

## Chapitre 2

### Cinématique

#### Plan

- I. Définition de la cinématique
- II. Vecteur position
  - 1. Coordonnées cartésiennes
  - 2. Coordonnées cylindrique
- III. Vitesse d'un point
  - 1. Vitesse moyenne
  - 2. Vitesse instantanée
- IV. Accélération
  - 1. Accélération moyenne
  - 2. Accélération instantanée
- V. Coordonnées intrinsèques, composantes de Freinet
  - 1. Vitesse
  - 2. Accélération
- VI. Loi de composition des vitesses
- VII. Type de mouvement

A. Zellagui

## I. Définition de la cinématique

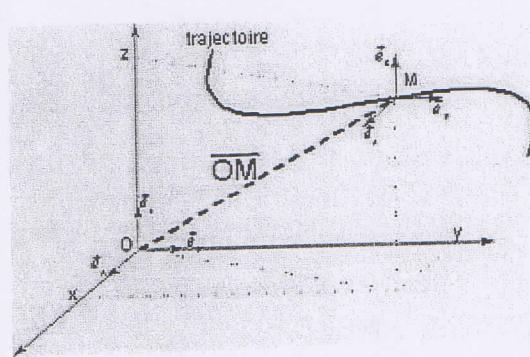
C'est l'étude de mouvement après avoir établi les équations d'accélération, de vitesse, et de position en fonction du temps. Ces dernières équations, appelés équations horaires, vont permettre à leur tour d'établir l'équation de la trajectoire.

## II. Vecteur position

Un point M dans un repère R est caractérisé par son vecteur position :  $\overrightarrow{OM}$ , où O est le centre du repère

### 1. Vecteur $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$$



- Equation horaire : c'est l'équation des coordonnées en fonction du temps.

$$x = f(t)$$

$$y = f(t)$$

$$z = f(t)$$

- Pour un mouvement rectiligne, on ne conserve qu'une seule coordonnée.  
Par exemple :  $x(t)$ .

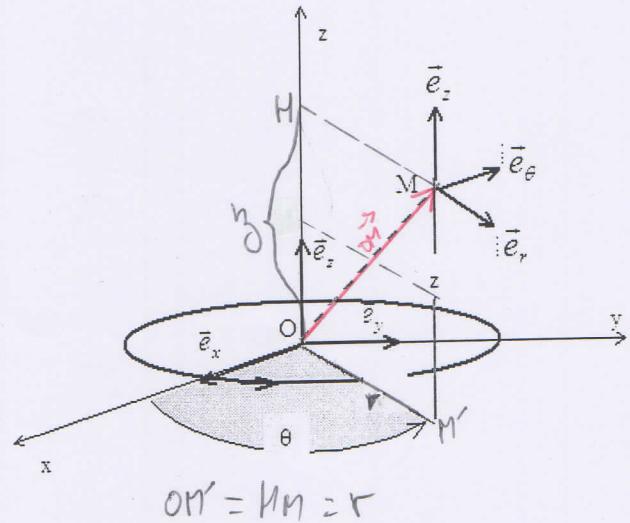
- La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par le point M, c'est la relation liant les coordonnées x, y et z indépendamment du temps.  
On note :  $f(x, y, z) = 0$

## 2. Vecteur $\vec{OM}$ en coordonnées cylindriques

La base cylindrique est une base mobile

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{e}_M + \vec{HM} \\ \vec{OM} &= \vec{z} \cdot \vec{e}_z + r \cdot \vec{e}_r \\ \vec{OM} &= r \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\theta + z \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$$



## III. Vitesse d'un point

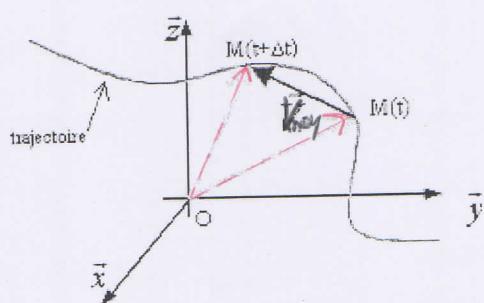
### 1. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un point M est obtenue en calculant le rapport de la distance parcourue par la durée du parcours.

