Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (2 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+e^x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-42}\right)^x$.

Exercice 2 (3 points)

1. Via la règle de d'Alembert, déterminer la nature de $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.
2. Via la règle de Cauchy, déterminer la nature de $\sum \dfrac{2^n}{n^{\ln(n)}}$.

Exercice 3 (5,5 points)

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta$$

où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a
$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
2. Montrer que
$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
3. En déduire que
$$u_n = (-1)^n\frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
4. Montrer que si $\beta\leqslant\alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.
5. Etude du cas $\beta>\alpha$.

   On a
$$u_n = (-1)^n\frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n \quad \text{avec} \quad v_n = (-1)^n\frac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right).$$

   a. Montrer que $\sum v_n$ est absolument convergente.

   b. Montrer que la série de terme général $w_n = (-1)^n\frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$ est convergente.

   c. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 (4 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1 + n}$$

1. En raisonnant par équivalent, déterminer la nature de $\sum \frac{1}{1+n}$.
2. En étudiant la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ sur $[1, +\infty[$, montrer que la suite $\left(\frac{\sqrt{n}}{1+n}\right)$ est décroissante dès que $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la nature de $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+n}$.
4. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 5 (3,5 points)

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
2. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
3. Que constatez-vous ?

Exercice 6 (2 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \pi\mathbb{N}$ et $a \neq 1$.

Déterminer la nature de $\sum u_n$.