



UNIVERSITETET I BERGEN

KANDIDAT

166

PRØVE

MAT121 0 Lineær algebra

Emnekode	MAT121
Vurderingsform	Skriftlig eksamen
Starttid	16.06.2022 07:00
Sluttid	16.06.2022 12:00
Sensurfrist	--
PDF opprettet	03.05.2024 10:59

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
1	MAT121 V22 Oppgave 1	Flervalg
2	MAT121 V22 Oppgave 2	Flervalg
3	MAT121 V22 Oppgave 3	Flervalg
4	MAT121 V22 Oppgave 4	Flervalg
5	MAT121 V22 Oppgave 5	Flervalg
6	MAT121 V22 Oppgave 6	Flervalg
7	MAT121 V22 Oppgave 7	Flervalg
8	MAT121 V22 Oppgave 8	Flervalg
9	MAT121 V22 Oppgave 9	Flervalg
10	MAT121 V22 Oppgave 10	Flervalg
11	MAT121 V22 Oppgave 11	Flervalg
12	MAT121 V22 Oppgave 12	Flervalg
13	MAT121 V22 Oppgave 13	Flervalg

Del 2: Langsvaroppgaver

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
14	MAT121 V22 Oppgave 14	Langsvar
15	MAT121 V22 Oppgave 15	Langsvar

1 MAT121 V22 Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 35 & 21 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 64 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 11 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

Hvilke av disse matrisene er inverterbare?

Velg ett alternativ:

- ☐ kun E
- ☐ alle
- ☐ kun D
- ☐ B, C og E

☒ ingen av dem

☐ A og E

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

2 6 9 4 3 2 2

2 MAT121 V22 Oppgave 2

Anta at

- A er en $m \times n$ -matrise
- B er en 3×4 -matrise
- $AB = 3B^T B$

Hvilket av følgende utsagn er da SANT?

Velg ett alternativ:

☐ $m = 4, n = 1$

☐ $m = n = 3$

☐ $m = 2, n = 3$

☐ $m = 3, n = 4$

☐ $m = n = 4$

☒ $m = 4, n = 3$

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

1 4 2 9 9 9 3

3 MAT121 V22 Oppgave 3

Vi betrakter ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + kx_2 = 4 \\ -9x_1 + (k^2 - 4)x_2 = 3k, \end{cases}$$

der k er et reelt tall. For hvilke verdier av k er systemet inkonsistent?

Velg ett alternativ:

- ☐ $k = \frac{4}{3}$
- ☐ $k = 2$ og $k = -2$
- ☐ $k = -4$
- ☒ $k = 1$
- ☐ ingen k
- ☐ alle k

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

5 0 1 5 8 6 4

4 MAT121 V22 Oppgave 4

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvilke av disse matrisene er på trappeform?

Velg ett alternativ:

☐ kun C

☐ ingen av dem

☐ alle

☐ A og C

☐ kun E

☒ C og D

☐ kun B

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

0 8 4 9 7 3 6

5 MAT121 V22 Oppgave 5

La A være en 4×4 -matrise med $\det(A) = 2$, og la B være matrisen som fremkommer ved å utføre to radoperasjoner på A : Vi ganger første rad med faktoren 3, og vi bytter om radene 2 og 4. Hva er verdien av $\det(A^T B A)$?

Velg ett alternativ:

- ☐ 48
- ☐ -648
- ☐ ingen av de andre alternativene

☒ -24

☐ 3

☐ -12

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

0 4 5 4 0 6 7

6 MAT121 V22 Oppgave 6

Vi betrakter ligningssystemet

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 14x_4 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0$$

Hvilket av følgende utsagn om dette systemet er USANT?

Velg ett alternativ:

- ☐ Alle løsningene er på formen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5s, s, s, 0)$, der $s \in \mathbb{R}$
- ☐ Systemet er konsistent
- ☐ Summen av to løsninger er en løsning
- ☒ Systemet har uendelig mange løsninger
- ☐ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5, 1, 1, 0)$ er en løsning

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

1 6 2 3 3 6 1

7 MAT121 V22 Oppgave 7

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hvilket av følgende utsagn er USANT?

