Numération

I. Les différentes bases

1. La base 10 (ou système décimale)

Histoire : Notre système est un système positionnelle (un même chiffre a une signification différente selon sa position dans l'écriture du nombre) ce qui nous vient de Chine et a été amélioré et diffusé à partir de l'Inde au VI^ième^ siècle. Les chiffres que nous utilisons aujourd'hui ont été inventé par les indiens, et leur diffusion en Europe s'est faite par l'intermédiaire de la civilisation arabe au alentour du IX^ième^ siècle.

Exemple : $1789 = 1000 + 700 + 80 + 9$

$$= 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Définition : Soit N un nombre dont l'écriture est : $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$

alors $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} \times \ldots \times a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$

2. La base 2 (ou système binaire)

C'est la plus petite base envisageable. Un chiffre binaire est appelé « bit » en informatique (de l'anglais binary digit –chiffre binaire-).

Exemple : $11011101_2 = 1\times2^7 + 1\times2^6 + 0\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

$$= 221_{10}$$

3. La base 16 (ou système hexadécimal)

Comme 16 est plus grand que 10 (si si !!!) il faut 16 « codes » différents pour représenter les 16 chiffres de la base. On a {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}.

Exemple : $A10E_{16} = A\times16^3 + 1\times16^2 + 0\times16^1 + E\times16^0$

$$= 10\times4096 + 1\times256 + 0\times16 + 14\times1 = 41230_{10}$$

4. La base b ($b \geq 2, \in \mathbb{N}$)

Ce qui précède peut se généraliser à tout entier $b \geq 2$, il suffit de définir les $(b – 1)$ chiffres de la base, on choisit {1, 2, …, 9, A, B, …}

Alors $N = a_n\times b^n + a_{n-1}\times b^{n-1} + a_{n-2}\times b^{n-2}\times \ldots \times a_1\times b^1 + a_0\times b^0$

$= a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ en base b

Rmq : Les bases (autre que 10) les plus utilisées sont la base 2 et la base 16 et plus rarement la base octale (base 8)

II. Convertions de base

1. De la base b à la base décimale

Dans ce sens les calculs sont « simples », il suffit de décomposer en puissances de b tels que fait dans les exemples ci-dessus.

2. De la base décimale à la base b

Méthode 1 : on effectue des divisions euclidiennes successives.

Exemple :

Ecrivons 259_{10} en base 3 :

$259 = 86\times3 + 1$
$86 = 28\times3 + 2$
$28 = 9\times3 + 1$
$9 = 3\times3 + 0$
$3 = 1\times3 + 0$
$1 = 0\times3 + 1$ donc $259_{10} = 100121_3$

Méthode 2 : on cherche les puissances de b « entrant » dans ce nombre.
Retour sur l'exemple :
La plus grande puissance de 3 inférieure à 259 est $3^5 = 243$; le reste est $259 - 243 = 16$
La plus grande puissance de 3 inférieure à 16 est $3^2 = 9$; le reste est $16 - 9 = 7$
La plus grande puissance de 3 inférieure à 7 est $3^1 = 3$; le reste est $7 - 3 = 4$
La plus grande puissance de 3 inférieure à 4 est $3^1 = 3$; le reste est $4 - 3 = 1$
La plus grande puissance de 3 inférieure à 1 est $3^0 = 1$; les reste est $1 - 1 = 0$
On a $1 \times 3^5 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0$ donc 100121_3

3. Entre binaire et hexadécimale

On peut passer, bien sûr, par la base 10, mais il y a un moyen beaucoup plus rapide :
Une division (entière) par 16 revient à effectuer un décalage de ' bits vers la droite. Ainsi chaque paquet de 4 bits correspond à un chiffre hexadécimal. Il suffit donc de connaitre l'équivalence donnée dans le tableau suivant :

Binaire	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Hexadécimal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

On découpe alors en paquet de 4 en partant de la droite en complétant éventuellement le dernier paquet.
Exemples :
$101111110110110_2 = 0101 \quad 1111 \quad 1011 \quad 0110$
5 F B 6 donc $101111110110110_2 = 5FB6_{16}$
$FEC5_{16} =$ F E C 5
1111 1110 1100 0101 donc $FEC5_{16} = 1111111011000101_2$

III. Opérations en binaire

Addition :
Exemple : 100111101 + 1000100100 = 1101100001
On peut se référer à la table suivante :

+	0	1
0	0	1
1	1	0^1

c'est-à-dire 0 et 1 de retenue

Soustraction :

Exemple : 1000100100 – 100111101 = 11100111

Multiplication :

Exemple : $10111 \times 111 = 10100001$

IV. Les nombres décimaux

Exemple : En base 10 : $368{,}29 = 3 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$

De même, en base 2 : 111,01 s'écrit en base 10 : $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$

Soit $4 + 2 + 1 + 0{,}25 = 7{,}25$

12,375 en base 10, s'écrit en base 2 : $1100{,}011_2$

Car $12_{10} = 1100_2$

$0{,}375 \times 2 = 0{,}75$

$0{,}75 \times 2 = 1{,}5$

$0{,}5 \times 2 = 1$ donc $0{,}375_{10} = 0{,}011_2$

Méthode : Pour déterminer la partie décimale, on effectue la multiplication par 2 des parties décimales jusqu'à obtenir 1, les parties entières de chaque produit donnant dans l'ordre la partie décimale en base 2.