Fonctions.

I Généralités.

Définition: Une fonction est un moyen d'associer à un réel x un **unique** réel y .

Il y a deux méthodes classiques pour définir une fonction:

1°) Par une formule:

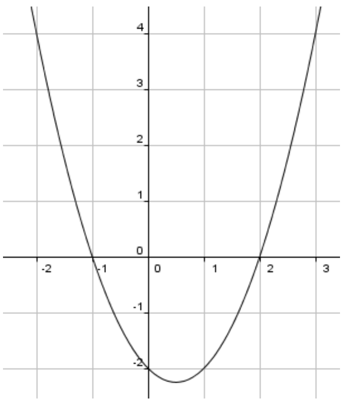
Exemple1: $f(x)=x^2-x-2$

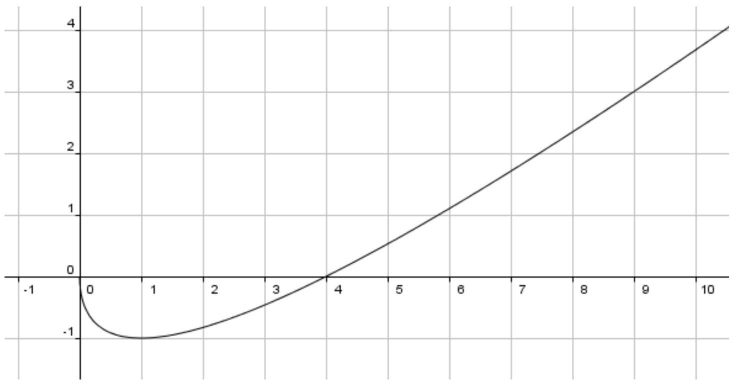
On a $f(0)=$ $f(1)=$ $f(2)=$

Exemple 2: $g(x)=x-2\sqrt{x}$ pour $x\geqslant 0$.

On a $g(0)=$ $g(1)=$ $g(2)=$

Conséquence: On peut placer des points sur un graphique pour obtenir les courbes des fonctions.





Exercice: $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$. Compléter le tableau de valeurs de f puis tracer C_f .

x	-5	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	5
$f(x)$											

2°) Par une courbe.

Exercice 1: On donne la courbe d'une courbe de fonction f :

Compléter les propositions:

$f(-4)=$ $f(-3)=$

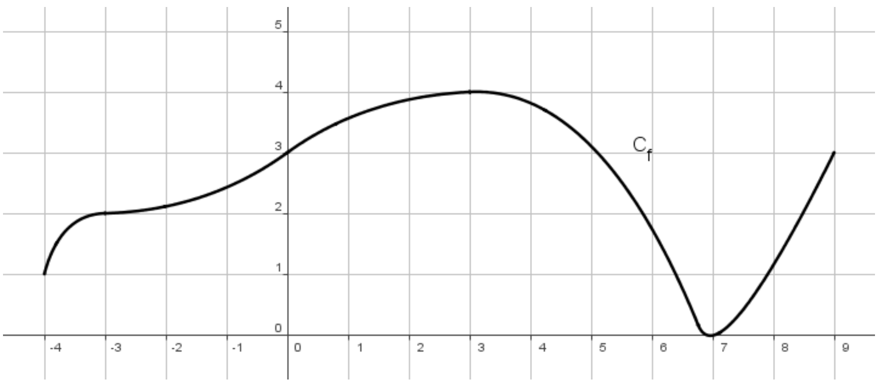
$f(0)=$ $f(4)=$

$f(x)=3\Leftrightarrow$

$f(x)=1\Leftrightarrow$

$f(x)\geqslant 3,5\Leftrightarrow$

$f(x)\leqslant -1\Leftrightarrow$



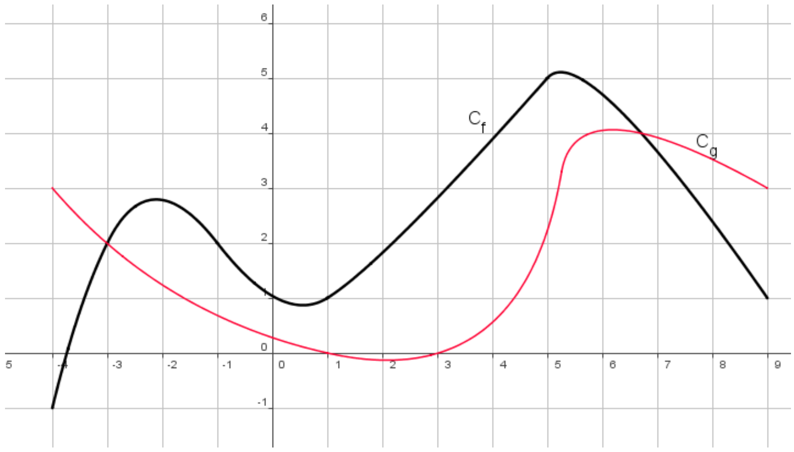
Exercice 2: On donne des courbes de deux fonctions f et g. Compléter:

