Calcul matriciel

Alain Legendre

Les matrices sont des tableaux rectangulaires (ou carrés) constitués de nombres et sont des outils qu'on utilise fréquemment lorsqu'on veut représenter une situation comportant plusieurs « entrées » et plusieurs « sorties ».

Exemple : matrice entrée-sortie

Supposons qu'une certaine activité économique se partage en trois secteurs de production a_1, a_2 et a_3, chacun d'entre eux produisant un seul type de bien. La production de chacun de ces trois secteurs fait l'objet d'une double utilisation : d'une part satisfaire à une demande finale (extérieure aux secteurs de production, et qui ne nous intéresse pas ici) mais aussi, d'autre part, alimenter les trois secteurs de production pour leur propre activité. Par exemple, dans une économie à trois secteurs (agriculture, industrie, services), chacun de ces secteurs « dépend », pour sa propre activité, des trois secteurs et ces « consommations inter-sectorielles » peuvent être données par un tableau comme le suivant :

Exemple : matrice entrée-sortie

	a_1	a_2	a_3
a_1	2	4	3
a_2	3	6	1
a_3	1	2	1

où, par exemple, la production du secteur a_2 nécessite (lire la deuxième colonne) 4 unités du secteur a_1, 6 unités du secteur a_2 et 2 unités du secteur a_3.

Exemple : matrice entrée-sortie

Ce tableau à trois lignes et trois colonnes est une matrice carrée d'ordre 3 et s'écrit entre parenthèses comme ceci :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

D'une façon générale, si n et p sont deux entiers naturels non nuls, on appelle matrice réelle de dimensions $n \times p$ tout tableau M de nombres réels possédant n lignes et p colonnes : dans une telle matrice M, il y a donc $n \times p$ nombres, qu'on appelle les **coefficients** de M.
Lorsque $p = n$ (autant de colonnes que de lignes), on parle de matrice carrée d'ordre n. Pour une matrice M carrée d'ordre n les coefficients qui sont « visuellement » situés sur la diagonale descendant d'en haut à gauche jusqu'en bas à droite sont naturellement appelés **coefficients diagonaux** de M.

Exemples

- Le tableau

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimensions 3×4.

Exemples

- Le tableau

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  est une matrice de dimensions 3×4.

- Le tableau

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  est une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients diagonaux sont 1 et 2.

Exemples

- Le tableau

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  est une matrice de dimensions 3×4.

- Le tableau

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  est une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients diagonaux sont 1 et 2.

- Si $a \in \mathbb{R}$, le « tableau » $M = (a)$ est une matrice carrée d'ordre 1 qui s'identifie au nombre réel a.

Exemples

- Le tableau

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimensions 3×1, qui, pour des raisons évidentes, est dite matrice **unicolonne** d'ordre 3. La matrice M peut être identifiée à une liste de 3 réels, c'est-à-dire à un élément de $\mathbb{R}^3$, qu'on appelle alors un **vecteur** de $\mathbb{R}^3$.

Remarque (Egalité de deux matrices)

On dit que deux matrices sont ***égales*** *si elles ont les mêmes dimensions et si leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux. Par exemple, les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ne sont pas *égales car leurs coefficients de la première ligne et deuxième colonne ne sont pas égaux.*

Manipulations usuelles sur les matrices

Il est indispensable (et obligatoire !) d'utiliser sa calculatrice pour définir et utiliser des matrices afin de réaliser rapidement et sans erreur les opérations algébriques et les manipulations usuelles.

Addition de matrices

On définit une addition $A+B$ sur des matrices A et B de mêmes dimensions en ajoutant deux à deux leurs coefficients de mêmes indices. La matrice $A+B$ est alors de mêmes dimensions que les matrices A et B.

