Calcul matriciel

Exercice 1 : addition

Calculer les matrices suivantes :

$$A = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : résolution d'un sytème

Ecrire puis résoudre le système de deux équations à deux inconnues a et b donné par

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : produits matriciels

A l'aide de la calculatrice, donner les résultats des produits matriciels suivants :

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : produits matriciels particuliers

1. Calculer les produits

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   A quelles manipulations ces trois produits se ramènent-ils ?

2. En déduire, sans calcul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire, sans calcul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : produits matriciels particuliers

1. Calculer les produits

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   A quelles manipulations ces trois produits se ramènent-ils ?

2. En déduire, sans calcul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : produit d'une ligne par une colonne

Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : produit particulier

Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Qu'observe-t'on ?

Exercice 8 : non-commutativité

Calculer

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Qu'observe-t'on ?

Exercice 9 :

Exprimer en fonction des réels x, y, z la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 3 & -12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exercice 10 : résolution de systèmes linéaires

Avec la méthode de Gauss, résoudre chacun des systèmes d'équations suivants (on devra trouver la solution indiquée) :

1. $$(S) : \begin{cases} 4x + 8y + 12z = 4 \\ 3x + 8y + 13z = 5 \\ 2x + 9y + 18z = 11 \end{cases}$$

   La solution est $(1, -3, 2)$.

2. $$(S) : \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

   La solution est $(1, 2, 3)$.

3. $$(S) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

   La solution est $(2, -1, 0)$.

4. $$(S) : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases}$$

   La solution est $(-1, 4, 3)$.

5. $$(S) : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

   La solution est $(1, 1, 1)$.

Exercice 11 : exemple d'un système linéaire sans solution

Appliquer la méthode de Gauss pour la résolution du système linéaire suivant, et en déduire qu'il n'admet aucune solution :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

Exercice 12 : inversion de matrices

Calculer, par la méthode de Gauss, les matrices inverses de deux des matrices choisies à votre convenance dans l'exercice 10, puis les demander à votre calculatrice afin de vérifier votre résultat.