Entre deux points  $M(t + \Delta t)$  et  $M(t)$  de la trajectoire le vecteur vitesse moyenne est :

$$\vec{v}_{\text{moy.}} = \frac{\vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

$\underbrace{\Delta t}_{t_f - t_i}$



## 2. Vitesse instantanée

En un point M de la trajectoire, la vitesse instantanée est la vitesse à un instant t donnée par :

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$$

Vecteur tangent en tout point de la trajectoire

### a) Vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \end{aligned}$$

### b) Vitesse instantanée en coordonées cylindriques

$$\vec{v} = \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r + \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) + \frac{d}{dt} (\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \theta \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

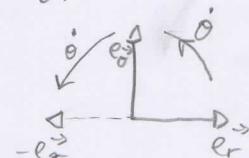
$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\theta$$

À RETENIR

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$



Remarque: Pour un mouvement circulaire /  $r = \text{cst} = R \neq 0$     $r = 0$   
pas de variation d'altitude ( $\theta = 0, \dot{\theta} \neq 0$ )

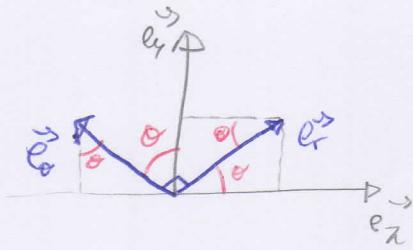
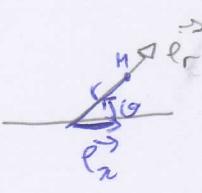
$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\theta \quad (\text{Vit. tangentielle})$$

DM

\* Pour un mouvement circulaire helicoïdal : rotation + translation sur  $\vec{e}_z$

4

$$\Rightarrow \vec{F} = 0 \text{ mais } \vec{g} \neq 0$$



$$\textcircled{I} \quad \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \end{cases}$$

$f(\theta(t)) \quad \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \text{velocidad angular (en rad/s)}$

$$\frac{d \cos(\theta(t))}{dt} = \frac{d \cos\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta \dot{\theta}$$

$$\textcircled{II} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d \vec{e}_r}{dt} = -\sin\theta \cdot \dot{\theta} \vec{e}_x + \cos\theta \cdot \dot{\theta} \vec{e}_y \\ \frac{d \vec{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_x - \sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d \vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \left( -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \right) \\ \frac{d \vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \left( \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \right) \end{cases}$$

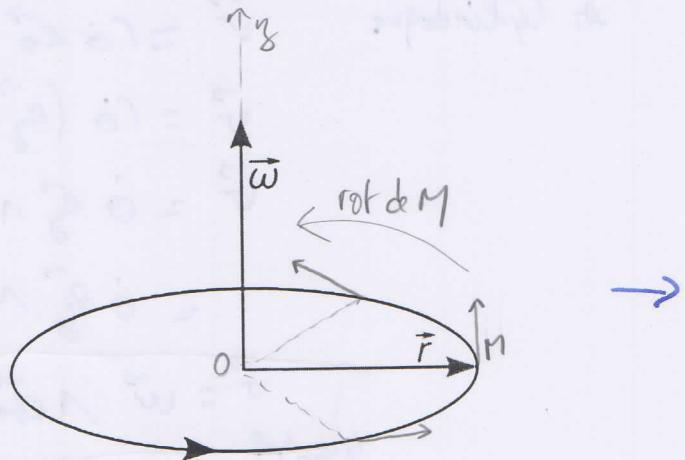
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d \vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\ \frac{d \vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \vec{e}_r \end{cases}$$

### c) Vitesse angulaire

Dans le cas d'un mouvement de rotation d'axe (Oz), on définit le vecteur :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{vitesse angulaire}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

