Tronc Commun Mathématiques

Licence 1

2014–2015

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

UFR Sciences et Technologies

Département de Mathématiques

Ce document constitue le polycopié de l'enseignement de tronc commun mathématiques, qui est suivi par tous les étudiants inscrits en 1ère année de licence à l'UFR Sciences et Technologies de l'Université Blaise Pascal. Il contient l'ensemble des notions mathématiques abordées dans ce cours, et forme une base de connaissances en mathématiques jugées nécessaires pour pouvoir prétendre à la poursuite d'études solides en sciences.

Ce polycopié a été écrit par 7 enseignants de mathématiques (Nicolas Billerey, Kamal Boussaf, Laurent Chupin, Michael Heusener, Jean-Marie Lescure, François Martin et Claude Tricot), en étroite collaboration avec des enseignants de toutes les disciplines scientifiques de l'UFR (biologie, chimie, informatique, physique et sciences de la terre). Il a été rédigé de façon à rendre les notions mathématiques présentées les plus conformes possibles à leur utilisation dans les différents domaines scientifiques.

Ce polycopié contient essentiellement des définitions, des explications et des résultats. Il n'y a quasiment aucune démonstration mathématique. Il se veut résolument pratique et a vocation à être utilisé comme un outil de référence tout au long du cursus d'un étudiant à l'UFR Sciences et Technologies.

Il comporte 4 parties principales (voir table des matières ci-après). Une partie des notions abordées a déjà été vue en Terminale S (avec les programmes de terminale mis en place à la rentrée 2012), mais il y a plusieurs notions nouvelles et certains outils mathématiques sont réintroduits, complétés et étendus par rapport à la terminale. A la fin ont été ajoutées 4 annexes recensant quelques formules utiles.

Bonne lecture !

Table des matières

Chapitre I

Fonctions d'une variable

Le principal objet d'étude du cours de Tronc Commun de Mathématiques est la notion de fonction. Cette notion est évidemment centrale en Mathématiques, mais on la retrouve dans toutes les disciplines scientifiques et même dans la vie de tous les jours : les fonctions sont partout ! Parmi elles, les plus simples (même si leur théorie est très riche) sont celles d'une variable réelle à valeurs réelles. C'est donc par elles que nous allons débuter notre étude.

I.1 Rappels sur les nombres réels

Dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on trouve en particulier
– le sous-ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, formé à partir de 0 et 1 et de l'addition ;
– le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, contenant les nombres entiers naturels et leurs opposés : $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir de $0, 1$ et des deux opérations addition et soustraction ;
– le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, contenant les nombres réels pouvant s'écrire sous la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{Z}$ où q est non nul : $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir de $0, 1$ et des quatre opérations addition, soustraction, multiplication et division.

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ (donc aussi $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$), mais attention ! $\mathbb{R}$ ne se réduit pas à $\mathbb{Q}$: il y a beaucoup (vraiment beaucoup) de nombres réels qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}$ par exemple) ; on les appelle les nombres irrationnels.

I.1.1 Représentation graphique

On représente graphiquement $\mathbb{R}$ à l'aide d'une droite horizontale sur laquelle on dessine une flèche pointant vers la droite, dont l'origine est notée 0 et l'extrémité 1. La longueur de cette flèche est l'échelle de la représentation. Un réel x peut alors être représenté de deux façons [1] :

1. sous la forme d'un point de la droite : x est le point situé à une longueur $|x|$ (pour l'échelle fixée) du point 0, à droite si $x > 0$, et à gauche si $x < 0$;
2. sous la forme d'une flèche horizontale (appelée aussi un vecteur) de longueur $|x|$ (pour l'échelle fixée), pointant vers la droite si $x > 0$, et vers la gauche si $x < 0$.

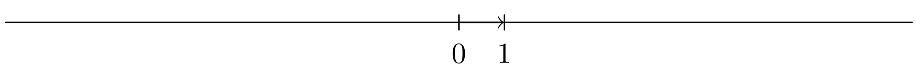


FIGURE I.1 – La droite réelle : représentation graphique de $\mathbb{R}$

1. On rappelle que pour un réel x donné, $|x|$ vaut x si $x \geq 0$ et $-x$ sinon ; voir le §I.3.1 pour plus de précisions.

Les deux représentations sont bien sûr liées : le « point » x (1ère représentation) est l'extrémité de la « flèche » x (2ème représentation) dont l'origine est positionnée en 0. Inversement, la « flèche » x est celle allant du point 0 vers le « point » x.
La deuxième représentation, moins standard, est fort utile, car la flèche représentant un réel x peut glisser le long de la droite réelle : le réel 1 est tout aussi bien représenté par la flèche d'origine le point 0 et d'extrémité le point 1 que par la flèche d'origine le point 7 et d'extrémité le point 8.
Pour représenter l'addition ou la soustraction dans $\mathbb{R}$, la représentation par les flèches est la plus adaptée : le réel $x+y$ est donné comme la composée de la flèche x et de la flèche y, c'est-à-dire la flèche obtenue en plaçant l'origine de la flèche y sur l'extrémité de la flèche x. Ceci est illustré sur la figure I.2.

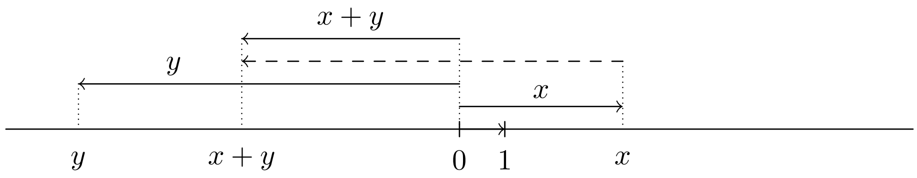


FIGURE I.2 – Représentation graphique de l'addition dans $\mathbb{R}$

Pour représenter graphiquement la multiplication par un réel λ, c'est plus simple : par rapport à la flèche représentant x, celle représentant λx a même direction si $\lambda > 0$, direction opposée sinon, et sa longueur est multipliée par $|\lambda|$.

I.1.2 Propriétés locales

Le vocabulaire suivant sera très utile dans la suite (notamment lorsqu'on étudiera les extrema d'une fonction ou ses limites, voir §§ I.2.2 et I.6.1).

Définition I.1. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété concernant les nombres réels et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que $\mathcal{P}$ est vraie* **localement en** *x_0, ou encore* **au voisinage de** *x_0, si elle est vérifiée par tous les réels suffisamment proches de x_0.*

Autrement dit, s'il est possible de trouver un réel $r > 0$ telle que $\mathcal{P}$ soit vérifiée pour tous les éléments de l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Exemple I.2. Soit $\mathcal{P}(x)$ la propriété portant sur le nombre réel x suivante :

$$\mathcal{P}(x) : \text{« } x^2 - 100\,x^4 \text{ est positif ».}$$

Le calcul montre que si l'on a $-0,1 < x < 0,1$, alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Si on s'intéresse juste au fait que $\mathcal{P}$ est vraie pour 0 et pour les valeurs de x suffisamment proches de 0, on peut dire : $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de 0.

De la même manière on introduit une expression pour parler des propriétés vraies pour les réels « près de l'infini ». Voici par exemple le cas de $+\infty$: on ne s'intéresse alors qu'aux réels suffisamment grands (le cas de $-\infty$ est similaire).

Définition I.3. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété concernant les réels. On dira d'une propriété $\mathcal{P}$ qu'elle est vraie* **au voisinage de** $+\infty$*, si elle est vérifiée par tous les réels suffisamment grands.*

Autrement dit s'il est possible de trouver $M > 0$ tel que $\mathcal{P}$ soit vérifiée pour tous les éléments de l'intervalle $]M, +\infty[$.

I.2 Rappels sur les fonctions

Désormais, dans tout ce chapitre, le terme de « fonction » désignera une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

I.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition I.4. *Soit f une fonction.*

1. *L'ensemble $\mathcal{D}_f$ des éléments $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire possédant une image par f, est appelé l'***ensemble de définition** *de f.*
2. *Le* **graphe** *de f est l'ensemble des points de coordonnées*[2] *$(x, f(x))$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ (x sur l'axe des abscisses, $f(x)$ sur l'axe des ordonnées).*

Remarques I.5.

1. Il y a plusieurs façons de désigner une fonction. On dira par exemple « la fonction f définie par (la formule) $f(x) = \ldots$ » ou encore « la fonction $f : x \mapsto \ldots$ ».
2. Qu'est-ce qui empêche une fonction d'être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Bien souvent cette obstruction est liée à la présence (voir la section I.3 pour les définitions)
   – d'une racine carrée (symbole $\sqrt{\ }$) : ce qu'il y a sous la racine doit être positif ou nul ;
   – d'un dénominateur : il doit être différent de zéro (on n'a pas le droit de diviser par 0 !) ;
   – d'un logarithme : il ne peut s'évaluer que sur les quantités strictement positives.
3. Par convention, lorsque par la suite on écrira $f : I \to \mathbb{R}$, on supposera implicitement que I est inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Exemples I.6.

1. Dans une entreprise, le montant minimum du salaire brut annuel d'un salarié est de 18000 € et le montant de son salaire net équivaut à 75% de celui de son salaire brut. On définit ainsi une fonction SalaireNet qui à un salaire annuel brut d'un salarié d'un montant de x euros associe le montant en euros, SalaireNet(x), du salaire net correspondant par la formule SalaireNet$(x) = 0,75 \times x$. Noter que la fonction SalaireNet n'est pas définie pour $x < 18000$.
2. Durant une semaine en janvier, on a relevé chaque jour à la même heure la température sur le campus des Cézeaux. Les données sont reportées dans le tableau ci-dessous où les jours de la semaine sont numérotés de 1 à 7 et la température exprimée en degré Celsius :

jour	1	2	3	4	5	6	7
température	1	6	9	10	-2	-3	-2

   Cela permet de définir une fonction Temp ayant l'ensemble $\mathcal{D}_{\text{Temp}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ pour ensemble de définition et où pour tout $J \in \mathcal{D}_{\text{Temp}}$, Temp$(J)$ est la température (en degré Celsius) relevée le jour J. Voici, représenté sur la figure I.3, le graphe de la fonction Temp.

I.2.2 Parité, périodicité, extrema

Définition I.7. *Soit f une fonction.*

2. Sauf mention explicite du contraire, tous les graphes de fonctions tracés dans ce polycopié le seront dans le plan muni d'un repère orthogonal direct, c'est-à-dire d'un repère où les axes des abscisses et des ordonnées sont perpendiculaires et orientés respectivement de la gauche vers la droite et du bas vers le haut.

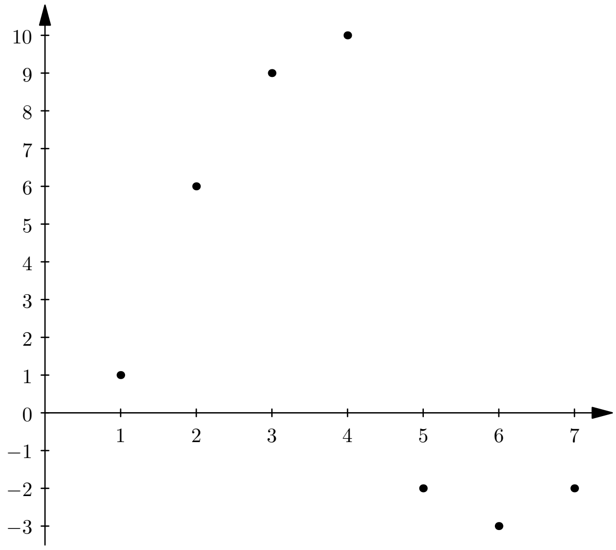


FIGURE I.3 – Graphe de la fonction Temp

1. *On dit que f est* **paire** *si pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $-x$ appartient aussi à $\mathcal{D}_f$ et si de plus on a l'égalité $f(-x) = f(x)$.*
   Traduction sur le graphe : une fonction f est paire *si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
2. *On dit que f est* **impaire** *si pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $-x$ appartient aussi à $\mathcal{D}_f$ et si de plus on a l'égalité $f(-x) = -f(x)$.*
   Traduction sur le graphe : une fonction f est impaire *si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.*
3. *Une fonction f est* **périodique de période** *T si d'une part, dire que $x \in \mathcal{D}_f$ équivaut à dire que $x + T \in \mathcal{D}_f$ et si d'autre part, on a l'égalité $f(x + T) = f(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}_f$.*
   Traduction sur le graphe : une fonction f est périodique de période *T si et seulement si le graphe restreint à deux bandes verticales de largeur T consécutives sont identiques.*

Remarque I.8. Ces notions sont utiles dans la pratique : elles permettent de limiter l'étude de certaines fonctions à des intervalles particuliers. Ainsi pour déterminer les propriétés d'une fonction périodique de période T, on pourra se restreindre à son étude sur un intervalle (quelconque) de longueur T.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *La fonction $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. (On pourra se reporter au §I.3.6 pour des rappels sur la fonction cosinus.)*

RÉPONSE En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\omega(t + T) + \varphi) = \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi).$$

Remarque I.9. Une fonction n'est pas forcément paire ou impaire (penser par exemple à la fonction $x \mapsto x^2 + x$ qui n'est ni paire, ni impaire). Cependant toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cela résulte de l'égalité suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\text{impaire}}.$$

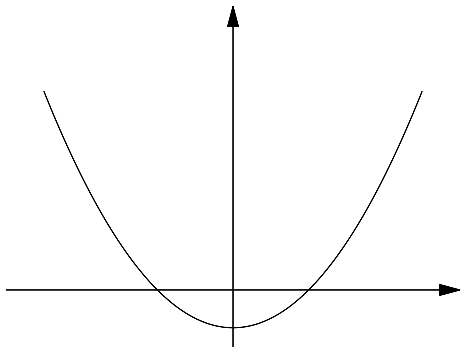


FIGURE I.4 – Graphe d'une fonction paire

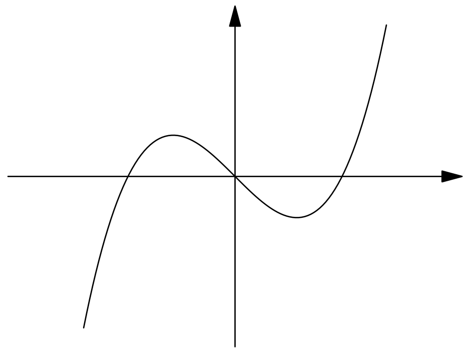


FIGURE I.5 – Graphe d'une fonction impaire

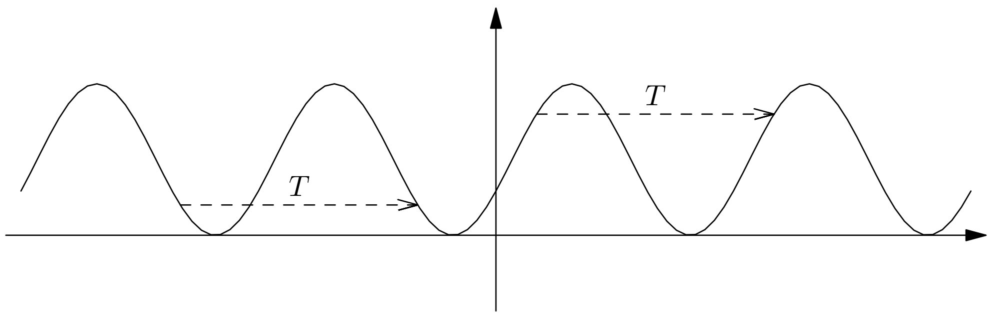


FIGURE I.6 – Graphe d'une fonction périodique de période T

Définition I.10. *Soient f une fonction et I un sous-ensemble non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$ (en général, I sera un intervalle).*

1. *On dit que f est* **croissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \geq f(y)$.*
2. *On dit que f est* **décroissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \leq f(y)$.*
3. *On dit que f est* **strictement croissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x > y$ on a $f(x) > f(y)$.*
4. *On dit que f est* **strictement décroissante** *sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x > y$ on a $f(x) < f(y)$.*

Ces propriétés se lisent facilement sur le graphe de f (voir figures I.7 et I.8).

Définition I.11. *Soient f une fonction et I un sous-ensemble non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$ (en général, I sera un intervalle).*

1. *On dit que f est* **majorée** *sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout x appartenant à I, on a $f(x) \leq M$. Dans ce cas, on dit que f est majorée par M sur I.*

   Traduction sur le graphe : f est majorée *par M sur I si le graphe de f sur I se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = M$.*
2. *On dit que f est* **minorée** *sur I s'il existe un réel m tel que pour tout x appartenant à I on a $f(x) \geq m$. Dans ce cas, on dit que f est minorée par m sur I.*

   Traduction sur le graphe : f est minorée *par m sur I si le graphe de f sur I se situe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = m$.*

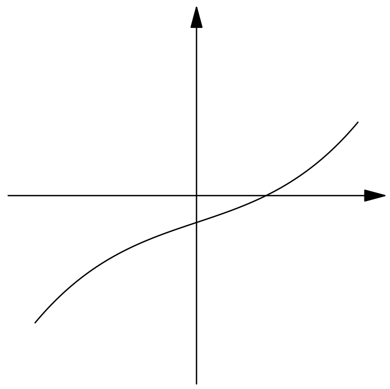


Figure I.7 – Graphe d'une fonction croissante

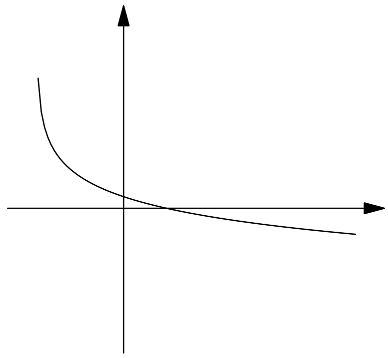


Figure I.8 – Graphe d'une fonction décroissante

3. *On dit que f est* **bornée** *sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I.*
   Traduction sur le graphe : f est bornée *sur I si le graphe de f sur I se situe entre deux droites horizontales.*

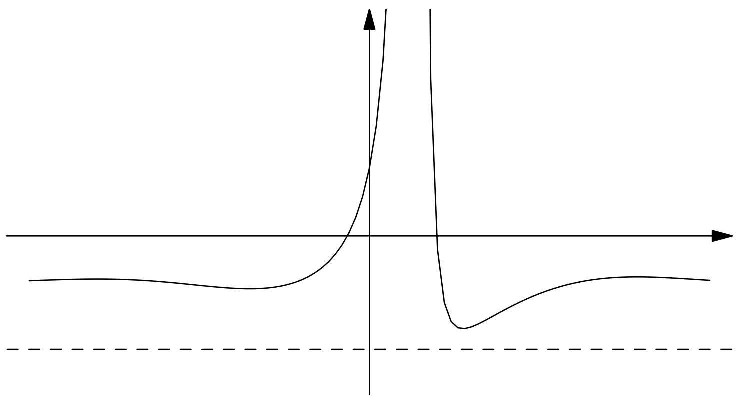


Figure I.9 – Graphe d'une fonction minorée mais non majorée

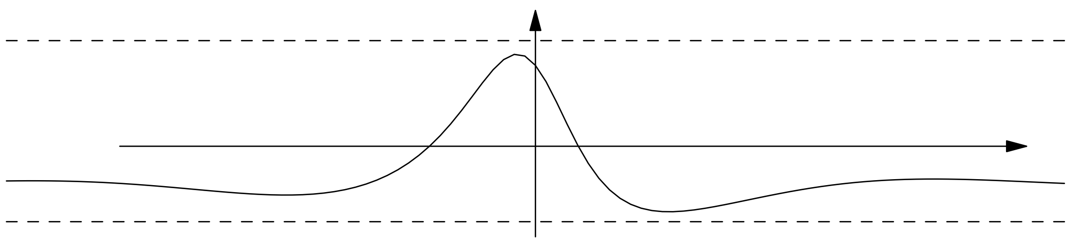


Figure I.10 – Graphe d'une fonction bornée

Il arrive parfois qu'une valeur prise par une fonction corresponde à un majorant ou à un minorant. On parle alors d'extremum. Les définitions suivantes précisent le vocabulaire.

Définition I.12. *Soit f une fonction.*

1. *On dit que f présente un* **maximum global** *en x_0 si f est majorée (sur $\mathcal{D}_f$) par $f(x_0)$.*

Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un maximum global *en x_0 si la fonction f prend des valeurs inférieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie que le graphe de f se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

2. *On dit que f présente un* **minimum global** *en x_0 si f est minorée par $f(x_0)$.*

   Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un minimum global *en x_0 si la fonction f prend des valeurs supérieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie que le graphe de f se situe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

3. *On dit que f présente un* **extremum global** *en x_0 si elle présente soit un maximum global, soit un minimum global en ce point.*

   Traduction sur le graphe : La fonction f présente un extremum global *en x_0 si la droite d'équation $y = f(x_0)$ est soit au-dessus, soit en dessous du graphe de f.*

Définition I.13. *Soit f une fonction.*

1. *On dit que f présente un* **maximum local** *en x_0 si f est majorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0 (voir la définition I.1).*

   Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un maximum local *en x_0 si au voisinage de x_0 la fonction f prend des valeurs inférieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie qu'en se restreignant à une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$ le graphe de f se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

2. *On dit que f présente un* **minimum local** *en x_0 si f est minorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0.*

   Traduction sur le graphe : Concrètement, la fonction f présente un minimum local *en x_0 si au voisinage de x_0 la fonction f prend des valeurs supérieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0. Donc cela signifie qu'en se restreignant à une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$ le graphe de f se situe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.*

3. *On dit que f présente un* **extremum local** *en x_0 si elle présente soit un maximum local, soit un minimum local en ce point.*

   Traduction sur le graphe : La fonction f présente un extremum local *en x_0 si en se restreignant à une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$, la droite d'équation $y = f(x_0)$ est soit au-dessus, soit en dessous du graphe de f.*

Remarques I.14.

1. La recherche des extrema fait partie intégrante de l'étude d'une fonction. On y reviendra au § I.6.1. Les extrema (locaux et globaux) renseignent sur les valeurs maximales et minimales prises par une quantité observée : température, acidité, vitesse, etc.
2. La fonction f présente un maximum (respectivement un minimum) local en un réel x_0 si au voisinage de x_0 la valeur atteinte par f est la plus grande (respectivement la plus petite) prise par f. Mais ce n'est pas forcément la plus grande valeur prise par f sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction représentée sur la figure I.11 admet trois maxima locaux en x_B, x_D et x_F et trois minima locaux en x_A, x_C et x_E. Aucun des extrema locaux en x_B, x_C, x_D et x_E n'est un extremum global.

I.2.3 Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions.

Définition I.15. *On définit la* **somme** $f + g$ *et le* **produit** fg *des fonctions f et g par les formules naturelles suivantes $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Leur ensemble de définition est*

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{fg} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \in \mathcal{D}_g\} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

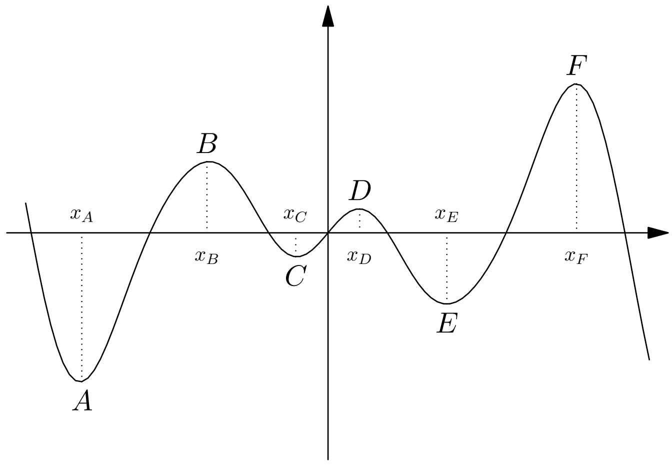


FIGURE I.11 – Minima et maxima locaux d'une fonction

On donne désormais la définition et quelques propriétés de l'importante notion de composition de fonctions.

Définition I.16. *Soit I un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$. On suppose que pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}_g$. On appelle* **composée** *des fonctions f et g, et on note $g \circ f$, la fonction définie sur I par la formule $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Si x est dans I, alors par hypothèses, d'une part $x \in \mathcal{D}_f$ et donc $f(x)$ a bien un sens et, d'autre part, $f(x)$ est dans $\mathcal{D}_g$ et $g(f(x))$ a donc bien un sens également. Ainsi, tous les éléments de I sont dans l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

Attention ! L'ordre de composition a de l'importance.

Lorsqu'on calcule $(g \circ f)(x)$, on commence par appliquer f à x, puis on applique g à $f(x)$. Le procédé est illustré dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{tikzcd}$$

On n'a donc pas (pour deux fonctions f et g quelconques) $g \circ f = f \circ g$. D'ailleurs, si l'une de ces deux fonctions est bien définie, l'autre ne l'est pas forcément...

Attention ! Ne pas confondre « produit » et « composée », c'est-à-dire ne pas confondre les deux fonctions fg $(= f \times g)$ et $f \circ g$.

Exemples I.17.

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par la formule $h(x) = \sqrt{x-1}$. Alors on a $h = g \circ f$ où f et g sont les fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{rcl} [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\ ; \\ x & \longmapsto & x - 1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[. \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

2. Étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction $\dfrac{1}{f}$ par la formule

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

C'est donc la composée de f avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Son ensemble de définition est

$$\mathcal{D}_{1/f} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \neq 0\}.$$

3. Il y a toujours plusieurs façons d'écrire une fonction donnée comme composée d'autres fonctions. Par exemple, la fonction h définie par la formule $h(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ peut se décomposer des deux façons suivantes :

$$x \xmapsto{f_1} 1 + x^2 \xmapsto{g_1} h(x)\ ; \qquad x \xmapsto{f_2} (1+x^2)^3 \xmapsto{g_2} h(x)$$

où $g_1(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

I.2.4 Fonctions réciproques

Soient I et J deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ (en général ce seront des intervalles) et $f : I \longrightarrow J$ une fonction. On a la définition suivante :

Définition I.18. *On dit que $f : I \longrightarrow J$ est* **bijective** *de I dans J si pour tout élément $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

Remarque I.19. Noter qu'il y a deux affirmations dans cette définition : d'une part, *l'existence* d'un élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$ (on dit que x est un antécédent de y) et d'autre part *l'unicité* d'un tel élément.

Supposons $f : I \longrightarrow J$ bijective de I dans J. Dans ce cas, on peut définir une fonction, appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1} de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : J & \longrightarrow & I \\ y & \mapsto & x \text{ où } x \text{ est l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

On notera que la fonction f^{-1} est elle-même bijective et sa fonction réciproque est la fonction f dont on est parti : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Attention ! Ne pas confondre f^{-1} (la fonction réciproque de f) et $\dfrac{1}{f}$ (l'inverse de f).

