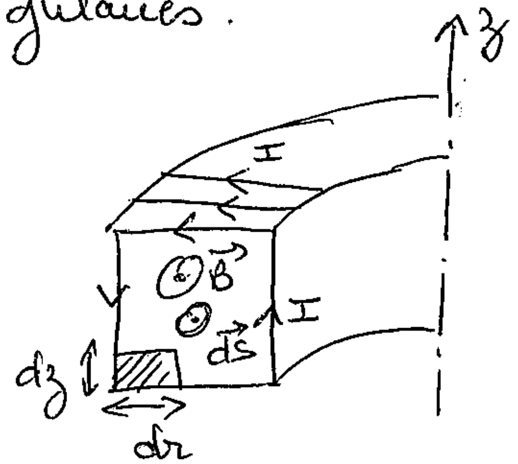
Corrigé du contrôle spé 2012/2013 (Physique).

Ex1

1) Les lignes de $\vec{B}$ étant circulaires, elles vont traverser les plans des N spires rectangulaires.

d'où $dS = dr \times dz$.



2) $\Phi(\vec{B}) = N \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

$\vec{B}, \vec{dS}$ colin et de m̂ sens

$\vec{B} \cdot \vec{dS} = B\, dS \cos(0°)$.

$$\Phi(\vec{B}) = N \cdot \int_{R_1}^{R_2}\int_0^h \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \times dr \cdot dz.$$

$$= \mu_0 \frac{N^2 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr \cdot \int_0^h dz = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot h.$$

3) a. $I = I_0 \sin(\omega t)$ I_0, ω sont des cstes

I est variable au cours du temps et le flux est proportionnel à I, ce qui donne un flux magnétique aussi variable au cours du temps ce qui engendre un phénomène auto-induction et donc apparition dans le tore, une f.e.m et un courant induit i ②

b) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mu_0 N^2 I_0}{2\pi}\sin(\omega t)\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)\times h\right)$.

$= -\dfrac{\mu_0 N^2 I_0}{2\pi} h.\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\sin(\omega t)\right)$.

$$\boxed{e(t) = -\frac{\mu_0 N^2 I_0 h}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\omega.\cos(\omega t)}$$

courant induit : $i(t) = \dfrac{e(t)}{R}$ (Loi d'Ohm).

$$\boxed{i(t) = \underbrace{-\frac{\mu_0 N^2 I_0}{2\pi R}.h.\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\omega}_{\text{cste}}\ \cos(\omega t)}$$

Ex2

1a) on calcule $\vec{E}_m = \vec{v}\wedge\vec{B}$ en utilisant les composantes : $\vec{E}_m = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\underbrace{\begin{pmatrix} -B_0\sin\theta \\ 0 \\ B_0\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{donné par l'énoncé.}}$

$$\vec{E}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ -vB_0\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}.$$

b) Calcul de la f.e.m.

$$e = \underset{\text{de } N \to M}{C(\vec{E}_m)} = \int_N^M \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

$\vec{E}_m$ est vers les $y<0$.

$\vec{dl}$ est orienté selon le sens de l'intégrale c.à.d de $N \to M$. ce qui donne $(\vec{E}, \vec{dl}) = 0$

$$e = \int_N^N E_m . dl . \cos(0°) \qquad E_m = \text{norme de } \vec{E}_m \; (>0).$$

$$= \int_N^M v B_0 . \cos(\theta) . dl = v B_0 \cos(\theta) \underbrace{\int_N^M dl}_{= a}$$

$$= v B_0 . \cos(\theta) . a$$

a = longueur du barreau.

Courant induit i

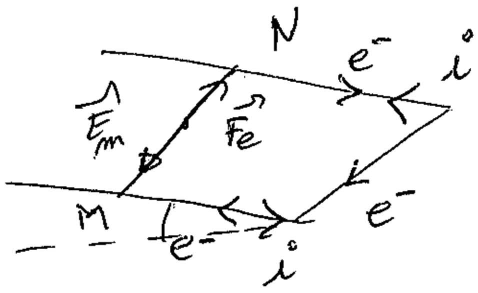
$$\boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{v B_0 \cos(\theta)}{R}}$$

R = résistance du barreau.

le champ $\vec{E}_m$ est dans le sens $N \to M$.

d'où $\vec{F_e} = q_{e^-} \vec{E}_m$ est dans le sens inverse $M \to N$ car $q_{e^-} < 0$.

