Feuille d'exercices n°4

Algèbre linéaire II

(du lundi 26 novembre 2012 au vendredi 7 décembre 2012)

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Si oui donner une base de vecteurs propres.

Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Si oui donner une base de vecteurs propres.

Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a(a-7) & a-7 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Etudier la diagonalisabilité de A et B dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Il n'est pas demandé d'exhiber une base de vecteurs propres dans les cas favorables.

Exercice 4

Dans cet exercice, diagonalisable signifie diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Soient a, b, c, d des nombres réels et $A_{(a,b,c,d)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $A_{(a,b,c,d)}$ est

$$P_{A_{(a,b,c,d)}}(x) = det(A_{(a,b,c,d)} - xI) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

2. Donner une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui n'est pas diagonalisable.
3. Soit $C = A_{(0,-13,0,36)}$. Montrer que C est diagonalisable et la diagonaliser. On explicitera une base de vecteurs propres.
4. Etudier la diagonalisabilité de $A_{(0,0,0,d)}$ selon les valeurs de d.
5. On suppose $a \neq 0$. Etudier la diagonalisabilité de $A_{(a,0,0,0)}$ selon les valeurs de a.
6. on suppose que $a = c = 0$, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
   a. Montrer que si $b^2 - 4d < 0$ alors $A_{(0,b,0,d)}$ n'est pas diagonalisable.
   b. On suppose $b^2 - 4d > 0$.
      i. Montrer que si $d < 0$ alors $A_{(0,b,0,d)}$ n'est pas diagonalisable.
      ii. Donner une condition sur b et d pour que $A_{(0,b,0,d)}$ soit diagonalisable.

Exercice 5

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1} \end{cases}$ avec x_0, y_0 et z_0 fixés dans $\mathbb{R}$.

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 6

Résoudre le système d'équations différentielles suivants :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) - 4z(t) \end{cases}$$