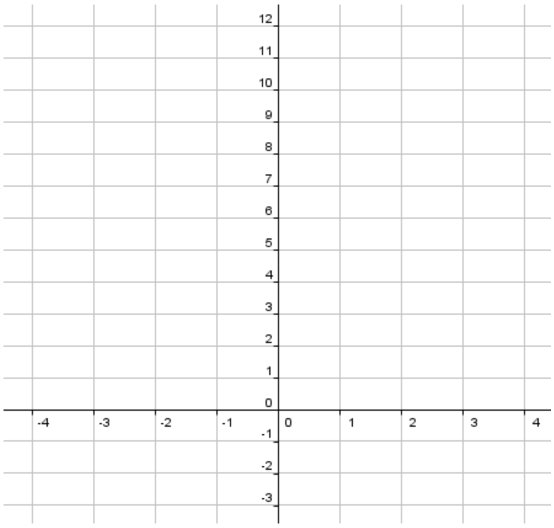
$f(x)=g(x)\Leftrightarrow$

$f(x)\geqslant g(x)\Leftrightarrow$

$f(x)\leqslant g(x)\Leftrightarrow$

$g(x)\leqslant 0\Leftrightarrow$





Exercice 3: Tracer les courbes des fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=2-x$ puis résoudre $x^2\geqslant 2-x$

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(x)$									
$g(x)$									

II Limites d'une fonction.

On s'intéresse à l'étude d'une fonction où elle n'est pas définie.

1°) Exemple.

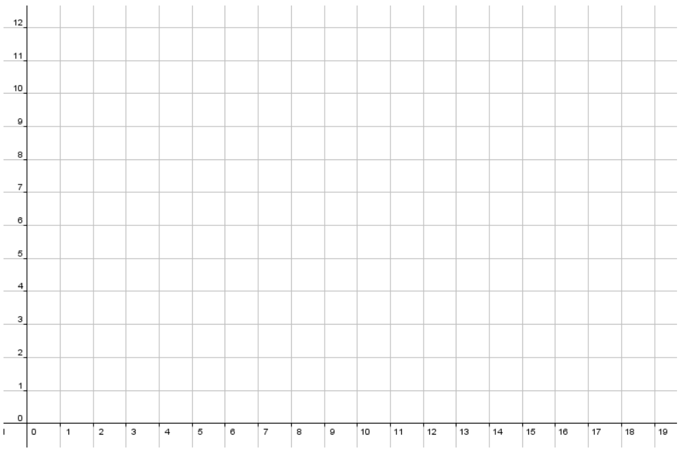
$f(x)=\dfrac{1}{x}+1$ pour $x>0$.

Question: que se passe-t-il si x se rapproche de 0 ou de $+\infty$?

x	1	$0,5$	$0,2$	$0,1$	$0,00001$	$x\approx 0$
$f(x)$						

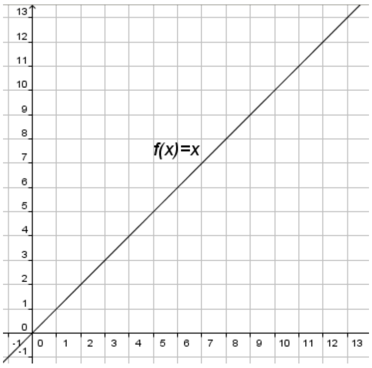
x	10	100	1000	1000000	$x\approx +\infty$
$f(x)$					

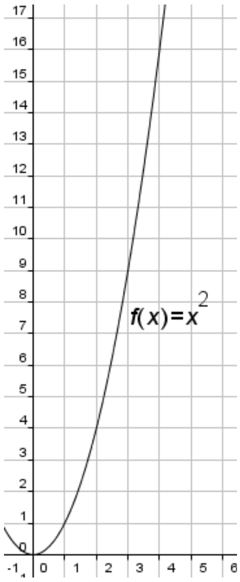
Conséquence graphique :

