

# **MAGNETOSTATIQUE**

## Chapitre 1

Champ magnétique
------------------

### PLAN

- I. Bref aperçu historique
- II. Mise en évidence du champ magnétique
- III. Topographie des champs magnétiques
- IV. Calcul du champ magnétique, loi de Biot et Savart
- V. Propriétés du champ magnétique
  - 1. Flux magnétique
  - 2. Circulation du champ magnétique, théorème d'Ampère

A. Zellagui

## I. Bref aperçu historique

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous le nom de magnétite, pierre trouvée à proximité de la ville de Magnésia (Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de champ magnétique.

Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles. Elles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau contenue dans un récipient gradué.

Au XVIIIème siècle, Franklin découvre la nature électrique de la foudre (1752). Or, il y avait déjà à cette époque de nombreux témoignages de marins attirant l'attention sur des faits étranges :

- Les orages perturbent les boussoles
- La foudre frappant un navire aimante tous les objets métalliques.

Franklin en déduisit « la possibilité d'une communauté de nature entre les phénomènes électriques et magnétiques ».

## II. Mise en évidence du champ magnétique

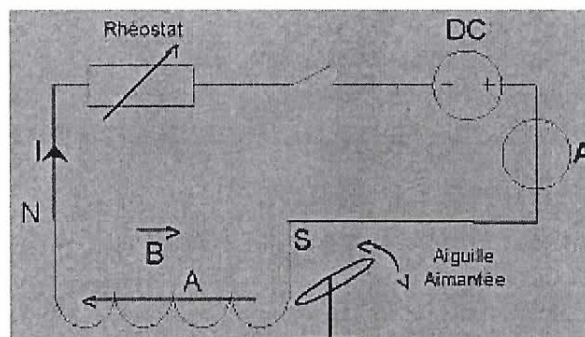
### Expérience d'Oersted

Tout commença avec l'expérience d'Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, prouvant sans ambiguïté un lien direct entre le courant électrique et le champ magnétique. Par ailleurs, il observa :

- Si on inverse le sens du courant, la déviation change de sens.
- La force qui dévie l'aiguille est non radiale.

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction

de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en fonction de l'inverse de la distance.



### III. Topographie des champs magnétiques :

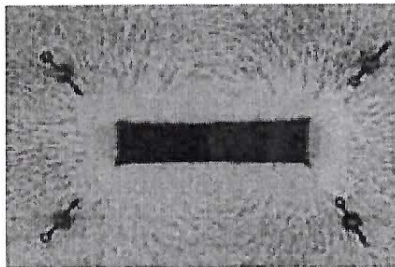
- Lignes de champs :

On appelle ligne de champ une courbe tangente au vecteur champ magnétique en chacun de ses points, orientée dans le sens du champ magnétique.

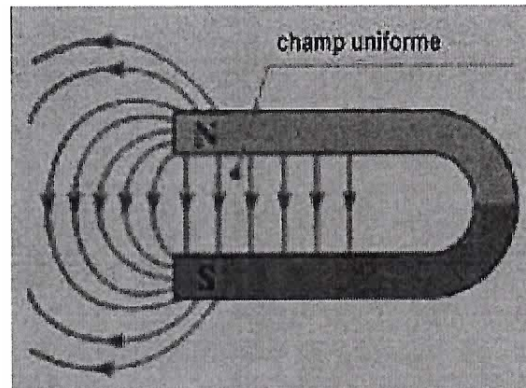
- Spectres magnétiques :

Saupoudrons de limaille de fer un support horizontal au dessous duquel nous avons placé un aimant droit. Les grains de limaille s'alignent selon des lignes appelées lignes de champ. L'aimant modifie localement les propriétés de l'espace. On dit que l'aimant crée un champ magnétique dans son voisinage.