Supposons que I soit un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction strictement monotone définie sur I (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante). Alors, f réalise une bijection de I dans son image, notée J :

$$J = f(I) = \{f(x)\ ;\ x \in I\} = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } x \in I \text{ vérifiant } f(x) = y\}.$$

On suppose $f : I \longrightarrow J$ bijective. On a alors $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in I$ et $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout $y \in J$. Le graphe de la fonction f^{-1} se déduit ainsi facilement de celui de f (et réciproquement) : c'est son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, comme illustré sur la figure I.12. On vérifie également que la réciproque d'une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) est encore strictement croissante (resp. strictement décroissante).

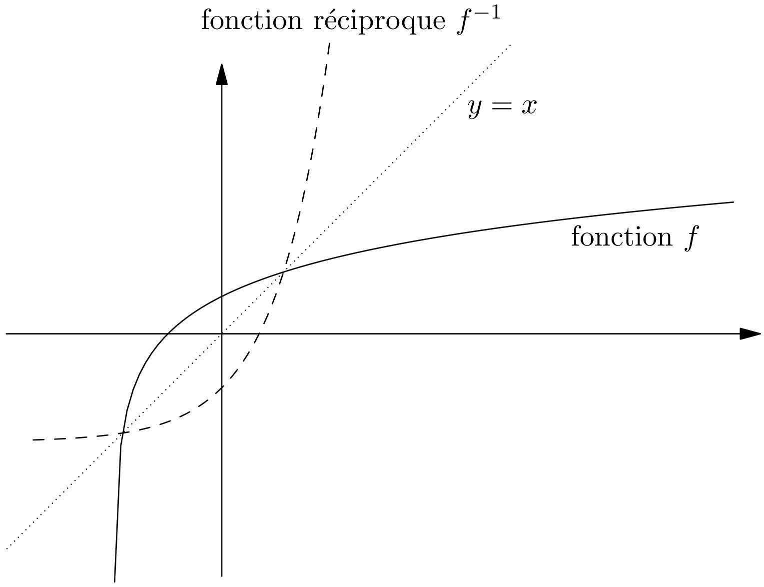


FIGURE I.12 – Graphes d'une fonction bijective et de sa fonction réciproque

I.3 Fonctions usuelles

Dans cette section, on donne la définition et les propriétés importantes de certaines fonctions dites usuelles. La plupart des fonctions que l'on considère dans ce polycopié ou dans les exercices sont obtenues à partir des opérations sur les fonctions rappelées aux paragraphes I.2.3 et I.2.4 appliquées aux fonctions usuelles. Il est donc important de bien les connaître car ce sont les « briques » de base des fonctions étudiées en Tronc Commun de Mathématiques.

I.3.1 La fonction valeur absolue

Définition I.20. *La fonction* **valeur absolue***, notée* $|\ |$*, est la fonction définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par la formule*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0 \\ -x & \textit{si } x < 0 \end{cases} .$$

Le graphe de la fonction valeur absolue est illustré sur la figure I.13. Ses propriétés essentielles sont

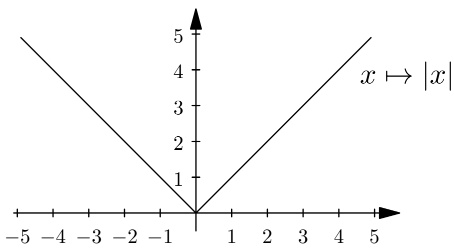


FIGURE I.13 – Graphe de la fonction valeur absolue

données dans la proposition suivante.

Proposition I.21. *Soient x et y deux nombres réels.*

1. $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

2. $|-x| = |x|$;
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)* ;
5. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Remarque I.22. Noter que la fonction valeur absolue ne prend que des valeurs positives ou nulles. Intuitivement, elle mesure une longueur ou une distance : voir la représentation graphique de $\mathbb{R}$ proposée au §I.1.1.

I.3.2 Les fonctions puissances, premier épisode

Si n est un entier strictement positif, la fonction $x \longmapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Définition I.23.

1. *Si n est un entier strictement positif, on définit $x \longmapsto x^{-n}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. C'est une fonction strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*
2. *Si $n = 0$, par définition, la fonction $x \longmapsto x^0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est constante égale à 1.*
3. *Si n est un entier strictement positif, on définit $x \longmapsto x^{1/n}$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ comme la fonction réciproque (voir §I.2.4) de la fonction $x \longmapsto x^n$ (qui est strictement croissante sur $[0, +\infty[$). C'est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, pour $n = 2$ et $x \in [0, +\infty[$ on a $\sqrt{x} = x^{1/2}$ (pour $n \geq 3$, on écrit aussi $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$).*
4. *Tout nombre rationnel α non nul s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha = \frac{p}{q}$ avec q entier strictement positif et p un entier tel que p et q n'ont pas de diviseur commun. On définit la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ par $x^\alpha = \left(x^{1/q}\right)^p = (x^p)^{1/q}$, c'est-à-dire soit la composée des fonctions $x \longmapsto x^{1/q}$ et $x \longmapsto x^p$, soit la composée des fonctions $x \longmapsto x^p$ et $x \longmapsto x^{1/q}$.*

Attention ! Ne pas confondre les fonctions $x \longmapsto x^{-n}$ et $x \longmapsto x^{1/n}$.

Par exemple, on a $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $x^{1/2} = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. On verra au §I.3.5 qu'il y a une définition naturelle, à l'aide de la fonction exponentielle, des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ pour α réel non nécessairement rationnel.

Le graphe de certaines fonctions puissances est illustré à la figure I.14.

I.3.3 Les fonctions logarithmes

On donne ici un simple aperçu de la fonction ln et de ses premières propriétés.

Rappel :
La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante sur cet intervalle, prend la valeur 1 en le réel $e \approx 2,71828$, et vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in]0, +\infty[, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y). \tag{1}$$

La fonction ln (comme les « autres » fonctions logarithmes que l'on introduira après) s'annule en 1. Elle vérifie l'égalité fondamentale $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et $\ln(1) = 0$ (c'est même la seule fonction vérifiant ces deux propriétés). Son graphe a l'allure donnée par la figure I.15.

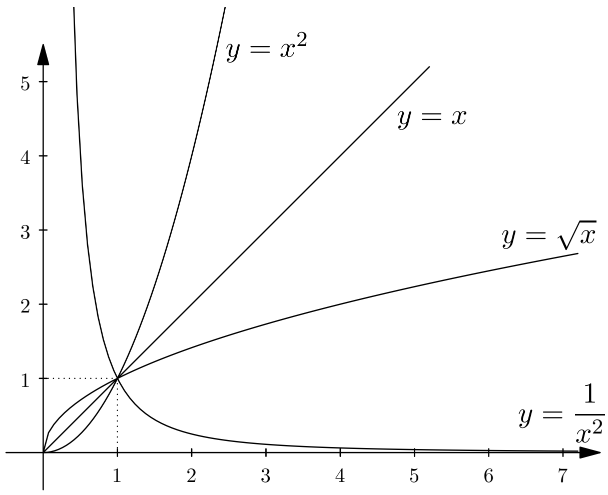


FIGURE I.14 – Graphes de quelques fonctions puissances

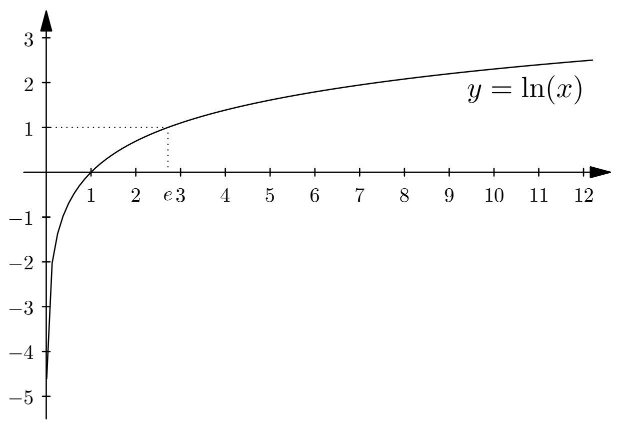


FIGURE I.15 – Graphe de la fonction logarithme népérien

Remarque I.24. La formule fondamentale (1) ci-dessus se généralise à un produit de $n \geq 1$ nombres réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs :

$$\ln(x_1 \cdots x_n) = \ln(x_1) + \ldots + \ln(x_n).$$

Cependant, on préfère souvent écrire cette formule à l'aide des symboles $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit) définis pour une fonction f quelconque de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \ldots + f(x_n) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) \cdots f(x_n).$$

La formule précédente s'écrit alors

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

Proposition I.25. *On a les égalités suivantes :*

1. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ *pour tout* $x > 0$.

2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, *pour tous* x, y *strictement positifs.*
3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ *pour* $x > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Remarque I.26. Ces formules se déduisent de la formule fondamentale (1). Lorsqu'au §I.3.5 page 20 on aura étendu la définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ aux exposants α réels, on verra que la formule (3) de la proposition ci-dessus s'étend également à cette situation plus générale.

Dans beaucoup d'applications (en chimie notamment pour les calculs de pH), on préfère utiliser la fonction **logarithme décimal**, notée log. Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$\log(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln(x).$$

En d'autres termes, c'est simplement la fonction ln multipliée par la constante $\frac{1}{\ln(10)}$ (qui vaut environ $0,434$). Elle vérifie donc la même propriété fondamentale que ln :

$$\text{Pour tous } x, y \in]0, +\infty[, \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y),$$

et de plus par définition on a $\log(10) = 1$, donc $\log(10^n) = n$ pour tout entier n et donc $\log(10^n x) = n + \log(x)$ pour tout $x > 0$ et tout entier n, ce qui rend cette fonction très utile dans beaucoup de domaines. Mais la dérivée de la fonction log est moins naturelle (on a $\log'(x) = \frac{1}{x(\ln 10)}$), c'est pourquoi en mathématiques on privilégie la fonction ln.

Plus généralement, pour tout nombre réel $a > 0$, $a \neq 1$, on peut définir une fonction logarithme en base a : il s'agit simplement de la fonction définie par la formule $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. On a en particulier, $\log_e = \ln$ et $\log_{10} = \log$. La fonction $\log_2$ est particulièrement utilisée en informatique. Les fonctions logarithmes ont de multiples intérêts pratiques, dans des domaines très divers. On en donne quelques-uns dans les exemples ci-dessous.

Exemples I.27.

1. L'échelle de Richter sert à quantifier la puissance d'un tremblement de terre : pour évaluer sa force, on cherche à mesurer le rapport $\frac{A}{A_0}$, où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence. L'échelle de Richter est une échelle logarithmique : la magnitude dite de Richter utilise le logarithme décimal et est définie par la formule : $M_L = \log A - \log A_0 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ (pour être précis, on prend pour A l'amplitude maximale des ondes sismiques à 100 kilomètres de la zone la plus violemment atteinte par le tremblement de terre, appelée l'épicentre).

   Ainsi, par exemple, cela signifie que les ondes sismiques d'un séisme de magnitude 6 ont une amplitude dix fois plus grande que celles d'un séisme de magnitude 5.

   L'intérêt d'utiliser une échelle logarithmique est clair : il permet de quantifier avec des "petits chiffres" l'écart d'amplitude des tremblements de terre : en pratique, l'échelle n'est que de 1 à 9 même si elle est théoriquement illimitée. Le plus fort séisme mesuré a eu lieu au Chili, en 1960, d'une magnitude de $9,5$ sur l'échelle de Richter. A titre de comparaison, la chute d'une brique d'une hauteur de 1 mètre provoque un tremblement de terre d'une magnitude de -2 sur l'échelle de Richter. Faites le calcul : cela signifie que les ondes provoquées par le séisme au Chili ont eu une amplitude 316 milliards de fois plus importante que celle provoquées par la brique... Il est donc bien plus commode d'employer une échelle logarithmique.
2. De même, on utilise une échelle logarithmique pour mesurer le degré d'acidité ou de basicité d'une solution : on définit le pH d'une solution par $pH = -\log([H^+])$, où $[H^+]$ indique la concentration d'ions H_3O^+ en moles par litre de la solution...

Entraînez-vous ! *En acoustique on mesure en décibels* (dB)*, par la formule* $10\log\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)$*, un son émis d'une puissance* P_1 *relativement à une puissance de référence* P_0*. Si une trompette émet un son de* 60dB*, combien de décibels émettent deux trompettes ?*

Réponse Si le son émis par une trompette est de $10\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 60\text{dB}$, le son émis par deux trompettes sera de

$$10\log\left(\frac{2P_1}{P_0}\right) = 60 + 10\log(2) \approx 63\text{dB}$$

et non pas de 120dB !

I.3.4 La fonction exponentielle

Comme pour le logarithme, on présente la définition et les premières propriétés de la fonction exp.

Définition I.28. *La fonction* **exponentielle***, notée* exp*, est la fonction réciproque (voir §I.2.4) de la fonction* ln *(qui, rappelons-le, est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*). Elle est définie sur* $\mathbb{R}$*.*
Notation : On note souvent, et on utilisera cette notation dans la suite, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$*.*

Remarque I.29. En Terminale on a défini la fonction exp comme l'unique fonction vérifiant $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. Les deux définitions sont bien entendu équivalentes.

Elle vérifie les propriétés suivantes :

Proposition I.30.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\mathrm{e}^x > 0$*.*
2. *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\ln(\mathrm{e}^x) = x$*.*
3. *Pour* $x > 0$*, on a* $\mathrm{e}^{\ln x} = x$*.*
4. $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Par définition, le graphe de exp s'obtient à partir du graphe de ln en en faisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir §I.2.4). Il est représenté sur la figure I.16.

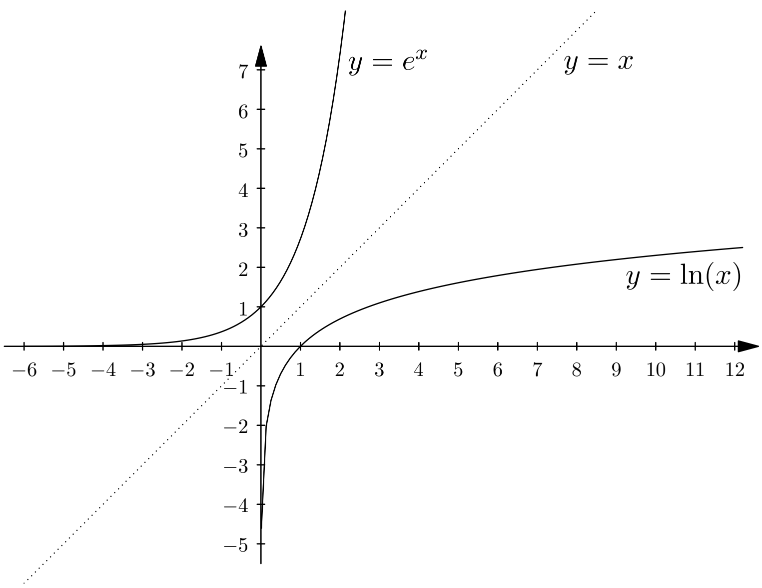


Figure I.16 – Graphes des fonctions exp et ln.

La fonction exponentielle vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y. \tag{2}$$

Remarque I.31. Avec les notations $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit) introduites à la remarque I.24, on a pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$:

$$\exp(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

Proposition I.32. *On a les formules suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$;*
2. *Pour x, y appartenant à $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$;*
3. *Pour $x \in \mathbb{R}$ et α rationnel, on a $\mathrm{e}^{\alpha x} = (\mathrm{e}^x)^\alpha$.*

Remarque I.33. Ces formules se déduisent de la formule fondamentale (2). Comme précédemment, lorsqu'au §I.3.5 page 20 on aura étendu la définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ aux exposants α réels, on verra que la formule (3) de la proposition ci-dessus s'étend également à cette situation plus générale.

Tout comme les fonctions logarithmes, la fonction exponentielle est très utile dans des domaines variés. Ses propriétés différentielles (elle est égale à sa propre dérivée) expliquent que les lois vérifiées par certaines grandeurs qui croissent ou décroissent à une vitesse proportionnelle à leur « taille » s'expriment comme des multiples de fonctions exponentielles : c'est entre autres le cas de la croissance d'une population, des intérêts composés continus en économie, ou encore de la décroissance radioactive d'un matériau.

Exemples I.34.

1. Le phénomène de désintégration radioactive est aléatoire : si on considère un noyau donné, il est impossible de prédire à quel instant la désintégration va se produire. Le nombre de désintégrations qui se produisent à un instant donné est proportionnel au nombre d'atomes $N(t)$ encore radioactifs à cet instant. Ce nombre décroît au cours du temps et l'équation vérifiée par $N(t)$ est
$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-(\ln 2)t/T},$$
où T est le temps au bout duquel la moitié des éléments radioactifs se sont désintégrés. Selon les noyaux radioactifs concernés, cette période est très variable : quelques secondes, quelques heures, plusieurs jours, voire des centaines d'années et même des milliards d'années.
Ainsi, au bout de deux périodes, il reste un quart des noyaux radioactifs d'un radioélément. Au bout de trois périodes, il reste un huitième des noyaux radioactifs d'un radioélément. Au bout de dix périodes, il reste environ un millième des noyaux radioactifs d'un radioélément.
2. La valeur d'un placement en banque à intérêts continus augmente à chaque instant de façon proportionnelle à la somme présente : si par exemple une somme augmente de 3% par an, alors la valeur à chaque instant de la somme placée est donnée par la formule
$$S(t) = S_0 \mathrm{e}^{t \ln(1{,}03)}$$
où S_0 est la somme initiale, et t le temps compté en années. Prenons un exemple : si $S(0) = 1000$ €, on aura $S(1) = 1030$ € au bout d'un an, puis $S(2) = 1060{,}9$ € au bout de deux ans... et $S(10) = 1343{,}91$ € au bout de 10 ans, $S(100) = 19218{,}63$ € si on laisse la somme 100 ans, et au bout de 1000 ans elle sera égale à environ 6874 milliards d'euros !!!
Constatez bien que ce n'est pas linéaire ! Les intérêts sont moins grands si on place deux fois une somme S_0 pendant 6 mois que si on place cette somme S_0 pendant un an !

Remarque I.35. Si une banque propose un emprunt mensualisé à 6% par an, elle devrait faire rembourser une somme égale à $S_1(t) = S_0 \mathrm{e}^{(\ln 1{,}06)t}$, où t est le temps compté en années et où S_0 est la somme initialement prêtée. En fait il arrive qu'elle raisonne de façon linéaire, avec la formule $S_2(m) = S_0 \mathrm{e}^{(\ln 1{,}005)m}$ où m est le temps compté en mois (en considérant que 6% par an correspond à $0,5$% par mois). Faites le calcul : avec la première formule, vous devez rembourser au bout d'un an la somme $S_1(1) = 1,06S_0$, alors qu'avec la deuxième vous aurez à rembourser $S_2(12) = S_0 \mathrm{e}^{12\ln(1{,}005)}$ environ égal à $1,062S_0$. Certes la différence est faible, mais sur un emprunt de 20 ans, la somme à rembourser est dans un cas environ égal à $3,21S_0$, alors que dans l'autre elle est de $6,02S_0$! ! !

I.3.5 Les fonctions puissances, second épisode

On a défini au §I.3.2 les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, pour α rationnel. En fait, on a une définition générale à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien :

Définition I.36. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ par la formule*

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Remarques I.37.

1. Grâce aux propriétés vérifiées par le logarithme et l'exponentielle, si α est rationnel cette définition coïncide avec celle déjà donnée au §I.3.2.
2. Cela explique la notation, introduite après la définition I.28, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, puisque $\mathrm{e}^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.
3. La fonction réciproque de l'application log est définie sur $\mathbb{R}$ et est donnée par $x \longmapsto 10^x = \mathrm{e}^{x\ln(10)}$.
4. Avec cette définition, on peut vérifier que les formules (3) des propositions I.25 et I.32 s'étendent au cas où α est réel (et non plus seulement rationnel).

Les fonctions exp et ln étant strictement croissantes, on en déduit les sens de variations suivants.

Proposition I.38.

1. *Si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.*
2. *Si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*
3. *Si $\alpha = 0$, la fonction $x \longmapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.*

L'allure des graphes des fonctions puissances sont représentés sur la figure I.17 selon la valeur de α. Les fonctions puissances vérifient de plus les relations suivantes :

Proposition I.39. *Soient $x > 0$, et α, β deux nombres réels.*

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = \left(x^\beta\right)^\alpha$.

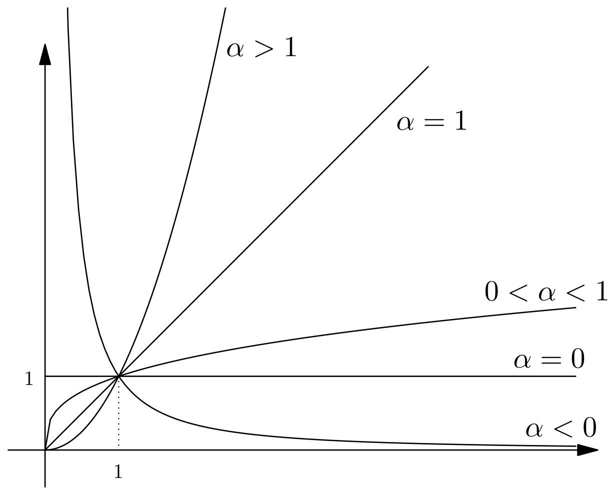


FIGURE I.17 – Graphes des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ selon les valeurs de α

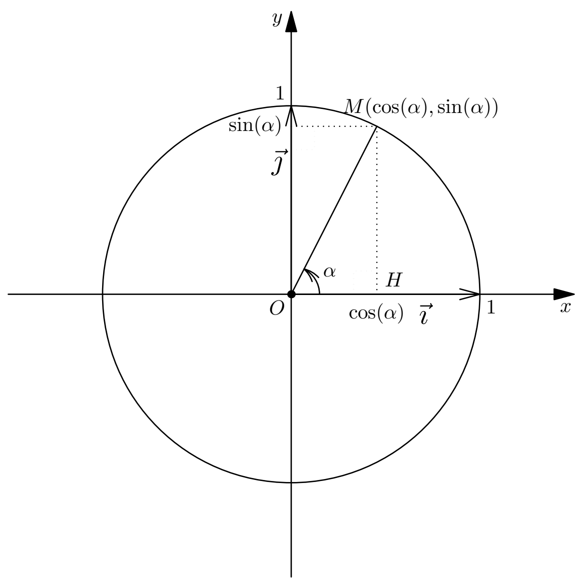


FIGURE I.18 – Le cercle trigonométrique et les fonctions sinus et cosinus

I.3.6 Les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ comme représenté sur la figure I.18. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. On place un point M sur ce cercle. La demi-droite Ox et la demi-droite passant par O et par M déterminent un angle orienté de mesure [3] α. On note $\cos(\alpha)$ l'abscisse de M et $\sin(\alpha)$ son ordonnée. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OHM fournit alors la relation fondamentale suivante : $(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2 = 1$. Pour alléger les notations, on note souvent (conformément à une habitude aussi ancienne que répandue) $\cos^2(\alpha)$ au lieu de $(\cos(\alpha))^2$ et de même $\sin^2(\alpha)$ au lieu de $(\sin(\alpha))^2$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit aussi $\cos\alpha$ au lieu de $\cos(\alpha)$ ou encore $\cos^2\alpha$ au lieu de $\cos^2(\alpha)$ (et de même avec sin). La relation précédente s'écrit alors :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{3}$$

3. On exprimera souvent les mesures des angles en radian ; on rappelle que $180° = \pi$ rad.

Comme α et $\alpha + 2k\pi$ sont deux mesures du même angle pour tout k dans $\mathbb{Z}$, on a

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha).$$

Autrement dit, les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π au sens de la définition I.7. À partir de la relation fondamentale (3) et du cercle trigonométrique représenté sur la figure I.18, on déduit certaines valeurs des fonctions sinus et cosinus en des angles de référence (du premier quadrant, c'est-à-dire du quart de cercle en haut à droite). Ces valeurs numériques à connaître sont données dans le tableau A.1 de l'annexe, page 87.
De même, on relie la valeur des fonctions sinus et cosinus en différents angles. Ces relations sont reportées dans le tableau A.2 de l'annexe.
Ainsi, on constate que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *À l'aide des tableaux A.1 et A.2, calculer les valeurs des fonctions sinus et cosinus aux angles de référence*

$$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}.$$

En tout point où la fonction cosinus ne s'annule pas, c'est-à-dire en tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on définit la *tangente de x* par la formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi, la fonction tan a pour ensemble de définition $\mathcal{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}$. Compte-tenu des propriétés de parité et de périodicité des fonctions sinus et cosinus données ci-dessus, la fonction tangente est impaire et périodique de période π.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Sur le cercle trigonométrique de la figure I.18, où se lit* $\tan\alpha$ *? Lorsqu'elle y est définie, calculer la valeur de la fonction* tan *en chacun des angles de référence ci-dessus.*

Les graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente sont représentés sur les figures I.19, I.20 et I.21.