Velg ett alternativ:

- ☐ $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(3^{100} - 1) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$
- ☐ $\det(A^{100}) = 6^{100}$
- ☐ A er diagonaliserbar
- ☐ Radrommet til A har dimensjon 3
- ☐ Det finnes en ortogonal basis for \mathbb{R}^3 bestående av egenvektorer for A
- ☒ A er inverterbar

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

4 1 9 0 2 5 7

8 MAT121 V22 Oppgave 8

Hvilke av tallene 2, 3 og 5 er egenverdier for $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$?

Velg ett alternativ:

☐ 2, 3 og 5

☐ kun 3 og 5

☒ kun 2 og 5

☐ ingen av dem

☐ kun 2 og 3

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

5 9 0 8 8 6 5

9 MAT121 V22 Oppgave 9

La A være en 5×5 -matrise slik at løsningsmengden til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er lik mengden av lineære kombinasjoner av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til $\text{Col}(A)$ (søylerommet til A)?

Velg ett alternativ:

☐ ingen av de andre alternativene

☐ 0

☐ 3

☒ 1

☐ 5

☐ 4

☐ 2

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

3 5 1 1 5 3 1

10 MAT121 V22 Oppgave 10

Hvilken av følgende mengder er en *ortonormal* basis for søylerommet til $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$?

Velg ett alternativ:

☐ ingen av de andre alternativene

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

☒ $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} \end{bmatrix} \right\}$

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

2 0 5 5 2 6 6

11 MAT121 V22 Oppgave 11

La $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ og $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være basiser for et vektorrom V . Anta at

$$\mathbf{b}_1 = 5\mathbf{a}_1 + 6\mathbf{a}_2 \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 = 4\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2.$$

La videre

$$\mathbf{x} = 7\mathbf{a}_1 + 8\mathbf{a}_2.$$

Variabelskiftematrissen $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ fra \mathcal{A} til \mathcal{B} , og koordinatvektoren $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, er da gitt ved:

Velg ett alternativ:

☐ $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

☐ $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

☐ $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 83 \\ 68 \end{bmatrix}$

☐ $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

☐ ingen av de andre alternativene

☒ $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 67 \\ 82 \end{bmatrix}$

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

6 2 7 4 5 0 3

12 MAT121 V22 Oppgave 12

La l være skjæringslinjen mellom planene

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \text{og} \quad x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

i \mathbb{R}^3 . En ligning for planet som går gjennom origo og er vinkelrett på l er:

Velg ett alternativ:

☐ $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

☐ $x_1 - x_3 = 0$

☐ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

☐ $x_1 + x_3 = 0$

☒ $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

☐ ingen av de andre alternativene

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

0 4 4 9 5 9 4

13 MAT121 V22 Oppgave 13

La \mathbb{P}_1 være vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 1, med basis $\{1, t\}$. La $T: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ være den lineære avbildningen definert ved

$$T(1) = 1 + kt \quad \text{og} \quad T(t) = 2 - t,$$

der k er et reelt tall. For hvilken verdi av k er $\lambda = 2$ en egenverdi for T ?

Velg ett alternativ:

☐ alle k

☒ $k = \frac{3}{2}$

☐ $k = -\frac{1}{2}$

☐ $k = -1$

☐ $k = 2$

☐ $k = 1$

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

3 6 7 2 3 4 3

14 MAT121 V22 Oppgave 14

La $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ være en ortonormal basis for planet W i \mathbb{R}^3 gitt ved $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. La A være 3×3 -matrisen gitt ved

$$A = 12\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 6\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T.$$

(a) Vis at A er symmetrisk.

(b) Vis at 0 er en egenverdi for A , og finn en tilsvarende egenvektor.

Skriv svaret ditt på spesielt papir som du får utdelt i eksamenslokalet og som senere scannes inn. Alternativt, skriv svaret inn under (anbefales ikke!).

(a) siden u_1 og u_2 kan transformeres, så er A symmetrisk

Ord: 11

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

4 4 7 0 9 9 1

15 MAT121 V22 Oppgave 15

La V være et vektorrom, la $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, og la W være mengden av alle $\mathbf{x} \in V$ slik at $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for en $t \in \mathbb{R}$. Vis at hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in W$, så må $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ være lineært avhengige.

Skriv svaret ditt på spesielt papir som du får utdelt i eksamenslokalet og som senere scannes inn. Alternativt, skriv svaret inn under (anbefales ikke!).

Ord: 0

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?

Bruk følgende kode:

4 9 2 9 8 5 0