Le champ magnétique est représenté par un vecteur, tangent aux lignes de champ.



aimant droit  
*spectre obtenu avec la limaille de fer*



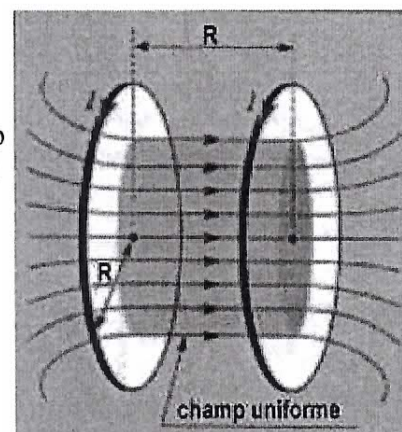
aimant en U

- Champ magnétique uniforme :

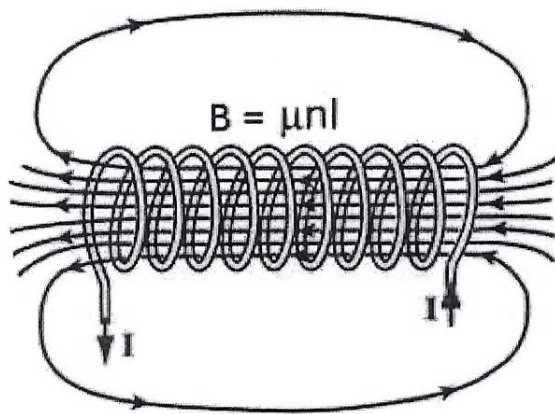
#### Bobines d'Helmholtz

Un champ magnétique est uniforme dans un domaine de l'espace si, en tout point de ce domaine, le vecteur champ magnétique conserve la même direction, le même sens et la même valeur. Les lignes de champs sont parallèles.

Pour obtenir un champ uniforme on peut se placer à l'intérieur d'un solénoïde, dans un aimant en U ou au voisinage du milieu de l'axe des bobines d'Helmholtz.



## Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde :

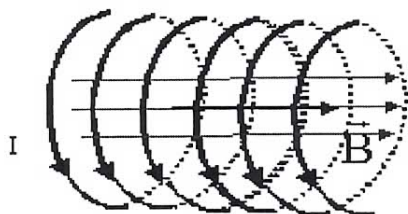


$$n = \frac{N}{L} \rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$$(air) \Rightarrow \mu = \mu_0$$

$$B_{\text{soloïde}} = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

*n lignes de champ  
représ.  $B = \mu(B)$*



$$B = \frac{\mu_0 N i}{L}$$

B en tesla (T)  
i en ampère (A)  
L longueur (m)

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$$

N nombre de spires

*$\mu = \mu_r \times \mu_0$   
perméabilité magnétique du milieu*

$$\mu = \mu_r \times \mu_0$$

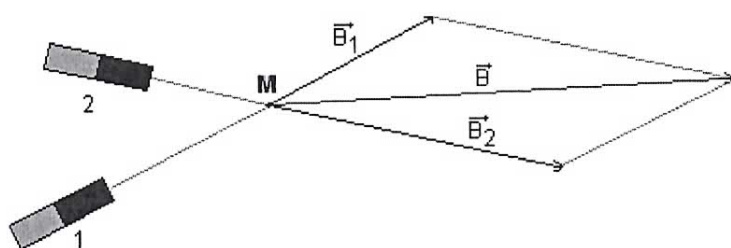
$$\text{Vd. } \mu_r = 1 \Rightarrow \mu = \mu_0$$

$$\text{ou } \mu_r \approx 1 \Rightarrow \mu \approx \mu_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \mu_r \mu_0 \\ \mu_r \geq 1 \end{array} \right. \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \text{perm. rel. relative}$$

### • Superposition de champs magnétiques

Soient deux aimants notés 1 et 2. Soit  $\vec{B}_1$  le champ magnétique créé par l'aimant 1 en un point M et soit  $\vec{B}_2$  le champ magnétique créé par l'aimant 2 en ce même point M.



