Corrigé du partiel 2

Exercice 1 (4 points)

1. Déterminons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff (x,y) = (0,0) \quad \text{ou} \quad (x,y) = (-1,-1)$$

f a donc 2 points critiques $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

2. Déterminons la nature de chaque point critique.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6$$

Donc au point $(0,0)$: $r = 0$, $s = 6$ et $t = -6$ donc $rt - s^2 = -36 < 0$ d'où f admet en $(0,0)$ un point-col.

Au point $(-1,-1)$: $r = -12$, $s = 6$ et $t = -6$ donc $rt - s^2 = 36 > 0$ et $r < 0$ d'où f admet en $(-1,-1)$ un maximum local.

Exercice 2 (5 points)

1. f est paire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \mathrm{d}x = \pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\underbrace{\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)^2\pi}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big)$$

2. La fonction f est C^1 par morceaux (et de plus continue sur $\mathbb{R}$) donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big) = |x|$$

En particulier pour $x = 0$, on a $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0$ soit

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. En utilisant l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x$$

or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$$

donc

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}$$

donc

$$\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

Or
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

donc
$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n^4}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 3 (4 points)

1. Notons (A,B,C) la famille orthogonale cherchée. Posons $A=1$. Comme $<1,X>=0$, on peut prendre $B=X$ Cherchons C sous la forme $C=X^2+aX+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $<C,1>=0$ et $<C,X>=0$ c'est-à-di tel que
$$\begin{cases} <X^2+aX+b,1>=0\\ <X^2+aX+b,X>=0\end{cases}$$
soit finalement comme $<X,1>=<1,X>=0$:
$$\begin{cases} b=-\dfrac{<X^2,1>}{<1,1>}\\ a=-\dfrac{<X^2,X>}{<X,X>}\end{cases}$$
Or
$$<X^2,1>=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$
et $<1,1>=2$ d'où
$$b=-\frac{1}{3}$$
D'autre part $<X^2,X>=0$ car $x\mapsto x^3$ est impaire. Donc $a=0$.

Finalement la famille orthogonale recherchée est $\left(1,\,X,\,X^2-\dfrac{1}{3}\right)$

2. Notons P_0 le projeté orthogonal de X^3 sur $F=\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)$. Alors
$$\begin{cases} P_0\in F\\ X^3-P_0\in F^{\perp}\end{cases}$$
i.e.
$$\begin{cases} P_0=aX^2+bX+c\\ <X^3-aX^2-bX-c,1>=0\\ <X^3-aX^2-bX-c,X>=0\\ <X^3-aX^2-bX-c,X^2>=0\end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} P_0 = aX^2 + bX + c \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)x\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)x^2\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

or $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto x^5$ sont impaires donc

$$\begin{cases} P_0 = aX^2 + bX + c \\ \displaystyle -2a\int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x - 2c\int_{0}^{1} \mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle 2\int_{0}^{1} x^4\mathrm{d}x - 2b\int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle -2a\int_{0}^{1} x^4\mathrm{d}x - 2c\int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} P_0 = aX^2 + bX + c \\ b = \dfrac{3}{5} \\ a = c = 0 \end{cases}$$

Donc

$$P_0 = \frac{3}{5}X$$

3. Soient $P = X^3$ et $I = \underset{(a,b,c)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\mathrm{d}x$. En utilisant les propriétés de P_0, on a

$$I = \underset{Q\in F}{\mathrm{Min}} ||P - Q||^2 = ||P - P_0||^2$$

or

$$||P - P_0||^2 =< P - P_0, P - P_0 >=< P, P - P_0 > - < P_0, P - P_0 >=< P, P - P_0 >$$

car $P - P_0 \in F^{\perp}$ et $P_0 \in F$. Donc $I =< P, P - P_0 >$ i.e.

$$I = \int_{-1}^{1} x^3\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^3\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)\mathrm{d}x$$

donc

$$I = 2\left[\frac{x^7}{7} - \frac{3}{5}\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{25}\right)$$

Ainsi

$$\underset{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}{\mathrm{Min}} \int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\mathrm{d}x = \frac{8}{175}$$

Exercice 4 (5 points)

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\left|f_n\right|\right)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

2. On a $\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\text{Sup}} \left|f_n(x)\right| = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\left|f_n\right|\right)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

3. La série $\sum \left|f_n(0)\right| = \sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}^+$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   La série $\sum f_n$ est alternée et vérifie le critère spécial donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

5. Via la question 2, $\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\text{Sup}} \left|f_n(x)\right| = \dfrac{1}{n}$ or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Via le critère spécial des séries alternées, $\left|R_n(x)\right| \leqslant \left|f_{n+1}(x)\right| = \dfrac{e^{-x\sqrt{n+1}}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

   donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ d'où $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 (3 points)

1. $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a\pi) = \dfrac{2}{a\pi}\sin(a\pi)$

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\cos\big((a+n)x\big) + \cos\big((a-n)x\big)\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin\big((a+n)\pi\big) + \frac{1}{a-n}\sin\big((a-n)\pi\big)\right) \\
&= \frac{1}{\pi(a^2-n^2)}\Big(a\sin\big((a+n)\pi\big) - n\sin\big((a+n)\pi\big) + a\sin\big((a-n)\pi\big) + n\sin\big((a-n)\pi\big)\Big)
\end{aligned}$$

donc, comme $\sin(u+v)+\sin(u-v) = 2\sin(u)\cos(v)$, $\sin(u+v)-\sin(u-v) = 2\sin(v)\cos(u)$, $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$, on a finalement

$$a_n(f) = \frac{2a(-1)^n}{\pi(a^2-n^2)}\sin(a\pi)$$

La série de Fourier de f est

$$\left(\frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx)\right)\sin(a\pi)$$

2. Via le théorème de Lejeune-Dirichlet, on a pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\left(\frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx)\right)\sin(a\pi) = \cos(ax)$$

en particulier pour $x = 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} = \left(\frac{1}{\sin(a\pi)} - \frac{1}{a\pi}\right)\frac{\pi}{2a}$$

3. En particulier pour $x = \pi$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2-n^2} = \left(\text{cotan}(a\pi) - \frac{1}{a\pi}\right)\frac{\pi}{2a}$$