Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1 (4 points)

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum \dfrac{n^a}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

2. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

   N.B. : on pourra remarquer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1}$

Exercice 2 (5 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, exhiber une base de vecteurs propres i.e. déterminer D et P.

(Vous devez justifier rigoureusement votre réponse en déterminant avec précision les sous-espaces propres).

[suite du cadre page suivante]

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3 (3 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 4 (2 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(u, v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$$

Exercice 5 (3 points)

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T : \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ A & \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) \\ \mathrm{tr}(AJ) \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminer la matrice de T relativement aux bases canoniques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (4 points)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ 2+a & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

[suite du cadre page suivante]