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Le champ résultant est égal à la somme vectorielle des champs créés par chaque source au point M.



### Remarque:

- A l'extérieur de l'aimant, les lignes de champ sont orientées du pôle nord vers le pôle sud.
- La valeur du champ magnétique  $\vec{B}$  s'exprime en Tesla (T) et se mesure à l'aide d'un tesla mètre. Une autre unité le Gauss (G), est également très souvent utilisée : 1 Gauss =  $10^{-4}$  Tesla.

### Quelques ordres de grandeur :

- Un aimant courant  $B \approx 10$  mT
- Un électroaimant ordinaire  $B \approx$  Tesla
- Une bobine supraconductrice  $B \approx 20$  Tesla
- Champ magnétique dans une tache solaire  $B \approx \text{kG} \approx 0.1$  Tesla
- Champ magnétique terrestre :  $B \approx 0,5$  G
- Champ magnétique d'une étoile à neutrons  $B \approx 10^8$  Tesla

## IV. Calcul du champ magnétique

### IV.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

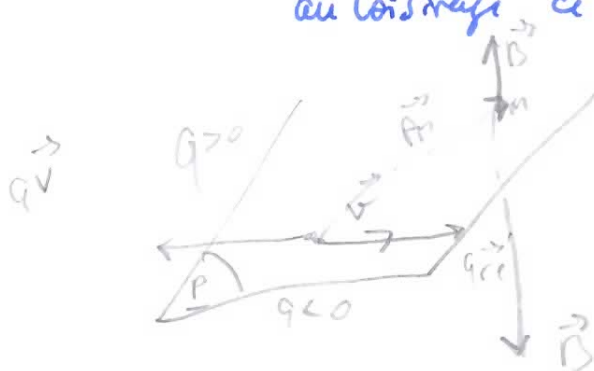
D'après ci-dessus, le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge  $q$  située en un point P et animée d'une vitesse  $\vec{v}$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide =  $4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Ce facteur décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique.

exmp: Une charge en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}$   
résultat: création d'un champ  $\vec{B}$  en tout point de l'espace  
au voisinage de la particule



$$\text{on a } |\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \sin(\alpha)}{r^2}$$

Sens et direction

- $\vec{B} \perp \text{plan}(\vec{v}, \vec{PM})$
- orienté vers le haut si  $q > 0$
- orienté vers le bas si  $q < 0$

norme de  $\vec{B}$ :

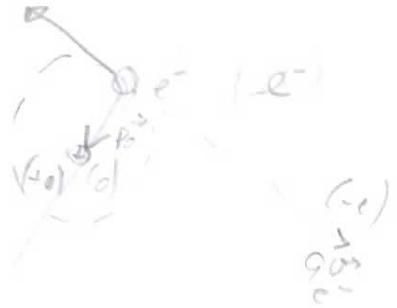
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} |q| \cdot v \cdot \frac{PM}{PM^3} \cdot |\sin(\alpha)|$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} |q| \cdot \frac{v}{PM^2} |\sin(\alpha)| \text{ (en Tesla)}$$

exercice : calcul de rotation d'un électron dans un atome d'hydrogène

représenter et calculer

$\vec{B}(O)$  où  $O$  = centre de l'atome



$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e \frac{\vec{v} \wedge \vec{p}_O}{(p_O)^3}$$

$\vec{B}(O) \perp$  au plan de la trajectoire  $(\vec{q}_O, \vec{p}_O)$  et entrant (orientation vers l'avant de l'électron)

norme de  $\vec{B}(O)$

$$\|\vec{B}_O\| = \frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{v \cdot p_O \cdot \sin(\alpha/2)}{(p_O)^3}$$

$p_O = R$  = rayon de la trajectoire

$$|q_e| = | -e | = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\boxed{\|\vec{B}_O\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{p^2} \text{ Tesla.}}$$

#### IV.2- Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

Considérons  $N$  particules de charges  $q_i$  situés en des points  $P_i$  et de vitesse  $v_i$ . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point  $M$  est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{N \cdot q \cdot \vec{v} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

#### IV.3 Champ magnétique créé par un courant $I$

##### Loi de Biot et Savart.

*Cf fin poly pour la DM.*

(C) : circuit filiforme orienté, définissant le courant  $I$ .