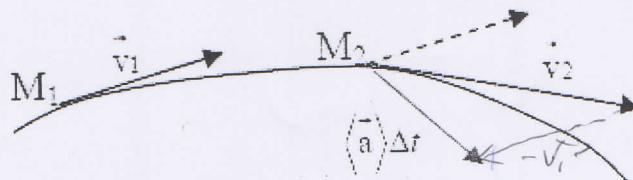


## IV. Accélération d'un point

### 1. Accélération moyenne

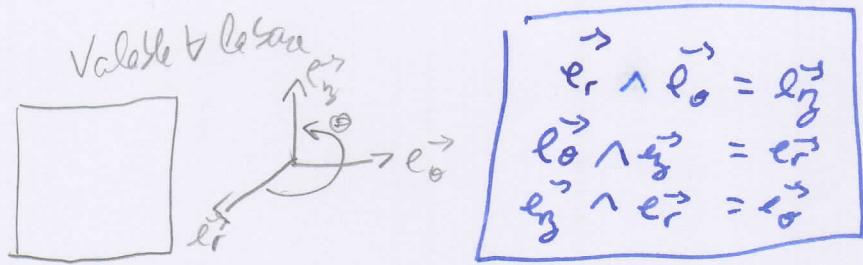
Entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la trajectoire, aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , l'accélération moyenne est :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{moy}} &= \frac{\vec{\alpha} \Delta t}{\Delta t} \\ &= \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\end{aligned}$$



a s'exprime en  $\text{m.s}^{-2}$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$$



Value der Rotation

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{r} = r \dot{\theta} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r)$$

$$\vec{v} = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r$$

$$= \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} / 10m}$$

tangential  
d. rotation      vect. v. tan.  
angulare.

## 2. Accélération instantanée

C'est la dérivé du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\overrightarrow{a_M/R} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_R$$

|                           |  
Si on a la      Si on a  
vitesse            OM

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow d\vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

### a. En coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}_x \\ \dot{y}_y \\ \dot{z}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

### b. En coordonnées cylindriques

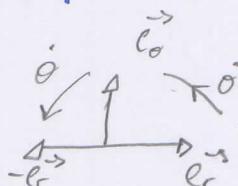
$$\overrightarrow{a_M/R} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{avec} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r + r\phi\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z)$$

Sachant que

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{r}\vec{e}_r$$



$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r) + \frac{d}{dt} (r\phi\vec{e}_\theta) + \frac{d}{dt} (z\vec{e}_z)$$

$$\vec{a} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\phi\vec{e}_\theta + r\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_\theta + r\phi\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \cancel{r\ddot{e}_r} + \cancel{r\dot{\phi}\vec{e}_\theta} + \cancel{r\dot{\phi}\vec{e}_\theta} + \cancel{r\ddot{\phi}\vec{e}_\theta} + \cancel{r\phi(-\dot{\phi}\vec{e}_\theta)} + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2r\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$\Rightarrow$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{a}_r = \vec{r} - r\vec{\omega}^2 \\ \vec{a}_\theta = 2\vec{r}\dot{\omega} + \vec{r}\ddot{\omega} \\ \vec{a}_3 = \ddot{r} \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3$$

exemple: mouvement circulaire

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} = 0 & \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 & r = R \end{cases}$$

accéléré :  $\ddot{\omega} > 0$   
décéléré :  $\ddot{\omega} < 0$        $\ddot{\omega}$  accélération angulaire  
en rad.s<sup>-2</sup>

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} -R\dot{\omega}^2 = a_r = a_n \\ R\ddot{\omega} = a_\theta = a_t \end{pmatrix}$$

