Les Suites numériques

I. Généraliés

1. Modes de générations

- A partir d'une relation explicite : $U_n = f(n)$
- A partir d'une relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$

2. Sens de variation d'une suite

(U_n) est croissante signifie que $U_{n+1} \geq U_n$. $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} - U_n \geq 0$
(U_n) est décroissante signifie que $U_{n+1} \leq U_n$ $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} - U_n \leq 0$

II. Deux suites particulières

1. Les suites arithmétiques

Définition : $U_{n+1} = U_n + r$ où $r \in \mathbb{R}$ est la raison de la suite.
Propriété 1 : $\forall$ n, p $\in \mathbb{N}$: $U_n = U_p + (n - p)\times r$
en particulier : $U_n = U_0 + n\times r$ et $U_n = U_1 + (n - 1)\times r$

Somme des termes : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

de façon générale, on peut retenir : $S = \dfrac{\text{N}^{\text{bre}} \text{ de termes}}{2}$ (1^{ier} terme + dernier terme).

2. Les suites géométriques

Définition : $U_{n+1} = q\times U_n$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$. q $\in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.
Propriété : $U_n = U_p\times q^{n-p}$; $\forall$ n, p $\in \mathbb{N}$.
en particulier, $U_n = U_0\times q^n$ et $U_n = U_1\times q^{n-1}$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{U_{n+1} - U_0}{q - 1}$

de façon générale, on peut retenir : $S = \dfrac{\text{Le terme après le dernier} - \text{le } 1^{\text{ier}}}{q-1}$

III. Limites de suites

1. Définitions

- On note $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$ la limite de la suite (U_n) lorsque n tend vers + l'infini. C'est-à-dire vers quoi tend la suite lorsque n prend des valeurs très grande.
- Si $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, (U_n) est dite convergente vers a.

2. Les limites de références

On admet les résultats suivants :

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^k} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \ln(n) = +\infty$ $\lim\limits_{n \to \infty} e^n = +\infty$

3. Le cas des suites géométriques

(U_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :
si $q \leq -1$: U_n n'a pas de limite.

si $-1 < q < 1$: U_n **converge** vers 0
si $q > 1$: $\lim_{n \to \infty} U_n = \pm \infty$ (selon le signe de U_0)
En résumé, si une suite géométrique converge, alors c'est vers 0 et $q \in]-1 ; 1[$.

4. Les théorèmes de comparaisons

- On dit que deux suites (U_n) et (V_n) sont équivalentes si $\lim_{n \to \infty} \frac{Un}{Vn} = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- On dit que (U_n) est prépondérante devant (V_n) (ou que (V_n) est négligeable devant (U_n)) si $\lim_{n \to \infty} \frac{Un}{Vn} = +\infty$.
  Ainsi, si deux suites ont pour limite $+\infty$ mais que l'une est prépondérante devant l'autre c'est qu'elle tend vers l'infini beaucoup plus vite que la deuxième.

Propriété : on adopte le signe « << » pour signifier « est négligeable devant »
$\ln(n) << n^p << a^n \quad \forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall a \in \mathbb{R}, a > 1$.