$M$  est un point de l'espace.

Un élément  $d\vec{l}$  en  $P$  du fil crée en  $M$  un champ magnétique :

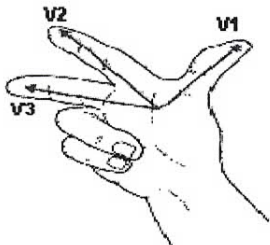
$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Le circuit total (C) crée en  $M$  un champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

La direction et le sens sont déterminés par l'application de la règle des 3 doigts avec :

- pouce =  $V1$  = sens de  $I$
- index =  $V2$  = pointe vers le point d'observation  $M$
- majeur =  $V3$  = sens de  $\vec{B}$



#### IV.4 Applications

##### 1) Fil infini

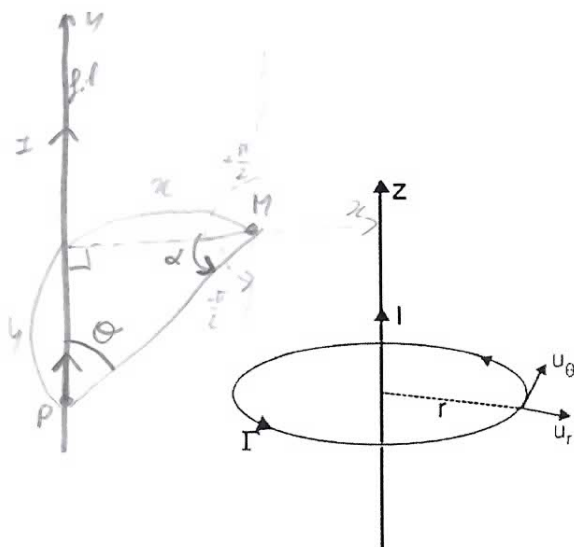
$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$$

*module de  $d\vec{l}$*

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{l} \wedge \vec{PM}|}{(PM)^3}$$

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \cdot PM \cdot \sin(\theta)}{(PM)^3}$$

$$* dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \sin(\theta)}{(PM)^2} \quad (\text{car } d\ell = d\ell)$$



On cherche à exprimer  $\sin(\alpha)$  en fonction de  $x$

Pour un fil infini:  $x$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$

\*  $\sin \alpha = ?$  ( $x + 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha) = \cos(x)$ ) (1)

\*  $(PM)^2 = ?$   $\cos(x) = \frac{x}{PM} \Rightarrow PM^2 = \frac{x^2}{\cos^2(x)}$  (2)

\*  $dy = ?$   $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y = x \tan(\alpha)$

$y'(x) = \frac{dy}{dx} = x(\tan \alpha)'$   
 $= x \frac{1}{\cos^2(x)}$

$\Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2(x)} d\alpha$  (3)

①, ②, ③ dans \* =  $\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left(\frac{x}{\cos^2(x)}\right) d\alpha}{\left(\frac{x^2}{\cos^2(x)}\right)} \times \cos(\alpha)$

$$dB(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \cos(\alpha) d\alpha$$

(valable pour des portions rectilignes de courant  
 & la portion  $\pi$  du point d'observation)  
 cf. TD

Pour un fil infini  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq +\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) \cdot d\alpha$

$B(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \left[ \sin(\alpha) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$