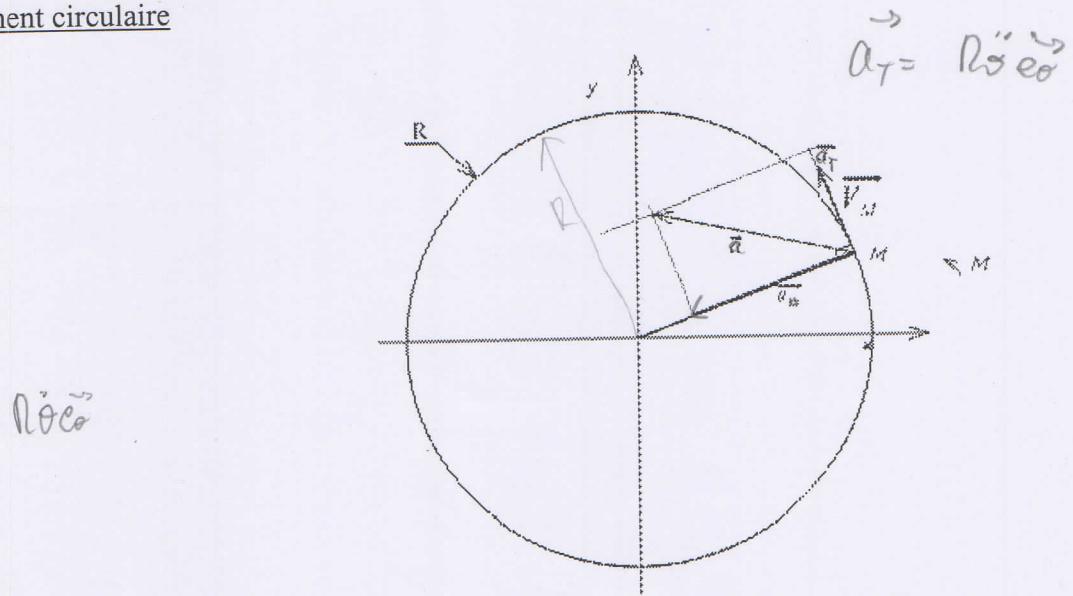
accéléré  $\Rightarrow \vec{a}_T > 0 \Rightarrow \vec{a}_T$  même sens que le mouvement

décéléré  $\Rightarrow \vec{a}_T < 0 \Rightarrow \vec{a}_T$  de sens opposé au mouvement

$$\text{uniforme} \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} -R\dot{\omega}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n$$

Exemple de représentation du vecteur accélération d'un mouvement circulaire



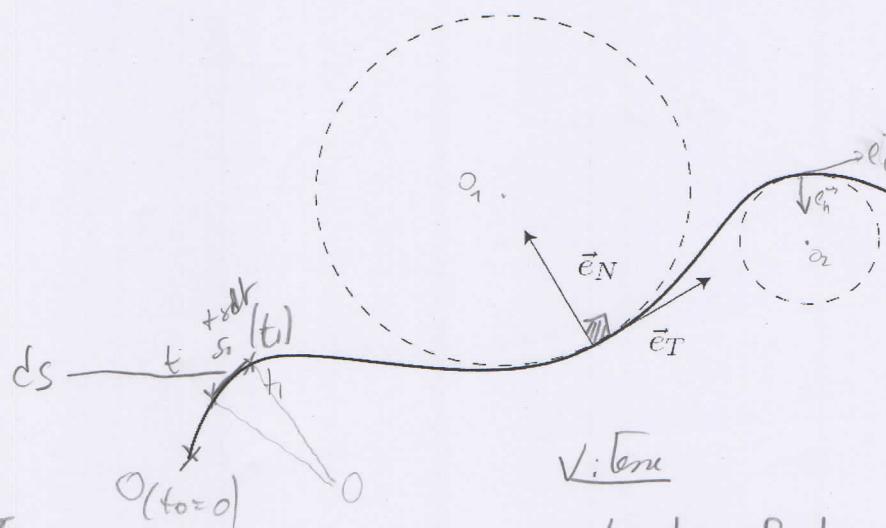
V. Coordonnées intrinsèques, composantes de Freinet

1. Vecteur vitesse

On peut aussi exprimer la vitesse et l'accélération à partir d'une base mobile  $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$ .

$\vec{e}_t$  : vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

$\vec{e}_n$  : vecteur normale à la trajectoire orienté vers le centre de courbure de celle-ci.



en base de Frenet le vecteur vitesse n'a qu'une seule composante

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_t \text{ car bien } \vec{v} = \left( R\dot{\theta} \right) \vec{e}_t$$

$$V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_t$$

vector plus norme  
 $ds$  est confondu avec la tangente à la trajectoire

## 2. Vecteur accélération

$$\text{Par def } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{e}_t)$$

$$\vec{a} = R \frac{d}{dt}(\vec{e}_t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_t = \vec{e}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_0}{dt} = -\vec{e}_r \\ \vec{e}_n = -\vec{e}_r \end{array} \right.$$

d'où  $\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_n$

$$\vec{a} = R \frac{d(\vec{e}_t)}{dt} \vec{e}_t + R \vec{\omega} \times \vec{e}_n$$

$$\begin{aligned} &= R\ddot{\theta} \vec{e}_t + R\vec{\omega} \times \vec{e}_n \\ &= R\ddot{\theta} \vec{e}_t + R\vec{\omega} \times \vec{e}_n \end{aligned}$$

Conclusion.