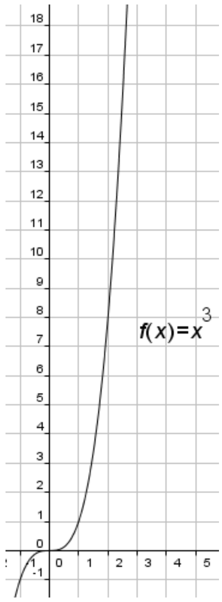


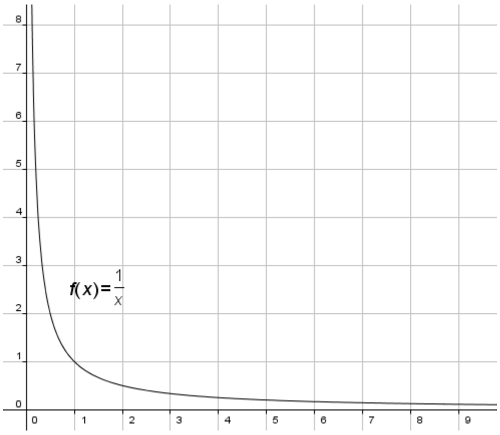
2°) Formules à connaître

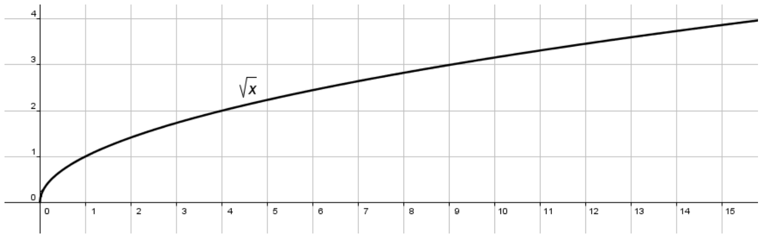
On donne les courbes de fonctions de référence; déterminer les limites de ces fonctions en $+\infty$.











3°) Opérations sur les limites.

Exemple: Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+4+\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{-6x+2}\right)$

Propriété:

On peut faire des sommes et produits sur les limites (ex: $+\infty+\infty=$ $\qquad$ $3\times(+\infty)=$ $\qquad$ $+\infty\times(-\infty)=$ $\qquad$) à quatre exceptions près. On ne peut pas deviner a priori le résultat de :

On note ces opérations FI (comme Formes Indéterminées).

A retenir

Cas des polynômes :

Exemples: $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+7)=$

$\lim_{x\to+\infty}(-9x^3+2x^2-7x+1)=$

Exercices : Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$f(x)=x^2-x$ $\qquad$ $g(x)=-3x^4-25x^3+1$ $\qquad$ $h(x)=2x^3+x-45$

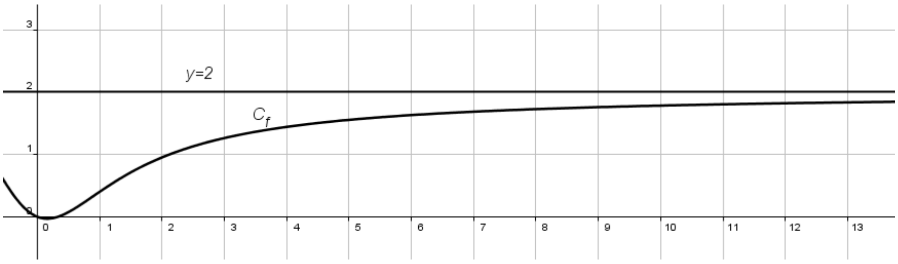
$k(x)=\frac{3}{7x^2-5}$ $\qquad$ $p(x)=\frac{-2x}{4x^2+7}$ $\qquad$ $q(x)=\frac{x^2+3}{4-5x}$ $\qquad$ $r(x)=\frac{6x^2-2x}{3x^2+2x+5}$

4°) Asymptotes.

Asymptote horizontale:

On reprend $r(x)=\frac{6x^2-2x}{3x^2+2x+5}$. On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}(r(x))=2$ ce qui veut dire qu'en $+\infty$ la courbe va se stabiliser autour de la valeur 2 .

Graphiquement $\mathscr{C}_f$ va être très proche de $y=2$. On dit que $y=2$ est asymptote à la courbe de f en + ∞ .



