Chapitre VI

ELECTROSTATIQUE

Théorème de Gauss

Plan

I. Introduction

II. Enoncé du théorème de Gauss

III. Flux du champ électrique

1. Définition d'un flux à travers une surface
2. Propriétés du vecteur élément de surface
3. Notion de surface fermée

IV. Application

1. fil infini
2. Plan infini

A. Zellagui

I. *Introduction*

Le théorème de Gauss permet le calcul du champ électrique E à partir du flux de $\vec{E}$: $\Phi(\vec{E})$.

⇒ Le théorème est plus facile à appliquer pour des systèmes à symétrie (sphérique ou cylindrique…).

⇒ Le calcul du flux, il est nécessaire de connaître la direction de $\vec{E}$ (que l'on peut déduire à l'aide des symétries).

II. *Énonce du théorème de Gauss*

Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée, appelée surface de Gauss S_g , est égal à la somme des charges intérieures (à S_g) divisée par ε_0:

$$\boxed{\oiint_{S_g} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon}}$$

($\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$; milieu air ou vide $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$)

- ε : Permittivité diélectrique du milieu $\varepsilon_{air} = \varepsilon_{vide} = \varepsilon_0$
- $\oiint$: intégrale sur une surface fermée.
- S_g : Surface de Gauss, surface fictive qui vérifie :
  - S_g fermée
  - S_g passe par M où se calcule $E(M)$
  - de géométrie "cohérente" avec la géométrie du système physique réel
- Q_{int} : Charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss : S_g.

III. *Flux de $\vec{E}$: flux électrique*

1- Définition

Par définition mathématique, le flux de $\vec{E}$ est :

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$ (flux de $\vec{E}$ à travers S : flux électrique)

("phi de $\vec{E}$")

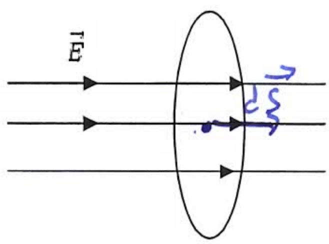
si S est fermée : $\Phi(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint E\, dS \cos(\alpha)$ où $\alpha = (\vec{E}, d\vec{S})$

$\vec{E}$: grandeur phys ; $d\vec{S}$: vecteur élément de surface

Le flux représente l'intensité de **"l'écoulement des lignes de champs $\vec{E}$"** à travers une surface S donnée.

Exemples:

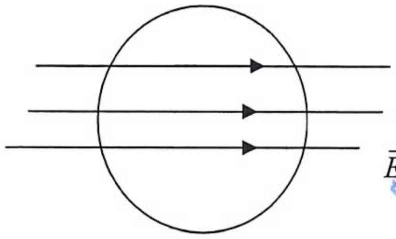
Lignes de champ $\vec{E}$ traversant un disque de section S

① 

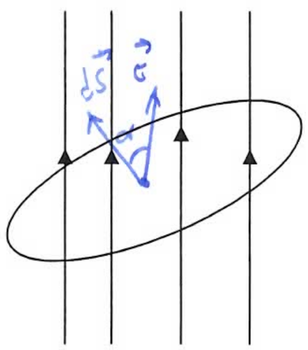
$d\vec{S} = \vec{dx} \wedge \vec{dy}$

$dS = dx\,dy$

* sans calcul, les lignes de $\vec{E}$ traversent toute la section S, le flux est donc max
* avec le calcul : $\Phi(\vec{E}) = \iint_S E\, dS \cos(0°) = \Phi_{max}$ car $\cos(0°)$ est max.

② 

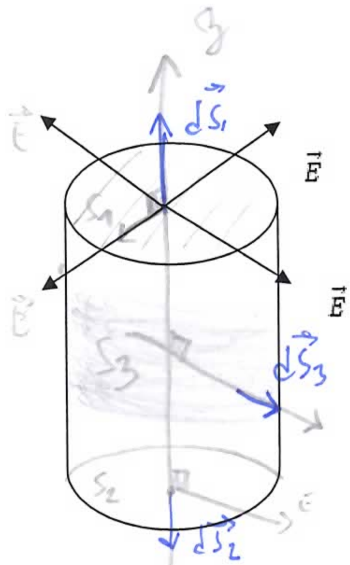
* Sans calcul : les lignes de $\vec{E}$ rasent la surface sans la traverser, le flux est nul
* avec le calcul : $\Phi(\vec{E}) = \iint_S E\, dS \cos(90°) = 0$

③ 

$\Phi(\vec{E}) = \iint_S E\, dS \cos(\alpha)$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < \Phi(\vec{E}) < \Phi(\vec{E})_{max}$