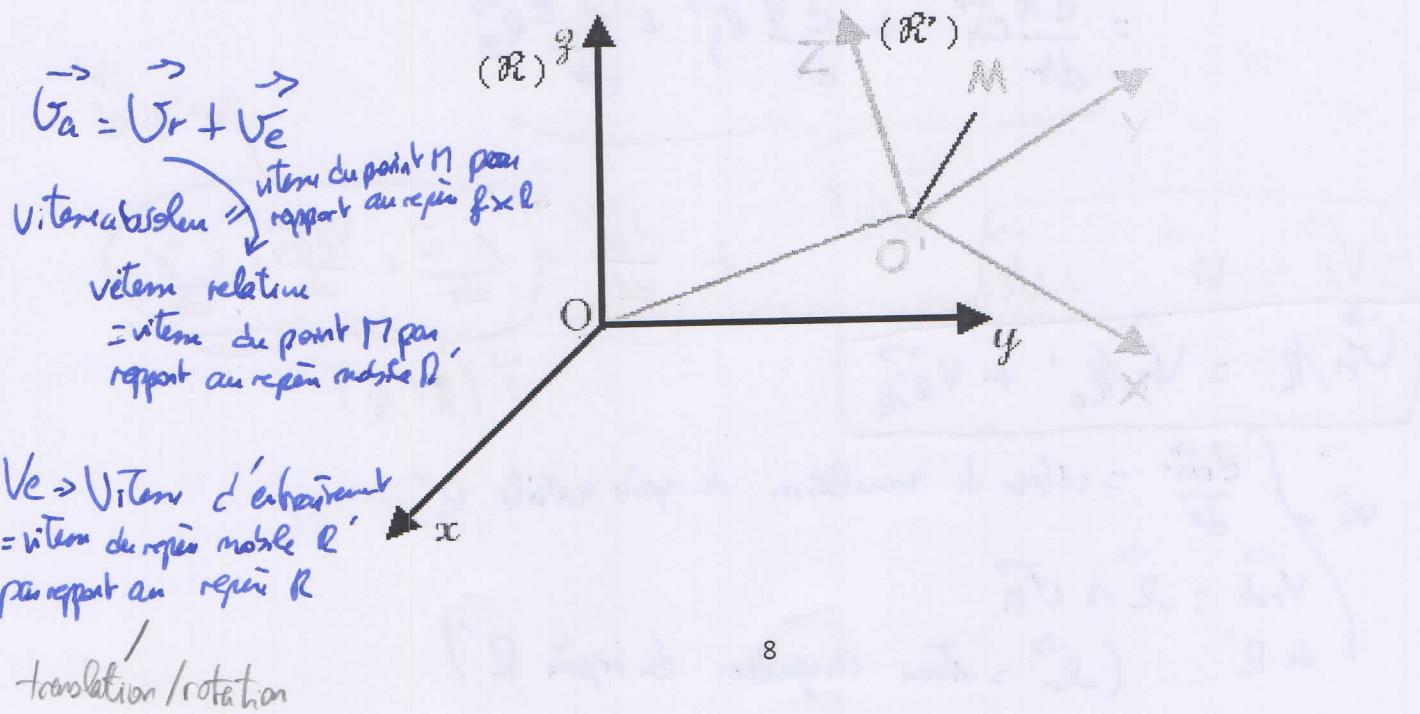
Dans le repère de Freinet, l'accélération a deux composantes :