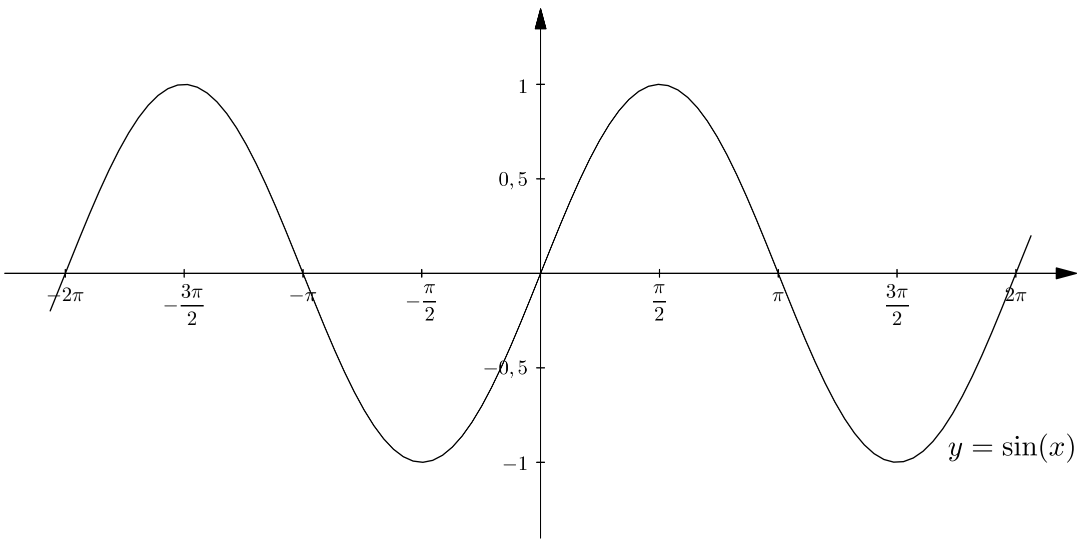


FIGURE I.19 – Graphe de la fonction sinus

Les fonctions trigonométriques sont très utilisées dans tous les domaines scientifiques. Les calculs avec ces fonctions sont « facilités » par le fait qu'elles possèdent de nombreuses propriétés (généralement issues directement de leur définition géométrique). L'annexe de ce document contient une liste des principales « formules trigonométriques » qu'il est bon de connaître... ou de savoir retrouver ! (voir page 87)

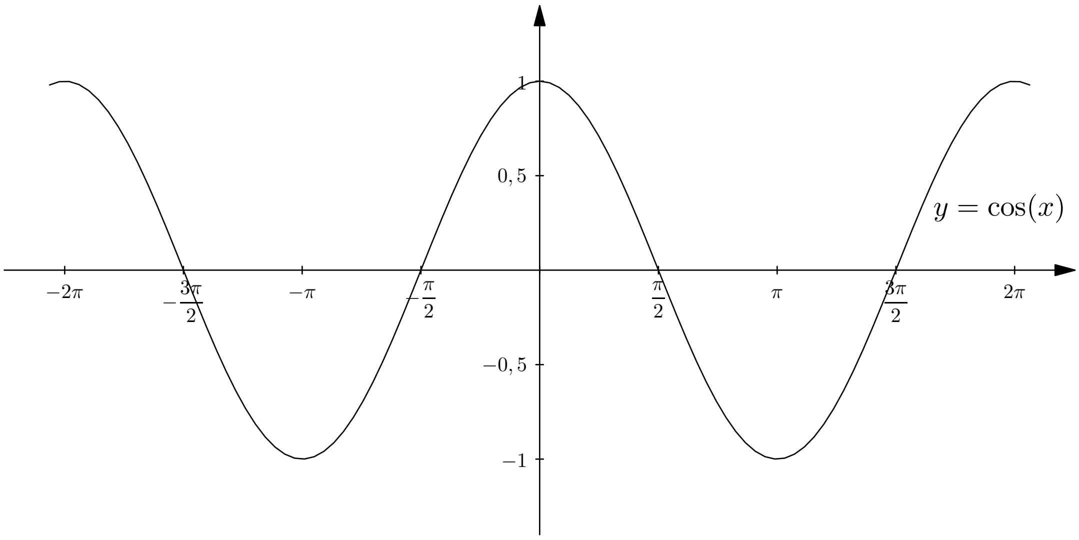


FIGURE I.20 – Graphe de la fonction cosinus

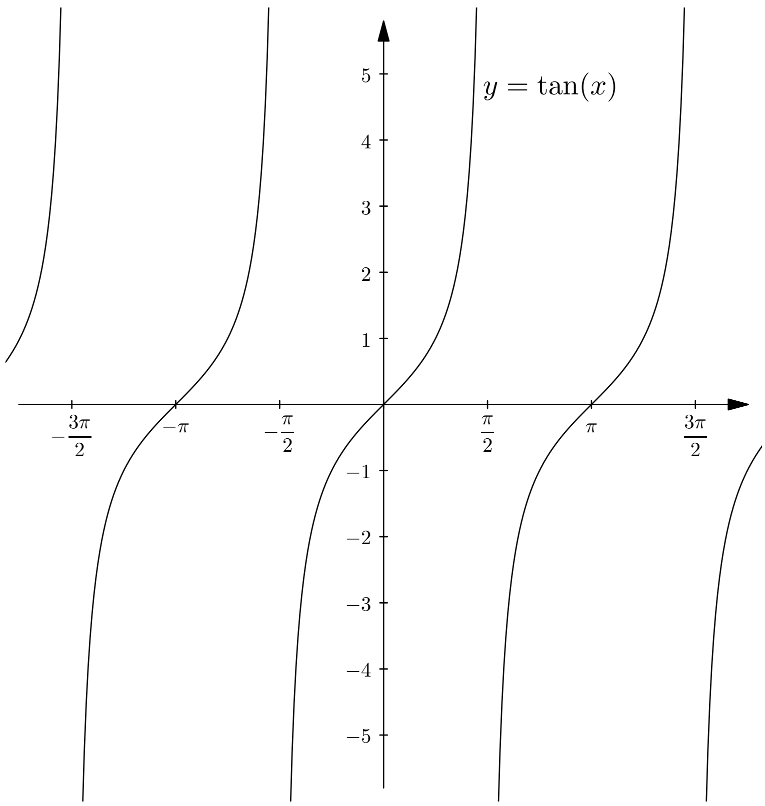


FIGURE I.21 – Graphe de la fonction tangente

Exemple I.40 (Formules d'addition)**.** Si a et b sont des nombres réels, alors

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Soient a et b deux nombres réels. Déduire de l'exemple I.40 ci-dessus des formules pour* $\cos(a-b)$.

Réponse En notant $c = -b$, on a $\cos(a-b) = \cos(a+c)$. On peut alors utiliser la relation $\cos(a+c) = \cos(a)\cos(c) - \sin(a)\sin(c)$ donnée par la proposition précédente. On sait par ailleurs que $\cos(c) = \cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(c) = \sin(-b) = -\sin(b)$. On en déduit

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Définition I.41. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction* **cosinus hyperbolique**, *notée* ch *(ou parfois* cosh*) par la formule :*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Remarque I.42. La fonction ch, définie sur $\mathbb{R}$, est paire. C'est même « la partie paire » de la fonction exponentielle (voir la remarque I.9). La fonction ch intervient en physique. C'est en effet elle qui donne l'équation de la courbe que fait une chaînette tenue par ses deux extrémités : $y(x) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ où a est une constante dépendant des paramètres physiques de la chaînette.

De la même façon, on définit la fonction sinus hyperbolique comme « la partie impaire » de la fonction exponentielle.

Définition I.43. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction* **sinus hyperbolique**, *notée* sh *(ou parfois* sinh*) par la formule :*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

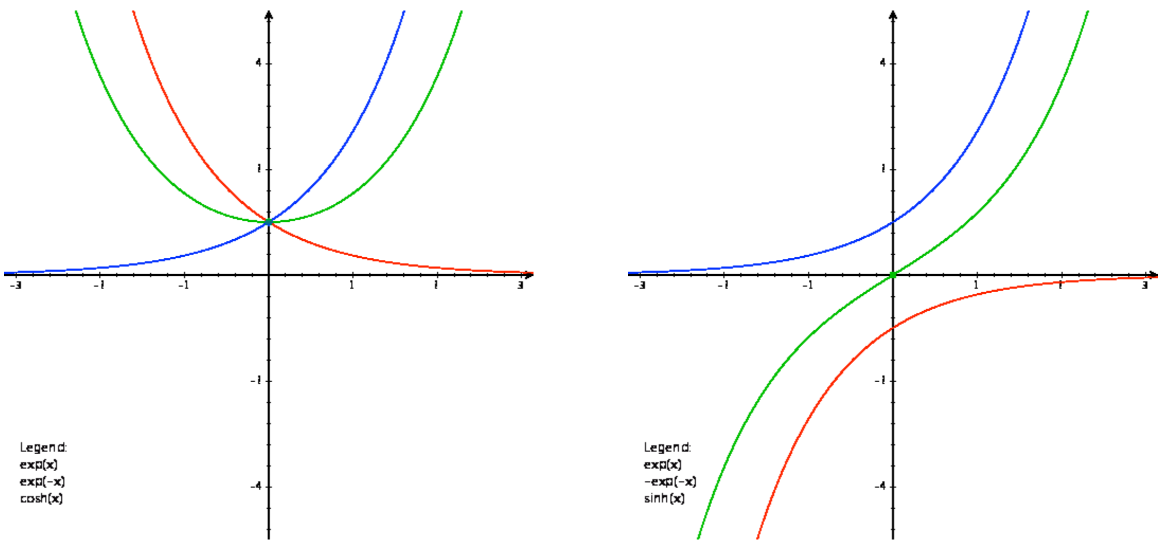


Figure I.22 – Graphes des fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques ont certaines propriétés relativement similaires aux fonctions trigonométriques (ceci est dû au fait qu'on peut aussi définir les fonctions trigonométriques en utilisant les exponentielles, mais avec des variables complexes). Une liste des propriétés usuelles des fonctions hyperboliques est donnée dans l'annexe B page 89. A titre d'exemple, voici comment on démontre la propriété suivante :

Entraînez-vous ! *Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y).$$

Réponse En effet, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x) &= \frac{1}{4}(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})\\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y})+\frac{1}{4}(e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y})\\ &= \frac{1}{2}(e^{x+y}-e^{-x-y})=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

I.4 Limites et continuité

I.4.1 Introduction

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Que se passe-t-il lorsque l'on s'approche de 0 ?

Dans le tableau ci-dessous sont données quelques valeurs approchées de $f(x)$ pour x proche de 0.

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$0,01$	$0,1$	1
$f(x)$	$0,459698$	$0,499583$	$0,499996$	$0,499996$	$0,499583$	$0,459698$

Plus x s'approche de 0 plus $f(x)$ semble s'approcher de $0,5$. Ceci peut aussi se voir sur le graphe de f (voir figure I.23).

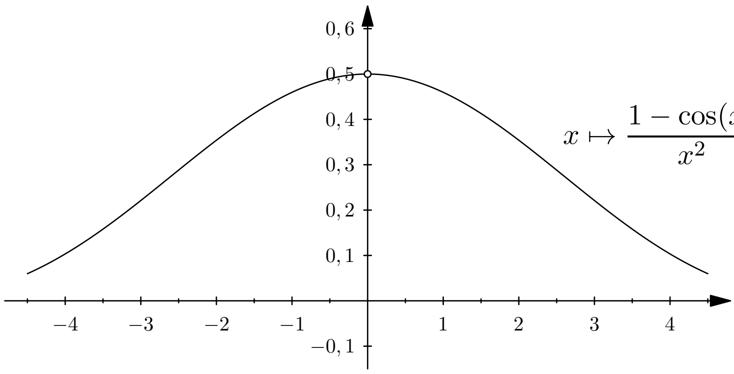


Figure I.23 – La fonction n'est pas définie en 0 mais y possède une limite

C'est ce phénomène que l'on souhaite étudier lorsque l'on parle de *limite*. Comment formaliser cette idée que $f(x)$ « s'approche de $0,5$ lorsque x s'approche de 0 » ?

Remarque I.44. Pour simplifier la discussion on rappelle la notion suivante (voir la définition I.1) : on dit qu'une fonction est définie *au voisinage d'un point* x_0 si elle est définie sur un intervalle $]a,b[$ contenant x_0. Dans la suite, on parlera souvent de « fonction définie au voisinage de x_0, *sauf peut-être* en x_0 ». Cela désignera donc une fonction f définie sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$, mais qui peut ne pas être définie au point x_0.
Cette notion simplifiera les énoncés. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est définie au voisinage de 0 sauf en 0.

I.4.2 Limite finie

Définition I.45. *Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel a, sauf peut-être en a et soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f* **admet** L **comme limite en** a*, s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment proche de a.*

Autrement dit, si aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver $r > 0$, tel que pour tout $x \in]a-r, a+r[$ différent de a, on ait $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Remarques I.46.

1. Dans cette définition seules les valeurs très petites de ε ont un intérêt.
2. On définit de manière similaire la notion de *limite à gauche* et de *limite à droite* d'une fonction f en a : par exemple, f admet L comme *limite à gauche* en a s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment proche de a *tout en étant inférieur à* a. Autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a-r, a[$ on ait $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. On écrit alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = L$. Si f admet L comme limite en a, alors f admet L comme limite à gauche en a et comme limite à droite en a. Mais attention une fonction peut admettre une limite à gauche L_g en a et une limite à droite L_d en a *sans admettre de limite en* a si $L_g \neq L_d$: par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ admet -1 comme limite à gauche en 0, admet 1 comme limite à droite en 0 mais n'a pas de limite en 0.

I.4.3 Limite infinie

On peut aussi considérer des fonctions telles que $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et s'interroger sur leur comportement au voisinage de 0. À l'aide d'une calculatrice on constate que cette fonction prend des valeurs de plus en plus grandes à mesure que x s'approche de 0. Cet exemple rentre dans le cadre donné dans la définition suivante.

Définition I.47. *Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel a, sauf peut-être en a. On dit que f* **admet** $+\infty$ **comme limite en** a*, s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut pour tout choix de x suffisamment proche de a.*

Autrement dit, si pour tout $M > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a-r, a+r[$, $x \neq a$, on ait $f(x) \in]M, +\infty[$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Écrire la définition similaire pour évoquer le fait que la limite en a est $-\infty$.*

I.4.4 Limite à l'infini

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-1}$. Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et on peut s'interroger sur son comportement lorsque x devient de plus en plus grand, lorsqu'il « s'approche de l'infini ». Voici quelques valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs croissantes de la variable x :

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	4	0,684	0,5176	0,50175	0,50175	0,5000175	0,50000175

Les valeurs prises par la fonction s'approchent de $\frac{1}{2}$, ce que l'on peut aussi voir sur le graphe de la fonction. C'est ce phénomène que nous souhaitons formaliser.

Rappelons (voir définition I.3) qu'une fonction est définie *au voisinage de* $+\infty$ si elle est définie sur un intervalle $]a, +\infty[$.

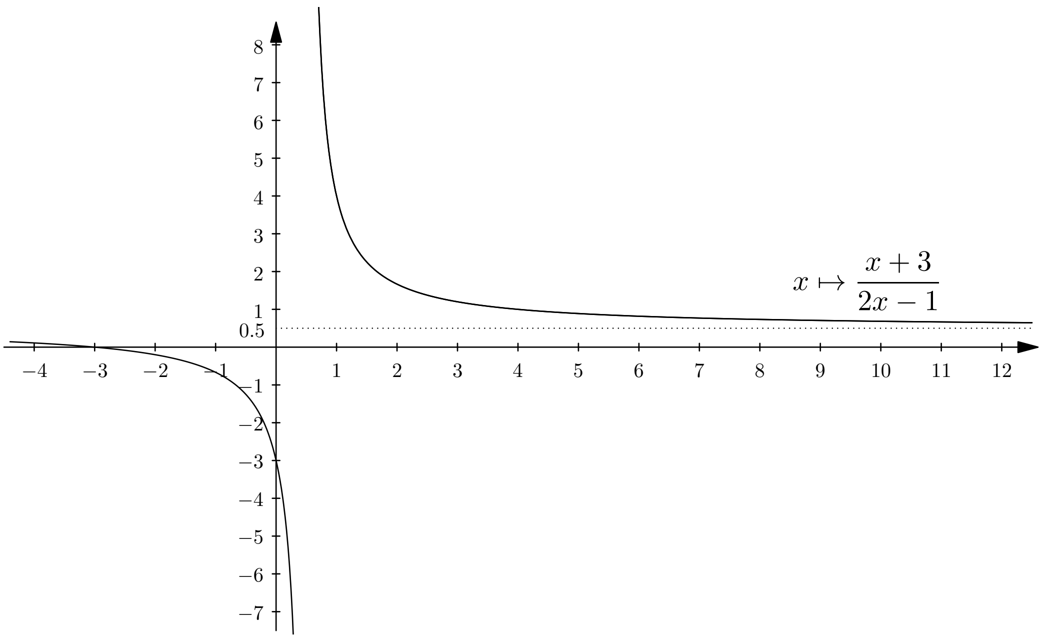


FIGURE I.24 – Les valeurs prises par la fonction $x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-1}$ tendent vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

Définition I.48. *Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f* **admet $L \in \mathbb{R}$ comme limite en $+\infty$**, *s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de L en imposant simplement à x d'être suffisamment grand.*

Autrement dit, si aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver $M > 0$, tel que pour tout réel x tel que $x > M$ on ait $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Cette situation est illustrée sur la figure I.25. Il y a une définition analogue pour une limite infi-

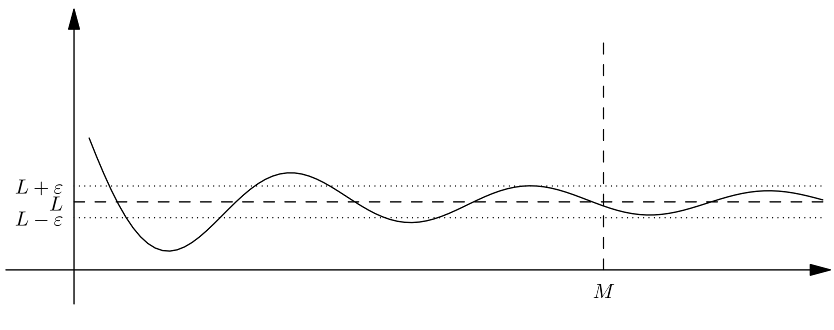


FIGURE I.25 – Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$

nie en $+\infty$:

Définition I.49. *Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f* **admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$**, *s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment grand.*

> *Autrement dit, si aussi grand que soit $N > 0$, il est possible de trouver $M > 0$, tel que pour tout réel x tel que $x > M$ on ait $f(x) > N$.*
> *Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $N > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]N, +\infty[$.*

On écrit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Écrire les définitions et illustrer sur des figures les situations suivantes :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

I.4.5 Propriétés et règles de calcul

Une première propriété, qui peut sembler évidente, mais qui est très importante est la suivante :

Proposition I.50. *Si elle existe, la limite d'une fonction en un point est unique.*

La proposition suivante précise le comportement de la limite par rapport à la composition des fonctions.

Proposition I.51. *Soient f une fonction définie au voisinage d'un réel a sauf peut-être en a, et g une fonction définie au voisinage d'un réel b sauf peut-être en b. On suppose que $f(x)$ est différent de b au voisinage de a, sauf peut-être en a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en a, et $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.*

Calculer une limite à l'aide de la définition peut s'avérer fastidieux. Dans la majorité des cas on s'en tirera heureusement à l'aide de limites de références (données au §I.4.6) et de « règles de calcul ». Ces dernières sont résumées dans le tableau I.1 où a désigne un nombre réel ou $\pm\infty$ et où f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a sauf peut-être en a.

	$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a} g(x) = L' \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L+L'$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot L'$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{L}{L'} & \text{si } L' \neq 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases}$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L' > 0 \\ -\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L' > 0 \\ -\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases}$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L' > 0 \\ +\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } L' > 0 \\ +\infty & \text{si } L' < 0 \\ ????? & \text{si } L' = 0 \end{cases}$
$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \\ ????? & \text{si } L = 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = ?????$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = ?????$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = ?????$
$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L > 0 \\ +\infty & \text{si } L < 0 \\ ????? & \text{si } L = 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = ?????$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = ?????$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = ?????$

TABLE I.1 – Règles de calcul des limites

Dans le tableau I.1, on a utilisé le symbole ????? pour désigner une « forme indéterminée », c'est-à-dire une situation où ni l'existence de la limite, ni son calcul ne résultent de résultats généraux. Les redondances du tableau peuvent laisser penser qu'il existe de nombreuses formes indéterminées. En fait si on suppose[4] que g garde un signe constant au voisinage de a (lorsque $\lim_{x\to a} g(x) = 0$), il y en a seulement de quatre types différents que par abus de notation, on écrit :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad +\infty-\infty.$$

Remarque I.52. Nous insistons sur le fait que ces formes sont indéterminées dans la mesure où **tous les cas de figure sont possibles** : il peut ne pas y avoir de limite, il se peut aussi qu'elle existe et soit finie, ou encore infinie. Montrons par exemple que chaque situation est possible dans le cas d'une somme de deux fonctions f et g telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$:

1. Si $f(x) = x+1$ et $g(x) = -x$, alors $\lim_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = 1$;
2. Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$, alors $\lim_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = +\infty$;
3. Si $f(x) = x+\cos(x)$ et $g(x) = -x$, alors $f+g$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Entraînez-vous ! *Trouver, pour chacun des trois autres types de formes indéterminées, des exemples pour lesquels il n'y a pas de limite et des exemples pour lesquels la limite existe mais est finie ou infinie.*

I.4.6 Limites des fonctions usuelles

Dans ce paragraphe, on passe en revue les limites des fonctions usuelles de la section I.3. Toutes les limites ci-dessous sont à connaître, car ce sont à partir d'elles et des règles de calculs (rappelées au paragraphe précédent) que l'on calcule la plupart des limites de fonctions que l'on rencontre. Ce sont elles aussi qui servent souvent à « lever l'indétermination » dans le cas d'une forme indéterminée.

Les fonctions puissances

On a donc les propriétés suivantes :

Proposition I.53. *Les fonctions puissances ont les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha<0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0 \\ +\infty & \text{si } \alpha>0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha<0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0 \\ 0 & \text{si } \alpha>0 \end{cases}.$$

En particulier, en utilisant les règles de calculs du §I.4.5 et la proposition ci-dessus, on vérifie que pour toute fonction polynomiale $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Les fractions rationnelles

Soient $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ et $Q : x \mapsto b_0 + b_1 x + \cdots b_p x^p$ deux fonctions polynomiales, où $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$. On vérifie comme ci-dessus que si $a \in \mathbb{R}$ est tel que $Q(a) \neq 0$ alors $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.
On termine ce paragraphe en donnant la liste des limites possibles à l'infini de la fraction rationnelle P/Q (voir le tableau I.2). En fait ces limites à l'infini s'obtiennent en ne considérant dans P

4. Sans cette hypothèse, il convient de rajouter à la liste les formes indéterminées $\frac{\infty}{0}$ et $\frac{L}{0}$ avec $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

	Hypothèses sur P et Q
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$	si $n < p$
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_p}$	si $n = p$
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$	si $n > p$, le signe dépendant de celui de $\frac{a_n}{b_p}$ et de la parité de $(n-p)$.

Table I.2 – Limites en $\pm\infty$ des fractions rationnelles

et Q que les termes de plus haut degré. En effet, en factorisant haut et bas respectivement par $a_n x^n$ et $b_p x^p$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_p} x^{n-p} \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)},$$

où $\widetilde{P}(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ et $\widetilde{Q}(x) = 1 + \frac{b_{p-1}}{b_p x} + \cdots + \frac{b_0}{b_p x^p} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ en vertu de la proposition I.53 ci-dessus et des règles de calculs du §I.4.5. Ainsi $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_p} x^{n-p}$, justifiant ainsi les résultats du tableau I.2.

Entraînez-vous ! *Écrire la règle précise pour $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ dans le cas $n > p$.*

Les fonctions logarithme et exponentielle

Proposition I.54. *La fonction* ln *vérifie les propriétés suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

Remarque I.55. Un moyen utile pour calculer certaines limites au voisinage de 0 et de $+\infty$ est de se souvenir que « *les puissances l'emportent sur les logarithmes en 0 et en $+\infty$* ». Cela signifie que lorsqu'on cherche la limite d'une expression contenant des polynômes et des logarithmes, et qu'on est a priori en présence d'une forme indéterminée alors la limite sera donnée par la limite trouvée quand on remplace les logarithmes par la constante 1. Remarquez que c'est le cas des deux dernières limites données.

Proposition I.56. *La fonction* exp *vérifie les propriétés suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

Remarque I.57. Un moyen utile pour calculer certaines limites au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ est de se souvenir que « *les exponentielles l'emportent sur les puissances en $-\infty$ et en $+\infty$* ». Cela signifie que lorsqu'on cherche la limite d'une expression contenant des polynômes et des exponentielles, et qu'on est a priori en présence d'une forme indéterminée alors la limite sera donnée par la limite trouvée quand on remplace les polynômes par la constante 1. Remarquez que c'est le cas des deux dernières limites données.

On a également les deux limites utiles suivantes.

Proposition I.58. *On a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad et \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

I.4.7 Continuité

La notion de continuité peut s'introduire de façon imagée en disant qu'une fonction f est continue sur l'intervalle I si son graphe sur cet intervalle peut se dessiner sans lever le crayon.

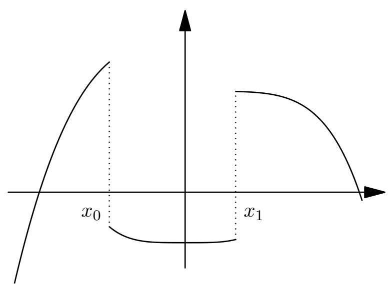


FIGURE I.26 – Graphe d'une fonction qui n'est continue ni en x_0, ni en x_1

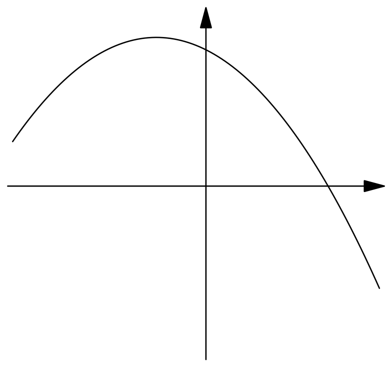


FIGURE I.27 – Graphe d'une fonction continue

La formulation précise de cette idée naïve est la suivante.

Définition I.59. *Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f* **est continue en** *a si elle admet une limite en ce point égale à $f(a)$.*

Définition I.60. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f* **est continue sur** *I si elle est continue en chaque point de I.*

La notion de continuité s'appuyant sur celle de limite, elle en hérite des propriétés. Ainsi

Proposition I.61. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Alors*

1. *La fonction $f+g$ est continue sur I ;*
2. *la fonction fg est continue sur I ;*
3. *si $f(a) \neq 0$ pour tout point a de I, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.*

Enfin la composée de deux fonctions continues est continue, c'est-à-dire que l'on a :

Proposition I.62. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $f : I_1 \to I_2$ et $g : I_2 \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I_1 et si g est continue sur I_2 alors $g \circ f$ est continue sur I_1.*

I.5 Dérivées

La dérivation sert dans la plupart des applications des mathématiques. C'est l'outil le plus pratique pour faire l'étude des variations d'une fonction et la recherche d'extrema. Comme nous allons le voir, l'idée est de remplacer, quand on le peut, la fonction par une approximation affine, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ (dont la courbe représentative est une droite).

I.5.1 Introduction

Voici l'équation donnant l'altitude, en fonction du temps, d'une scorie expulsée par un volcan d'Auvergne lors de sa dernière éruption il y a 6000 ans :

$$h = f(t), \text{ avec } f(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t, \tag{4}$$

où $g = 9,8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ est l'accélération due à la pesanteur, $h_0 = 1200\,\mathrm{m}$ est l'altitude du cratère et $v_0 = 30\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ est la vitesse verticale d'expulsion de la scorie à l'instant $t = 0\,\mathrm{s}$. Cette équation est simplement celle obtenue à partir des lois de Newton, en négligeant notamment la résistance exercée par l'air.