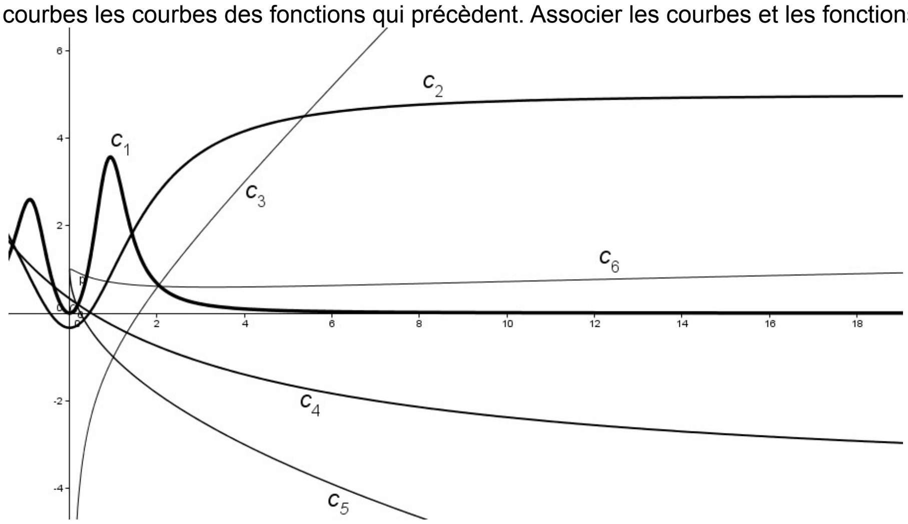
Exercice :

1. On donne des fonctions, déterminer leurs limites en $+\infty$, dire si les courbes admettent des asymptotes horizontales.

   $f(x)=\frac{2-x}{x+6}$ $\quad$ $g(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $h(x)=1-2\sqrt{x}$

   $k(x)=\frac{x^5+x^4+5x^2}{x^6+1}$ $\quad$ $l(x)=\frac{5x^2-1}{x^2+3}$ $\quad$ $p(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{\sqrt{x}}{5}$

2. On donne les courbes les courbes des fonctions qui précèdent. Associer les courbes et les fonctions.



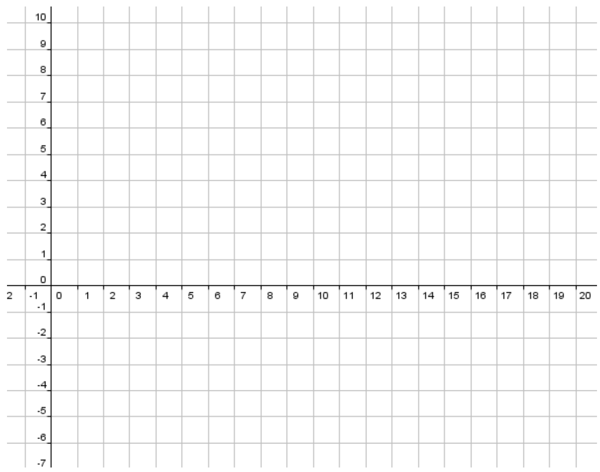
Asymptote verticale :

Reprenons $f(x)=\frac{1}{x}+1$ pour $x>0$ (cf page2). f n'est pas définie en $x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}(f(x))=+\infty$.

On dit que $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

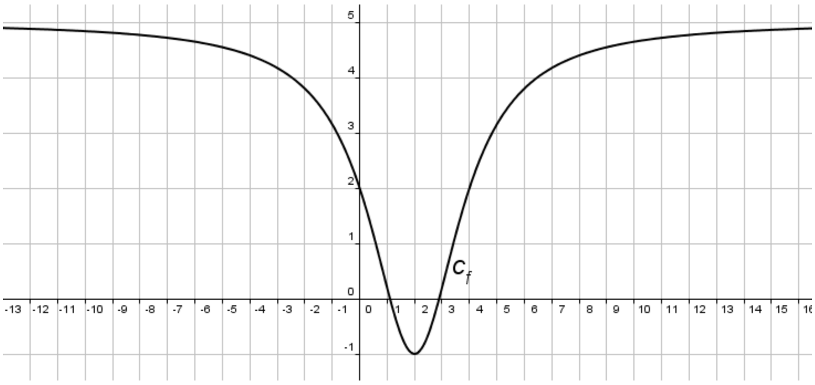
Exercice : Soit f définie pour $x\geqslant0$ et $x\neq2$ par $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$

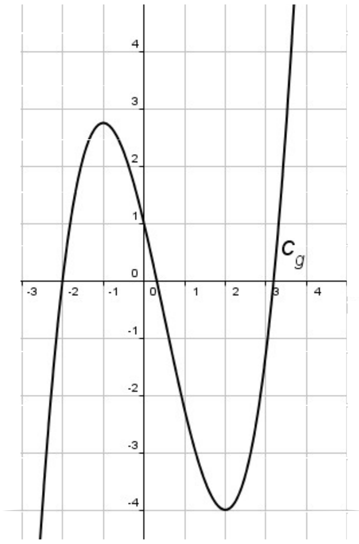
Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $x=2$. En déduire les asymptotes de f.