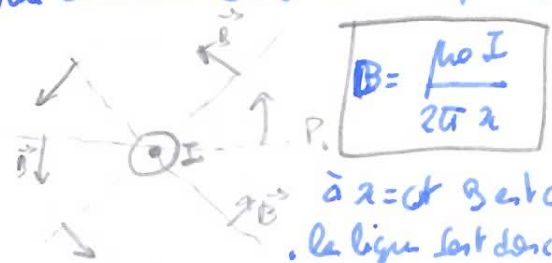
$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$\begin{cases} x \rightarrow 0 \text{ (M sur le fil)} & B \rightarrow \infty \\ & B \text{ n'est pas défini sur le fil} \\ x \rightarrow \infty & B \rightarrow 0 \end{cases}$

• tracé des lignes de champ  $\vec{B}$ :

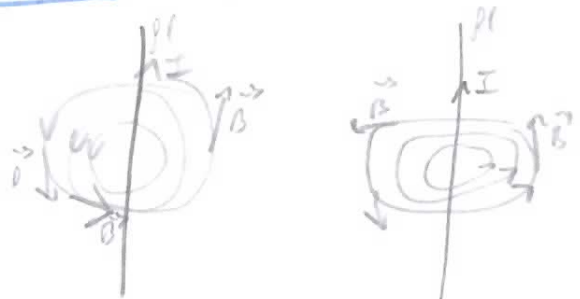
$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$$
  $d\vec{B} \perp \text{au plan } (d\vec{l}, \vec{PM})$

Vue du dessus du fil (traversé par  $\vec{z}$ )



à  $x = ct$   $B$  est constant  
 • la ligne est donc circulaire  
 •  $B$  est constant sur une ligne de champ

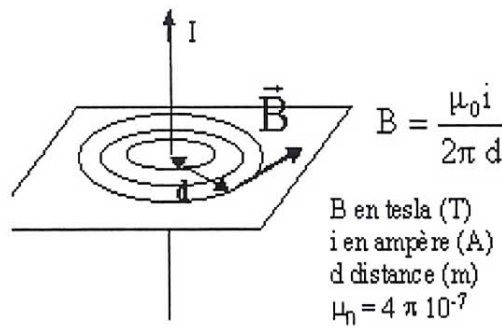
Conclusion



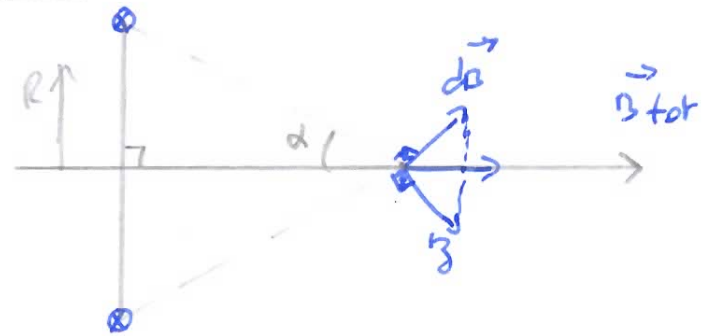
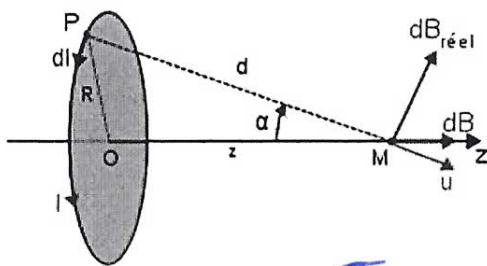


$$dB(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{l} \wedge \vec{PM}}{(\overline{PM})^3}$$

} Savoir représenter  $\vec{B}$ , ligne de champ  
 Calcul  $\|\vec{B}\|$   $\rightarrow$   $\vec{B}_{\text{total}}$   $\rightarrow$   $\vec{B}$   $\rightarrow$   $\vec{B}_{\text{total}}$   
 (qui intègre)