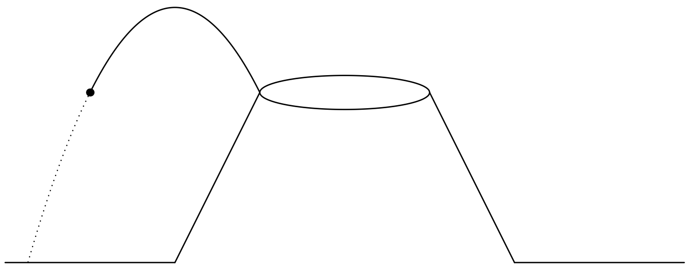


Figure I.28 – Trajectoire de la scorie après son expulsion du volcan

Imaginons qu'à l'époque un observateur ait été présent pour faire la mesure de cette altitude en fonction du temps. Voici le tableau de valeurs qu'il aurait pu remplir :

t en s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h en m	1200	$1225,1$	$1240,4$	$1245,9$	$1241,6$	$1227,5$	$1203,6$	$1169,9$	$1126,4$

D'après ces valeurs, on voit que l'altitude maximale de la trajectoire se situe aux environs de 1245 m, à $t = 3\,\mathrm{s}$. Comment déterminer de façon précise ce maximum ? Une approche serait de procéder à des mesures plus fines autour de l'instant $t = 3\mathrm{s}$. On obtiendrait :

t en s	$2,900$	$2,990$	$2,999$	$3,000$	$3,001$	$3,010$	$3,100$
h en m	$1245,791$	$1245,894$	$1245,899$	$1245,900$	$1245,901$	$1245,906$	$1245,911$

On voit donc que $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ n'est pas le moment où l'altitude de la scorie est maximale et que cette méthode n'est pas près de nous fournir la bonne valeur. On peut cependant en déduire la vitesse d'élévation moyenne entre $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ et un autre instant de mesure t en calculant le **taux de variation**, donné par le rapport entre l'écart d'altitude et la durée :

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t) - 1245,9}{t - 3}.$$

Bien sûr, ce rapport ne peut pas être calculé pour $t = 3\,\mathrm{s}$, mais il donne la vitesse d'élévation moyenne v_{moy} entre $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ et tout autre instant de mesure $t \neq 3\,\mathrm{s}$:

t en s	$2,900$	$2,990$	$2,999$	$3,000$	$3,001$	$3,010$	$3,100$
v_{moy} en m.s^{-1}	$1,090$	$0,649$	$0,605$	???	$0,595$	$0,551$	$0,110$

Pour compléter ce tableau, on définit la **vitesse instantanée** à l'instant $t_0 = 3\,\mathrm{s}$, $v_{inst}(t_0)$: c'est la limite (lorsqu'elle existe) de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t, quand t tend vers t_0. On a donc :

$$v_{inst}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

En utilisant l'expression de f donnée dans (4) on calcule :

$$\begin{aligned} v_{inst}(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - (h_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 + v_0 t_0)}{t - t_0} \\ &= v_0 - \tfrac{1}{2}g \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} \\ &= v_0 - \tfrac{1}{2}g \lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} \\ &= v_0 - g t_0 \end{aligned} \tag{5}$$

On dispose cette fois d'un bon critère pour trouver le point d'altitude maximum : supposons qu'à t_0 la vitesse (d'élévation) instantanée de la scorie soit strictement positive. Alors le taux de variation d'altitude entre t_0 et tout instant suffisamment voisin est strictement positif. En particulier, on peut trouver $t > t_0$ tel que l'altitude $f(t)$ soit plus grande que celle à t_0. Le même raisonnement montre que si la vitesse instantanée à t_0 est strictement négative, l'altitude n'est pas maximale. Ainsi, pour que t_0 soit un instant où l'altitude est maximale, il faut que la vitesse instantanée soit nulle en t_0. On trouve alors facilement que $t_0 = v_0/g = 3,061\,\mathrm{s}$ et que l'altitude maximale est $1245,918\,\mathrm{m}$.
Ainsi, une donnée importante pour étudier une fonction f au voisinage d'un point t_0 est

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite *la dérivée de f au point* t_0, que l'on note $f'(t_0)$. Cette dérivée correspond à la vitesse instantanée en t_0. En physique, la dérivée de f au point t_0 est souvent notée $\dot{f}(t_0)$.

> **Remarque I.63.** Il est clair que l'équation (4) n'est pas valable à tout instant : au bout d'un moment, la scorie retombe sur le sol. Si t_0 est cet instant, on ne peut plus parler de vitesse instantanée en t_0 : la vitesse moyenne entre t_0 et un autre instant changeant brutalement au voisinage de t_0, la limite $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ n'existe pas. La fonction donnant l'altitude de la scorie en fonction du temps n'est pas dérivable en ce point.

I.5.2 Définition et propriétés

Donnons à présent la définition et les règles permettant le calcul de la dérivée :

Définition I.64. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x. On dit que f est* **dérivable** *en x si le quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. On note alors*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si f est dérivable en chaque point d'un intervalle $]a, b[$, on dit que f est dérivable sur $]a, b[$. On note alors f' la fonction qui à tout réel $x \in]a, b[$ associe le nombre $f'(x)$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si f' est continue sur $]a, b[$, on dit que f est **continûment dérivable***, ou encore que f est de* **classe** C^1 *sur $]a, b[$.*

Remarquons que le quotient $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'est rien d'autre que le taux de variation $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ de f entre x et $x+h$.

Remarque I.65. Si le graphe d'une fonction continue peut se dessiner sans lever le crayon, celui d'une fonction dérivable est de plus (on verra au corollaire I.75 qu'une fonction dérivable est en particulier continue) *lisse*, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de « brisure ».

Exemples I.66.

1. Montrons que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en $x_0 = 1$. Déjà, f est définie au voisinage de 1. Puis on a $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$, donc ce taux de variation a bien une limite quand h tend vers 0. On trouve $f'(1) = 2$.
   En fait on peut généraliser ce raisonnement à tout $x \in \mathbb{R}$: puisque $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x+h$, on trouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 2x$.
2. La fonction $f(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ introduite dans la formule (4) est dérivable sur $\mathbb{R}$: les calculs sont faits (voir formule (5)). On a $f'(t) = v_0 - gt$.

I.5.3 Dérivées des fonctions usuelles

Dans le tableau I.3 ci-dessous[5], on a listé les dérivées de la plupart des fonctions usuelles vues à la section I.3. Une autre façon de noter la fonction dérivée de f est : $f' = \frac{df}{dx}$.

Fonction	**Domaine de dérivabilité**	**Dérivée**	**Notation**
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
x^α	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$	
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\, x$	
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}\, x$	

Table I.3 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Attention ! Cette notation ne signifie pas que f' est un quotient, mais rappelle plutôt la définition :

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Poussons l'ambiguïté plus loin : on écrira même $df = f'(x)dx$ pour exprimer que $\Delta f = f'(x)\,\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$ en 0 (cette notation signifie que $\Delta f - f'(x)\Delta x$ est **négligeable** devant Δx quand Δx tend vers 0, ou plus précisément que le quotient $\frac{\Delta f - f'(x)\Delta x}{\Delta x}$ a pour limite 0 quand Δx tend vers 0). Cette notation, appelée **notation différentielle**, rendra plus naturelles certaines formules et certaines approximations.

5. À de rares exceptions près (comme les fonctions valeur absolue ou racine carrée), on n'insistera pas sur les différences (parfois importantes) pouvant exister entre le domaine de définition d'une fonction, son domaine de continuité et celui de dérivabilité.

Règles de calculs des dérivées

Dans la pratique, on n'utilise que très rarement la définition à l'aide du taux de variation pour le calcul de la dérivée d'une fonction. On préfère en général décomposer la fonction à dériver en une somme, un produit ou une composée de fonctions usuelles et utiliser le tableau des dérivées des fonctions usuelles ci-dessus. La dérivée cherchée se déduit alors de règles de calculs que l'on donne maintenant.

Théorème I.67. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$. On a :*

1. *la fonction $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $(f+g)' = f'+g'$;*
2. *la fonction $f \cdot g : x \mapsto f(x)\cdot g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$;*
3. ***si** g **ne s'annule pas sur** $]a,b[$, la fonction $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Corollaire I.68. *Soient f une fonction dérivable sur $]a,b[$, et c un réel.*

1. *La fonction $cf : x \mapsto c\cdot f(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et $(cf)' = cf'$;*
2. *si g ne s'annule pas sur $]a,b[$, la fonction $1/g$ est dérivable sur $]a,b[$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.*

Pour démontrer ce théorème, ainsi que le suivant, il suffit d'utiliser les règles de calculs des limites.

Théorème I.69. *Soient $g :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ et $f :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction composée $f\circ g :]a,b[\to\mathbb{R}$ définie par $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ est dérivable et $(f\circ g)' = g'\cdot(f'\circ g)$.*

Remarque I.70. La notation différentielle permet de mémoriser facilement la formule précédente, sous la forme d'une dérivation par étapes : f est une fonction de g, donc $df = f'(g)\,\mathrm{d}g$, et g est une fonction de x, donc $dg = g'(x)\,\mathrm{d}x$; si on veut dériver f comme une fonction de x via g, on combine les deux expressions pour trouver : $\mathrm{d}(f\circ g) = f'(g)\cdot g'\,\mathrm{d}x$, ce qui signifie : $(f\circ g)' = \frac{\mathrm{d}(f\circ g)}{\mathrm{d}x} = g'\cdot f'(g)$.

Exemples I.71.

1. Calculons la dérivée de $x\mapsto \tan x$. Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, puisque sin et cos sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on trouve que tan est dérivable en tout point où cos ne s'annule pas, c'est-à-dire : tan est dérivable sur son domaine de définition. Pour mémoire, ce domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé des réels de la forme $\pi/2 + k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$ (voir §I.3.6). Puisque $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$, on obtient que si x est dans le domaine de définition de tan, alors
$$\tan' x = \frac{\sin' x\cos x - \cos' x\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$
2. Calculons la dérivée de $g : x\mapsto \cos(\ln x)$. On remarque que g est la composée de $U : x\mapsto \ln x$ et de $f : u\mapsto \cos u$. Puisque f est définie sur tout $\mathbb{R}$, le domaine de définition de g est celui de U, c'est-à-dire $]0,+\infty[$. Les fonctions f et U sont dérivables sur leur domaine de définition, donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$. Enfin, pour $x\in]0,+\infty[$, on a $U'(x) = 1/x$ et pour $u\in\mathbb{R}$ on a $f'(u) = -\sin u$. Puisque $g = f\circ U$ on trouve que pour $x\in]0,+\infty[$, on a $g'(x) = U'(x)\cdot f'(U(x)) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$.

I.5.4 Approximation affine d'une fonction

La propriété fondamentale liée à la dérivabilité d'une fonction est celle de pouvoir faire localement l'approximation de sa courbe représentative par une droite (la tangente) :

Proposition I.72. *Supposons que f est une fonction dérivable en x_0. Alors, pour x suffisamment proche de x_0, on peut écrire f sous la forme :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0), \tag{6}$$

où ε est une fonction, définie au voisinage de 0, telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$. Autrement dit, l'erreur commise en approximant la valeur de $f(x)$ au voisinage de x_0 par la formule $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est négligeable (voir la définition de ce terme donnée page 35) devant l'écart $x - x_0$.

Remarque I.73. La fonction $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est affine (c'est-à-dire est un polynôme de degré au plus 1) : sa courbe représentative est une droite.
La formule (6) permet donc de faire une estimation pratique de f au voisinage de x_0 avec une formule du type $ax + b$ à partir de $x_0, f(x_0)$ et $f'(x_0)$: les coefficients a et b sont donnés par $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.
En d'autres termes, on peut faire l'approximation de la courbe représentative de f au voisinage de x_0 par une droite. Cette droite est appelée la *tangente à la courbe représentative de f en x_0*. Elle passe par le point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et a pour pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

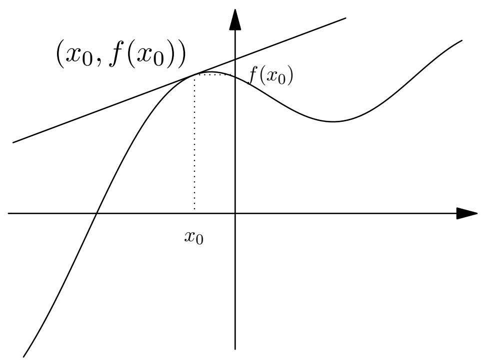


FIGURE I.29 – Au voisinage du point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, le graphe de la fonction f est bien approché par sa tangente

Exemple I.74. Reprenons l'exemple étudié dans l'introduction. Quand on regarde l'écart entre la courbe et la tangente, on voit que plus on zoome sur l'instant t_0, moins on arrive à faire la différence entre la courbe et la tangente.
Nous allons comparer les valeurs de la fonction définie en (4) données dans les deux tableaux de valeurs avec l'**approximation affine** obtenue en utilisant la dérivée à l'instant $t_0 = 3$ s : l'approximation de $f : t \mapsto h_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ donnée par (6) pour $t_0 = 3$ est un polynôme du premier degré qui s'écrit :

$$P(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = h_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 + (v_0 - gt_0)t = 1244,1 + 0,6t.$$

On obtient les valeurs approximatives :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	1200	1225,1	1240,4	1245,9	1241,6	1227,5	1203,6	1169,9	1126,4
$P(t)$	1244,1	1244,7	1245,3	1245,9	1246,5	1247,1	1247,7	1248,3	1248,9

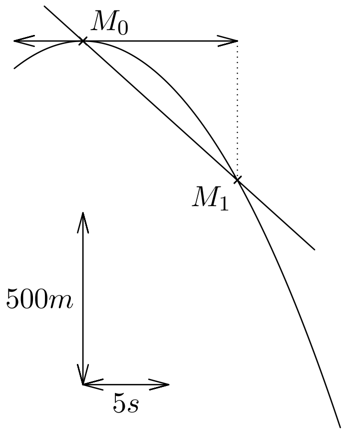


FIGURE I.30 – $t_1 - t_0 = 9$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ $400m$ à l'instant t_1

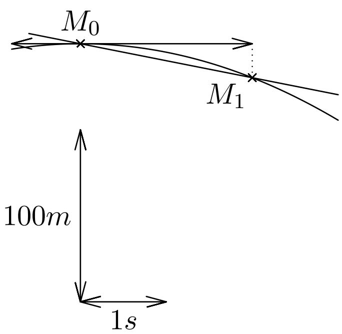


FIGURE I.31 – $t_1 - t_0 = 2$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ $20m$ à l'instant t_1

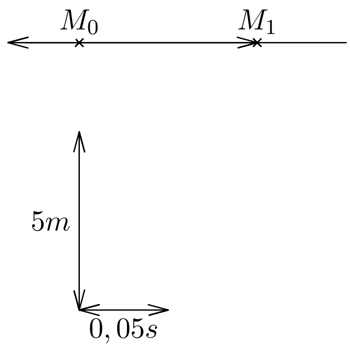


FIGURE I.32 – $t_1 - t_0 = 0,1$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ $5mm$ à l'instant t_1 !

où l'on réalise que l'approximation, relativement correcte pour $t = 2$ ou 4, est vraiment grossière pour les valeurs trop éloignées de t_0, alors qu'en faisant les calculs pour des valeurs proches de t_0, on obtient :

t	$2,900$	$2,990$	$2,999$	$3,000$	$3,001$	$3,010$	$3,100$
$f(t)$	$1245,791$	$1245,894$	$1245,899$	$1245,900$	$1245,901$	$1245,906$	$1245,911$
$P(t)$	$1245,840$	$1245,894$	$1245,899$	$1245,900$	$1245,901$	$1245,906$	$1245,960$

ce qui montre la qualité de l'approximation au voisinage de t_0.

En plus de fournir cette formule simple d'approximation, une autre conséquence de (6) s'obtient en l'utilisant pour calculer $\lim_{x \to x_0} f(x)$:

Corollaire I.75. *Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Remarque I.76. Un exemple classique d'une fonction continue mais non dérivable est celui de la fonction valeur absolue : elle est continue en 0, mais n'y est pas dérivable (le taux d'accroissement a une limite à gauche égale à -1 et une limite à droite égale à 1, comme l'atteste son graphe ; voir figure I.13).

I.6 Étude de fonctions

Dans cette section, on utilise les notions vues précédemment (limites, continuité, dérivabilité) pour étudier plus précisément les fonctions, de façon globale ou localement en certains points particuliers.

I.6.1 Sens de variation et recherche d'extrema

Les figures I.33, I.34 et I.35 suivantes illustrent le fait que le signe du taux de variation d'une fonction (donc le signe de la dérivée, si elle existe, de la fonction) change au passage par un extremum local (voir la définition I.13).

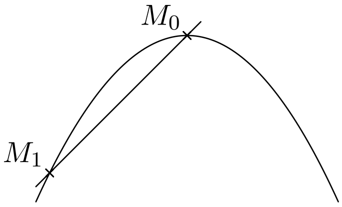


Figure I.33 – M_1 est à gauche du maximum M_0 : la pente de M_0M_1 est positive

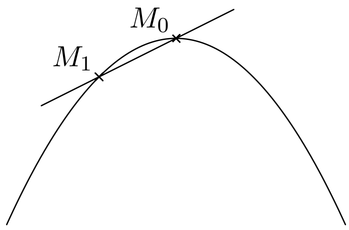


Figure I.34 – M_1 se rapproche de M_0 : la pente est moins grande

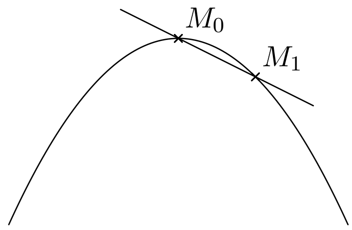


Figure I.35 – M_1 a dépassé M_0 : la pente est devenue négative

Entraînez-vous ! *La situation dessinée est celle au passage par un maximum. Faire de même sur un dessin dans le cas d'un minimum.*

Plus généralement, on a le critère suivant :

Théorème I.77. *Soit f une fonction dérivable en a. Pour que a soit un extremum local de f, il faut que $f'(a) = 0$.*

Remarque I.78. S'il faut que la dérivée s'annule pour avoir un extremum local, la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pas un extremum.

En pratique, pour faire l'étude des variations d'une fonction la proposition suivante est très utile :

Proposition I.79. *Supposons que f soit une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$.*

1. *f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a, b[$;*
2. *f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est positive ou nulle sur $]a, b[$.*
3. *f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est négative ou nulle sur $]a, b[$.*
4. *Si f' est strictement positive sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.*
5. *Si f' est strictement négative sur $]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*

Entraînez-vous ! *Montrer que pour $x > 0$ on a $\ln x \leq x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.*

Réponse Posons $f(x) = \ln x - (x - 1)$. C'est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1/x - 1$. Autrement dit f' s'annule en 1, prend des valeurs strictement positives sur $]0, 1[$ et strictement négatives sur $]1, +\infty[$. Comme f est continue sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$, on en déduit le tableau de variations suivant. Puisque $f(1) = 0$, l'inégalité est prouvée. Pour les cas d'égalité, on a déjà

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Figure I.36 – Tableau de variations de la fonction f

observé que $f(1) = 0$. Soit $x \geq 1$ tel que $f(x) = 0$. Comme f est décroissante sur $[1, x]$ et que $f(1) = f(x)$, elle doit y être constante. Si $x > 1$, cela implique par la proposition précédente que f' s'annule ailleurs qu'en 1, ce qui est impossible. On raisonne de la même manière pour montrer que f ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

I.6.2 Concavité, convexité, point d'inflexion

On a défini à la section I.5 la dérivée f' d'une fonction dérivable f. Si f' est elle-même dérivable, on dit que f est deux fois dérivable et on note f'' la dérivée de f'. On l'appelle *dérivée seconde* de f. Tant que la fonction obtenue est dérivable, on peut réitérer ce processus. On obtient ainsi un ensemble de fonctions appelées dérivées successives de f : $f', f'' = (f')', f^{(3)} = f''' = (f'')', f^{(4)} = (f^{(3)})', \dots$

Définition I.80. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* **convexe** *si « son graphe est tourné vers le haut », c'est-à-dire si quels que soient les points A et B de son graphe, le segment $[AB]$ est entièrement situé au-dessus de son graphe.*

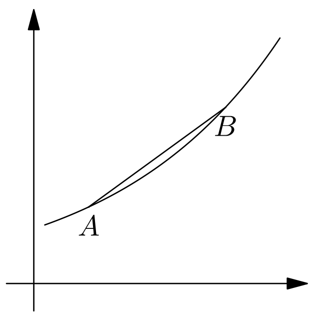


FIGURE I.37 – Graphe d'une fonction convexe

Dans la situation inverse, on parle de fonction concave :

Définition I.81. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* **concave** *si « son graphe est tourné vers le bas », c'est-à-dire si quels que soient les points A et B de son graphe, le segment $[AB]$ est entièrement situé en dessous de son graphe.*

La caractérisation suivante des fonctions convexes est utile dans la pratique.

Proposition I.82. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.*
2. *Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.*

On a bien entendu une caractérisation équivalente des fonctions concaves :

Proposition I.83. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.*
2. *Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est concave si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles.*

Exemples I.84.

1. La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est concave : sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ qui ne prend que des valeurs négatives sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction exp en revanche est convexe sur $\mathbb{R}$: elle est égale à sa dérivée seconde et ne prend que des valeurs positives.
3. Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont convexes et concaves à la fois. Lorsque $n \geq 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $[0, +\infty[$.

Définition I.85. *Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que f présente un* **point d'inflexion** *en x_0 si f est concave sur $[a, x_0]$ et convexe sur $[x_0, b]$ ou inversement.*

À l'aide des propositions ci-dessus on a une caractérisation des points d'inflexion.

Proposition I.86. *Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$. Alors f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.*

Remarque I.87. Les points d'inflexion renseignent sur l'allure locale d'une courbe et leur connaissance permet un tracé plus précis. En chimie, lors d'un dosage d'un acide par une base, le pH augmente. La courbe est montante et présente un point d'inflexion à l'équivalence.

Chapitre II

Vecteurs et fonctions de plusieurs variables

II.1 Vecteurs du plan

II.1.1 Généralités

Le plan euclidien sera muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$. La paire de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ est appelée une base orthonormée du plan euclidien.
Si A est un point du plan, ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ sont les nombres réels x et y tels que

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Les coordonnées d'un point le déterminent complètement. Cela signifie que si A et A' ont les mêmes coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$, alors $A = A'$. En général $M(x, y)$ désignera le point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ sont les nombres réels x et y tels que

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

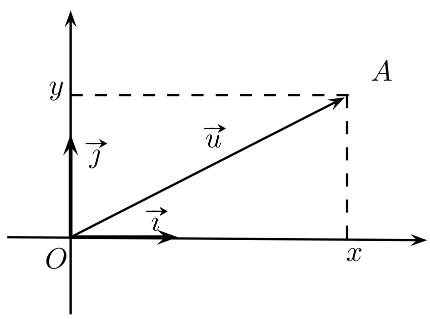
Ainsi, les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ sont les coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ de l'unique point A du plan tel que

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}.$$

Les coordonnées des vecteurs ont un comportement linéaire. Cela signifie que pour tous vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ et tout nombre réel λ, les égalités

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (x + x')\vec{\imath} + (y + y')\vec{\jmath}\ , \\ \lambda\vec{u} &= (\lambda x)\vec{\imath} + (\lambda y)\vec{\jmath} \end{aligned}$$

sont vraies.



Enfin, si A_1 et A_2 sont deux points du plan de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ aura pour coordonnées $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, c'est à dire :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}.$$

II.1.2 Vecteurs colinéaires, déterminant

Deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou bien $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, autrement dit tel que $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$ ou bien $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$. Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires quand leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est à dire quand

$$x_1y_2 = x_2y_1.$$

Définition II.1. *Le nombre réel $x_1y_2 - x_2y_1$ est appelé le* **déterminant** *des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Il est noté :*

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \quad \textit{ou encore} \quad \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) \tag{1}$$

La colinéarité de deux vecteurs peut donc s'énoncer sous la forme :

Proposition II.2. *Dans le plan, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.*

Exemple II.3. Les vecteurs $\vec{\imath} - \sqrt{2}\,\vec{\jmath}$ et $-\sqrt{2}\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}$ sont colinéaires.

Puisque trois points A, B, C du plan sont alignés si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, on obtient :

Proposition II.4. *Trois points A, B, C du plan soient alignés si et seulement si* $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

II.1.3 Produit scalaire dans le plan

Définition II.5.

• *Le* **produit scalaire** *du plan euclidien est le procédé qui à deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ associe le nombre réel*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

• *Deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan euclidien sont* **orthogonaux** *(notation : $\vec{u} \perp \vec{v}$) si*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

• *La* **norme** *d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel positif*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

Par exemple, les vecteurs $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de norme $\sqrt{2}$.

Si x, y sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on obtient

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et cette valeur s'interprète comme la longueur du vecteur $\vec{u}$. Plus généralement, si A_1 et A_2 sont deux points du plan de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la *distance euclidienne* entre les points A_1 et A_2 est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$, c'est à dire :

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Propriétés élémentaires du produit scalaire

Proposition II.6 (Propriétés du produit scalaire)**.** *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et tout nombre réel λ, on a*
(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
(ii) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$; *(ii)'* $\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
(iii) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$; *(iii)'* $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;
(iv) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ *et* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$;
(v) Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ *alors* $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$;
(vi) $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

La propriété (i) est appelée symétrie, $(ii), (iii)$ forment la propriété dite de linéarité à gauche. Elles sont immédiates à démontrer et induisent la linéarité à droite, c'est à dire $(ii)', (iii)'$. La propriété (iv) dit que le produit scalaire est défini positif et (v) est la formulation vectorielle du théorème de Pythagore : elles sont immédiates. La propriété (vi) est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz et se déduit des précédentes comme suit. Soit $\vec{e}$ un vecteur du plan de norme 1 (c'est à dire $\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1$) et posons $\vec{u'} = \langle \vec{u}, \vec{e} \rangle \vec{e}$. Alors $\vec{u'}$ et $\vec{u} - \vec{u'}$ sont orthogonaux. En effet :

$$\langle \vec{u} - \vec{u'}, \vec{u'} \rangle \overset{(ii),(iii)}{=} \langle \vec{u}, \vec{u'} \rangle - \langle \vec{u'}, \vec{u'} \rangle \overset{(ii),(iii)}{=} \langle \vec{u}, \vec{e} \rangle^2 - \langle \vec{u}, \vec{e} \rangle^2 = 0.$$

En appliquant le théorème de Pythagore aux vecteurs $\vec{u} - \vec{u'}$ et $\vec{u'}$, on trouve

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{u'} + \vec{u'}\|^2 \overset{(v)}{=} \|\vec{u} - \vec{u'}\|^2 + \|\vec{u'}\|^2 \geq \|\vec{u'}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{e} \rangle^2.$$

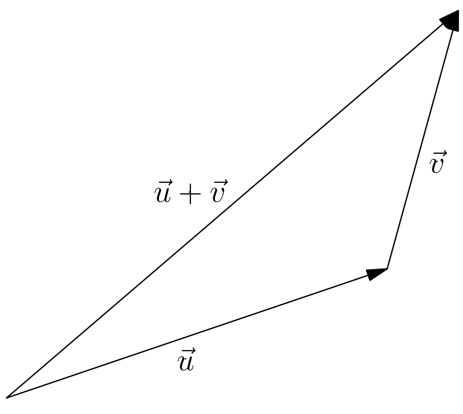
On obtient donc, pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{e}$ de norme 1, l'inégalité $\|\vec{u}\| \geq |\langle \vec{u}, \vec{e} \rangle|$ (*). Maintenant si $\vec{v} = \vec{0}$, l'inégalité (vi) est évidemment vraie et si $\vec{v} \neq \vec{0}$ on applique (*) en choisissant le vecteur $\vec{e}$ égal à $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$.

