Problèmes du second degré

On appelle problème du second degré tout problème qui conduit à la résolution d'une **équation** du type $ax^2+bx+c=0$ ou d'une **inéquation** du type $ax^2+bx+c \leq 0$ (ou $ax^2+bx+c \geq 0$), où, dans tous les cas, a est un réel non nul.

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ **:** on rappelle que les solutions éventuelles de cette équation sont appelées les **racines** du polynôme ax^2+bx+c et qu'on appelle **discriminant** du polynôme le réel $\Delta = b^2-4ac$ (qui ne dépend donc que des *coefficients* a, b, c du polynôme). On a alors les trois cas suivants :

- ▶ Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes données par

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- ▶ Si $\Delta = 0$, il y a une seule racine donnée par

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- ▶ Si $\Delta < 0$, il n'y a aucune racine (dans $\mathbb{R}$).

Factorisation du polynôme ax^2+bx+c **:** il s'agit, lorsque c'est possible, d'écrire ax^2+bx+c sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

- ▶ Si $\Delta > 0$, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines.
- ▶ Si $\Delta = 0$, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine.
- ▶ Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c dans $\mathbb{R}$.

Signe du polynôme ax^2+bx+c **:** la connaissance du signe de la quantité ax^2+bx+c selon la valeur du réel x permet de résoudre les inéquations du second degré. On retiendra cette règle simple :

ax^2+bx+c est toujours du signe du réel a, sauf « entre les racines » éventuelles.

Plus précisément, cette règle s'interpréte donc comme suit :

1. Si $\Delta > 0$, le polynôme ax^2+bx+c est du signe du réel a, sauf si x est dans l'intérieur de l'intervalle dont les extrémités sont les deux racines x_1 et x_2, où le polynôme est donc du signe de $-a$.
2. Si $\Delta = 0$, le polynôme ax^2+bx+c est toujours du signe du réel a (sauf en x_0 où il est nul).
3. Si $\Delta < 0$, le polynôme ax^2+bx+c est toujours du signe du réel a.

Exercice 1 :

Pour chacun des polynômes P suivants, on demande de traiter les trois questions suivantes :

1. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. donner, lorsque P admet au moins une racine réelle, la factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré.
3. préciser le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

$$P_1(x) = x^2 + 6x + 5$$
$$P_2(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$P_3(x) = 5x^2 + 6x + 1$$
$$P_4(x) = 3x^2 + 4x - 7$$
$$P_5(x) = x^2 + x - 1$$
$$P_6(x) = -x^2 - x - 1$$
$$P_7(x) = -7x^2 + 6x + 1$$
$$P_8(x) = 4x^2 - 12x + 9$$
$$P_9(x) = 100x^2 - 20x + 1$$
$$P_{10}(x) = 2006x^2 - 2007x + 1$$
$$P_{11}(x) = 3x^2 - 4x - 15$$
$$P_{12}(x) = -x^2 + 22x - 121$$
$$P_{13}(x) = 18x^2 - 31x + 13$$
$$P_{14}(x) = x^2 + 10x + 100$$
$$P_{15}(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$P_{16}(x) = 169x^2 - 13x - 2$$