III Variations.

1°) Tableau de variations.



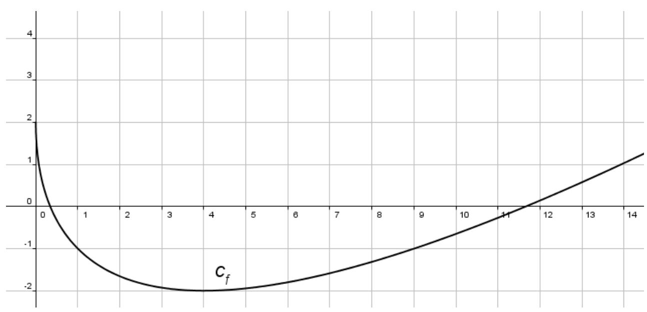


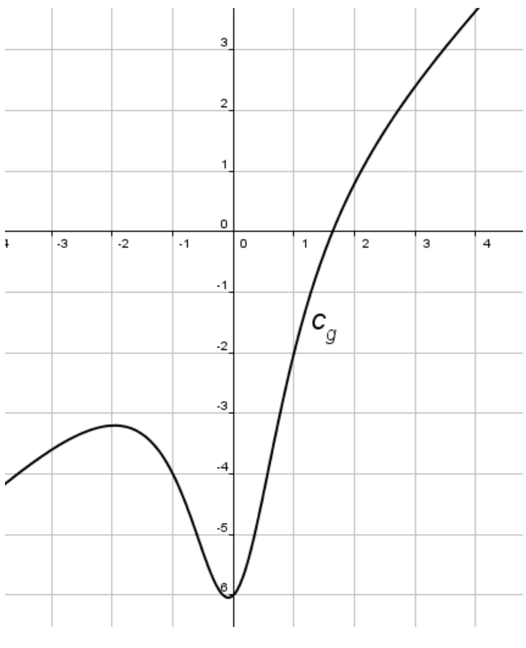
f est une fonction **décroissante** sur puis **croissante** sur .

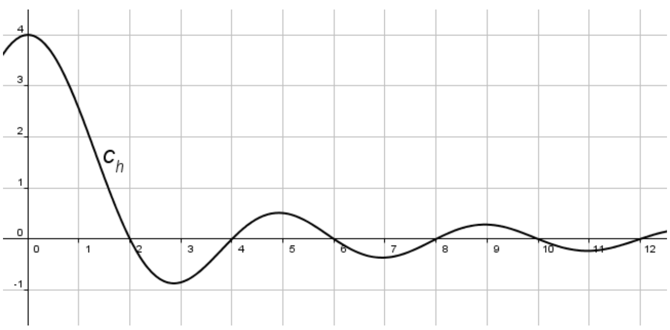
g est une fonction croissante sur et , et décroissante sur .

Les variations d'une fonction sont souvent regroupées dans un tableau, appelé **tableau de variations**.

Exercice 1: On donne des courbes de fonctions. Dresser leur tableaux de variations.







Exercice 2:

On donne des tableaux de variations; tracer des courbes qui peuvent convenir.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f	0	↗	6	↘	-5	↗	4

x	$-\infty$		1		2		3		5		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-5	↗	0	↗	4	↘	$-\infty$

2°) Rappels sur les dérivées.

Dérivées des fonctions de référence	
$f(x)=constante$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=x^4$	$f'(x)=4x^3$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les dérivées
$(k\times u)'=k\times u'$, k étant une constante
$(u+v)'=u'+v'$
$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples: Dériver les fonctions suivantes:

$f_1(x)=8x-3$

$f_2(x)=3x^2-12x+9$

$f_3(x)=6x^5-0,2x^4-30x$

$f_4(x)=\dfrac{1}{x}$

$f_5(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

$f_6(x)=\dfrac{2x+1}{x+8}$

3°) Lien entre dérivée et variations.

Théorème : f est croissante sur l'intervalle I ssi f $'(x)\geqslant 0$ sur I .

f est décroissante sur l'intervalle I ssi f $'(x)\leqslant 0$ sur I .

Exercice 1: Déterminer les variations de f_1 , f_2 , f_4 , f_6 .

Exercice 2: $f(x)=x^2+x+1$. Etudier les variations de f puis montrer que f est une fonction qui reste toujours positive.