Proposition II.7 (Propriétés métriques de la norme euclidienne)**.** *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan et tout nombre réel λ, on a*

1. $\|\vec{u}\| = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$;
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Les deux premières propriétés sont simples à vérifier. La troisième propriété est appelée inégalité triangulaire et se démontre en développant $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$



Entraînez-vous ! *Démontrer « l'identité du parallélogramme » :*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \qquad (2)$$

Réponse Il suffit de développer : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\,\rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle$.

On est quelquefois amené à changer la base du plan dans laquelle on exprime les vecteurs et quand on change de base, les coordonnées des vecteurs changent aussi. Il est utile de savoir calculer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base arbitraire ; lorsque cette base arbitraire est orthonormée, le produit scalaire permet d'obtenir des formules très simples.
En effet, soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée du plan euclidien (c'est à dire $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\,\rangle = 0$), soit $\vec{u}$ un vecteur et a_1, a_2 ses coordonnées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

En faisant le produit scalaire des deux membres de cette égalité par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on obtient :

$$a_1 = \langle \vec{u}, \vec{e}_1\,\rangle \text{ et } a_2 = \langle \vec{u}, \vec{e}_2\,\rangle.$$

On retiendra :

Proposition II.8 (Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée)**.** *Pour toute base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan euclidien et tout vecteur $\vec{u}$, on a*

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{e}_1\,\rangle\vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\,\rangle\vec{e}_2. \tag{3}$$

II.1.4 Droites dans le plan

Une droite $\mathcal{D}$ du plan peut être caractérisée de plusieurs façons :
(i) par deux de ses points (non confondus) ;
(ii) par un de ses points et un vecteur directeur ;
(iii) par un de ses points et un vecteur normal (un vecteur non nul orthogonal à la droite).
Précisons chaque situation.
(i) La droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B est l'ensemble des points M tels que A, B, M sont alignés, c'est à dire tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et donc tels que $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$ d'après la proposition (II.4). Donc,

> **Equation d'une droite dans le plan passant par deux points**
> La droite du plan passant par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ qui satisfont l'équation cartésienne
> $$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0. \tag{4}$$

Cette équation est plus communément présentée sous la forme $ax + by + c = 0$ et on laisse au lecteur le soin de retrouver l'expression des constantes a, b, c en fonction des coordonnées de A et B (ces expressions ne sont pas à retenir).

(ii) La droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Donc,

> **Equation d'une droite dans le plan passant par un point et de vecteur directeur donné**
> La droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d}(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ qui satisfont l'équation cartésienne
> $$\alpha(y - y_A) = \beta(x - x_A)\ . \tag{5}$$

Même commentaire que précédemment.

(iii) La droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est à dire tels que $\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM} \rangle = 0$. Donc,

Equation d'une droite dans le plan passant par un point et de vecteur normal donné
La droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ qui satisfont l'équation cartésienne

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \ . \tag{6}$$

Même commentaire que précédemment.

Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est définie par l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors :
- le vecteur $\vec{d}(-b, a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;

  En effet, $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $ax+by = 0$ sont parallèles donc elles ont les mêmes vecteurs directeurs. La droite $ax+by = 0$ passe par l'origine O et par le point $M(-b, a)$, donc $\vec{d} = \overrightarrow{OM}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal de D.

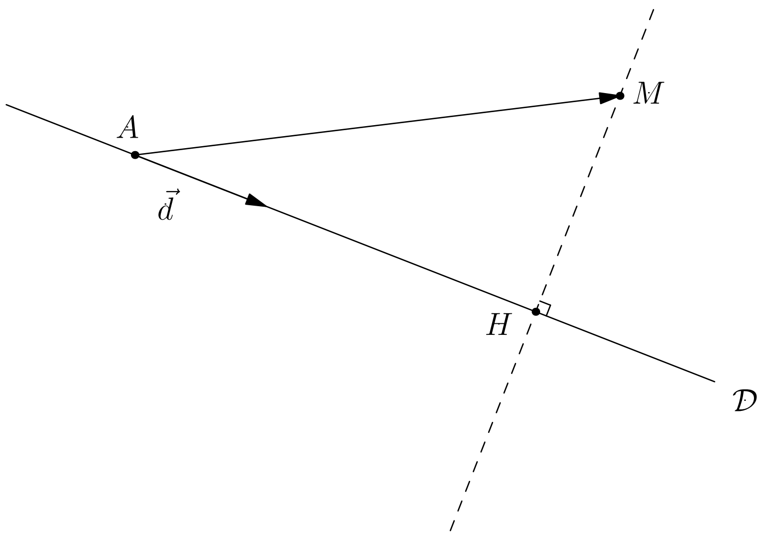
Pour *paramétrer* une droite $\mathcal{D}$, on se donne un de ses points, appelons le A et un vecteur directeur, appelons le $\vec{d}$, et on observe que M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires, ce qui équivaut, puisque $\vec{d} \neq \vec{0}$, à l'existence d'un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d}$. Donc,

Paramétrisation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné
La droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d}(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des points

$$M(x_A + t\alpha, y_A + t\beta) \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R} \ . \tag{7}$$

II.1.5 Projection orthogonale

Dans le plan, le *projeté orthogonal* d'un point M sur la droite $\mathcal{D}$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec sa perpendiculaire passant par M.



Proposition II.9 (Projection orthogonale sur une droite)**.** *Fixons un point quelconque A sur la droite $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\vec{d}$ de norme 1. Alors le projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ du point M est le point H tel que*

$$\overrightarrow{AH} = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle \, \vec{d} \ . \tag{8}$$

En effet, par définition, H est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HM} \perp \vec{d}$. Or le point H défini dans (8) satisfait cette condition :

$$\langle \overrightarrow{HM}, \vec{d} \rangle = \langle \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}, \vec{d} \rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle - \langle \overrightarrow{AH}, \vec{d} \rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle - \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle \langle \vec{d}, \vec{d} \rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle - \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle = 0.$$

Connaissant les coordonnées de A, $\vec{d}$ et M, on obtient rapidement les coordonnées de H à l'aide de la relation (8).

Soit $\mathcal{D}$ une droite dans le plan et M un point quelconque. La distance δ du point M à la droite $\mathcal{D}$ est le minimum des distances $d(M,P)$ lorsque P parcourt la droite $\mathcal{D}$. Le théorème de Pythagore implique immédiatement que ce minimum est atteint pour P égal à la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. On donne une formule pour cette distance.

Proposition II.10 (Distance d'un point à une droite)**.** *Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ et de norme* 1. *Alors*

$$\delta = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n}\,\rangle| \tag{9}$$

On a par définition $\delta = \|\overrightarrow{HM}\|$. Or $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AK}$ où K est le projeté orthogonal de M sur la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A. Cette perpendiculaire ayant $\vec{n}$ pour vecteur directeur, on a $\overrightarrow{AK} = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n}\,\rangle.\vec{n}$ et par conséquent $\delta = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n}\,\rangle|$.

Remarque II.11. Puisque $(A; \vec{d}, \vec{n})$ est un repère orthonormé, on a d'après (3)

$$\overrightarrow{AM} = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d}\,\rangle\,\vec{d} + \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n}\,\rangle\,\vec{n},$$

et par suite

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d}\,\rangle^2 + \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n}\,\rangle^2,$$

ce qui donne une formule évitant l'utilisation du vecteur normal $\vec{n}$:

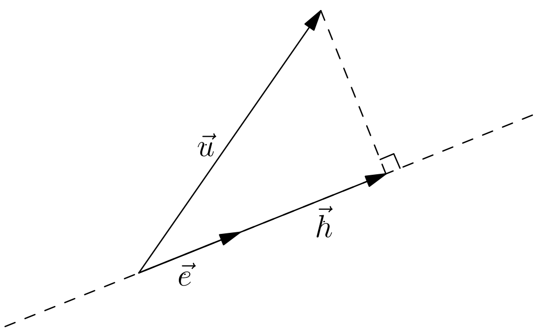
$$\delta = \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d}\,\rangle^2}. \tag{10}$$

Attention ! Si $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont de norme quelconque, les formules (8), (9) et (10) deviennent

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{d}\,\rangle}{\|\vec{d}\,\|^2}\,\vec{d}, \quad \delta = \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \frac{1}{\|\vec{d}\,\|^2}\langle \overrightarrow{AM}, \vec{d}\,\rangle^2} = \frac{|\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n}\,\rangle|}{\|\vec{n}\|}. \tag{11}$$

La notion de projection orthogonale peut être présentée de façon purement vectorielle. Soit $\vec{e}$ un vecteur non nul du plan. Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ le long de $\vec{e}$ est l'unique vecteur $\vec{h}$ colinéaire à $\vec{e}$ et tel que $\vec{e} \perp (\vec{u} - \vec{h})$. Il es donné par la formule :

$$\vec{h} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{e}\,\rangle}{\|\vec{e}\|^2}\vec{e}. \tag{12}$$



Entraînez-vous ! *Calculer la distance du point $M(1,2)$ à la droite passant par $A(1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.*

Réponse $\vec{n} = 1/\sqrt{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,)$ est normal à la droite et de norme 1. On trouve aussi $\overrightarrow{AM} = 2\,\vec{\jmath}$ et $\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM}\rangle = 2$. On en déduit que $\delta = \sqrt{2}$.

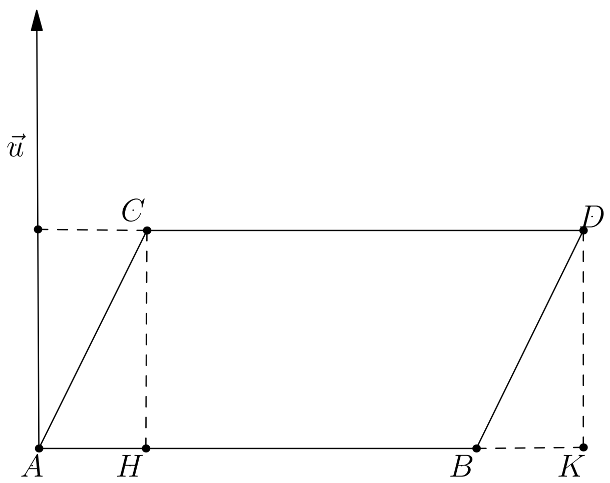
Proposition II.12 (Aire d'un parallélogramme)**.** *Soit $\mathcal{P}$ un parallélogramme de sommets A, B, D, C (c'est à dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Son aire est donnée par la formule :*

$$\text{Aire}(P) = |\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|.$$

H et K désignant les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB), l'aire de $\mathcal{P}$ est égale à l'aire du rectangle $HKDC$, donc $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{CD}\|\,\|\overrightarrow{CH}\|$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et de même norme, nos précédentes formules pour $\delta = \|\overrightarrow{CH}\|$ donnent

$$\text{Aire}(P) = \|\overrightarrow{CD}\| \frac{|\langle \overrightarrow{AC}, \vec{u}\,\rangle|}{\|\vec{u}\|} = |\langle \overrightarrow{AC}, \vec{u}\,\rangle|.$$

Or on observe après un calcul immédiat en coordonnées que $\langle \overrightarrow{AC}, \vec{u}\,\rangle = \pm\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.



Entraînez-vous ! *Soient trois points $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,4)$. Calculer l'aire du triangle ABC.*

Réponse On obtient $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. L'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 6 - 1 = 5$. L'aire du triangle est donc $5/2$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan euclidien. L'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est défini comme étant l'angle orienté $\widehat{AOB}$ où A et B sont les points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Proposition II.13 (Angle orienté de deux vecteurs du plan)**.** *Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Les formules*

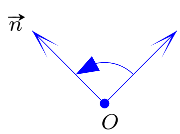
$$\langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta \text{ et } \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\theta$$

sont vraies.

Il suffit de démontrer les formules dans le cas particulier $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, car le cas général s'obtient en appliquant le cas particulier aux vecteurs $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. Ecrivons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$:

$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}, \qquad \vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Introduisons aussi le vecteur $\vec{n} = -b\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ et observons que $(O; \vec{u}, \vec{n})$ est un repère orthonormé direct du plan euclidien.



repère orthonormé direct du plan

Par définition des fonctions sinus et cosinus, on a

$$\vec{v} = \cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{n} \qquad (*).$$

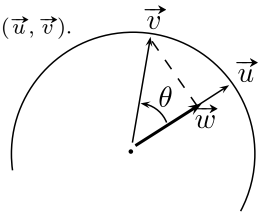
(Pour comprendre, visualisez le cercle trigonométrique où $O\vec{u}$ est l'axe des abscisses et $0\vec{n}$ l'axe des ordonnées.) En faisant le produit scalaire des deux membres de l'égalité (*) avec $\vec{u}$, on obtient :

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = \cos\theta,$$

ce qui donne la première formule à démontrer. En faisant le prduit scalaire des deux membres de l'égalité (*) avec $\vec{n}$, on obtient :

$$\langle \vec{n}, \vec{v}\,\rangle = \sin\theta.$$

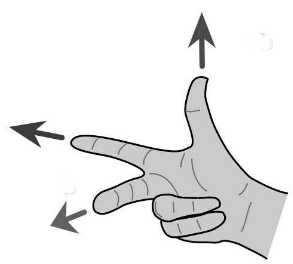
Par conséquent $\sin\theta = -bx + ay = \det\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} = \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v})$.

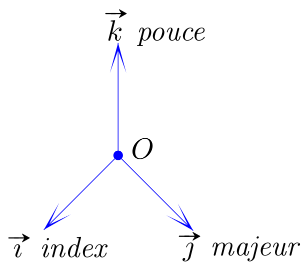


II.2 Vecteurs de l'espace

II.2.1 Généralités

L'espace ambiant euclidien sera muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orienté dans le sens direct (cf « règle de la main droite »). Le triplet de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est appelé une base orthonormée directe de l'espace ambiant euclidien.





Les coordonnées d'un point A dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont les nombres réels x, y et z tels que

$$\overrightarrow{OA} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}.$$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont les nombres réels x, y et z tels que

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}.$$

Toutes les observations faites ensuite dans le sous paragraphe II.1.1 sont valables mot à mot.
On dit que l'espace ambiant est de dimension 3 car il faut trois vecteurs pour former un repère. Rétrospectivement, le plan est de dimension 2 puisqu'il faut deux vecteurs pour former un repère.
Le produit scalaire dans l'espace se définit fort logiquement comme le procédé qui à deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ associe le nombre réel

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\,\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

L'othogonalité et la norme sont définies exactement comme dans la définition II.5.
Les propriétés du produit scalaire et de la norme sont alors identiques à celles dans le plan : il suffit de remplacer le mot « plan » par « espace ambiant » dans les propositions II.6 et II.7 et de rajouter de plus un vecteur $\vec{e_3}$ dans la proposition II.8.

II.2.2 Produit vectoriel dans l'espace ambiant

Deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou bien $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, autrement dit tel que $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2$ ou bien $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$. Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires quand leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est à dire quand les trois conditions

$$y_1z_2 - z_1y_2 = 0, \quad z_1x_2 - x_1z_2 = 0, \quad x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

sont satisfaites. Cela nous amène dans le cas général à considérer le vecteur ayant ces trois nombres pour coordonnées dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Définition II.14. *Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{\imath} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}. \tag{13}$$

Attention ! Le produit vectoriel ne se définit qu'en dimension 3.
Les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ peuvent sembler un peu compliquées, mais on voit qu'il suffit d'en retenir une : les autres s'en déduisent par **permutation circulaire** (on remplace x par y, y par z, et z par x).
On remarque aussi que ces composantes sont des déterminants. Pour en retrouver la formulation, on peut s'aider du tableau ci-dessous :

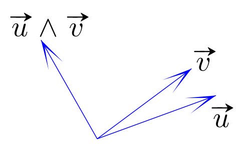
x_1	x_2	$\vec{\imath}$
y_1	y_2	$\vec{\jmath}$
z_1	z_2	$\vec{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}\vec{\imath} - \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}\vec{\jmath} + \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\vec{k}$$

Ainsi, par construction, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, mais l'intérêt du produit vectoriel vient surtout des propriétés ci-dessous.

Proposition II.15 (Propriétés du produit vectoriel)**.** *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace ambiant et tout nombre réel λ, on a*
(i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$;
(ii) $\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$;
(iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$; $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;
(iv) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est orthogonal à* $\vec{u}$ *et à* $\vec{v}$;
(v) Si $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une paire de vecteurs orthonormée alors* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *est une base orthonormée de l'espace ambiant orientée dans le sens direct (cf la « règle de la main droite » ci-dessus).*

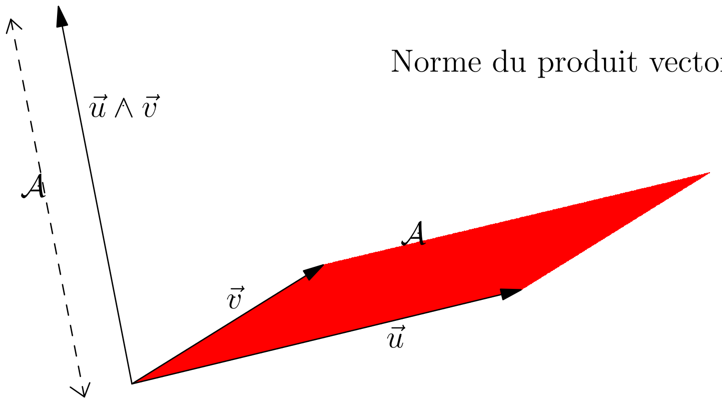
La propriété (i) s'appelle antisymétrie, (ii) et (iii) forment la propriété de bilinéarité (c'est à dire, linéarité à gauche et à droite). Les propriétés (iv) et (v) donnent au produit vectoriel toute son importance mais nous admettrons leur preuve.



Nous avons vu dans le plan comment calculer l'aire d'un parallélogramme porté par deux vecteurs. Dans l'espace deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent encore un parallélogramme $\mathcal{P}$ et

Aire d'un parrallélogramme dans l'espace

$$\text{Aire}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$



Norme du produit vectoriel.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *On se donne trois points O, $A(0,1,1)$ et $B(1,0,2)$. Trouver l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.*

RÉPONSE Avec $\overrightarrow{OA} = \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{\imath} + 2\vec{k}$, on obtient $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, donc cette aire vaut $\sqrt{6}$.

II.2.3 Produit mixte et déterminant dans l'espace

Tout comme le déterminant de deux vecteurs dans le plan servait à décider de la colinéarité de deux vecteurs, le déterminant de trois vecteurs dans l'espace va décider de leur coplanarité.
Quatre points A, B, C, D de l'espace sont dits *coplanaires* s'il existe un plan qui les contient tous les quatre et trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont dits *coplanaires* s'il existe des points coplanaires A, B, C, D tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \ \vec{v} = \overrightarrow{AC}, \ \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

(c'est équivalent à dire qu'il existe un plan auquel $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont tous les trois parallèles).
Comme $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut vérifier que la coplanarité de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est équivalente à l'orthogonalité de $\vec{w}$ avec $\vec{u} \wedge \vec{v}$, autrement dit à la condition

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0.$$

En général, le nombre réel $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle$ n'est pas nul et il est appelé *produit mixte* des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Nous pouvons en donner une formule à l'aide des coordonnées des vecteurs. Si

$$\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}, \ \vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}, \ \vec{w} = x_3\vec{\imath} + y_3\vec{\jmath} + z_3\vec{k},$$

alors

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = x_1y_2z_3 - x_1z_2y_3 + y_1z_2x_3 - y_1x_2z_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3.$$

Le produit mixte est encore (et surtout) appelé *déterminant* des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et noté :

$$\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Proposition II.16 (Propriétés du déterminant dans l'espace)**.** *Pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace et tout nombre réel λ, on a*

(i) Si on permute deux vecteurs parmi les trois, le déterminant change de signe (par exemple, $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$
$-\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$*) ;*

(ii) $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}) = \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w})$ *;*

(iii) $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Vous en apprendrez plus sur les déterminants dans un cours sur les espaces vectoriels. Donnons en pour l'instant quelques applications immédiates. Répétons pour commencer le critère de coplanarité :

Proposition II.17 (Critère de coplanarité)**.** *(i) Quatre points A, B, C, D de l'espace sont coplanaires si et seulement si*

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0;$$

(ii) Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si $\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Ensuite on s'intéresse au volume des parallélépipèdes :

Proposition II.18 (Volume des parallélépipèdes)**.** *Soit $\mathcal{V}$ un parallélépipède porté par trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans l'espace. Son volume est donné par la formule*

$$\text{Volume}(\mathcal{V}) = |\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Entraînez-vous ! *Soient $A(1,1,0)$, $B(0,2,1)$ et $C(0,0,1)$. Montrer que le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ est égal à 2.*

II.2.4 Plans et droites dans l'espace

Plan dans l'espace : caractérisation et équation cartésienne

Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace peut être caractérisé de plusieurs façons :

(i) par trois de ses points non alignés ;

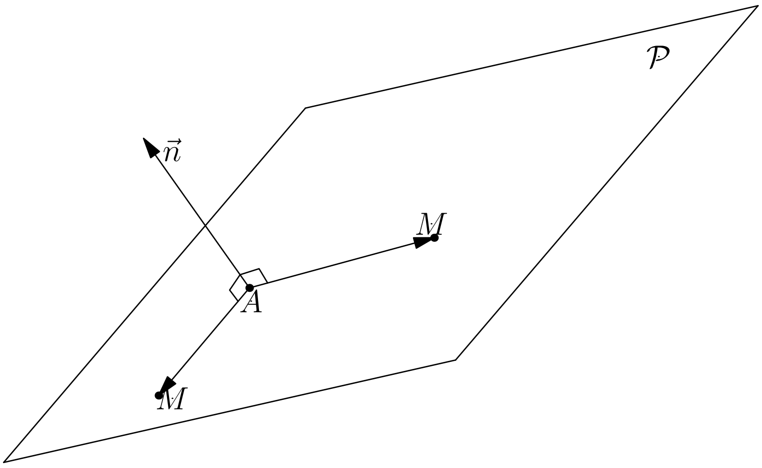
(ii) par un de ses points et une base vectorielle de ce plan (c'est à dire deux vecteurs non colinéaires et parallèles à ce plan) ;

(iii) par un de ses points et un vecteur normal (un vecteur non nul orthogonal au plan).

Précisons chacune de ces situations, dans l'ordre qui nous convient.

(iii) Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est à dire tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$. Donc,

> **Equation cartésienne d'un plan passant par un point et de normale donnée**
> Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A, x_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ satisfaisant l'équation cartésienne
>
> $$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0. \tag{14}$$



(ii) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et parallèles à $\mathcal{P}$, alors $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est non nul et orthogonal à P. Donc d'après ce qui précède

Equation cartésienne d'un plan passant par un point et de base vectorielle donnée
Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace qui satisfont

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \overrightarrow{AM} \rangle = \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = 0. \tag{15}$$

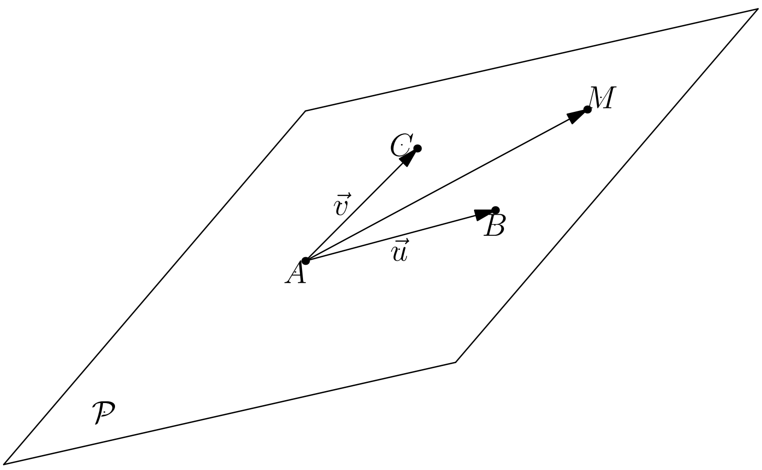
La connaissances des coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et A permet d'écrire une équation cartésienne à partir de cette équation.

(i) Soit A, B, C trois points de $\mathcal{P}$ non alignés. Un point M de l'espace est dans le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si A, B, C, M sont coplanaires, donc

Equation cartésienne d'un plan passant par trois points non alignés
Le plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B, C est l'ensemble des points M de l'espace qui satisfont

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = 0. \tag{16}$$

Même remarque.



Entraînez-vous ! *Assurez vous de savoir jongler entre ces trois points de vue.*

Entraînez-vous ! *Trouver l'équation du plan passant par O, $A(0,1,1)$ et $B(1,0,2)$.*

Réponse Ce plan passe par O et il est normal à $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$. Son équation est donc $2x + y - z = 0$.

Il est parfois utile de *paramétrer* un plan $\mathcal{P}$. Pour cela, il faut se donner un point A et une base vectorielle $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ de ce plan. Le plan P est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe des nombres réels t et t' tels que

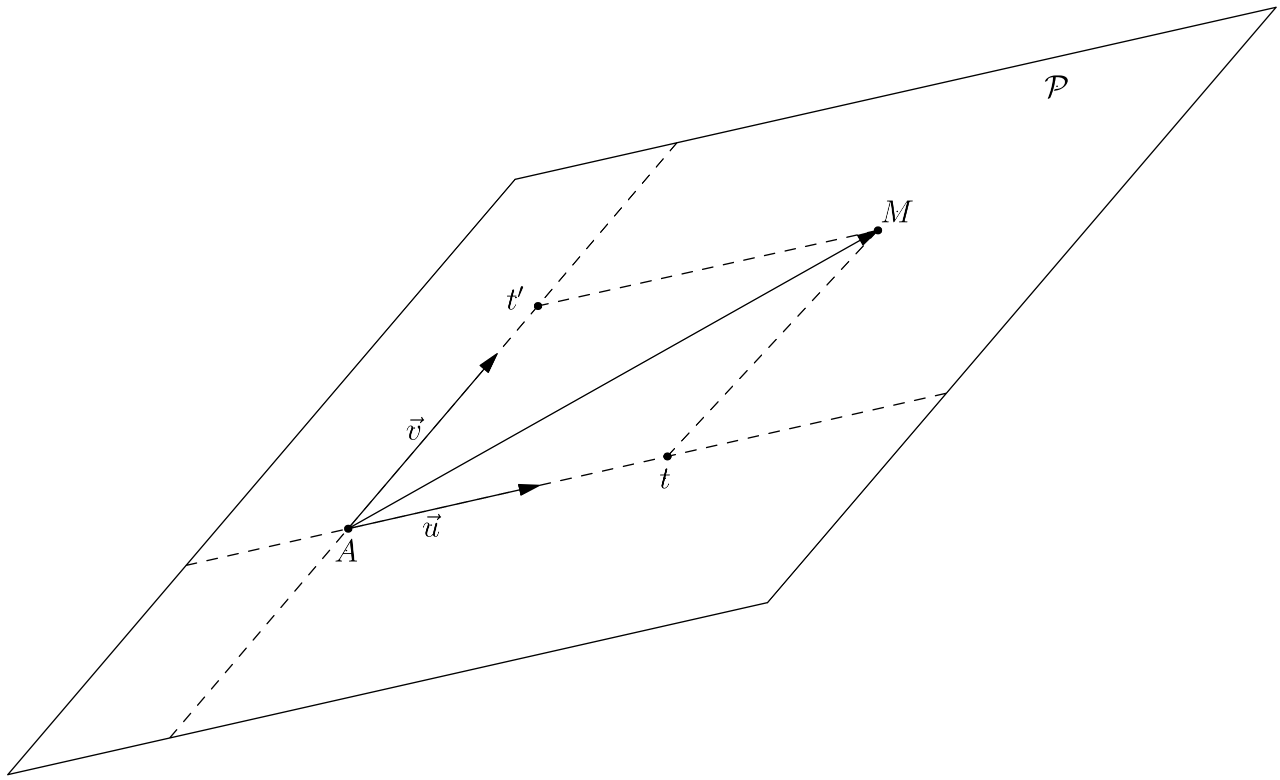
$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u}'.$$

Autrement dit

Paramétrage d'un plan dans l'espace

Le plan P passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de base vectorielle $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ est l'ensemble des points

$$M(x_A + t\alpha + t'\alpha', y_A + t\beta + t'\beta', z_A + t\gamma + t'\gamma') \quad \text{où } t \text{ et } t' \text{ décrivent } \mathbb{R}.$$



Droite dans l'espace : caractérisation et système d'équations cartésiennes

Une droite dans l'espace est présentée en général par :
(i) la donnée d'un de ses points et d'un vecteur directeur ;
(ii) l'intersection de deux plans non parallèles.