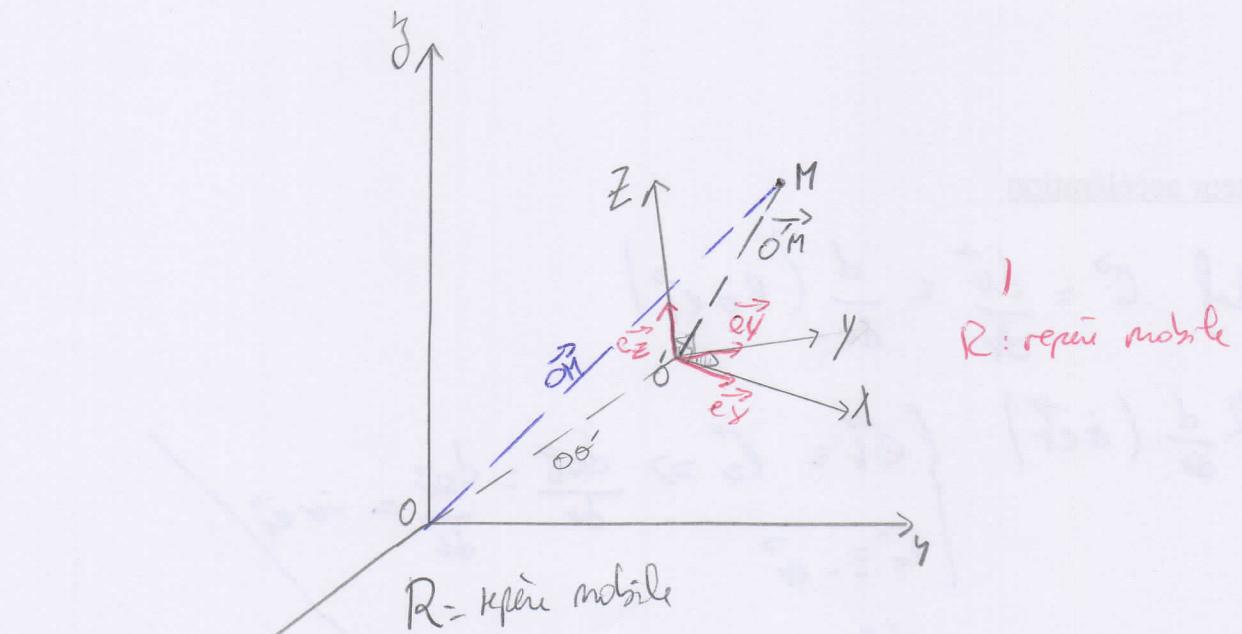
$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ Accélération tangentielle}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \text{ Accélération normale}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} a_t = R\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}) = \frac{dv}{dt} \\ a_n = R\dot{\theta}^2 = \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = \frac{v^2}{R} \end{cases} \end{aligned}$$

## VI. Loi de composition de vitesse.





$$\text{Par définition: } \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{OO'} + \vec{OM})$$

$$= \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

(uv)' = u'v + uv'

$$= \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt} (X\vec{e_x} + Y\vec{e_y} + Z\vec{e_z})$$

par rapport à  $R'$

$$\vec{v}/R = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{yde_x}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{yde_y}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z} + \frac{zde_z}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}}_{\vec{v}/R'} + \underbrace{\frac{yde_x}{dt} + \frac{yde_y}{dt} + \frac{zde_z}{dt}}_{\text{vitesse de rotation de } R'}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_n/R = \vec{V}_{n/R_0} + \vec{V}_{R'/R}$$

$$+ \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}}_{\vec{v}/R'} + \underbrace{\left( \frac{yde_x}{dt} + \frac{yde_y}{dt} + \frac{zde_z}{dt} \right)}_{\vec{v}(R'/R)}$$

où  $\int \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \text{vitesse de translation du repère mobile } R'$

$$\vec{V}_{rot} = \vec{R} \wedge \vec{\omega_M}$$

de  $R'$  ( $\vec{\omega} = \text{vitesse angulaire du repère } R'$ )

Exemples :

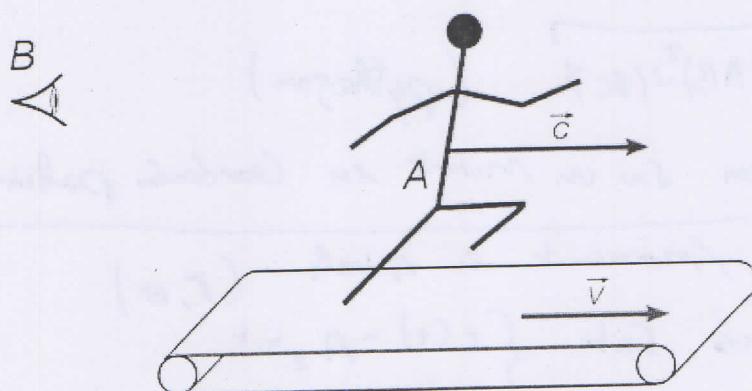
- 1) Imaginons qu'un homme  $A$  marche sur un tapis roulant. Pour un observateur immobile  $B$ , la vitesse de déplacement  $V$  de  $A$  correspond à la vitesse de  $A$  par rapport au tapis, notée  $c$ , **additionnée** à la vitesse  $v$  d'entrainement du tapis.