Par exemple, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont de mêmes dimensions et on a

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+1 & -1+0 \\ 2+2 & -1+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On voit alors qu'ajouter deux matrices de mêmes dimensions $n \times p$ revient à faire $n \times p$ additions de réels.
Les propriétés de l'addition des matrices sont donc les mêmes que les propriétés bien connues de l'addition des réels. Ajoutons que :

- On appelle **matrice nulle** de dimensions $n \times p$ la matrice notée 0 constituée uniquement de coefficients tous nuls.
- Toute matrice M admet une **matrice opposée**, notée $-M$, constituée des coefficients opposés à ceux de M. On peut alors définir une soustraction de deux matrices (de mêmes dimensions) par $A - B = A + (-B)$.

Multiplication par un réel

Si A est une matrice de dimensions $n \times p$ et si λ est un nombre réel, on définit la matrice λA comme la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le réel λ.

Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

Le produit de deux matrices A et B, noté $A \times B$ ou, plus simplement, AB, est un produit « ligne-colonne » qui s'obtient à partir d'un algorithme de base qui consiste à « multiplier » nombre par nombre une ligne de A par une colonne de B.

Voyons sur un exemple comment ce produit matriciel « fonctionne » et intervient de façon « naturelle » dans certaines situations.

Supposons qu'une entreprise fabrique trois sortes de produits (appelés p_1, p_2, p_3 ci-dessous), chacun d'entre eux n'étant constitué qu'à partir de trois éléments (appelés e_1, e_2, e_3 ci-dessous). Le premier tableau P suivant donne le nombre d'éléments de chaque sorte nécessaires à la fabrication d'une unité de produit :

	p_1	p_2	p_3
e_1	3	9	5
e_2	4	0	9
e_3	4	8	6

Ainsi, par exemple, pour fabriquer une unité du produit p_2, il faut 9 éléments e_1, aucun élément e_2 et 8 éléments e_3.

Le deuxième tableau M donne les poids unitaires (en kg) et les coûts unitaires (en €) de chaque élément :

	e_1	e_2	e_3
poids	5	6	3
coût	180	250	150

Ainsi, par exemple, un élément e_1 pèse 5 kg et coûte 180 €.

A l'aide de ces données, calculons par exemple le poids d'une unité de produit p_1 : puisque, d'après le tableau P, une unité de produit p_1 est composé de 3 éléments e_1, 4 éléments e_2 et 4 éléments e_3, le poids d'une unité de produit p_1 sera obtenu en totalisant les poids des différents éléments qui le composent.
Le tableau M donne alors facilement $3 \times 5 + 4 \times 6 + 4 \times 3 = 51$.
De même, on vérifie que le poids d'une unité de produit p_2 est $9 \times 5 + 8 \times 3 = 69$, et celui d'une unité de produit p_3 est $5 \times 5 + 9 \times 6 + 6 \times 3 = 97$.

De façon similaire, on peut obtenir les coûts unitaires de fabrication de chaque type de produit : on obtient facilement les résultats 2140 €, 2820 € et 4050 € pour le coût respectif d'une unité de produit p_1, p_2 et p_3.

Introduisons maintenant les deux matrices

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

et résumons les résultats obtenus ci-dessus dans la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix}$$

On voit alors que le coefficient r_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice R a été obtenu en multipliant « terme à terme » ceux de la ligne i de la matrice M par ceux de la colonne j de la matrice P (ce que nous noterons conventionnellement $r_{ij} = L_i \times C_j$).

Par exemple, le coefficient r_{23} situé sur la 2e ligne et la 3e colonne de la matrice R

$$r_{23} = 4050 = 180 \times 5 + 250 \times 9 + 150 \times 6$$

s'écrira (en résumé)

$$r_{23} = L_2 \times C_3 = \begin{pmatrix} 180 & 250 & 150 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Avec cette convention d'écriture, on a

$$R = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \end{pmatrix}$$

où les L_i sont les lignes de la matrice M et les C_j sont les colonnes de la matrice P. Cette opération définit la matrice R comme le produit matriciel des matrices M et P.

