Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Entourer votre professeur de cours : Mme Trémoulet / M. Rodot

Consignes :

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (4 points)

1. Pour la courbe suivante, expliciter la nature du point M_{t_0} (point ordinaire, d'inflexion, de rebroussement de première ou deuxième espèce) en explicitant p et q : $x(t) = 2t + t^2$ et $y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2}$ avec $t_0 = -1$.

2. Rechercher les branches infinies de la courbe suivante en 0^+ et $+\infty$: $x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t}$ et $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$ ·

Exercice 2 (5 points)

On se propose d'étudier l'arc paramétré Γ défini par $\overrightarrow{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ où $\begin{cases} x(t) = 4\cos^3(t) \\ \\ y(t) = 4\sin^3(t) \end{cases}$

On notera M_t le point de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrons que le domaine d'étude peut être restreint à $[0, \pi/4]$ en explicitant les transformations à effectuer lors du tracé.

2. Déterminer le vecteur de $\mathbb{R}^2$ dirigeant la tangente à Γ au point M_0.

3. Déterminer la nature du point M_0 (point ordinaire, point d'inflexion, point de rebroussement de première ou deuxième espèce).

4. Dresser le tableau de variation de Γ sur $[0, \pi/4]$.

5. Tracer la courbe.

Exercice 3 (2 points)

Donner la négation et la contraposée de la phrase suivante : « Si Philibert est concentré et rigoureux, il aura une bonne note au contrôle de mathématiques »

Exercice 4 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $160x - 72y = 16$.

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $160x - 72y = 16$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (2 points)

Soit $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a = 27b + 39$.
Quel est le reste de la division euclidienne de a par 27 ?

Exercice 6 (2 points)

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 \mid 6^n - 1$.

Exercice 7 (3 points)

Les deux questions sont indépendantes. Vous devez obligatoirement utiliser le théorème de Bézout dans les deux questions.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$.

1. On suppose $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc$. En utilisant obligatoirement le théorème de Bézout, montrer que $a \mid c$.

[suite du cadre page suivante]

2. On suppose $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$. En utilisant obligatoirement le théorème de Bézout, montrer que $a \wedge (bc) = 1$.