq $y \notin F$

Donc $x \in F \setminus G$

$y \in G \setminus F$

comme $(F \cup G)$ est un ev

Donc il est stable par combinaison linéaire.

Donc stable par addition

Donc $x + y \in F \cup G$

mais

Si $x+y \in F$ alors

$y = \underbrace{(x+y)}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F} \in F$

car F est un sev

donc SPCL $\rightarrow$ donc SPaddition

or $y \notin F$ donc absurde

de même si $x+y \in G$ alors $x = \underbrace{(x+y)}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G} \in G$

or G est un sev et donc SPadd

~~donc~~ or $x \notin G$

donc absurde

Ainsi $\exists\, x, y \in F \cup G$, $x+y \notin F \cup G$

Donc : $F \cup G$ n'est pas stable par add

Donc $F \cup G$ n'est pas ~~un~~ sev de E.

Exercice 3 :

$F \oplus G = E$

$F \oplus H = E$

M.q. on $F = H$

Rappels : $F \oplus G = E$ signifie

$$\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = E \end{cases}$$

$F \oplus H = E$ signifie

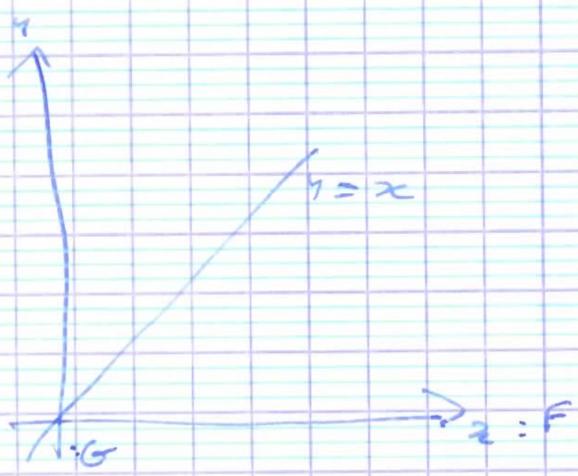
$$\begin{cases} F + H = E \\ F \cap H = \{0\} \end{cases}$$

$H \neq G$ car

par cor :

$E = \mathbb{R}^2$

$E = \mathbb{R}^2$



$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = x\}$

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = 0\}$

$F \oplus H = \mathbb{R}^2$ car

$\begin{cases} F \cap H = \{0\} \\ F + H = \mathbb{R}^2 \end{cases}$ mais $H \neq G$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x = 0\}$

$F \oplus G = \mathbb{R}^2$ car $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = \mathbb{R}^2 \end{cases}$

Ex 20.4

E un $\mathbb{R}$ev
F et G sev de E
tq $F+G=E$ ~~et F~~
F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F.

mq $E=F'\oplus G$ signifie

$$\begin{cases} F'+G=E \\ F'\cap G=\{0\} \end{cases}$$

$F'\oplus(F\cap G)=F$

mq $F'\cap G=\{0\}$

Soit $x\in F'\cap G$ mq $x=0$.

on a : $x\in F'\cap G$ et puisque $(F\cap G)$ et F' sont supplémentaires dans F.

et que $x\in F\cap G$ car $x\in G$ et $x\in F'\subset F$

et $\begin{cases} x\in F'\cap G \\ x\in F' \\ x\in G \end{cases}$ et $(F\cap G)\cap F'=\{0\}$

$x=0$

Mq $F' + G = E$

Soit $z \in E$, $z = \underset{\substack{\cap \\ F}}{f} + \underset{\substack{\cap \\ G}}{g}$ car $E = F + G$

Ainsi : on peut décomposer $\underset{\substack{\cap \\ F}}{f}$ en $\underset{\substack{\cap \\ F \cap G}}{g'} + \underset{\substack{\in \\ F'}}{f'}$

car $F = F \cap G \oplus F'$

$z = f + g = g' + f' + g = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{(g + g')}_{\in G}$

(car G sev donc SPCL)

$z = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{(g' + g)}_{\in G} \Rightarrow E = F' + G$.