Il est obligatoire de faire un produit matriciel avec sa calculatrice (les calculatrices usuelles possèdent des programmes qui savent le faire : un produit matriciel ne doit pas être fait « à la main »).

Exemple

Prière d'expérimenter le fonctionnement de votre calculatrice pour lui faire calculer le produit AB des matrices A de dimensions 2×3 et B de dimensions 3×4 données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque (Compatibilité des dimensions)

Sur l'exemple précédent, on voit que, pour faire un produit matriciel AB*, les dimensions des deux matrices doivent être compatibles au sens où, pour pouvoir faire des produits « terme à terme » des lignes de* A *par les colonnes de* B*, il faut donc qu'il y ait le même nombre de termes dans les lignes de* A *que dans les colonnes de* B*. De façon générale, si* A *est de dimensions* $n \times p$*, pour pouvoir faire un produit de la matrice* A *par une matrice* B*, alors* B *doit nécessairement être de dimensions* $p \times q$ *: le nombre de colonnes de* A *doit coïncider avec le nombre de lignes de* B*. On obtient alors un produit* AB *de dimensions* $n \times q$*. Symboliquement, on peut résumer ceci par l'égalité*

$$(matrice\ n \times p) \times (matrice\ p \times q) = matrice\ n \times q$$

Remarque (Compatibilité des dimensions)

Mais en pratique, ce problème de compatibilité des dimensions n'est pas une réelle difficulté, tout simplement parce que, si les dimensions des deux matrices ne sont pas compatibles, l'algorithme qui donne le produit ne peut pas être réalisé. Pour s'en convaincre, il suffit de voir le message d'erreur que renverra la calculatrice si on lui demande de faire le produit BA avec les matrices A et B de l'exemple précédent.

Remarque (Ordre d'un produit)

L'ordre d'un produit matriciel $A \times B$ a beaucoup d'importance (et il faut donc toujours respecter l'ordre dans lequel un produit matriciel est demandé) car le produit $B \times A$ n'a pas nécessairement de sens (les dimensions peuvent être incompatibles), ou, s'il en a (cas de deux matrices carrées de même dimension), la matrice $B \times A$ n'a en général ***rien à voir*** *avec la matrice $A \times B$. Comparer par exemple AB et BA dans le cas où*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarque (Diviseurs de zéro)

Le produit matriciel recèle aussi d'autres surprises : il est parfaitement possible que le produit de deux matrices non nulles donne une matrice nulle. Le vérifier avec le produit AB de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Remarque (Elément neutre)

Pour les matrices carrées d'ordre n fixé, le produit possède un « élément neutre » (c'est-à-dire une matrice « correspondant » au nombre 1 pour le produit de nombres), qui est la matrice traditionnellement notée I, appelée matrice-unité, et vérifiant, pour toute matrice carrée A : $A \times I = I \times A = A$.
Cette matrice-unité I est constituée de 1 sur sa diagonale et de 0 partout ailleurs. Par exemple, pour $n = 3$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution de sytèmes linéaires

Commençons avec le cas particulier des systémes triangulaires, c'est-à-dire ceux dont la matrice associée possède des 0 « en-dessous à gauche » de sa diagonale, qui ont une résolution évidente. Considérons, par exemple, le système triangulaire

$$(T) : \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ \quad 16y - 3z = 3 \\ \qquad\quad 7z = -7 \end{cases}$$

La dernière équation fournit immédiatement $z = -1$, valeur qu'on reporte alors dans la deuxième équation, ce qui donne : $16y + 3 = 3$, d'où $y = 0$. Il n'y a plus alors qu'à reporter les valeurs de y et z dans la première équation pour obtenir $x - 2 = 1$, d'où $x = 3$. La solution du système (T) est donc $(3, 0, -1)$.