Lignes de champ électrique radial traversant un cylindre



$S_{fermée} = S_1 + S_2 + S_3$

2 surfaces de base + Surface latérale

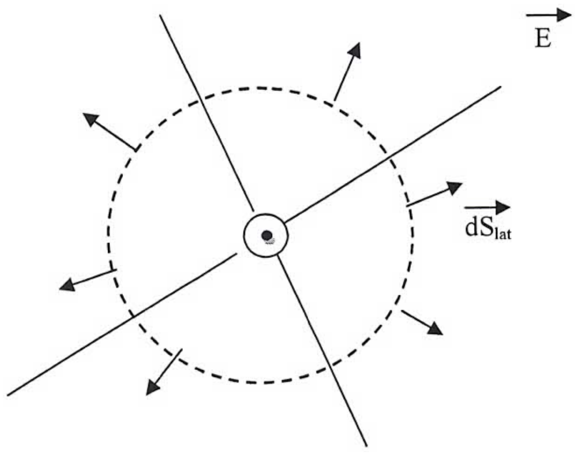
$\Phi_{tot}(\vec{E}) = \oiint_{S_1+S_2+S_3} \vec{E}.\vec{dS}$

$= \iint_{S_1} \vec{E}.\vec{dS_1} + \iint_{S_2} \vec{E}.\vec{dS_2} + \iint_{S_3} \vec{E}.\vec{dS_3}$

$\vec{E} \perp \vec{dS_1} \Rightarrow \Phi_{S_1}(\vec{E}) = 0$ (car $\vec{E}.\vec{dS_1} = 0$)

$\vec{E} \perp \vec{dS_2} \Rightarrow \Phi_{S_2}(\vec{E}) = 0$ (")

Vue de dessus :



$\vec{E}$ colinéaire et de même sens que $\vec{dS_3}$

$\Rightarrow \Phi(\vec{E})$ est max et >0

$\Phi_{tot}(\vec{E}) = \Phi_{S_3}(\vec{E}) = \iint_{S_3} E\, dS_3 \cos(0°)$

$= \int_0^h \int_0^{2\pi} E.r\, d\theta\, dz$

$= E.2\pi r h$

2 - Propriétés du vecteur élément de surface $d\vec{S}$

Le vecteur $d\vec{S}$ doit vérifier :

- Direction : perpendiculaire à la surface.
- Sens : orienté selon la règle de la main droite.
- Intensité : dS s'exprime en fonction des variables des coordonnées, selon la géométrie du système

Exemples : dS = $\begin{cases} dx\,dy : \text{Pour une surface plane} \\ r\,dr\,d\theta : \text{Pour une surface de base cylindrique} \\ r\,d\theta\,dz : \text{Pour une surface latérale cylindrique} \end{cases}$

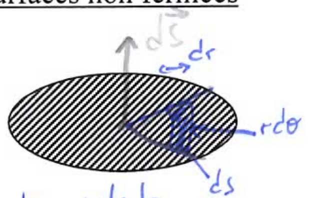
3- *Notion de surface fermée*

C'est une surface qui sépare ou "isole " le milieu extérieur du milieu intérieur. C'est aussi une enveloppe qui contient un volume.

Pour une surface fermée, de vecteur $\overrightarrow{dS}$ est dirigé vers l'extérieur

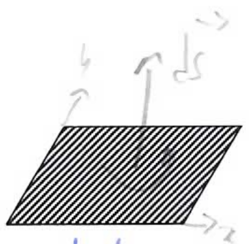
Exemples

Surfaces non fermées



ds = rdrdθ

Surface d'un disque



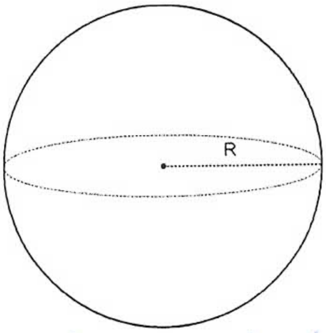
ds = dx dy

Surface d'un plan

dS = rdθdz

Surface latérale d'un cylindre

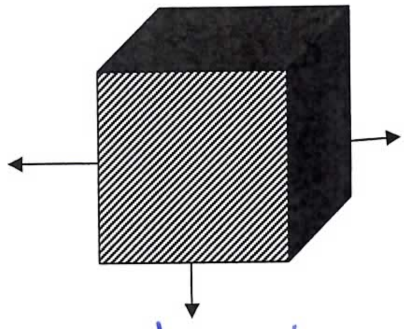
Surfaces fermées



$dS = (r\,d\theta) \times (r \sin\theta \, d\varphi)$

$\quad = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad 0 \le \theta \le \pi$

$\quad r = cst$ sur la sphère $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$



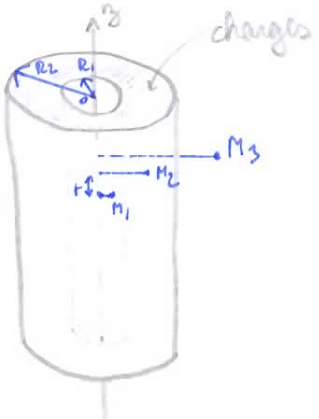
$dS_2 = dy\,dz$

4- Notion de charge intérieure

$(Q_{int})_{S_g}$ = charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss (fermée) S_g.