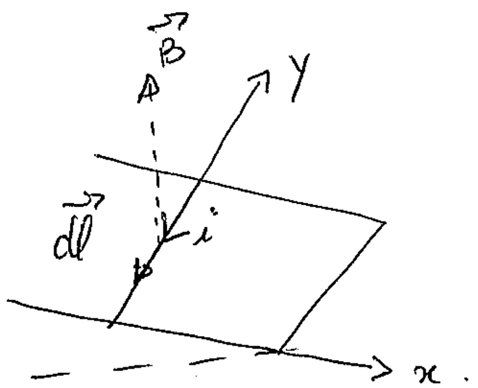
les $\bar{e}$ vont donc circuler ds le sens (4)
indiqué sur le schéma, d'où le courant i
circule dans le sens opposé au sens des e^-



2) La force que subit le barreau traversé par i et placé dans le champ $\vec{B}$ est la force de Laplace.

$$\vec{F_L} = \int_l i \, \vec{dl} \wedge \vec{B}$$ où $\vec{dl}$ est de même sens que i

i = courant induit



avec :

$\vec{B} \begin{pmatrix} -B_0 \sin\theta \\ 0 \\ B_0 \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $\vec{dl} \begin{pmatrix} 0 \\ -dl \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$i\,\vec{dl} \wedge \vec{B} = i \begin{pmatrix} 0 \\ -dl \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -B_0 \sin\theta \\ 0 \\ B_0 \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$= i \begin{pmatrix} -dl\, B_0 \cos\theta \\ 0 \\ -dl\, B_0 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$\vec{F_L} = \left(\int_0^a - i\, B_0 \cos\theta \, dl \right) \vec{e_x} + \left(- \int_0^a i\, B_0 \sin\theta \, dl \right) \vec{e_z}.$$

$$\vec{F_L} = \underbrace{\left(- i\, B_0 \cos(\theta) . a \right)}_{F_{Lx}} \vec{e_x} + \underbrace{\left(- i\, B_0 \sin\theta . a \right)}_{F_{Lz}} \vec{e_z}.$$

<u>norme de F_L</u> $\quad F_L = \sqrt{F_{Lx}^2 + F_{Lz}^2}$

$$= i\, B_0 . a . \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}.$$

$$\boxed{F_L = i\, B_0 . a}$$ a = longueur du barreau.

3) <u>R.F.D</u> : $\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}. \Rightarrow \vec{F_L} + \vec{P} = m\vec{a}.$

<u>sur l'axe $\vec{Ox}$ du mvt</u>.

$$- i\, B_0 \cos(\theta) . a + mg . \sin\theta = m\, a_x.$$

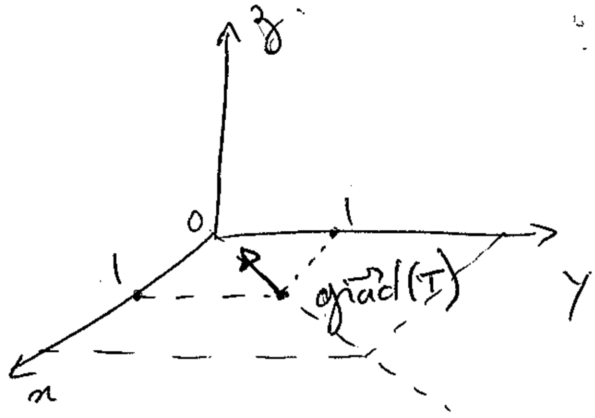
$$\boxed{a_x = g \sin(\theta) - \frac{i\, B_0 . \cos(\theta) . a}{m}}$$ (accélération sur $\vec{Ox}$).

Ex 3

A) 1) $\vec{grad}\,(T(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8x}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2} \\ \frac{-8y}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2} \\ \frac{-32z}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2} \end{pmatrix}$

2) au pt $(1,1,0)$ $\quad x=1, \; y=1, \; z=0 \Rightarrow \vec{grad}(T) = \begin{pmatrix} -8/9 \\ -8/9 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$

le vecteur $\vec{grad}$ est dans le plan (xOy), appartenant à la médiatrice à ce plan, donc c'est la direction de grande variation de Température.



B) $\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz^4)$.

$\text{div}(\vec{V}) = 2x + x + 4yz^3 = 3x + 4yz^3$.

au pt $(1,0,1)$ $\quad x=1, y=0, z=1 \Rightarrow \text{div}(\vec{V}) = 3$.

$\text{div}(\vec{V})$ est >0 en ce pt, il y a donc accumulation de fluide en ce m̂ point

c) a) $\mathrm{div}(f\vec{A})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x} + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}A_y + \frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{A} + \underbrace{f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)}_{f\,\mathrm{div}(\vec{A})}.$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{A} + f\,\mathrm{div}(\vec{A})$$

b) $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{U})) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{U})$.

$$= \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 U_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 U_x}{\partial z\partial y}$$

$= 0 + 0 + 0$ car les composantes de $\vec{U}$ sont DTE

d'où $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{U})) = 0$