Partiel 2011 – Proposition de correction par Tien THACH (Tackounet ☺)

<u>Exercice 1 :</u>

Soit $X(z) = \frac{0.2\,z}{(z-1)(z-0.8)}$

<u>Divisions polynomiales :</u>

On met le dénominateur sous la forme $D(z) = a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{-i}$

On divise donc le numérateur et le dénominateur par z^2, soit :

$$X(z) = \frac{0.2\,z^{-1}}{1 - 1.8\,z^{-1} + 0.8\,z^{-2}}$$

(Et vas-y que je te divise ça …)

z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}	1	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}
0.2					**1**	**-1.8**	**0.8**			
	0.36	-0.16				**0.2**	**0.36**	**0.488**	**0.5904**	**0.67232**
		0.488	-0.288							
			0.5904	-0.3904						
				0.67232						

- ⇨ $X(0) = 0$
- ⇨ $X(T) = 0.2$
- ⇨ $X(2T) = 0.36$
- ⇨ $X(3T) = 0.488$
- ⇨ $X(4T) = 0.5904$
- ⇨ $X(5T) = 0.67232$

(Oh my God ! Bonne chance pour le partiel si vous avez le temps de le faire)

On utilise le théorème de la valeur finale pour déterminer $X(nT)$.

$$\lim_{n\to\infty} X(nT) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{0.2\,z}{(z-1)(z-0.8)} \right) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{0.2}{0.2} \right) = 1$$

Division par 'z' puis décomposition :

$$\frac{X\,(z)}{z} = \frac{0.2}{(z-1)(z-0.8)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.8}$$ avec A = 1 et B = -1.

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.8} = A(z) - B(z)$$

On se reporte au tableau des transformées inverses et on remarque :

$$Z^{-1}[\mathrm{A(z)}] = \mathrm{u(t)} \quad ; \quad Z^{-1}[\mathrm{B(z)}] = 0.8^{n}.u(t)$$

- ⇨ $X(0) = 0$
- ⇨ $X(T) = 0.2$
- ⇨ $X(2T) = 0.36$
- ⇨ $X(3T) = 0.488$
- ⇨ $X(4T) = 0.5904$
- ⇨ $X(5T) = 0.67232$

Le calcul de la limite est identique à précédemment.

Exercice 2 (un fake, j'ai inversé le condensateur avec la résistance, mais je laisse quand même la correction de cet exercice imaginaire):

1. On utilise la relation « diviseur potentiométrique » :

$$V_s(p) = \frac{{}^{1}/_{Cp}}{R+{}^{1}/_{Cp}}.V_e(p) \rightarrow F(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{{}^{1}/_{Cp}}{R+{}^{1}/_{Cp}} = \frac{1}{RCp+1}$$

2. Va falloir de l'imagination car je n'ai pas envie de faire les images :

On transforme la première pente de la fonction par sa transformée de Laplace

$$V_1(t) = \frac{V_0}{T}t.u(t) \rightarrow V_1(p) = \frac{V_0}{T}\frac{1}{p^2}$$

On continue avec la suite en prenant en compte qu'on a la première ;)

$$V_2(t) = -\frac{V_0}{T}t.u(t-T) \rightarrow V_1(p) = -\frac{V_0}{T}\frac{1}{p^2}e^{-Tp}$$

And again…

$$V_3(t) = -\frac{V_0}{T}t.u(t-2T) \rightarrow V_1(p) = -\frac{V_0}{T}\frac{1}{p^2}e^{-2Tp}$$

Et finalement :

$$V_4(t) = \frac{V_0}{T} t.u(t-3T) \rightarrow V_1(p) = \frac{V_0}{T}\frac{1}{p^2}e^{-3Tp}$$

Ainsi : $V(p) = \sum_{i=1}^{4} V_i(p) = \frac{V_0}{T}\frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-Tp} - e^{-2Tp} + e^{-3Tp}\right)$

3. Bon, là, il faut que je fasse un graphique -_-

$$V_s(p) = F(p).V(p) = \frac{1}{RCp+1}\frac{V_0}{T}\frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-Tp} - e^{-2Tp} + e^{-3Tp}\right)$$