$Q_{int} = \begin{cases} * \text{ nulle si } S_g \text{ se trouve à l'intérieur du système chargé en surface} \\ * \text{ représente une partie de la charge totale du système (phys)} \\ * \text{ représente la charge totale du système (phys)} \end{cases}$

exple : charges réparties entre R_1 et R_2 d'un système cylindrique

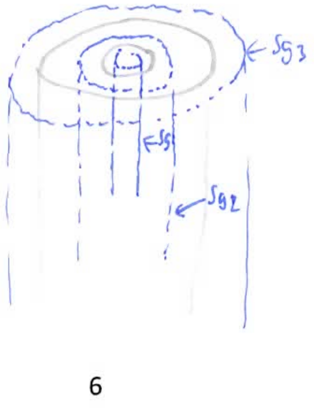


$\begin{cases} r < R_1 \; (M_1) \\ R_1 < r < R_2 \; (M_2) \\ r > R_2 \; (M_3) \end{cases}$

$S_{g1} \quad (Q_{int})_{S_{g1}} = 0$

$S_{g2} \quad (Q_{int})_{S_{g2}} = \int_{R_1}^{r}\int_{0}^{h}\int_{0}^{2\pi} \rho \, d\tau \qquad d\tau = r\,dr\,d\theta\,dz$

$S_{g3} \quad (Q_{int})_{S_{g3}} = \int_{R_1}^{R_2}\int_{0}^{h}\int_{0}^{2\pi} \rho \, d\tau$



IV. *Applications sur le théorème de Gauss*

Étapes:

* Règle de symétrie pour $\vec{E}$ pour trouver la direction de $\vec{E}$ ($\vec{E} \in \cap P_{sym}$ passant par M)
* Choix de S_g (en fonction de la géométrie du syst. phys chargé)
  - fermée
  - passant par M
* Calcul du flux de $\vec{E}$: $\Phi(\vec{E})$ à travers S_g
* Calcul de Q_{int} dans les ≠ régions du système
* Dans le théorème $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E =$ (pour chaque région du syst)

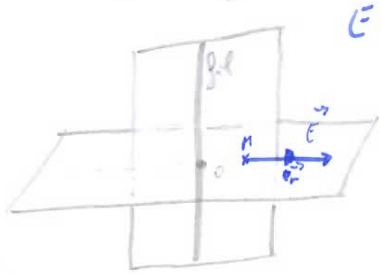
1- Fil infini

(Fil chargé avec une densité λ constante et positive)

Calcul de E(M) ?

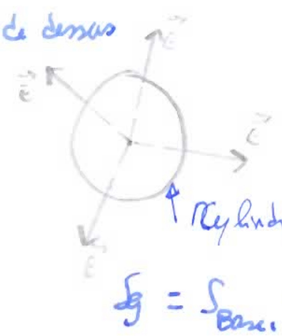
* direction de $\vec{E}$
  - fil infini
  - λ = Cst (répartition uniforme des charges)

$\vec{E} \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow \vec{E}$ porté par $\vec{OM}$



$\boxed{\vec{E} \text{ est donc radial}}$ (en plus $\vec{E}$ est divergent car λ > 0 ; Q > 0)

2) Vue de dessus

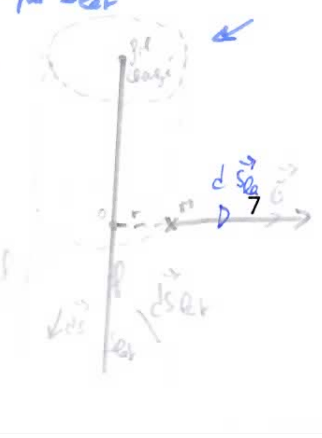


Cylindre ≡ Surface de gauss

$S_g = S_{Base1} + S_{Base2} + S_{lat}$

$\vec{E}$ est radial ⇒ ligne de $\vec{E}$ ne traverse que S_{lat}

d'où $\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_{g}} \vec{E}.\vec{dS} = \iint \vec{E}.\vec{dS}_{lat}$



$\Phi(\vec{E}) = \iint \underbrace{E\, r\, d\theta\, dz}_{dS_{lat}} \cos(0°)$

$\Phi(\vec{E}) = E.r \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{l} dz$

$\boxed{\Phi(\vec{E}) = E\, 2\pi r l}$

Calcul de (Q_{int}) :

$(Q_{int}) =$ Charge totale du fil

$= \int_{\ell} \lambda \, dl$ (par def car c'est un fil)

$Q_{int} = \lambda \ell$

$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ $\quad E \cdot 2\pi r \cancel{\ell} = \frac{\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0}$

$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$

TD : $E(x) = \frac{2k\lambda}{x}$ $\left(\begin{array}{l} x = r \\ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \end{array} \right) \Rightarrow E = \frac{\frac{2 \times 1}{4\pi\varepsilon_0} \lambda}{r}$

$= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$ (m̂ resultat)

2- Plan infini

On considère un plan infini chargé avec une densité σ cste et > 0.