On obtient donc:  $V = c + v$ .

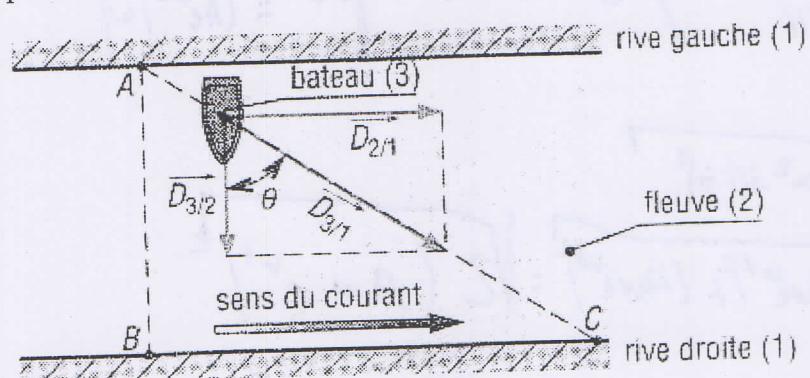
Si  $A$  va dans le sens contraire du tapis, alors  $B$  voit se déplacer  $A$  avec une vitesse

$$V = c - v.$$

**C'est la loi de composition des vitesses ou loi d'additivité des vitesses.**



- 2) Mouvement d'un bateau (3) qui traverse un fleuve (2), en partant du point A et en visant un point B de l'autre rive (1).



Loi de composition de vitesse pour l'exemple 2 :

On a  $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R') + \vec{V}(R'/R)$

$$\vec{V}_{\text{bateau/terre}} = \vec{V}_{\text{bateau/ea}} + \vec{V}_{\text{ea/terre}}$$

$$\vec{V}_{3/1} = \vec{V}_{3/2} + \vec{V}_{2/1}$$

$\vec{V}_{2/1}$  correspond à la vitesse de translation

Le bateau en partant de A (en visant B) arrive au point C à cause de  $\vec{V}_{\text{ea/terre}}$

distance Réelle :

$$d = AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} \quad (\text{pythagore})$$

exemple d'application sur un mouvement en coordonnées polaires.

Coordonnées polaires / mouvement en spirale  $(r, \theta)$

Les équations horaires sont  $\begin{cases} r(t) = A e^{wt} \\ \theta(t) = \omega \cdot t \end{cases}$

Avec A et w des constantes positives

$$\vec{V}, \vec{\alpha}, \| \vec{V} \|, \| \vec{\alpha} \|$$

on a  $\vec{V} = \begin{cases} \vec{r} = A \omega e^{wt} \\ \vec{\theta} = (A e^{wt}) \omega \end{cases}$

$$\begin{cases} r(t) = A e^{wt} = A e^{\theta} \\ \theta(t) = \omega \cdot t \end{cases}$$

$$\| \vec{V} \| = \sqrt{\omega^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$= \sqrt{(A \omega e^{wt})^2 + (A \omega e^{wt})^2} = \sqrt{2} (A \omega e^{wt})$$

on a  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$

$$= \sqrt{2} A \omega^2 e^{wt}$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} Aw^2 e^{wt} - Ae^{wt} \cdot (\omega^2) \\ Ae^{wt}(\ddot{\theta}) - 2Aw^2 e^{wt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2Aw^2 e^{wt} \end{pmatrix} \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$$

Car  $\ddot{\theta} = \text{cst} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\| \vec{\alpha} \| = \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2} = \sqrt{4A^2 \omega^4 e^{4wt}} = 2Aw^2 e^{wt}$$