Système d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Si la droite $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans d'équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace dont les coordonnées satisfont le *système d'équations*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \,. \end{cases}$$

• Si la droite D est définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, on peut toujours déterminer deux vecteurs $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$. Les plans P_1 et P_2 définis respectivement par $A, \vec{u}, \vec{n_1}$ et $A, \vec{u}, \vec{n_2}$ sont d'intersection D. Comme on sait par le sous-paragraphe précédent déterminer des équations cartésiennes de P_1 et P_2, on accède encore à un système d'équations cartésiennes de D.

Alternativement, on peut utiliser le point A et le vecteur $\vec{u}$ pour paramétrer D, puisque M appartient à D si et seulement si il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Ce qui donne :

> **Paramétrage d'une droite dans l'espace**
> La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ est l'ensemble des points
> $$M(x_A + t\alpha, y_A + t\beta, z_A + t\gamma) \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On peut aussi passer du paramétrage au système d'équations cartésiennes par des substitutions « supprimant » le paramètre t. Illustration dans l'exercice suivant :

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *On donne le point $A(1, 2, -1)$ et le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Trouver deux plans dont l'intersection est la droite $(\mathcal{D})$ passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$.*

RÉPONSE Les équations paramétriques de $(\mathcal{D})$ sont $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. On tire t de la 1ère équation : $t = x - 1$, et on le remplace dans les deux suivantes, qui deviennent

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de deux plans qui se coupent en $(\mathcal{D})$. On peut vérifier que le point A appartient bien à ces deux plans.

II.2.5 Projection orthogonale, distance

Par analogie avec la définition dans le plan, le projeté orthogonal d'un point M sur la droite $\mathcal{D}$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par M.

Proposition II.19 (Projection orthogonale sur une droite dans l'espace)**.** *Soit A un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{d}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ de norme 1. Alors le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$ est le point H tel que*

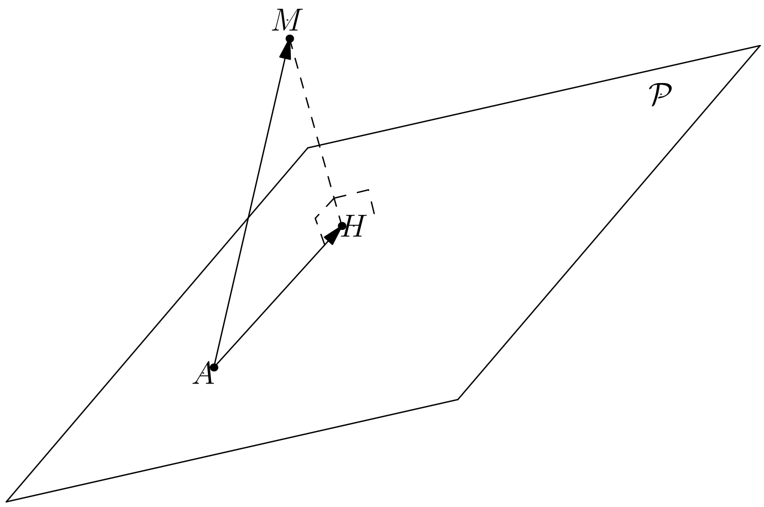
$$\overrightarrow{AH} = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle \vec{d}.$$

Encore une fois, H est caractérisé par la propriété d'être l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HM} \perp \vec{d}$.

La distance δ entre M et $\mathcal{D}$ est égale à la norme de $\overrightarrow{HM}$ qui se déduit des normes de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{AH}$ grâce au théorème de Pythagore (cf remarque après la proposition II.10 et la formule (10)), d'où

> **Distance d'un point à une droite dans l'espace**
> $$\delta = \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \langle \overrightarrow{AM}, \vec{d} \rangle^2}. \tag{17}$$

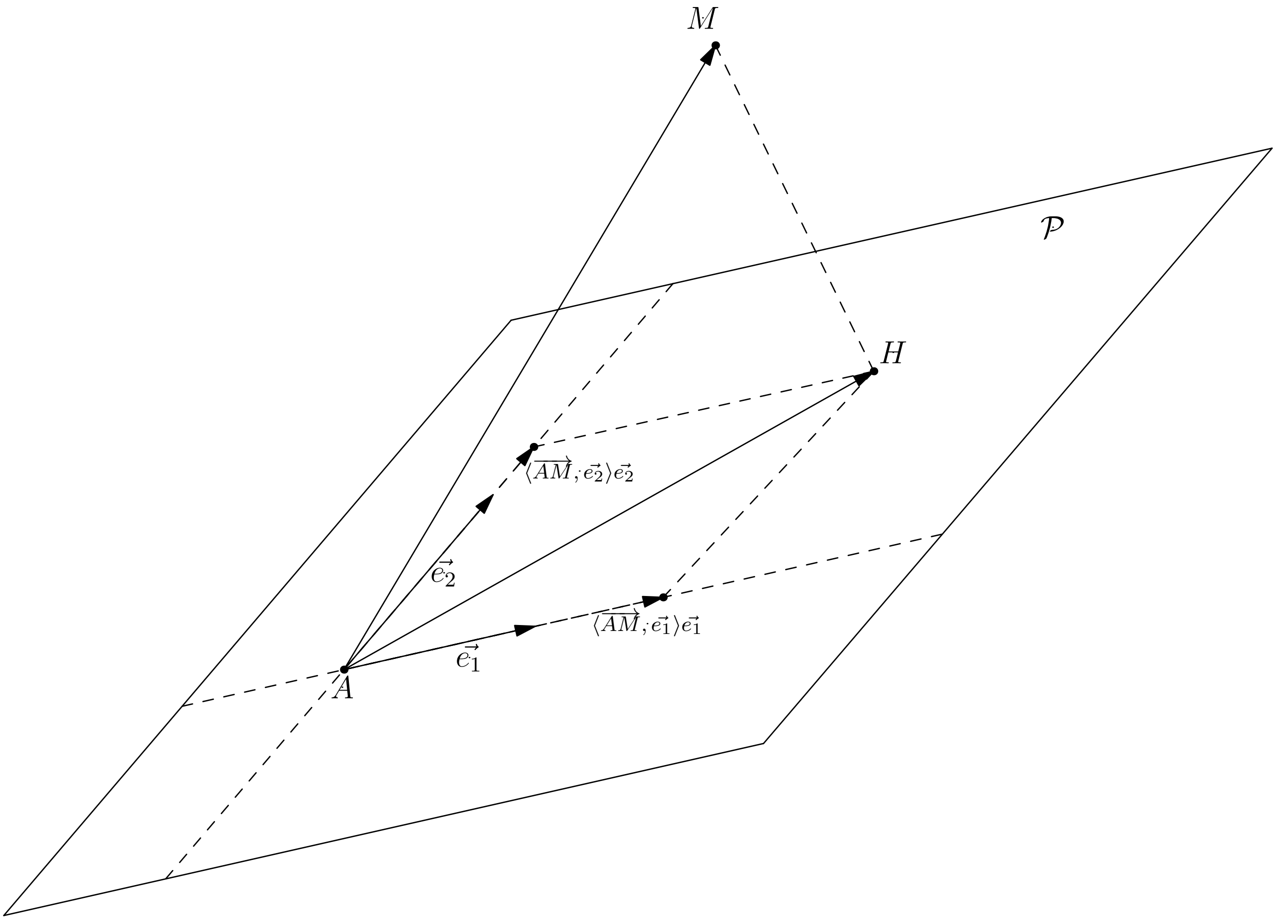
Le projeté orthogonal d'un point M de l'espace sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de ce plan avec sa droite perpendiculaire passant par M.



Comme dans le plan euclidien, on obtient

Proposition II.20 (Projection orthogonale sur un plan)**.** *Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et de base vectorielle $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ que l'on supposera orthonormée (c'est à dire $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$). Alors le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point H donné par*

$$\overrightarrow{AH} = \langle \overrightarrow{AM}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \overrightarrow{AM}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2$$



L'hypothèse « $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ est orthonormée » est nécessaire dans cet énoncé et la base vectorielle de $\mathcal{P}$

dont on dispose ne l'est pas forcément, mais on peut obtenir une base vectorielle orthonormée à partir d'une base vectorielle quelconque grâce au procédé suivant. Pour cela :

Proposition II.21 (Procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt)**.** *Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base vectorielle de $\mathcal{P}$. Les vecteurs obtenus à l'issue des opérations suivantes*
- *remplacer $\vec{u}$ par $\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$;*
- *remplacer ensuite $\vec{v}$ par $\vec{e}\,'_2 = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$;*
- *remplacer enfin $\vec{e}\,'_2$ par $\vec{e}_2 = (1/\|\vec{e'}_2\|)\vec{e}\,'_2$;*

forment une base vectorielle orthonormée du même plan $\mathcal{P}$.

En effet, on constate successivement que :
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sont de norme 1 ;
- $\vec{e}_1$ et $\vec{e}\,'_2$ sont orthogonaux (calculez $\langle \vec{e}_1, \vec{e}\,'_2 \rangle$ pour vous en assurer) et donc $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ également ;
- les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sont parallèles à $\mathcal{P}$, car les actions consistant à ajouter deux vecteurs parallèles à $\mathcal{P}$ ou à multiplier un vecteur parallèle à $\mathcal{P}$ par une constante produisent des vecteurs encore parallèles à $\mathcal{P}$.

La distance δ du point M au plan $\mathcal{P}$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. Comme $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AK}$ où K est le projeté orthogonal de M sur la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A et comme $\vec{n} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ est de fait un vecteur directeur de cette droite perpendiculaire, on obtient

Distance d'un point à un plan dans l'espace

$$\delta = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \rangle| = |\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\overrightarrow{AM}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)| \tag{18}$$

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *On donne un point $A(2, 3, 1)$ et une droite (D) passant par $B(1, -2, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$. Calculer la distance de A à (D).*

RÉPONSE On calcule successivement $\overrightarrow{BA} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$, $\langle \overrightarrow{BA}, \vec{u} \rangle = 1 + 5 = 6$, $\|\vec{u}\|^2 = 3$, $\lambda = 6/3 = 2$.
Donc $\overrightarrow{BH} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$. On en déduit les coordonnées de H : $H(3, 0, -1)$, et le vecteur $\overrightarrow{AH} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.
La distance demandée est $\sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$.

Attention ! Si la base vectorielle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ du plan $\mathcal{P}$ n'est pas orthonormée, la formule (18) devient

$$\delta = \left| \langle \overrightarrow{AM}, \frac{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|} \rangle \right| = \frac{|\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}. \tag{19}$$

Proposition II.22 (Distance entre deux droites quelconques de l'espace)**.** *Soient la droite $\mathcal{D}_1$ passant par le point A_1 et de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par A_2 et de direction $\vec{u}_2$.*
Si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont indépendants, alors le plan $\mathcal{P}$ passant par A_2 et de base vectoriel $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et la distance de chaque point M de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{P}$ est égale à la distance δ entre les deux droites. On obtient alors :

$$\delta = \left| \left\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \frac{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|} \right\rangle \right| = \frac{|\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}. \tag{20}$$

En particulier $\delta = 0$ si et seulement le produit mixte $\langle \overrightarrow{A_1A_2}\,, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \rangle = 0$ est nul.
Si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, alors les deux droites sont parallèles et la distance qui les sépare correspond à la distance qui sépare le point A_1 de la droite $\mathcal{D}_2$. Dans ce cas, en utilisant la formule (17)*, on obtient alors*

$$\delta = \sqrt{\|\overrightarrow{A_1A_2}\|^2 - \left\langle \overrightarrow{A_1A_2}\,, \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \right\rangle^2}.$$

En particulier dans ce cas $\delta = 0$ si et seulement si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont égales.

II.3 Fonctions de plusieurs variables

Une fonction numérique de deux variables, appelons la f, est un procédé qui à une paire de nombres réels (x, y) associe un nombre réel $f(x, y)$. Ce procédé peut-être défini sur l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier, c'est à dire pour toute paire de nombres réels (x, y) ou sur une partie stricte de $\mathbb{R}^2$: c'est son domaine de définition.
L'espace numérique $\mathbb{R}^2$ formé de tous les couples de nombres réels (x, y) doit être compris comme l'ensemble des coordonnées des points dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
D'ailleurs, nous aurons tendance à confondre le plan euclidien muni d'un repère avec l'espace numérique $\mathbb{R}^2$, c'est à dire à confondre le point $M(x, y)$ avec le couple de nombres réels (x, y).
On parle aussi de fonctions numériques de trois variables : $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ et même de $n \geq 4$ variables. Similairement à $\mathbb{R}^2$, l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels (x, y, z) sera confondu avec l'espace ambiant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exemples II.23. 1. Une fonction numérique de deux variables définie sur tout $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

2. Une fonction numérique de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0, 0)$:

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

3. Une fonction numérique de deux variables définie sur les couples (x, y) tels que $y > 0$:

$$(x, y) \longmapsto x \ln(y).$$

4. Une fonction numérique de trois variables définie sur $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y) \longmapsto x e^{y^2 + z^2}.$$

II.3.1 Dérivées partielles des fonctions numériques de plusieurs variables

Vous savez pour l'instant dériver les fonctions numériques d'une variable $t \mapsto f(t)$. Quand on gèle une des deux variables dans la fonction numérique $(x, y) \mapsto f(x, y)$, par exemple : $y = y_0$ fixé ; on obtient une fonction d'une seule variable :

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

que l'on peut dériver (si elle est dérivable évidemment). Le résultat est alors une dérivée partielle de f. Soyons plus précis.

Définition II.24. *Soit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction numérique de deux variables et (x_0, y_0) un point à l'intérieur de son domaine de définition.*

– *La dérivée au point x_0 de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ (sous réserve d'existence) s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x (ou encore par rapport à la première variable) au point (x_0, y_0) et se note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.*
– *La dérivée au point y_0 de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ (sous réserve d'existence) s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à y (ou encore par rapport à la seconde variable) au point (x_0, y_0) et se note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*

Entraînez-vous ! *Calculer les dérivées partielles de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$ en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.*

Remarque II.25. 1. « ∂ » se prononce « d rond ».

2. Si $f(x,y)$ est une fonction numérique de deux variables, ses dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;:\; (x_0,y_0) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \;:\; (x_0,y_0) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

sont encore des fonctions numériques des deux variables x_0, y_0 et on se débarasse d'ailleurs assez rapidement de l'encombrant indice 0 pour désigner ces variables.

3. Les dérivées partielles des fonctions numériques de $n \geq 3$ variables se définissent de la même façon : on ne prend pas la peine de réécrire la définition II.24 dans le cas général.

4. Les dérivées partielles sont le résultat de la dérivation d'une fonction numérique d'une variable, donc les règles de dérivation connues s'appliquent encore, par exemple pour toutes fonctions numériques de deux variables f, g et tout nombre réel λ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\lambda f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \; \frac{\partial}{\partial x}(f\,g) = \frac{\partial f}{\partial x}\,g + f\,\frac{\partial g}{\partial x}, \tag{21}$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f^k) = k\frac{\partial f}{\partial x}\,f^{k-1}, \text{etc.}\ldots$$

II.3.2 Dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Il est quelquefois utile de considérer des paires (f_1, f_2) de fonctions numériques de plusieurs variables f_1, f_2. Nous regarderons ces paires de fonctions (f_1, f_2) comme une seule fonction de plusieurs variables, mais à deux coordonnées, c'est à dire à valeurs dans l'espace numérique $\mathbb{R}^2$. Par exemple, si f_1 et f_2 sont des fonctions numériques à trois variables, la fonction $f = (f_1, f_2)$ à deux coordonnées est donnée par

$$f \;:\; (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) \in \mathbb{R}^2.$$

On procède bien sûr de même pour un n-uplet $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de fonctions numériques de k variables $x_1, \ldots, x_k$. On appelle alors f_i la $i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée de f et x_j sa $j^{\text{ème}}$ variable.

Exemples II.26. $f : (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une fonction de deux variables, à deux coordonnées et $f_1(r,\theta) = r\cos\theta$, $f_2(r,\theta) = r\sin\theta$ sont ses deux fonctions coordonnées.

Remarque II.27. Calmons nous...pour nous, n vaudra généralement 1 (fonctions numériques), 2 (fonctions à valeurs dans le plan) ou 3 (fonctions à valeurs dans l'espace ambiant), comme k d'ailleurs. Mais il est bien commode d'écrire des énoncés sans distinguer tous les cas !

Par dérivées partielles d'une fonction f à n coordonnées et k variables, nous désignons les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ où $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, k$. Il est d'usage de noter les $n \times k$ fonctions obtenues dans un tableau, appelé *matrice jacobienne* de f où i indexe les lignes et j les colonnes

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Exemples II.28. avec $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ on a

$$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Commentons quelques cas particuliers.

$\underline{k=1}$. La fonction $f=(f_1,\ldots,f_n) : t\mapsto f(t)\in\mathbb{R}^n$ est donc à une seule variable et la jacobienne a une seule colonne. On ne fait pas de distinction entre Jf et la *fonction dérivée* notée $\frac{df}{dt}$ où f' :

$$\frac{df}{dt}(t)=f'(t)=(f_1'(t),\ldots,f_n'(t)),$$

que l'on interprète comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour nous, cela a un sens concret pour $n=1,2$ ou 3. Par exemple pour $n=2$, on interprète t comme une variable temporelle, $f(t)=(x(t),y(t))$ comme la position à l'instant t d'un point mobile dans le plan et $f'(t)=(x'(t),y'(t))$ comme son vecteur vitesse à l'instant t.

$\underline{n=1}$. On revient alors aux fonctions numériques du sous-paragraphe précédent. La Jacobienne

$$Jf=(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n})$$

n'a qu'une seule ligne. On associe à Jf un vecteur de $\mathbb{R}^n$ appelé le *gradient* de f et noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$. Pour nous cela a un sens concret pour $n=1,2$ ou 3. Par exemple pour $n=2$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ est le vecteur du plan de coordonnées $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ fixée au départ.

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}.$$

En vertu des règles de calcul des dérivées partielles déjà énoncées (cf (21)), on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f+\lambda g)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)+\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg)=f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)+g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$$

Entraînez-vous ! *Soit* $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *Calculer* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ *et* $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\|$.

Réponse

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)=-\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\,),\quad \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\|=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

II.3.3 Dérivées partielles d'une fonction composée

La dérivée de la fonction $g\circ f$, lorsque f et g sont des fonctions numérique d'une variable est donnée par la formule

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x)\ . \tag{23}$$

Examinons ce que devient cette règle dans le cas de plusieurs variables et plusieurs coordonnées (où « plusieurs » se limitera pour nous à 3 au maximum.)
Pour comprendre, il faut commencer par le cas particulier fondamental

$$h:\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R},$$

c'est à dire, $f(t)=(f_1(t),\ldots,f_n(t))$ est à une variable et n coordonnées, $g(x_1,\ldots,x_n)$ est à n variables et une coordonnée, et $h=g\circ f$ est donc une fonction numérique d'une variable. On attend donc une formule pour sa dérivée $h'(t)$. La réponse est

$$h'(t)=(g\circ f)'(t)=\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t))\frac{df_1}{dt}(t)+\frac{\partial g}{\partial x_2}(f(t))\frac{df_2}{dt}(t)+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x_n}(f(t))\frac{df_n}{dt}(t)\ . \tag{24}$$

Cette formule est admise. Pour la retenir et comprendre en quoi elle généralise naturellement (23), nous définissons le produit d'un tableau de nombres de taille $1 \times n$ par un tableau de nombres de taille $n \times 1$ comme étant le tableau de taille 1×1 (c'est à dire un nombre) défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ . \tag{25}$$

Alors (24) devient

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = Jg(f(t)) \cdot Jf(t) \ . \tag{26}$$

L'analogie avec (23) est alors visible : on passe de (23) à (26) en remplaçant les dérivées ordinaires par les matrices jacobiennes et le produit des nombres réels par le produit des tableaux. La même analogie sera en vigueur dans le cas général.

Entraînez-vous ! *Calculer $(g \circ f)'$, avec $f(t) = (\cos t, 2\sin t)$ et $g(x_1, x_2) = x_1x_2$.*

Réponse Avec $f_1'(t) = -\sin t$, $f_2'(t) = 2\cos t$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1$, on obtient

$$(g \circ f)'(t) = (2\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(2\cos t) = 2\cos(2t).$$

Ne pas présenter le résultat final sous la forme $(g \circ f)' = x_2(-\sin t) + x_1(2\cos t)$!
On peut vérifier que l'expression obtenue est bien la dérivée de $(g \circ f)(t) = 2\sin t \cos t = \sin(2t)$.

Passons au cas général :

$$h : \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p,$$

c'est à dire, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est à m variables $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et n coordonnées, $g(y) = (g_1(y), \ldots, g_p(y))$ est à n variables $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et p coordonnées et $h(x) = g \circ f(x)$ est donc une fonction à m variables et p coordonnées. On attend donc une formule pour chaque dérivée partielle $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)$, ou de façon équivalente pour son tableau $p \times m$ de derivées partielles Jh. La réponse est fournie par la formule

$$Jh(x) = J(g \circ f)(x) = Jg(f(x)) \cdot Jf(x) \ , \tag{27}$$

que l'on s'empresse d'expliquer, à défaut de la prouver. Il s'agit du produit $C = A \cdot B$ d'un tableau A de taille $p \times n$ (ici $Jg(f(x))$) par un tableau B de taille $n \times m$ (ici $Jf(x)$). Le résultat est un tableau C de taille $p \times m$ (ici $Jh(x)$) dont l'entrée c_{ij} ($i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de C) est obtenue en appliquant (25) à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B, c'est à dire

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{2i} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \ . \tag{28}$$

Ainsi, la formule (27) donne pour chaque dérivée partielle de $h = g \circ f$:

Dérivée partielle de la $i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable de $g \circ f$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_n}(f(x))\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \ . \tag{29}$$

On termine en illustrant cette formule pour quelques valeurs de m, n, p.

$$\text{Cas : } h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Ici g est à une variable et une coordonnée, donc $Jg = g'$ est un tableau 1×1, $Jf = (\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2})$ est un tableau 1×2 et $Jh = (\frac{\partial h}{\partial x_1}\ \frac{\partial h}{\partial x_2})$ est un tableau 1×2. La formule (27) devient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(f(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial x_2}(x) = g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \ .$$

Entraînez-vous ! *Calculer les dérivées partielles de $g \circ f$, avec $f(x, y) = x^2y$ et $g(t) = t^2$.*

Réponse Ici $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$ et $g'(t) = 2t$, donc

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = 2(x^2y)(2xy) = 4x^3y^2, \ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = 2(x^2y)x^2 = 2x^4y.$$

$$\text{Cas : } \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Ici $Jg = (\frac{\partial g}{\partial y_1}\ \frac{\partial g}{\partial y_2})$, $Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, et $Jh = (\frac{\partial h}{\partial x_1}\ \frac{\partial h}{\partial x_2})$. La formule (27) devient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) & \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) \ ,$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \ .$$

II.3.4 Interprétations géométriques du gradient et des dérivées partielles

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. On s'intéresse ici à la *courbe* C d'équation

$$f(x, y) = 0. \tag{30}$$

c'est à dire à l'ensemble des points $M(x, y)$ dans le plan dont les coordonnées vérifient $f(x, y) = 0$.
Nous supposerons que f est *suffisamment régulière* au voisinage de C. Il est impossible à ce niveau de préciser ce qu'on entend par là, mais toutes les fonctions proposées en exemple et en exercice le seront.

Proposition II.29 (Tangente à une courbe dans le plan)**.** *Soit $A(x_A, y_A)$ un point de C. Lorsque les deux dérivées partielles de f au point (x_A, y_A) ne sont pas toutes les deux nulles, c'est à dire lorsque $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A) \neq \vec{0}$, la courbe C admet une droite tangente en A de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A)$ et donc d'équation cartésienne*

$$(x - x_A)\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) + (y - y_A)\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) = 0.$$

Nous admettons l'existence de cette tangente et le fait que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A)$ en soit un vecteur normal. Cette tangente est alors l'ensemble des points M tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A)\rangle = 0$. L'équation cartésienne en découle.

Dans le cas particulier où $f(x,y) = g(x) - y$, la courbe C est simplement le graphe de g. De plus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$. Vous pouvez vérifier que l'équation cartésienne de D ci-dessus est bien celle trouvée dans le chapitre I pour l'équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse x_A à la courbe représentative de g.

Soit $f(x,y,z)$ une fonction de trois variables. On s'intéresse ici à l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ dans l'espace ambiant tels que

$$f(x,y,z) = 0. \tag{31}$$

On suppose *suffisamment régulière* au voisinage de S. On dit alors que S est la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de S. Lorsque les trois dérivées partielles de f au point (x_A, y_A, z_A) ne sont pas toutes les trois nulles, c'est à dire lorsque

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A, z_A) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A, z_A)\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A, z_A)\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A, z_A)\vec{k} \neq \vec{0},$$

la surface S admet un plan tangent en A, de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A, z_A)$. En utilisant la caractérisation d'un plan dans l'espace ambiant défini par un point et un vecteur normal, nous obtenons

Equation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$
Lorsque $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x_A, y_A, z_A) \neq \vec{0}$ pour $A(x_A, y_A, z_A) \in S$, la surface S a un plan tangent P au point A d'équation cartésienne

$$(x - x_A)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A, z_A) + (y - y_A)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A, z_A) + (z - z_A)\,\frac{\partial f}{\partial z}(x_A, y_A, z_A) = 0.$$

Dans le cas particulier où $f(x,y,z) = g(x,y) - z$, la surface S est *la surface représentative* de la fonction g et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1\ .$$

On remarque aussi que les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{k}$ sont parallèles à P et non colinéaires.