## 2. Spire de rayon R, d'axe Oz traversée par I



Norme de  $d\vec{B}$ :

$$\|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin(\frac{\pi}{2})$$

$$\|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

Projection

$$dB_z = \frac{\mu_0 I R d\theta}{4\pi r^2} \cos(\beta)$$

$$B = B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos(\beta) R \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^2} \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I R}{2(z^2 + R^2)} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$Rq: \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

$\vec{B}$  ne dépend que de  $z$  et  $\vec{B}$  est dirigé vers les  $z > 0$

$\vec{B}$  s'annule à  $\pm\infty$  et  $B_{\text{centre}} = B_{\text{max}}$  au centre de la spire

$$B_{\text{centre}} = B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



## V. Propriétés du champ magnétiques

### V.1 Flux du champ magnétique

#### 1- Propriété fondamentale du champ magnétique

Pour une surface fermée  $S$  :

$$\Phi_S(\vec{B}) = \oiint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$$

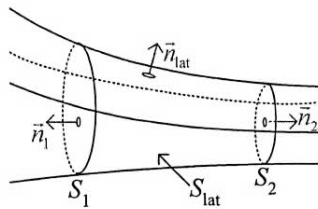
Rappel du théorème de Gauss :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

**Remarque :**

En électrostatique, on peut dissocier les charges + des charges – alors qu'en magnétostatique, on ne peut pas séparer un pôle sud d'un pôle nord. Donc, par analogie avec l'électrostatique pour la charge, on pourrait avoir à la place les pôles, ce qui explique le fait que  $\Phi_S(\vec{B}) = 0$  (autant de pôles nord que de pôles sud)

#### 2- Tube de champ



$S = S_1 + S_2 + S_{\text{lat}}$  est une surface fermée.

$$\Phi_S(\vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{S_2}(\vec{B}) + \Phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{B}) + \Phi_{S_1}(\vec{B}) = 0$$

En tout point de  $S_{\text{lat}}$ ,  $\vec{n}_{\text{lat}}$  est perpendiculaire au champ magnétique.

$$\text{Donc } \Phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{-\Phi_{S_1}(\vec{B}) = \Phi_{S_2}(\vec{B})}$$

$-\Phi_{S_1}(\vec{B})$  : flux entrant (gauche vers droite)

$\Phi_{S_2}(\vec{B})$  : flux sortant (gauche vers droite)

**On a donc conservation du flux électromagnétique dans un tube de champ.**

**Unité du flux magnétique :**

$[\Phi] = \text{Wb}$  : le Weber.

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$

## ***V.2 Circulation du champ magnétique : Théorème d'Ampère***

Démo de la loi de Biot-Savart:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$$

$d\ell$ : petit élément du circuit orienté dans le sens de  $I$

$P$ : pt quelconque du circuit

$M$ : pt d'observation (où l'on calcule  $\vec{B}(M)$ )

$$d\vec{B}(M) = m \times S \times d\ell \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$$

$$(\text{car } \vec{J} = m q \vec{v})$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} S \times d\ell \frac{\vec{J} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} S \times \vec{J} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3}$$

(car  $d\vec{\ell}$  et  $\vec{J}$  sont colinéaires et de même sens)

Soit le cylindre de volume  $dV = d\ell \times S$  qui contient  $N$  particules chargées

$\Rightarrow d\vec{B}$  Champ produit par

$d\ell$  = champ produit par  $N$  charges

$$d\vec{B} = N \cdot \vec{B}_0 \left( \vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3} \right)$$

Champ produit par une seule charge  $q$

$$\text{où } N = m \times dV = m \times S \times d\ell$$

$\hookrightarrow$  densité des charges électriques  
= nbr de charges /  $m^3$



fil de section faible (quelques  $mm^2$ )

On peut donc supposer  $\vec{J}$  unif  $\Rightarrow I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

$$I = J \cdot S$$

d'où

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3} \quad \text{CQFD}$$

(loi de Biot-Savart)