$F' \oplus G = E$

Exercice 5

1) $F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(0) = 0 \}$

$G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f$ est constante $\}$

Mq F et G sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

F :

- $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: ev
- $F \neq \emptyset$ car pour $f=0$, $f(0)=0$

  Donc $0 \in F$
- SPCL :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f et $g \in F$

a-t-on $(\alpha f + \beta g) \in F$? élément

on doit mq $(\alpha f + \beta g)(0) = 0$

on a : $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha \underbrace{f(0)}_{\substack{= 0 \\ \text{car } f \in F}} + \beta \underbrace{g(0)}_{\substack{= 0 \\ \text{car } g \in F}} = 0$

donc $(\alpha f + \beta g) \in F$

donc F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

G :

- $G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: ev
- $G \neq \emptyset$ car $f = 0 \in G$
- SPCL :

  Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in G$

  a-t-on $(\alpha f + \beta g) \in G$

  on a $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \underbrace{f(x)}_{\substack{= k \\ \text{car } f \in G}} + \beta \underbrace{g(x)}_{\substack{= k' \\ \text{car } g \in G}} = K_1$

Donc $(\alpha f + \beta g) \in G$ Donc G sev

2) mq $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$

Cad mq $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \Rightarrow x \in F$ et $x \in G$

• mq $F \cap G = \{0\}$

Soit $f \in F \cap G$, mq $f = 0$

$f \in F$ et $f \in G$

$f(0) = 0$ | $f(x) = k$ $\exists k \in \mathbb{R}$.

Une fonction constante qui s'annule en un point (0) est forcément identiquement nulle.

Donc $f = 0$

• mq $F + G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Cad mq tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se décompose en une somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Soit $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on doit prouver que h se décompose sous la forme

$$\underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G} = h$$

Admettons que ce soit vrai.

Donc nécessairement

$h(0) = f(0) + g(0)$

$h(0) = \underset{\text{car } f \in F}{0} + \underset{\text{car } g \in G}{k} = k$

et $f(x) = h(x) - g(x)$
$= h(x) - k$

si on pose $k = h(0)$; $f(x) = h(x) - k$

$f(x) = h(x) - h(0)$

$h(x) = \underbrace{(h(x) - h(0))}_{\in F} + \underbrace{h(0)}_{\in G}$

__donc__ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$

__Exercice 6:__

Soit $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$

On note F le ...

$(\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Continue $)$

$F = \left\{ f \in C^0([a,b], \mathbb{R}) \,/\, \int_a^b f(t)dt = 0 \right\}$

$G = \{ f \text{ Constante} \}$

__Mq__ $E = F \oplus G$

Mq $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = E \end{cases}$

• Mq $F \cap G = \{0\}$

Soit $h \in F \cap G$ et mq $h = 0$

$h \in G \rightarrow h$ est une constante
appelons cette constante c.

D'autre part, $h \in F$ donc

$$\int_a^b h(t)dt = 0 = \int_a^b c\,dt = c \int_a^b 1 dt$$

$$= c(b-a)$$

or $(b-a) \neq 0$ car b et a sont des intervalles s^t différents

Donc $c = 0$
Donc $h = 0$

• mq $F + G = E$

Soit $h \in E$; $h = \underset{\underset{F}{\cap}}{f} + \underset{\underset{G}{\cap}}{g}$

$c = \int_a^b h(t)dt$

g la fonction constante égale à $\frac{1}{(b-a)} c$ et $f = h - g$

Donc $g = \frac{1}{b-a} \cdot c$ est une constante $\in G$

$f = h - g$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b h(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt$$

$$= \int_a^b h(t)\,dt - \int_a^b \frac{1}{(b-a)} c \; dt \longleftarrow$$ à trouver selon le sujet

$$= \int_a^b h(t)\,dt - \frac{c}{\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}$$

$$= \int_a^b h(t)\,dt - c \quad = \quad c - c = 0$$

On a donc $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ donc $f \in F$

__Exercice 7 :__ F sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \; / \; f(1) = f(2) = 0 \}$$

Supplémentaire de f.