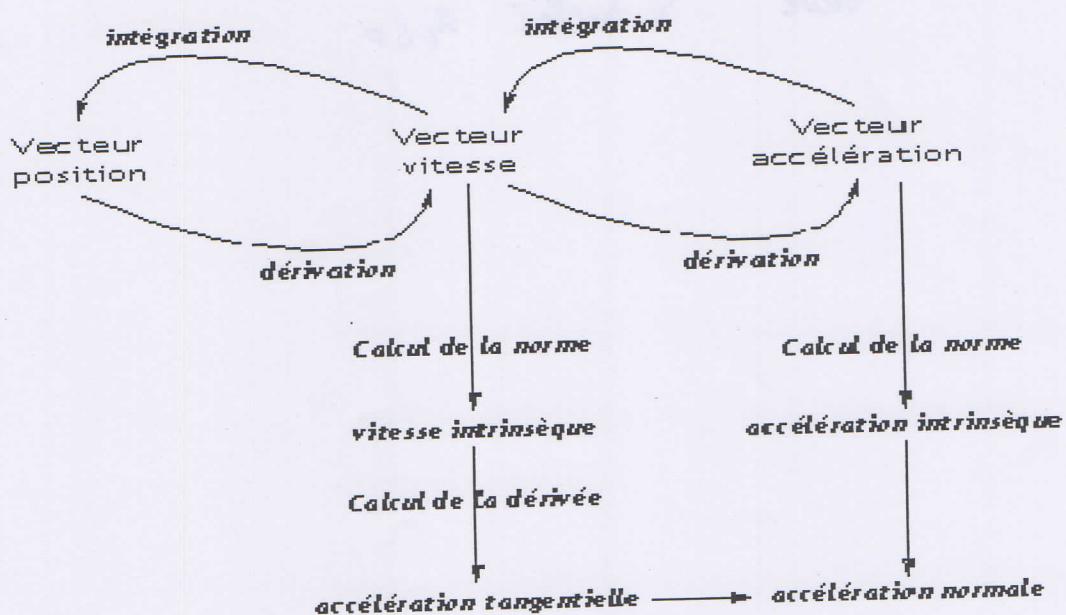
## VII. Type de mouvement

### 1. Trajectoire

- Rectiligne : La trajectoire est une droite dont le rayon de courbure est infini.  
 $a_n = v^2 / R = 0, a = a_t = dv/dt$
- Circulaire : Trajectoire plane dont le **rayon de courbure est constant.**
- Curviligne : La trajectoire est une courbe quelconque.
- Hélicoïdale : La trajectoire est **une hélice.**

### 2. Nature du Mouvement

- Uniforme : La valeur algébrique de la vitesse est constante, seule la composante tangentielle de l'accélération est nulle.
- Uniformément varié : L'accélération tangentielle est **constante**
  - Accéléré : La vitesse augmente et  $\vec{a}_T$  est dans le sens du mouvement
  - Décéléré : La vitesse diminue, et  $\vec{a}_T$  est alors dans le sens opposé au sens du mouvement.
- Sinusoïdal : Une composante du vecteur position dépend sinusoïdalement de t
- Le mouvement du solide est :
  - De translation : Le vecteur vitesse est identique en tout point du solide.
  - De rotation : La trajectoire de chaque point du solide est circulaire



Remarque :

Mvt Circulaire:

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \frac{dv}{dr} \\ a_m = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

Mvt circulaire:

. unif ( $v = \text{cste}$ )  $\vec{a}_t = 0$   $a_m = \frac{v^2}{R}$   $\vec{a} = \vec{a}_m$

. accéléré (v varie)  $\vec{a}_t > 0$  ou  $< 0$   
ou décéléré (v varie)  $a_m = \frac{v^2}{R}$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_m$$

$$(\vec{v}, \vec{a}) = \alpha \neq \pi/2$$

Mvt rectiligne:  $\equiv$  Mvt circulaire avec  $R \rightarrow \infty \Rightarrow a_m = \frac{v^2}{R} = 0$

. uniforme  $\Rightarrow v = \text{cste}$   $\vec{a} = \begin{cases} \vec{a}_t = \frac{dv}{dr} = 0 \\ a_m = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\infty} = 0 \end{cases} = 0$

. uniforme variable  $\vec{a} = a_t > 0$   
accéléré  $a = a_t > 0$   
décéléré  $a_t < 0$   $\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t$  (une seule composante)