Venons-en au cas général, avec l'exemple du système (S) suivant, où il s'agit de déterminer les inconnues x, y, z vérifiant les trois équations :

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + 12y + z = 5 \\ 3x - 12y + 8z = 1 \end{cases}$$

On voit, en utilisant le produit de matrices, que (S) peut s'écrire sous la « forme matricielle » suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 3 & -12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On écrira en abrégé $AX = Y$ avec les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 3 & -12 & 8 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, on va y opérer des transformations élémentaires sur les lignes, de façon à transformer (S) en un système « triangulaire » équivalent.
Par « transformation élémentaire », on veut dire que l'on peut remplacer une ligne du système (S) par une « combinaison linéaire » de cette ligne avec une autre : précisément,
une ligne L_i du système peut être remplacée par la ligne $\alpha L_i + \beta L_j$.
(avec $\alpha \neq 0$ et $j \neq i$)

La méthode est d'utiliser ces transformations élémentaires pour nous permettre d'abord « d'éliminer » une inconnue dans deux des équations, puis ensuite « d'éliminer » une autre inconnue dans une équation, de façon à arriver finalement à un système triangulaire.

Dans le système (S) ci-dessus, commençons par « éliminer » x dans les deux lignes L_2 et L_3, en combinant chacune d'elles avec L_1. On peut faire

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

On obtient (après calculs intermédiaires, qui peuvent parfois être laborieux, souvent pénibles et assez longs...) le nouveau système

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ \quad 16y - 3z = 3 \\ \quad -6y + 2z = -2 \end{cases}$$

Dans une deuxième étape, on peut alors « éliminer » y de L_3 en combinant L_3 et L_2 par $L_3 \leftarrow 8L_3 + 3L_2$. Il vient

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ \quad 16y - 3z = 3 \\ \qquad\quad 7z = -7 \end{cases}$$

et ainsi nous obtenons le système triangulaire qu'on a déjà résolu en préliminaire. On trouve donc finalement

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Autre présentation des calculs

En pratique, les manipulations qu'on vient de faire dans l'exemple ci-dessus ne nécessitent pas nécessairement l'écriture **explicite** des équations du système et des inconnues. On procède donc de façon « matricielle » en écrivant d'abord la matrice A du système et, à sa droite, la matrice unicolonne Y des « données », de cette façon :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 5 \\ 3 & -12 & 8 & 1 \end{array}$$

puis on écrit de la même façon les étapes importantes.

En premier lieu, on a « éliminé » la première inconnue (qui, dans notre exemple, s'appelait x) dans les lignes L_2 et L_3, c'est-à-dire qu'on a combiné L_2 et L_3 avec L_1 pour obtenir des coefficients 0 à l'extrême-gauche de ces deux lignes. Ces combinaisons nous conduisent donc, matriciellement, à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

En second lieu on a « éliminé » la deuxième inconnue (qui s'appelait y) dans la ligne L_3 en la combinant avec L_2, pour obtenir un coefficient 0 à l'extrême-gauche de cette nouvelle ligne L_2 :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}$$

En fin, la « remontée » dans ce système triangulaire s'effectue comme précédemment, et on trouve de même les valeurs des trois inconnues.

Matrice inverse

Si M est une matrice carrée d'ordre n, on dit que M est inversible s'il existe une matrice carrée d'ordre n notée M^{-1} vérifiant $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ (où I désigne la matrice-unité d'ordre n). Cette matrice M^{-1}, si elle existe, est alors unique et s'appelle la matrice inverse de M.

Utilisation de la calculatrice

Les calculatrices usuelles fournissent, pour une matrice carrée inversible donnée M, sa matrice inverse M^{-1}, et affichent un message d'erreur si M n'est pas inversible.
Attention cependant, lorsque la matrice M est inversible, les coefficients de sa matrice inverse M^{-1} sont donnés par la calculatrice sous **forme décimale arrondie**, et il faut se rappeler que ces résultats ne sont donc pas toujours **exacts**.