Si T = RC :

$$V_s(p) = \frac{1}{RCp+1}\frac{V_0}{RC}\frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-RCp} - e^{-2RCp} + e^{-3RCp}\right)$$

On décompose ça en élément simple :

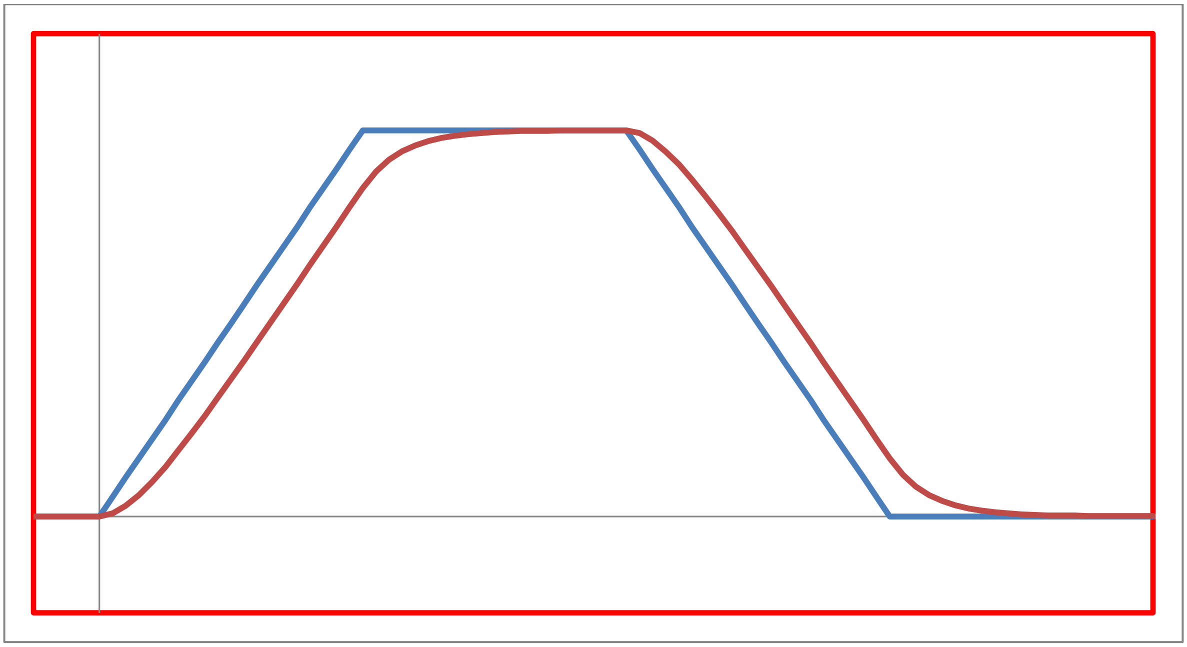
$$X(p) = \frac{1}{RCp+1}\frac{1}{p^2} = \frac{A}{RCp+1} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p^2} \quad avec\ A = (RC)^2, B = -RC\ et\ C = 1$$

On passe ça dans le domaine temporel :

$$On\ pose\ A(p) = \frac{RC}{p + {}^{1}/_{RC}}\ ;\ B(p) = -\frac{RC}{p}\ \ et\ \ C(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$On\ en\ déduit\ A(t) = RCe^{-\frac{t}{RC}}.u(t)\ ;\ B(t) = -RC.u(t)\ \ et\ \ C(t) = t.u(t)$$

Avec le facteur devant et les retards, on peut construire facilement la courbe (en fait non).