Soit $G = \mathbb{R}[X]$

Pour cela, il suffit de mq $\forall h \in E$, h se décompose uniquement sous la forme $h = \underset{\in F}{f} + \underset{\in G}{g}$

Unicité :

Si : $h = f + g$ tq $h(1) = 0 = f(1) + g(1)$
$h(2) = 0 = f(2) + g(2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(1) = g(1) = 0 \\ h(2) = g(2) = 0 \end{cases}$$

Donc g doit être un polynôme pour qu'il vérifie cette propriété.

Donc g est unique $f = h - g$ donc f unique

Exercice 8:

E - Rev
F, G sev de E, $X = \{x_1 \to x_n\} \subset E$

1) mq $Vect(F \cup G) = F + G$

$Vect(F \cup G)$ = le plus petit sev de E qui contient $(F \cup G)$
③ ① ②

- $F + G$ est un sev car F, G 2 sev
- mq $F \cup G \subset F + G$

Soit $x \in F \cup G$, mq $x \in F + G$

$x \in F$

$x = x + 0$ donc $x \in F + G$
F G $U \cap G$ sev

$x \in G$ Donc $x \in F+G$.

$x = \underset{G}{x} + \underset{F \text{ car sev}}{0}$

Donc $F \cup G \subset F + G$

• Mq $(F+G)$ est le plus petit sev contenant $F \cup G$

Soit H sev, contenant $F \cup G$

Soit $x = (x_1 + x_2)$, $x \in F+G$
et $x \in H$

$\Rightarrow x_1 + x_2 \in H$ (H sev)

$x \in F+G$ on a mq $x \in H$

$F + G \subset H$

$\rightarrow (F+G)$ le plus petit sev $\supset F \cup G$

2) Mq $\text{Vect}(X) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \, ; \, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}}_{= L}$

on pose $L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \, ; \, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$

$\text{Vect}(X) = \underbrace{\text{le plus petit}}_{③}$ $\underbrace{\text{sev de } E}_{①}$ $\underbrace{\text{contenant } X}_{②}$.

① . $L \subset E$: ev

. $L \neq \emptyset$ $\quad 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0 \Rightarrow 0 \in L$

. SPCL:

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $U, V \in L$

c-t-m $\alpha u + \beta v \in L$

$u \in L \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

$v \in L \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) x_i$; l'élmt $(\alpha u + \beta v) \in L$

② mq $X \subset L$

Soit $x_1 = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$

Donc $x_1 \in L$

$\vdots$

Donc $x_n \in L$

③ Soit H sev de E tq $X \subset H$

mq $L \in H$

$X \in H \Rightarrow x_1 \in H ; x_2 \in H ; \dots ; x_n \in H$

Donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in H$

Car H sev

Donc $L \subset H$

Exercice 5 :

1) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x = y \text{ et } z = 0\}$

$= \{(y,y,0) \, ; y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(1,1,0)y \, ; \, y \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(1,1,0)\}$ $\quad y = 1$

2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x = y\}$

$= \{(y,y,z) \, ; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{y(1,1,0) + z(0,0,1) \, ; \, (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \text{Vect}\{(1,1,0) \, ; (0,0,1)\}$

3) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x = y = z\}$

$G = \{(x,x,x) \quad ; \, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,1) \, ; \, x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(1,1,1)\}$

4) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \underbrace{x+y=0}_{x=-y} \text{ et } \underbrace{x+z=0}_{x=-z}\}$

$= \{(x,-x,-x) \, ; \quad x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,-1,-1) \; ; x \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}\,(1,-1,-1)$

$z = y - x$

$x = x \quad y = z + x$

5) $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x - y + z = 0\}$

$= \{(x, z+x, z), (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{x\,(1,1,0) + z\,(0,1,1)\}$

$= \mathrm{Vect}\,\{(1,1,0), (0,1,1)\}$