# Matrices

## I. Définition

**Définition** : On appelle matrice A l'ensemble des coefficients $(a)_{ij}$ situés sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

On note : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice à n lignes et p colonnes.

**Définition** : Si n= p alors A est une matrice carrée

**Propriété** : Deux matrices A et B sont égales si et seulement elles sont de même taille et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.

**Définition** : On appelle matrice identité d'ordre n (notée $I_n$), la matrice carrée de taille n n'ayant que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.

On appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

## II. Opérations sur les matrices

### 1. Addition

**Définition :** A et B sont deux matrices de même taille (n lignes et p colonnes) alors la matrice C définie par C = A + B admet pour coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
(On additionne entre eux les termes de même indice).

**Propriétés :** $A + B = B + A$
$A + (B + C) = A + B + C$
$A + 0 = A$ (0 est la matrice nulle de même taille que A)

### 2. Multiplication par un réel

**Définition** : A est une matrice de taille n×p et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $B = \lambda.A$ est une matrice de taille n×p ayant pour coefficients : $b_{ij} = \lambda.a_{ij}$.
(On multiplie tous les coefficients de A par $\lambda$)

**Propriétés :** $A + (-B) = A - B$
$-A$ est la matrice opposée à A : $A + (-A) = 0$
$\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$
$(\lambda_1 + \lambda_2).A = \lambda_1.A + \lambda_2.A$
$\lambda_1.(\lambda_2.A) = (\lambda_1.\lambda_2).A$

### 3. Multiplication

**Définition** : Soit A une matrice à n lignes et p colonnes et B une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $A \times B = C$ a pour coefficients : $c_{ij} = a_{i1}\times b_{1j} + a_{i2}\times b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.
(On multiplie terme à terme la ligne i par la colonne j).

**Propriétés :** $A \times B \neq B \times A$ dans le cas général
$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

**Définition :** $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n matrices A)

III. Inverse d'une matrice

**Définition** : Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors s'il existe une matrice B de même taille telle que : $A \times B = B \times A = I_n$, A est inversible et $A^{-1} = B$. Dans ce cas B est la matrice inverse de A.

**Remarque** : toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.

**Application** : La résolution de systèmes

Tout système peut s'écrire de façon matricielle sous la forme $A \times X = B$, où X et B sont des matrices colonnes.

Alors $X = A^{-1} \times B$ est l'ensemble des solutions si A est inversible.