Voilà un exemple de courbe que l'on peut obtenir (courbe rouge). Si vous aviez plus simple pour le faire, n'hésitez pas ;)

Exercice 2 (le vrai):

1. On utilise la relation « diviseur de tension » :

$$V_s(p) = \frac{R}{R+{}^{1}/_{Cp}} . V_e(p) \rightarrow F(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{R}{R+{}^{1}/_{Cp}} = \frac{RCp}{RCp+1}$$

2. C'est pareil qu'au-dessus.

3. Bon, là, il faut que je fasse un graphique -_-

$$V_s(p) = F(p).V(p) = \frac{RCp}{RCp+1} \frac{V_0}{T} \frac{1}{p^2} \left(1 - e^{-Tp} - e^{-2Tp} + e^{-3Tp}\right)$$

Si T = RC :

$$V_s(p) = \frac{1}{RCp + 1}\frac{V_0}{p}\left(1 - e^{-RCp} - e^{-2RCp} + e^{-3RCp}\right)$$

On décompose ça en élément simple :

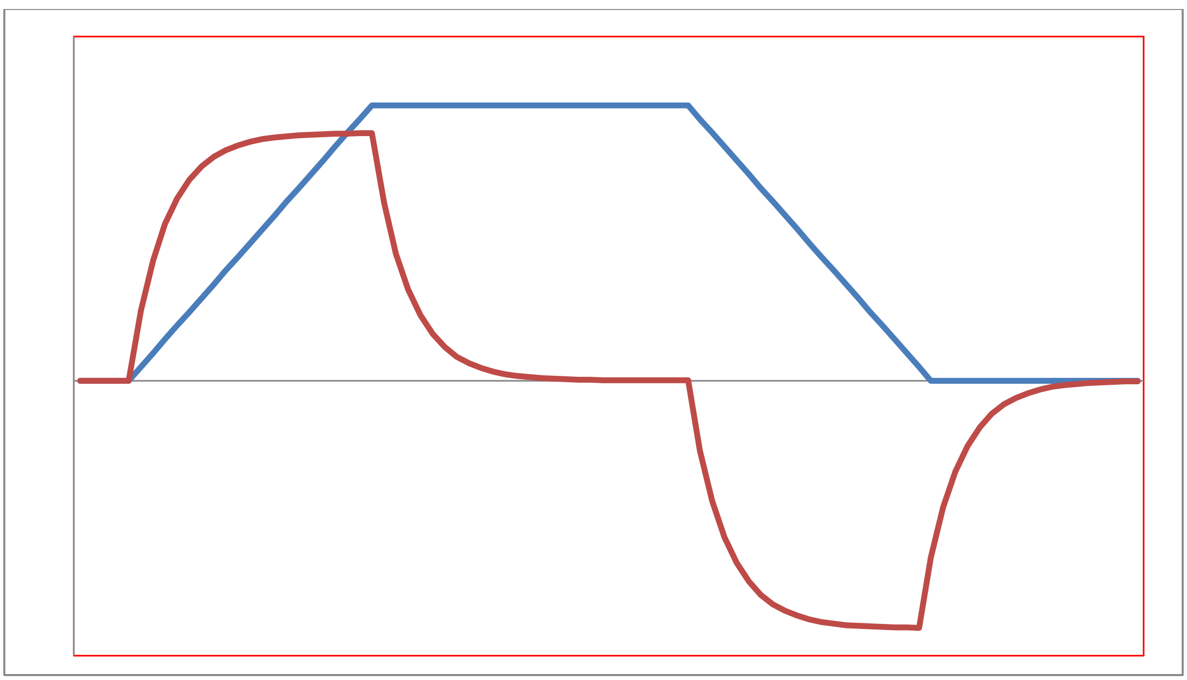
$$X(p) = \frac{1}{RCp+1}\frac{1}{p} = \frac{A}{RCp+1} + \frac{B}{p} \quad avec\ A = -RC\ \ et\ B = 1$$

On passe ça dans le domaine temporel :

$$On\ pose\ A(p) = -\frac{1}{p + {}^{1}/_{RC}}\ \ et\ \ B(p) = \frac{1}{p}$$

$$On\ en\ déduit\ A(t) = -e^{-\frac{t}{RC}}.u(t)\ \ et\ \ B(t) = u(t)$$

Avec le facteur devant et les retards, on peut construire la courbe.



Voilà un exemple de courbe que l'on peut obtenir (courbe rouge). C'est vraiment moche avec Excel…