Feuille d'exercices n°8

Fonctions de deux variables réelles

(du lundi 15 avril 2013 au vendredi 19 avril 2013)

Exercice 1

Déterminer les extrema locaux éventuels des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = (x + y)^2 + x^4 + y^4$
4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $k(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
5. $l : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $l(x, y) = x\big((\ln(x))^2 + y^2\big)$
6. $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $m(x, y) = x^3 - x^2y + 3y^2$

Exercice 2

1. Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$
2. Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0$

Exercice 3

Soit $z = e^{\varphi(x,y)}$ où φ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
2. En déduire toutes les fonctions φ telles que $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$