Inversibilité

Contrairement aux nombres réels, où tout réel x non nul admet un inverse $x^{-1} = \frac{1}{x}$, il existe des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles. Exemple très simple de matrice non inversible (demander à la calculatrice) avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Inversion de matrice et résolution de système

Considérons l'égalité $Y = MX$ où M est une matrice carrée et X et Y sont des matrices unicolonnes, et supposons que M soit inversible. En multipliant membre à membre l'égalité $\boxed{Y = MX}$ par M^{-1}, on a $M^{-1}Y = M^{-1}MX$, et, comme $M^{-1}M = I$, on obtient $M^{-1}Y = IX = X$ c'est-à-dire $\boxed{X = M^{-1}Y}$.
En conséquence, si $Y = MX$ est l'écriture matricielle d'un système linéaire où les inconnues sont les coefficients de la matrice unicolonne X, et si M est **inversible**, la solution du système $Y = MX$ s'écrit $X = M^{-1}Y$ où M^{-1} est la matrice inverse de M.

Résoudre un système linéaire $Y = MX$ équivaut à utiliser à la matrice inverse de la matrice M du système.

Méthode de Gauss d'inversion de matrice

On remarque d'abord que le produit d'une matrice carrée (de dimension 3 par exemple) par chacune des matrices unicolonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

fournit respectivement chacune des **colonnes** de cette matrice.

Par suite, si une matrice M est inversible, les colonnes de la matrice inverse M^{-1} sont simplement les produits matriciels

$$M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et sont donc respectivement solutions des systèmes linéaires

$$MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad MY = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MZ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Illustrons sur un exemple, comment on peut alors très naturellement résoudre ces trois systèmes linéaires « en même temps » (Attention, les calculs intermédiaires sont souvent très pénibles « à la main » et sont donc une source très fréquente d'erreur !). On écrit la matrice A et, à sa droite, les trois matrices unicolonnes de base, de cette façon :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -12 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Le but concret est d'arriver, par combinaisons successives des lignes, à un tableau où les trois matrices unicolonnes de base seront finalement écrites dans la partie gauche et la matrice inverse A^{-1} apparaîtra dans sa partie droite.

On commence par se ramener à un système triangulaire en faisant d'abord, comme dans la résolution qui a déjà été faite en exemple plus haut, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. On obtient

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 8L_3 + 3L_1$, ce qui donne

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -30 & 3 & 8 \end{array}$$

Divisons la dernière ligne par 7, ce qui donne

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{array}$$

Faisons alors apparaître des 0 sur les deux premières lignes de la troisième colonne, en combinant L_1 et L_2 avec L_3 : en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$, on arrive à (attention aux calculs de fractions !)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 67/7 & -6/7 & -16/7 \\ 0 & 16 & 0 & -104/7 & 16/7 & 24/7 \\ 0 & 0 & 1 & -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{array}$$

Reste à faire apparaître un 0 « en haut » de la deuxième colonne, en combinant L_1 avec L_2 par $L_1 \leftarrow 8L_1 + L_2$: on obtient

$$\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 432/7 & -32/7 & -104/7 \\ 0 & 16 & 0 & -104/7 & 16/7 & 24/7 \\ 0 & 0 & 1 & -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{array}$$

Enfin (ouf !) il n'y a plus qu'à « simplifier » L_1 par 8, L_2 par 16, puis réduire éventuellement certaines fractions : on arrive finalement à

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 54/7 & -4/7 & -13/7 \\ 0 & 1 & 0 & -13/14 & 1/7 & 3/14 \\ 0 & 0 & 1 & -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{array}\right.$$

En conclusion, la matrice A est inversible et sa matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 54/7 & -4/7 & -13/7 \\ -13/14 & 1/7 & 3/14 \\ -30/7 & 3/7 & 8/7 \end{pmatrix}$$

On peut toujours en principe vérifier l'exactitude de la matrice A^{-1} en faisant le produit AA^{-1} pour constater qu'on trouve bien la matrice I, mais, compte tenu des nombreux calculs qu'engendre cette « vérification », celle-ci reste plus théorique que pratique...