En effet $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \perp \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \perp \vec{v}$ comme le montre le calcul des produits scalaires correspondants.

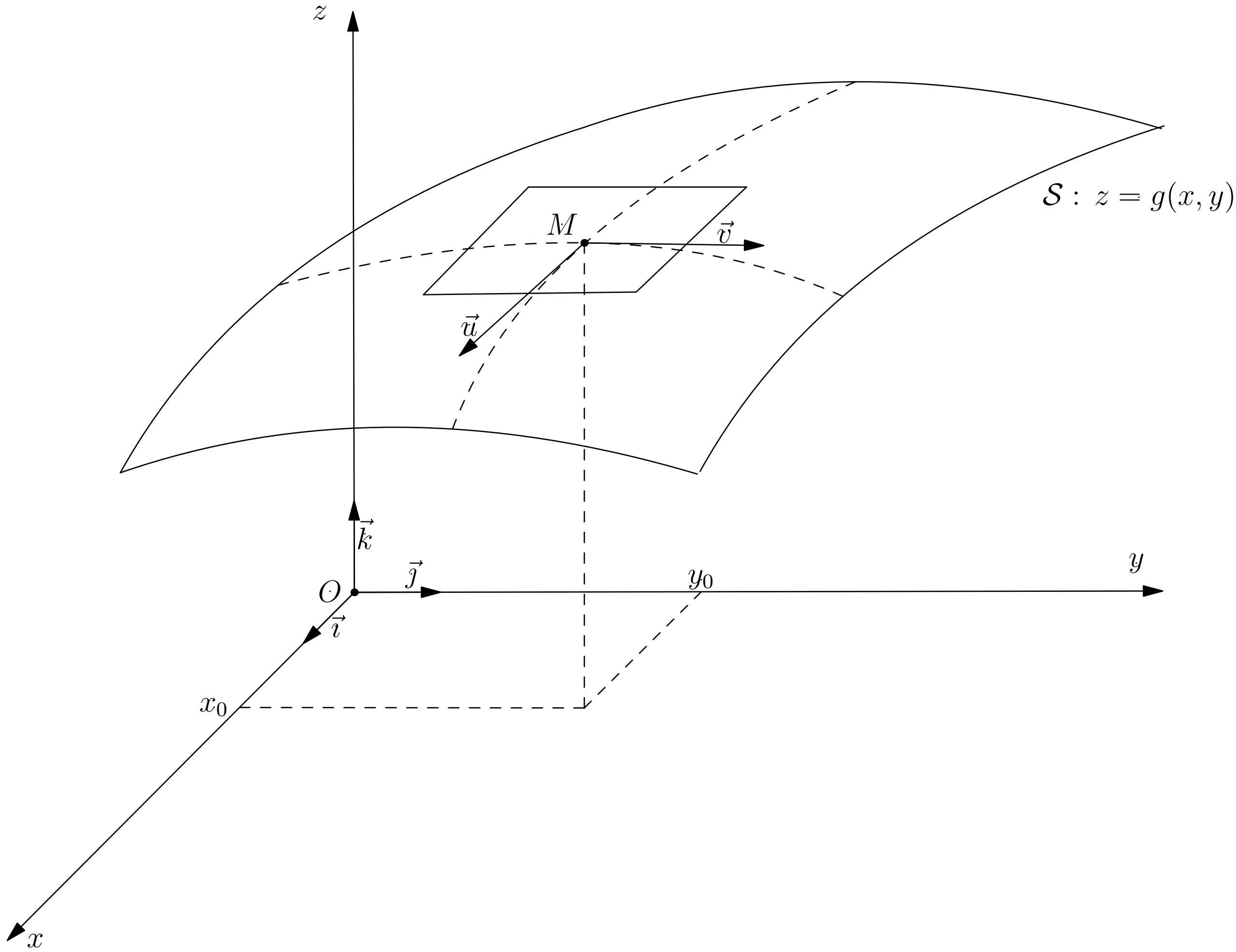
Nous obtenons donc

Equation cartésienne et base vectorielle du plan tangent à une surface représentative
Soit $g(x,y)$ une fonction de deux variables. L'équation du plan tangent à la surface représentative de g au point d'abscisse x_0 et d'ordonnée y_0 (c'est à dire au point de cette surface de coordonnées $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$) est :

$$(x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = z - z_0.$$

Une base vectorielle du même plan est fournie par les vecteurs

$$\vec{u} = \vec{\imath} + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\overrightarrow{k}.$$



Chapitre III

Intégrales

III.1 Définition de l'intégrale

Quand on veut calculer :
– le travail effectué par une force sur un chemin donné,
– la distance parcourue par un objet en chute libre au bout d'un temps donné,
– la hausse des prix sur une période de temps pour laquelle on connait le taux d'inflation,
– et bien d'autres choses encore...
on a recours à un calcul d'intégrales. Nous allons donner une définition très intuitive de l'intégrale d'une fonction continue, puis énoncerons ses principales propriétés utiles pour les calculs.

Définition III.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'* **intégrale** *de f entre a et b est l'aire algébrique délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette valeur, A sur la figure III.1, est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

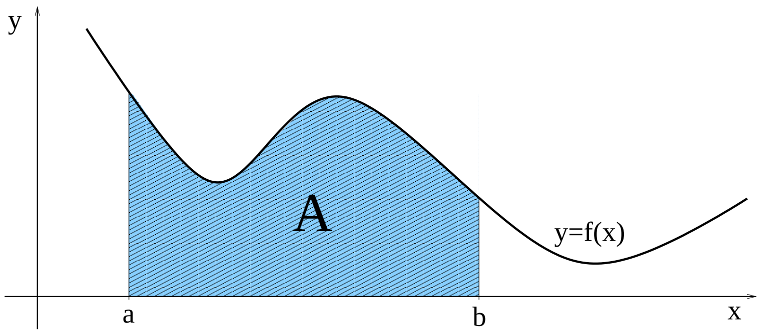


FIGURE III.1 – Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive

Par algébrique, on signifie que les portions du graphe de f au dessus de l'axe des abscisses ont une contribution positive et celles au dessous une contribution négative :
On convient de définir, lorsque $b \leq a$, la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

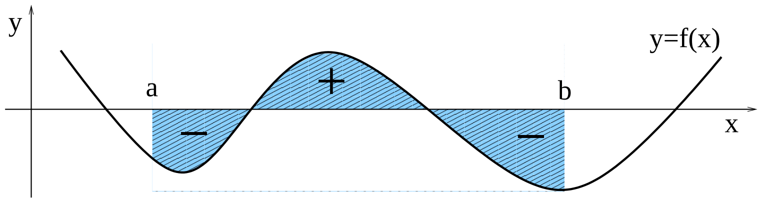


FIGURE III.2 – Interprétation géométrique de l'intégrale selon le signe de la fonction intégrée

III.2 Notion de primitive

III.2.1 Généralités

Dans ce chapitre on rappelle la notion de primitive qui est fondamentale dans le calcul des intégrales.

Définition III.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle* **primitive** *de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout x élément de I, $F'(x) = f(x)$.*

Exemples III.3.

1. La fonction $F : x \mapsto x^3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3\,x^2$.
2. La fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
3. La fonction $F : x \mapsto x^2 + 5$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 2x$.

Enonçons quelques propriétés des primitives :

Proposition III.4.

1. *Si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I alors $F - G$ est constante sur I.*
   De façon équivalente : les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + c$ où F est une primitive fixée et c une constante quelconque.
2. *Si F est une primitive de f et G une primitive de g alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf pour toute constante λ.*

Remarque III.5. Une fonction qui admet une primitive sur un intervalle en admet donc une infinité.

Exemples III.6.

1. Les primitives de la fonction $x \mapsto 7x^4 + 21x^3$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{7}{5}x^5 + \frac{21}{4}x^4 + c$, $c \in \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 4x^3 + 3x + 2 + \frac{15}{x}$. La fonction $F(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 15\ln(x)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. En outre, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 15\ln(x) + c$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Remarque III.7. Généralement on désigne une fonction par une lettre minuscule et une de ses primitives (si elle en a) par la même lettre majuscule.

III.2.2 Existence de primitive

Théorème III.8. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*

Nous pouvons en déduire la conséquence suivante :

Proposition III.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet une primitive et une seule F sur I qui prend la valeur a au point x_0.*

Dans la pratique, on trouve les primitives de f en reconnaissant en f la dérivée d'une fonction usuelle (à l'aide du tableau ci-dessous par exemple) ou plus généralement en utilisant de façon inversée les règles de dérivation. C'est ce que nous allons développer dans les deux prochains paragraphes.

III.2.3 Primitives de quelques fonctions usuelles

En se référant au chapitre sur la dérivation on peut dresser le tableau suivant (un tableau plus complet se trouve dans l'Annexe C, page 91) :

fonction f	une primitive F
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$

Exemple III.10. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Comme $\sqrt{x} = x^{1/2}$, on en déduit que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Entraînez-vous ! *En utilisant la linéarité (cf. (ii) de la première proposition), déterminer toutes les primitives de la fonction suivante, définie pour $x > 0$:*

$$f(x) = \frac{1}{2x} + 4\sin x.$$

Réponse On utilise le tableau précédent pour obtenir les primitives de $\frac{1}{x}$ et $\sin x$. En utilisant le second point de la proposition III.4 (c'est-à-dire des propriétés de linéarité), on en déduit que les primitives de f sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - 4\cos x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

III.2.4 Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée

La fonction $f(x) = 2x\cos(x^2)$ n'apparaît pas dans le tableau précédent, pourtant on y trouve une fonction très voisine : cos dont les primitives sont les fonctions $x \mapsto \sin(x) + c$. Soyons plus précis : on a $f(x) = 2x\cos(u(x))$ où la fonction $u(x)$ est donnée par $u(x) = x^2$. Remarquons que $2x = u'(x)$, donc :

$$f(x) = u'(x)\sin'\big(u(x)\big).$$

Ainsi, on reconnaît dans l'expression de f la dérivée d'une fonction composée, en effet si :

$$F(x) = \sin\big(u(x)\big)$$

alors

$$F'(x) = u'(x)\sin'\big(u(x)\big)$$

par la formule bien connue de dérivation d'une fonction composée.
Conclusion : les primitives de $f(x) = 2x\cos(x^2)$ sont les fonctions $F(x) = \sin(x^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Il est donc indispensable de connaître les primitives des fonctions usuelles et de se souvenir de la formule de la dérivée d'une fonction composée :

$$(v \circ u)'(x) = \Big(v\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x)\,v'\big(u(x)\big).$$

Proposition III.11. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si pour tout $x \in I$ on écrit $f(x) = u'(x)\,v'\big(u(x)\big)$ alors les fonctions F définies par $F(x) = v(u(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$, sont les primitives de f sur I.*

Exemple III.12. Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On a $f(x) = \frac{1}{2}.\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}u'(x)g'\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$. On en déduit que pour tout réel c, la fonction $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Entraînez-vous ! *Déterminer toutes les primitives de $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.*

Réponse On reconnait $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)g'\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = x^2$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x$. On en déduit que les fonctions $F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$, sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

En pratique, on rencontre fréquemment des calculs de primitives de fonctions f qui sont de la forme $f(x) = u'(x)(u(x))^\alpha$. Si $\alpha \neq -1$ alors $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$ est une primitive de f sur I.

Exemple III.13. Soit $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$. On a $f(x) = u'(x)g'\left(u(x)\right)$ avec $u(x) = 2x+1$ et $g'(x) = \sqrt{x}$. Les primitives de f sont de la forme $F(x) = \dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

III.3 Calcul d'intégrales

III.3.1 Le théorème fondamental du calcul intégral

Le résultat suivant permet de relier la notion de primitive, à celle d'intégrale. Il est fondamental au sens où il montre que pour calculer effectivement la valeur d'une intégrale - autrement dit une aire sous la courbe représentant une fonction f, il "suffit" de connaitre une primitive de cette fonction f...

Théorème III.14. *(Théorème fondamental du calcul intégral). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive quelconque de f. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarque III.15. Puisque deux primitives F et G de f diffèrent d'une constante, on a $G(b)-G(a) = F(b) - F(a)$ et il est clair que la formule dans le théorème ne dépend pas du choix de F. En fait, cette formule pourrait être prise comme une définition de l'intégrale.

Par convention on note $\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque III.16. On a pour toute fonction f continûment dérivable sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

Le théorème fondamental du calcul intégral nous fournit un outil de calcul pour les intégrales :

> *Pour calculer l'intégrale de f entre a et b, il suffit de déterminer une primitive de f sur cet intervalle et d'appliquer la formule du théorème fondamental du calcul intégral, Théorème III.14.*

Réciproquement, le théorème fondamental du calcul intégral, Théorème III.14, permet d'exprimer les primitives de f à l'aide d'intégrales :

Corollaire III.17. *La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.*

III.3.2 Les principales propriétés de l'intégrale

Proposition III.18. *Soient a, b et c trois nombres réels, et soient f et g deux fonctions. On a :*

1. *Linéarité de l'intégrale :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b kf(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. *Relation de Chasles :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *Croissance de l'intégrale :*

$$\textit{Si } a \leq b \textit{ et si } f(x) \leq g(x) \textit{ pour tout } x \in [a, b], \textit{ alors } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple III.19. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Afin de calculer la dérivée de g nous l'écrivons sous la forme suivante (en utilisant la relation de Chasles, Proposition III.18) :

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, notons $F(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = F(x^2) - F(x).$$

D'après le corollaire III.17, on a $F' = f$ de sorte que

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x).$$

Corollaire III.20. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$.*

1. *Si f est positive alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.*
2. *Si $|f|$ désigne la fonction valeur absolue de f alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

3. *Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$ alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a).$$

Remarque III.21. On a aussi :
– Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
– Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
– Si f est périodique de période T et $n \in \mathbb{Z}$ alors $\int_a^{a+nT} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

III.4 Techniques de calcul des intégrales

III.4.1 Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée dans une intégrale

Le théorème fondamental du calcul intégral, Théorème III.14, page 70, permet de disposer des techniques vues pour le calcul des primitives. Tout particulièrement, il s'applique au calcul de l'intégrale d'une fonction f qui se présente sous la forme de la dérivée d'une fonction composée.

Proposition III.22. $\int_a^b u'(t)v'(u(t))\,\mathrm{d}t = \Big[v(u(t))\Big]_a^b$

Exemple III.23. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$. On reconnait la dérivée d'une fonction composée : $(\mathrm{e}^{\sin(t)})' = \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}$. On en déduit donc que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\sin(t)}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e} - 1.$$

III.4.2 Intégration par parties

Supposons qu'on cherche à calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec f qui se présente sous la forme $f(x) = u'(x)v(x)$. La règle de dérivation d'un produit de fonctions donne :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Autrement dit, $u'v = (uv)' - uv'$. Puisqu'une primitive de $(uv)'$ est évidemment la fonction uv, si on connait une primitive w de la fonction uv' alors on en déduira une primitive de la fonction $u'v$, ce sera $uv - w$. Cette technique, appelée **intégration par parties**, peut se mémoriser ainsi :

Proposition III.24 (Intégration par parties)**.** *Si u et v sont continûment dérivables sur $]a,b[$ alors :*

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples III.25.

1. Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ en remarquant que la fonction à intégrer est un produit du type $u'v$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$. La formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

2. Calculons $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$ en intégrant par parties : Posons $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$. Après la première intégration par parties, on a :

$$(1) \qquad \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Recommençons une intégration par parties avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \cos x$. Alors :

$$(2) \qquad \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{e}^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x.$$

En substituant dans (1) le calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$ fait dans (2) on obtient :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin x\Big]_0^\pi - \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x,$$

dont on déduit le résultat :

$$2\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin x\Big]_0^\pi - \Big[\mathrm{e}^x \cos x\Big]_0^\pi.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi + 1).$

Entraînez-vous ! *En utilisant une intégration par parties, calculer* $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x.$

Réponse On pose $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$. On a alors

$$\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,\mathrm{d}x = \Big[x \cos x\Big]_\pi^0 + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

Le premier exemple et l'exercice précédent peuvent se généraliser au cas où la fonction dont on cherche une primitive est du type $p(x)g(x)$ avec p un polynôme de degré d et g une fonction dont on sait calculer au moins d primitives successives : on obtient les primitives de $p(x)g(x)$ après d intégrations par parties successives où on choisit toujours de dériver la partie polynomiale.

Exemple III.26.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2+x+2)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \Big[(x^2+x+2)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \quad (u' = \mathrm{e}^x,\ v = x^2+x+2) \\
&= \Big[(x^2+x+2)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \left(\Big[(2x+1)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right) \qquad (u' = \mathrm{e}^x,\ v = 2x+1) \\
&= \Big[(x^2+x+2)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \Big[(2x+1)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 + \Big[2\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \Big[(x^2-x+3)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = 3e-3
\end{aligned}$$

Entraînez-vous ! *De la même façon que dans l'exemple précédent, calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-2x)\cos x \,\mathrm{d}x$.

Réponse

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-2x)\cos x \,\mathrm{d}x &= \Big[(x^2-2x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-2)\sin x \,\mathrm{d}x \ (u' = \cos x,\ v = x^2-2x+2) \\
&= \Big[(x^2-2x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\Big[(2x-2)(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(-\cos x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \Big[(x^2-2x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[(2x-2)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[(x^2-2x-2)\sin x + (2x-2)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \pi
\end{aligned}$$

Dans tous les cas présentés ci-dessus, le choix de u' et v dans la fonction à intégrer pouvait sembler évident. En pratique, ce fait d'écrire la fonction à intégrer comme un produit ne saute pas toujours aux yeux...

Exemple III.27. Pour calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ on peut utiliser une intégration par parties : on remarque que $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$ et on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$. On a alors

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^{\mathrm{e}} x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \Big[x\Big]_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Chapitre IV

Equations différentielles

IV.1 Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel la fonction inconnue est soumise. Plus précisement, on a la définition suivante.

Définition IV.1. *Une* **équation différentielle** *est une équation de la forme*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(N)}) = 0 \tag{1}$$

où N est un entier non nul et F est une fonction de $N+2$ variables.
*- L'***ordre** *de cette équation différentielle est l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ correspondant à la plus haute dérivée apparaissant dans la relation.*
- Résoudre l'équation différentielle (1) *c'est trouver toutes les fonctions y, dépendant de la variable x, vérifiant cette relation.*

Remarque IV.2. Les fonctions que nous considérons dans ce cours sont toutes des fonctions de la variable réelle. On peut noter qu'une théorie quasiment similaire peut être introduite pour des fonctions de la variable complexe, faisant par conséquent appel à la notion de dérivation d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple IV.3. Les équations différentielles les plus "élémentaires" sont celles qui s'écrivent sous la forme

$$y' = f \tag{2}$$

où f est une fonction donnée [1]. Les solutions de (2) correspondent aux primitives de f ; elles ont été largement étudiées dans le chapitre précédent.

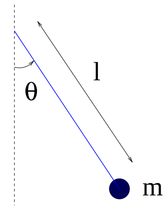
Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques correspondant à des phénomènes physiques, biologiques, économiques, etc. Par conséquent, les variables et les fonctions en jeu ont souvent un sens "physique" et sont donc, selon le contexte, notées différemment. De même, la dérivée d'une fonction y, notée y' dans la définition précédente, est parfois notée $\dot{y}$ ou bien $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (lorsque la "variable" est notée x...).

Exemple IV.4 (Equation du pendule)**.** Un pendule simple est formé d'une boule de masse m suspendu par un fil supposé sans masse et de longueur ℓ, voir la figure ci-après. A partir de la conservation de l'énergie mécanique on décrit le mouvement de ce pendule à l'aide d'une équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \lambda \sin(\theta) = 0 \tag{3}$$

1. On vérifiera aisement que cette équation (2) est bien sous la forme de l'équation (1), en posant $F(x, y, y') = y' - f(x)$.

où $\lambda = \frac{g}{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$, la constante g correspondant à l'accélération de la pesanteur. Dans l'équation différentielle (3), la fonction θ désigne l'écart angulaire par rapport à la verticale (voir la figure ci-après) et la variable (qui n'apparait pas dans l'expression de l'équation différentielle !) représente le temps ; elle est généralement notée t.



En utilisant les notations de la définition IV.1, l'équation du pendule (3) est une équation différentielle d'ordre 2, elle correspond à l'application

$$F(x, y, y', y'') = y'' + \lambda \sin(y).$$

Selon les notations, cette équation (3) pourra aussi s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \sin(\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad \theta''(t) + \lambda \sin(\theta(t)) = 0 \quad \text{ou} \quad y''(x) + \lambda \sin(y(x)) = 0 \quad ...$$

IV.2 Equations différentielles linéaires

Définition IV.5. *Une équation différentielle est dite* **linéaire** *si elle est de la forme*

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = f. \tag{4}$$

- *Les valeurs a_N,..., a_0 sont appelées* **coefficients** *de l'équation.*
- *La fonction f est appelée* **second membre***.*
- *Lorsque le second membre f est nul, on dit que l'équation est* **homogène***.*

Dans le document présenté ici, les coefficients a_N,..., a_0 seront supposés constants et $a_N \neq 0$.

Exemple IV.6 (Dynamique des populations)**.** Pour modéliser l'évolution au cours du temps d'une population (insectes, bactéries, algues, poissons...) on la décrit à l'aide du nombre d'individus $P(t)$ vivants à l'instant t. Le modèle malthusien, proposé par Thomas Malthus en 1798, suppose que la population possède un taux de reproduction "a" constant, simple différence du taux de natalité et du taux de mortalité. La variation de population $P'(t)$ satisfait alors l'équation différentielle linéaire homogène de degré 1 :

$$P'(t) = \mathrm{a}\, P(t).$$

Bien que relativement satisfaisant, le modèle précédent a un inconvénient important : celui de ne pas tenir compte de la taille du territoire sur lequel vit l'espèce. Si la population devient grande, il faut tenir compte de la compétition entre les individus pour avoir accès à l'espace vital. Le modèle de croissance logistique est basé sur cette remarque. On ajoute un terme de "rappel" qui agit de plus en plus lorsque la population devient grande. Mathématiquement, on introduit un paramètre $\mathrm{b} > 0$ modélisant la force de ce rappel et on écrit :

$$P'(t) = \mathrm{a}\, P(t) - \mathrm{b}\, P(t)^2.$$

L'équation différentielle obtenue est toujours de degré 1 mais elle n'est plus linéaire (car le terme $\mathrm{b}\, P(t)^2$ ne peut pas s'écrire sous la forme préscrite dans la définition 4).

Bien entendu une équation différentielle linéaire est un cas particulier d'équation différentielle introduit au sens de la définition IV.1. Le terme "linéaire" provient du fait qu'il existe une structure particulière sur l'ensemble des solutions. On a en particulier la propriété suivante :

Proposition IV.7 (Principe de superposition).
Si la fonction y_1 est une solution de l'équation

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = f_1,$$

et si la fonction y_2 est une solution de l'équation

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = f_2$$

alors pour tous nombres réels α et β, la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est une solution de l'équation

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = \alpha f_1 + \beta f_2.$$

Ainsi, si y_p et y_q sont deux solutions de $y' + ay = f$ alors la différence $y_q - y_p$ est une solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$. Autrement dit $y_q = y_p + y$ où y est une solution de l'équation homogène. On en déduit la stratégie suivante pour résoudre, en trois étapes, l'équation différentielle (4) :

Étape 1 : Recherche de toutes les solutions de l'équation homogène associée (prendre $f = 0$).

Étape 2 : Recherche d'une solution particulière de l'équation complète.

Étape 3 : Écriture de la forme générale de toutes les solutions de l'équation complète.

Par la suite, nous allons appliquer cette stratégie pour des équations d'ordre 1 et 2 (En pratique il est rare d'avoir à considérer une équation d'ordre supérieur à 2).

IV.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

IV.3.1 Cas des équations sans second membre

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 s'écrit

$$y' + ay = 0 \tag{5}$$

où a est un nombre réel. Considérons une fonction y dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ (en particulier soit $y(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $y(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Alors :

$$\begin{aligned}
y'(x) + ay(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -a \\
&\Longleftrightarrow \quad (\ln(|y(x)|))' = -a \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(|y(x)|) = -ax + b \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad |y(x)| = e^{-ax+b} \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad |y(x)| = ce^{-ax} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}_+^* \\
&\Longleftrightarrow \quad y(x) = Ke^{-ax} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

On peut aussi montrer que si une fonction y s'annule en un point, et que si cette même fonction est une solution de l'équation différentielle (5) alors c'est la fonction nulle $y = 0$. Finalement, on a

Proposition IV.8. *L'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est formé des fonctions*

$$y(x) = K\,e^{-ax}$$

où K désigne une constante réelle.

Exemple IV.9. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $y(x) = K\mathrm{e}^{-3x}$ où K est un nombre réel quelconque.
Ainsi les fonctions définies par $y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et $y_2(x) = \pi\mathrm{e}^{-3x}$ sont deux exemples de solutions.

En pratique, une équation différentielle est fréquemment issue d'un phénomène réel, et dire qu'un problème a une infinité de solutions n'est généralement pas satisfaisant. Des données supplémentaires sont donc nécessaires pour pouvoir sélectionner une solution au problème étudié.

Exemple IV.10 (Temps de demi-vie)**.** La décroissance radioactive est la réduction du nombre de noyaux radioactifs instables dans un échantillon. La loi de désintégration radioactive stipule que le nombre $N(t)$ de noyaux non désintégrés d'un élément présents dans un échantillon à un instant t satisfait

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

où la constante de proportionnalité $\lambda > 0$ est appelée constante radioactive. Autrement dit, la fonction N satisfait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
D'après la proposition précédente, toutes les solutions sont de la forme $N(t) = K\,e^{-\lambda t}$, K étant un réel quelconque.
La donnée supplémentaire permettant de déterminer “la” solution peut être la suivante : au moment de l'expérience ($t = 2013$), on suppose que le nombre de noyaux radioactifs instables est connu, disons par exemple que $N(2013) = 17 \cdot 10^{15}$. Puisque $N(2013) = K\,e^{-2013\lambda}$, on en déduit la valeur de la constante $K = 17\,e^{2013\lambda} \cdot 10^{15}$ et donc que

$$N(t) = 17\,e^{\lambda(2013-t)} \cdot 10^{15}.$$

Entraînez-vous ! *Déterminer la fonction g vérifiant à la fois l'équation différentielle $g' = 5g$ et la relation $g(1) = 1$.*

Réponse On commence par appliquer le résultat de la proposition IV.8 avec $a = -5$: les fonctions g qui vérifient l'équation différentielle $g' = 5g$ sont de la forme $g(x) = K\,\mathrm{e}^{5x}$, le réel K étant une constante quelconque.
Si on veut en plus que $g(1) = 1$ alors on doit avoir nécessairement $K\,\mathrm{e}^5 = 1$, autrement dit la constante K vérifie $K = \mathrm{e}^{-5}$.
Finalement ; la solution vaut $g(x) = \mathrm{e}^{-5}\,\mathrm{e}^{5x} = \mathrm{e}^{5(x-1)}$.

IV.3.2 Cas des équations avec second membre

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'écrit

$$y' + ay = f \tag{6}$$

où a est un nombre réel et f une fonction.
Pour résoudre ce type d'équation, on exploite le principe de superposition (voir la proposition (IV.7)) : si y_p est une solution de l'équation différentielle (6) alors toutes les solutions de l'équation différentielle (6) seront de la forme $y_p + y_0$ où y_0 est une solution de l'équation différentielle homogène (5).
Puisque la proposition IV.8 fournit toutes les solutions de l'équation différentielle homogène (5), on a

Proposition IV.11. *Si y_p désigne une solution donnée de $y' + ay = f$ alors la forme générale de toutes les solutions de $y' + ay = f$ est :*

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{-ax}$$

où K est une constante réelle arbitraire.

Finalement, pour résoudre l'équation différentielle (6), il suffit de déterminer une solution particulière, et pour cela toutes les méthodes sont autorisées !
Par exemple, si pour des valeurs particulières du coefficient a et du second membre f, il existe une solution "évidente" à l'équation (6) alors toutes les solutions de l'équation (6) seront facilement obtenues.

Entraînez-vous ! *Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = 7$.*

Réponse On commence par résoudre l'équation homogène, c'est-à-dire sans le second membre : $y_0' + 4y_0 = 0$.
Selon la proposition IV.8, les solutions sont toutes de la forme $y_0(x) = K\,\mathrm{e}^{-4x}$, $K \in \mathbb{R}$.
On trouve ensuite une solution particulière en remarquant que la fonction constante $y_p(x) = 7/4$ est une solution de $y' + 4y = 7$ (vérifiez-le !).
D'après la proposition IV.11, on en déduit que toute les solutions de $y' + 4y = 7$ s'écrivent

$$y(x) = \frac{7}{4} + K\,\mathrm{e}^{-4x},$$

K étant une constante réelle arbitraire.

En pratique, il existe une méthode (appelée **méthode de variation de la constante**) qui permet d'obtenir à coup sûr l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle (6). Cette méthode consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = K(x)e^{-ax}$. On obtient le résultat suivant

Proposition IV.12. *L'ensemble des solutions de* (6) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = \left(K + \int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{e}^{as}\mathrm{d}s\right) e^{-ax}$$

où x_0 est un réel quelconque de l'ensemble de définition de f, et où K est une constante réelle.

Il est d'un intérêt limité d'apprendre par coeur cette expression de la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Par contre, la méthode permettant de la retrouver est riche d'enseignement. On va la présenter sur l'exemple suivant.

Exemple IV.13. Considérons l'équation différentielle suivante

$$y'(x) + 3y(x) = x + 1.$$

Etape 1 : résoudre l'équation homogène associée - d'après l'exemple du paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = K\mathrm{e}^{-3x}$, K étant une constante arbitraire.

Etape 2 : déterminer une solution particulière - la méthode de variation de la constante nous propose de chercher une solution de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-3x}$ où $K(x)$ est une fonction à déterminer. Or on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_p'(x) + 3y_p(x) = x + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(K(x)e^{-3x}\right)' + 3K(x)e^{-3x} = x + 1, \\ &\Longleftrightarrow \quad K'(x)e^{-3x} - 3K(x)e^{-3x} + 3K(x)e^{-3x} = x + 1, \\ &\Longleftrightarrow \quad K'(x)e^{-3x} = x + 1, \\ &\Longleftrightarrow \quad K'(x) = (x + 1)e^{3x}. \end{aligned}$$

On obtiendra ainsi une solution y_p dès lors que l'on aura obtenu une primitive de la fonction $(x+1)e^{3x}$. Ceci peut se faire à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x (s+1)e^{3s}ds &= \left[\frac{s+1}{3}e^{3s}\right]_{s=0}^{s=x} - \int_0^x \frac{1}{3}e^{3s}ds \\ &= \frac{x+1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{s=0}^{s=x} \\ &= \Big(\frac{x}{3}+\frac{2}{9}\Big)e^{3x} - \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Une fonction K pouvant convenir [2] est $K(x) = \Big(\frac{x}{3}+\frac{2}{9}\Big)e^{3x} - \frac{2}{9}$ de sorte qu'une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = K(x)e^{-3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}e^{-3x}.$$

<u>Etape 3</u> : conclure - on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ correspond aux fonctions de la forme

$$y(x) = \underbrace{K\mathrm{e}^{-3x}}_{\text{toutes les solutions de l'équation homogène}} + \underbrace{\frac{x}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{9}e^{-3x}}_{\text{une solution de l'équation complète}},$$

où K est une constante réelle quelconque. Notons qu'on peut écrire les solutions sous une forme plus condensée :

$$y(x) = \widetilde{K}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}, \qquad \widetilde{K} \in \mathbb{R}.$$

On notera qu'on a pris $\widetilde{K} = K - \frac{2}{9}$.

Les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 dépendent d'une constante K arbitraire, c'est-à-dire qu'il y a autant de solutions que de choix possibles pour K parmi les nombres réels. En pratique, comme dans le cas de l'équation homogène (5), cette constante est fixée dès qu'une *c*ondition initiale est imposée. Plus précisément :

Proposition IV.14. *Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $m_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction y solution de $y' + ay = f$ et satisfaisant la condition $y(x_0) = m_0$.*

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Quelle est la solution de l'équation $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ qui s'annule en 0 ?*

RÉPONSE D'après l'exemple précédent, les solutions de $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ sont toutes de la forme

$$y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} + \widetilde{K}\mathrm{e}^{-3x}.$$

Si cette fonction vérifie $y(0) = 0$ alors nécessairement on aura $\widetilde{K} = -2/9$. On en déduit la solution cherchée

$$y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3x}.$$

2. Le choix de cette fonction est ici arbitraire, il provient du fait que l'on a choisi la primitive qui s'annule en $x = 0$, en mettant 0 comme borne dans l'intégrale. Si on fait un autre choix, on obtiendra une autre primitive K, et donc une autre solution particulière y_p. Néanmoins le résultat final donnant toutes les solutions de l'équation différentielle ne sera pas perturbé.

Exemple IV.15. Lors d'une tentative de pénalité, un ballon de rugby[3] de masse m est soumis aux forces de gravité ainsi qu'à des forces de frottement proportionnelles à son vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc pour un tel système :

$$m\boldsymbol{v}'(t) = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - k\boldsymbol{v}(t),$$

le coefficient k étant le coefficient de frottement du ballon. On posera $a = k/m$. Les trois composantes v_x, v_y et v_z de la vitesse $\boldsymbol{v}$ vérifient donc trois équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} v_x' + av_x &= 0, \\ v_y' + av_y &= 0, \\ v_z' + av_z &= -g. \end{aligned}$$

Les deux premières équations différentielles sont homogènes, leurs solutions sont donc données par la proposition IV.8. On a

$$\begin{aligned} v_x(t) &= K_x e^{-at}, \qquad K_x \in \mathbb{R}, \\ v_y(t) &= K_y e^{-at}, \qquad K_x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle satisfaite par v_z est une équation différentielle linéaire du premier ordre et non homogène. On peut deviner[4] que l'application constante $-\frac{g}{a}$ est une solution pour l'équation différentielle satisfaite par v_z. On en déduit toutes les solutions possibles :

$$v_z(t) = K_z e^{-at} - \frac{g}{a}, \qquad K_z \in \mathbb{R}.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse la vitesse initiale du ballon (c'est à dire la valeur de v_x, v_y et v_z au temps $t = 0$). Si par exemple $\boldsymbol{v}(0) = (1, 0, 1)$ alors on a $v_x(0) = 1$, $v_y(0) = 0$ et $v_z(0) = 1$, et en reportant ces valeurs dans les solutions obtenues on en déduit les valeurs des constantes K_x, K_y et K_z :

$$K_x = 1, \quad K_y = 0, \quad K_z = 1 + \frac{g}{a}.$$

L'expression de la vitesse au cours du temps est alors déterminée de façon unique :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= e^{-at}, \\ v_y(t) &= 0, \\ v_z(t) &= \left(1 + \frac{g}{a}\right) e^{-at} - \frac{g}{a}. \end{aligned}$$

IV.3.3 Approfondissement

On a traité le cas des équations différentielles $y' + ay = f$ où a est un nombre réel. Le cas où a est une fonction continue se traite de façon identique et les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$y(x) = Ke^{-A(x)}$$

où $A'(x) = a(x)$ et K est une constante réelle arbitraire. On détermine ensuite une solution de l'équation complète avec la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$. Enfin, on écrit la forme générale des solutions, qui résulte encore une fois de l'application du principe de superposition (cf. proposition IV.7).

3. Pour des raisons de simplicité nous ne prendrons pas en compte la forme étrange d'un ballon de rugby...
4. Si on ne le devine pas, on peut utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant v_z sous la forme $v_z(t) = K(t)e^{-at}$ comme dans l'exemple précédent.

IV.4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

IV.4.1 Cas des équations sans second membre

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 s'écrit

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7}$$

où a, b et c sont trois réels, a étant supposé non nul.
D'un point de vue théorique, la "linéarité" de telles équations permet d'affirmer que des solutions existent. Il y en a même une infinité et elles peuvent toutes être décrites dès qu'on connaît deux solutions "indépendantes".
Le principe de résolution (qui peut être adapté à des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre quelconque) consiste à déterminer des solutions sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que $y(x) = e^{\lambda x}$. Si on obtient autant de solutions (c'est-à-dire autant de valeurs de λ) que l'ordre de l'équation différentielle (ici l'ordre est 2) alors on disposera d'une base de l'ensemble de toutes les solutions.
On remarque que

$$\begin{aligned} y(x) = e^{\lambda x} \text{ est une solution de (7)} &\iff a(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + ce^{\lambda x} = 0 \\ &\iff a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \\ &\iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Cette dernière relation (8) est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle (7). Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Plus exactement, on a la proposition suivante :

Proposition IV.16.
• *Si* $\Delta > 0$ *alors l'équation caractéristique* (8) *possède deux solutions réelles* λ_1 *et* λ_2 *et l'ensemble des solutions de* (7) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}$$

où K_1 *et* K_2 *sont deux constantes réelles.*
• *Si* $\Delta = 0$ *alors l'équation caractéristique* (8) *ne possède qu'une seule solution* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On démontre alors que l'ensemble des solutions de* (7) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = (K_1 x + K_2)e^{\lambda x}$$

où K_1 *et* K_2 *sont deux constantes réelles.*
• *Si* $\Delta < 0$ *alors l'équation caractéristique* (8) *ne possède pas de solutions réelles mais deux solutions complexes conjuguées :* $\lambda_1 = u + iv$ *et* $\lambda_2 = u - iv$. *L'ensemble des solutions de* (7) *est formé des fonctions de la forme*

$$y(x) = e^{ux}(K_1 \cos(vx) + K_2 \sin(vx))$$

où K_1 *et* K_2 *sont deux constantes réelles.*

Rappelons que les racines de l'équation polynomiale (7) se calculent ainsi (selon le signe du discriminant Δ). Si $\Delta > 0$ alors les deux racines réelles sont $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Si $\Delta = 0$ alors l'unique racine est réelle, et vaut $\lambda = \frac{-b}{2a}$. Enfin, si $\Delta < 0$ alors les deux racines sont des nombres complexes $\lambda = u \pm iv$ où $u = \frac{-b}{2a}$ et $v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Entraînez-vous ! *Déterminer la solution de* $y'' = y$ *telle que* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

RÉPONSE Afin de suivre les résultats de la proposition IV.16 dans le cas où $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$, on résoud l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = 4$ étant positif, on dispose de deux racines réelles distinctes : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. D'après la proposition IV.16, les solutions de l'équation $y'' = y$ sont de la forme

$$y(x) = K_1\,\mathrm{e}^x + K_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Les deux constantes K_1 et K_2 vont être déterminées grâce aux conditions supplémentaires $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. La relation $y(0) = 1$ s'écrit $1 = K_1\,\mathrm{e}^0 + K_2\,\mathrm{e}^{-0} = K_1 + K_2$. De même la relation $y'(0) = 0$ devient $K_1 - K_2 = 0$. Les seules constantes K_1 et K_2 qui vérifient le système $\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ K_1 - K_2 = 0 \end{cases}$ sont $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$.

Finalement, la seule solution est donnée par

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

Remarque IV.17. Lorsque $\Delta < 0$, en utilisant des formules de trigonométrie classiques, on peut aussi écrire l'ensemble des solutions de (7) comme l'ensemble des fonctions de la forme

$$y(x) = A\,e^{ux}\cos(vx + \varphi) \tag{9}$$

où A et φ sont deux constantes réelles.
En effet, le terme $K_1\cos(vx) + K_2\sin(vx)$ peut s'écrire

$$K_1\cos(vx) + K_2\sin(vx) = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\Big(\underbrace{\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}}_{\alpha}\cos(vx) - \underbrace{\frac{-K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}}_{\beta}\sin(vx)\Big).$$

Puisque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, le point (α, β) du plan $\mathbb{R}^2$ est situé sur le cercle trigonométrique. On peut donc lui associer un angle $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\alpha = \cos\varphi \quad \text{et} \quad \beta = \sin\varphi.$$

On en déduit alors (voir l'Annexe A, page 87, concernant les formules trigonométriques)

$$\begin{aligned} K_1\cos(vx) + K_2\sin(vx) &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\big(\cos(\varphi)\cos(vx) - \sin(\varphi)\sin(vx)\big) \\ &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\,\cos(vx + \varphi). \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression (9) en posant $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$.

ENTRAÎNEZ-VOUS ! *Déterminer la solution de $y'' + y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.*

RÉPONSE On suit la même méthode que dans l'exercice précédent (on utilise la proposition IV.16 lorsque $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$).
Dans ce cas, le discriminant $\Delta = -4 < 0$, les racines complexes de l'équation caractéristique sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Les solutions de $y'' + y = 0$ sont donc de la forme

$$y(x) = K_1\cos(x) + K_2\sin(x).$$

Les deux constantes K_1 et K_2 sont ensuite déterminées grâce aux conditions supplémentaires $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On trouve $K_1 = 1$ et $K_2 = 1$ de sorte que

$$y(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

Noter que les formules de trigonométrie permettent d'écrire $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$, et on a donc

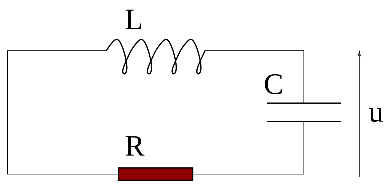
$$y(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}),$$

ce qu'on aurait pu retrouver en utilisant la remarque IV.17.

Exemple IV.18 (Circuit électrique RLC)**.** On s'intéresse un circuit RLC dessiné sur la figure ci-dessous. La tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 suivante

$$u''(t) + 2\lambda u'(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

où $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (λ est appelé le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre, ces deux coefficients sont strictement positifs). Les solutions de cette équation différentielle sont données par la proposition IV.16. Leur "allure" dépend du signe du discriminant Δ qui vaut ici $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.



En électricité, on définit le facteur de qualité par $Q = \frac{\omega_0}{\lambda}$ ce qui permet de distinguer différents régimes de fonctionnement :
• Si $Q < 1$ alors $\Delta > 0$ et les solutions sont de la forme

$$u(t) = K_1 \, \mathrm{e}^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + K_2 \, \mathrm{e}^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

et le régime est dit apériodique.
• Si $Q = 1$ alors $\Delta = 0$ et les solutions sont de la forme

$$u(t) = (K_1 + K_2 t) \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et le régime est dit critique.
• Si $Q > 1$ alors $\Delta < 0$ et les solutions sont de la forme

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[K_1 \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right) + K_2 \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\right]$$

et le régime est dit sinusoïdal amorti.

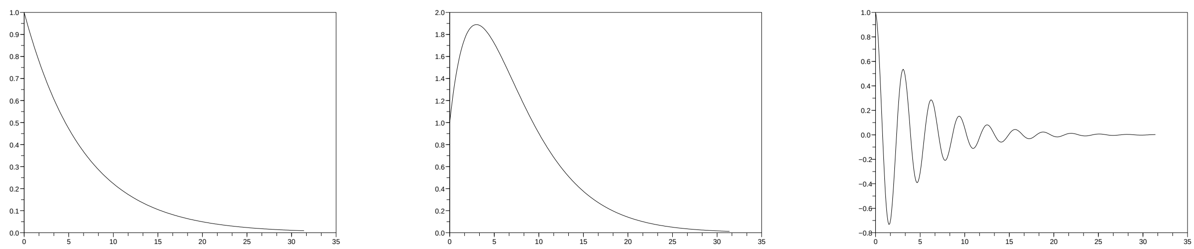


FIGURE IV.1 – Courbes d'évolution de la tension dans un circuit RLC en fonction du temps. Les trois régimes physiques selon le facteur qualité Q sont décrits. De gauche à droite : le régime apériodique, le régime critique et le régime sinusoïdal amorti.

IV.4.2 Cas des équations avec second membre

En toute généralité, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 s'écrit

$$ay'' + by' + cy = f \tag{10}$$

où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels et où f est une fonction. Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, il est possible d'exploiter les résultats portant sur l'équation homogène associée. En effet, les solutions de l'équation différentielle (10) sont les fonctions $y_p + y_0$ où y_p est une solution particulière de (10) et où y_0 est une solution générale de l'équation homogène associée.
Dans la pratique, il faut d'une part savoir résoudre l'équation homogène (ce qui a été fait au paragraphe précédent) et d'autre part connaître une solution particulière de (10).
Outre la méthode de la variation des constantes comme pour l'ordre 1 mais plus lourde à exploiter en pratique, deux principes généraux peuvent nous guider afin d'obtenir une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :
• le premier est le principe de superposition : si le second membre f est la somme de plusieurs fonctions f_1 et f_2 on peut chercher une solution particulière y_{p_1} de l'équation différentielle avec f_1 pour second membre, puis une solution particulière y_{p_2} de l'équation différentielle avec f_2 pour second membre. La somme de ces deux solutions particulières $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution particulière de l'équation avec $f = f_1 + f_2$ pour second membre.
• Le second principe repose sur le fait que certains "espaces" de fonctions sont stables par dérivation. Par exemple l'ensemble des combinaisons de cos et sin est stable par dérivation au sens où si on dérive une de ces fonctions alors on obtient à nouveau une fonction de ce type. Ainsi, si le second membre à une forme particulière, on peut chercher une solution particulière dans un tel "espace"...

Exemple IV.19. L'équation différentielle pour un système d'oscillations forcées (obtenu par exemple en imposant une tension sinusoïdale de la forme $E\cos(\omega t)$ à un circuit de type RLC, voir l'exemple IV.18)

$$u''(t) + 2\lambda u'(t) + \omega_0^2 u(t) = E\cos(\omega t). \tag{11}$$

On cherche une solution particulière à cette équation sous la forme $u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, A et B étant deux coefficients réels à déterminer. En dérivant deux fois u_p, on en déduit que

$$\begin{aligned}
u_p \text{ est une solution de (11)} \quad &\Longleftrightarrow \quad (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))'' + 2\lambda(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))' \\
&\qquad\qquad + \omega_0^2(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = E\cos(\omega t) \\
&\Longleftrightarrow \quad (-A\omega^2 + 2B\omega\lambda + A\omega_0^2)\cos(\omega t) \\
&\qquad\qquad + (-B\omega^2 - 2A\omega\lambda + B\omega_0^2)\sin(\omega t)) = E\cos(\omega t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -A\omega^2 + 2B\omega\lambda + A\omega_0^2 = E \\ -B\omega^2 - 2A\omega\lambda + B\omega_0^2 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + \qquad 2\omega\lambda B = E \\ \quad -2\omega\lambda A + \ (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système linéaire admet une unique solution (A, B) donnée par

$$\begin{cases} A = \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2} \\ B = \dfrac{2\omega\lambda E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}. \end{cases}$$

On en déduit qu'une solution particulière de (11) est donnée par

$$u_p(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}\cos(\omega t) + \frac{2\omega\lambda E}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}\sin(\omega t).$$

Il suffit d'ajouter cette solution aux solutions de l'équation homogène (voir l'exemple IV.18) pour obtenir toutes les solutions de l'équation (11).

Il existe des "règles" pour savoir sous quelle forme chercher une solution particulière. Une des plus utiles/générales est la suivante :

> Si $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$, où P est un polynôme de degré d, et λ est un nombre réel alors il existe une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est un polynôme de degré égal à d si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, de degré égal à $d+1$, si λ est racine simple de l'équation caractéristique, et de degré égal à $d+2$, si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Noter qu'il peut être intéressant de se plonger dans le corps des complexes, et de voir $\cos(x)$ comme la partie réelle de e^{ix}, la règle précédente s'appliquant aussi lorsque λ est un nombre complexe...

Entraînez-vous ! *Déterminer toutes les solutions de l'équation $y''(x) - y(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5x}$.*

Réponse Nous avons déjà résolu l'équation homogène associée (vous les exercices précédents), les solutions sont de la forme

$$y_0(x) = K_1\,\mathrm{e}^{x} + K_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Le second membre étant de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ où $P(x) = x^2$ et $\lambda = 5$, nous allons chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^{5x}.$$

On écrit alors

$$y_p \text{ est solution de } y''(x) - y(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5x} \quad\Longleftrightarrow\quad \Big[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^{5x}\Big]'' - \Big[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^{5x}\Big] = x^2\,\mathrm{e}^{5x}.$$

En calculant la dérivée seconde, on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } y''(x) - y(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5x} \quad &\Longleftrightarrow\quad 24\alpha\, x^2 + (20\alpha + 24\beta)x + (2\alpha + 10\beta + 24\gamma) = x^2 \\ &\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 24\alpha = 1 \\ 20\alpha + 24\beta = 0 \\ 2\alpha + 10\beta + 24\gamma = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow\quad \alpha = 1/24, \quad \beta = -5/144, \quad \gamma = 19/1728. \end{aligned}$$

Toutes les solutions de l'équation $y''(x) - y(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5x}$ sont donc de la forme

$$y(x) = \Big(\frac{1}{24}x^2 - \frac{5}{144}x + \frac{19}{1728}\Big)\,\mathrm{e}^{5x} + K_1\,\mathrm{e}^{x} + K_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Annexe A

Fonctions trigonométriques

Relations, valeurs de référence et décalages de phase

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

Table A.1 – Valeurs de référence du premier quadrant des fonctions sinus, cosinus et tangente

β	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$
$\cos(\beta)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$\sin(\beta)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$\tan(\beta)$	$-\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\frac{-1}{\tan(\alpha)}$	$-\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$

Table A.2 – Relations entre les valeurs des fonctions sinus, cosinus et tangente en différents angles

Equations trigonométriques

$$\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin a = \sin b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan a = \tan b \iff a = b + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Formules d'addition et de différence

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

Formules de multiplication

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \\
\sin(3\theta) &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
\cos(3\theta) &= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta
\end{aligned}$$

Conversion produit / somme

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big), \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big), \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big) \\
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin p - \sin q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Annexe B

Fonctions hyperboliques

Rappel : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit $\operatorname{ch}\theta = \dfrac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ et $\operatorname{sh}\theta = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$.

Relations

$$\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta &= \mathrm{e}^\theta \\ \operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta &= \mathrm{e}^{-\theta} \\ \operatorname{th}\theta &= \frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta} \end{aligned}$$

Formules d'addition et de différence

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b + \operatorname{ch}a\operatorname{sh}b \\ \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b - \operatorname{ch}a\operatorname{sh}b \\ \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b \\ \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b - \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}b}{1 + \operatorname{th}a\operatorname{th}b} \\ \operatorname{th}(a-b) &= \frac{\operatorname{th}a - \operatorname{th}b}{1 - \operatorname{th}a\operatorname{th}b} \end{aligned}$$

Formules de multiplication

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2\theta) &= \operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{sh}^2\theta = 2\operatorname{ch}^2\theta - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2\theta \\ \operatorname{sh}(2\theta) &= 2\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta \\ \operatorname{th}(2\theta) &= \frac{2\operatorname{th}\theta}{1 + \operatorname{th}^2\theta} \\ \operatorname{sh}(3\theta) &= 3\operatorname{sh}\theta + 4\operatorname{sh}^3\theta \\ \operatorname{ch}(3\theta) &= -3\operatorname{ch}\theta + 4\operatorname{ch}^3\theta \end{aligned}$$

Conversion produit / somme

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\big),$$
$$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\big),$$
$$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\big)$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Annexe C

Dérivées et primitives usuelles

fonction f	dérivée f'
α (constante)	0
x	1
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\mathrm{e}^{\alpha x}$	$\alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x}$
α^x $(\alpha > 0)$	$\ln(\alpha)\, \alpha^x$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

fonction f	dérivée f'
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$1-\mathrm{th}^2(x)$

fonction f	dérivée f'
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

fonction f	dérivée f'
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\, \mathrm{e}^{u(x)}$
$u(x)^\alpha$	$\alpha\, u'(x)\, u(x)^{\alpha-1}$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \times v'(x)$

fonction f	une primitive F
α (constante)	$\alpha\, x$
x	$\frac{x^2}{2}$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$
e^x	e^x
$\mathrm{e}^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$

fonction f	une primitive F
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$

fonction f	une primitive F
$\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\frac{-1}{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x)\, u(x)^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1}$

fonction f	une primitive F
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
$u'(v(x)) \times v'(x)$	$u(v(x))$

Annexe D

Equations différentielles

Dans les différentes équations proposées, les grandeurs a, b et c seront toujours des constantes données. La grandeur f sera une fonction donnée. Les solutions sont exprimées en utilisant la variable réelle x. En générale les solutions aux équations différentielles sont nombreuses, elles seront paramétrées par les nombres réels notés K, K_1 ou K_2.

équations	solutions
$y' + ay = 0$	$y(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax}$
$y' + ay = f$	Etape 1 : $K\,\mathrm{e}^{-ax}$ est solution de l'équation homogène (avec $f = 0$) Etape 2 : on détermine une solution particulière y_p - soit en reconnaissant une solution "évidente" - soit en utilisant la variation de la constante (page 79) Etape 3 : toute les solutions sont de la forme $y(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax} + y_p(x)$
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $b^2 - 4ac > 0$	On note λ_1 et λ_2 les deux solutions réelles de $aX^2 + bX + c = 0$ $y(x) = K_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + K_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $b^2 - 4ac = 0$	On note λ l'unique solution réelle de $aX^2 + bX + c = 0$ $y(x) = (K_1 + K_2\,x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $b^2 - 4ac < 0$	On note $u \pm \mathrm{i}v$ les deux solutions complexes de $aX^2 + bX + c = 0$ $y(x) = (K_1\,\cos(vx) + K_2\,\sin(vx))\mathrm{e}^{ux}$ ou de façon équivalente (voir page 83) : $y(x) = K_1\,\cos(vx + K_2)\mathrm{e}^{ux}$