Quaternion et rotation

1 Présentation et utilités

1.1 Blocage de cadran

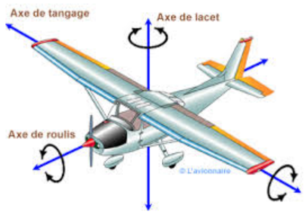

Figure 1 – Roulis, tangage, lacet

Dans l'espace 3D, la rotation d'un objet sur lui-même peut s'effectuer à l'aide de trois angles correspondant au roulis, tangage et lacet. Cependant tout paramétrage utilisant ces angles peut conduire au problème du blocage de cardan : perte d'un degré de liberté, qui survient quand les axes de deux des trois cardans nécessaires pour appliquer ou compenser les rotations dans l'espace à trois dimensions sont portés par la même direction.
Remarque : les cardans sont souvent imbriqués les uns dans les autres de façon à pouvoir tourner autour de plusieurs axes. Ils apparaissent dans les gyroscopes et dans les centrales à inertie afin de permettre au cardan le plus intérieur de rester fixe alors que les fixations des cardans extérieurs peuvent prendre n'importe quelle orientation. Lorsque deux des axes sont alignés, il n'est plus possible de maintenir l'orientation de la plate-forme de captage.

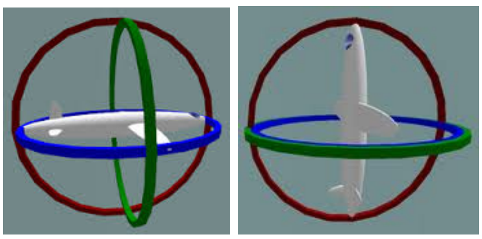

Figure 2 – Blocage de cardan : deux cardans deviennent co-planaires

Dans la figure, on constate qu'un degré de liberté est perdu.
Le mot blocage est trompeur : aucun cardan ne se bloque, les trois cardans peuvent toujours tourner librement autour de leurs axes de fixation respectifs. Néanmoins, comme les axes de roulis et de lacet sont parallèles, il n'y a plus d'axe disponible pour réagir aux changements de lacet.

Le problème du blocage de cardan apparaît lorsque l'on utilise les angles d'Euler, par exemple dans un logiciel (modélisation 3D, système de navigation embarqué, jeu vidéo).
Toutes les rotations peuvent se décrire au moyen de trois nombres α, β et γ, comme la succession de trois mouvements de rotation autour de trois axes perpendiculaires l'un avec le suivant.

Les quaternions permettrons de contourner le problème du blocage de cadran.

1.2 Rotation et produit de matrice

Au lieu de tourner un objet via une série de rotations successives, les quaternions permettent au programmeur de tourner un objet autour d'un axe arbitraire et d'un angle quelconque. La rotation est néanmoins toujours réalisée par des calculs matriciels. Cependant, au lieu de multiplier les matrices ensemble, il suffit de multiplier les quaternions les représentant. Le résultat final est reconverti en la matrice désirée. Les quaternions offrent aussi l'avantage de permettre l'interpolation. Ceci permet des rotations plus souples et plus réalistes.

L'orientation d'un objet dans l'espace, peut se décrire par une rotation (celle qui résulte de la composition des rotations précédemment appliquées). On peut donc utiliser les quaternions pour représenter les orientations des objets dans l'espace.

Généralement, les orientations et les rotations dans l'espace sont représentées par des matrices 3×3. Pour multiplier 2 matrices, il faut 27 multiplications et 18 additions scalaires. Pour multiplier deux quaternions, il faut 16 multiplications et 12 additions scalaires.

Le gain n'est pas négligeable, si en plus on considère que pour mémoriser un quaternion il faut seulement 4 valeurs contre les 9 de la matrice. Les quaternions permettent de faire des opérations sur les matrices qu'ils représentent en occultant certains défauts de ces dernières. On transforme les matrices en quaternions, on effectue les opérations avec les quaternions puis on repasse en matrice. De plus, les quaternions prennent moins de place en mémoire.

"En 3D les quaternions sont aux orientations ce que les vecteurs sont aux positions"

2 Forme algébrique et propriétés

L'algèbre des quaternions, que l'on notera $\mathbb{H}$, fut découverte par William Rowan Hamilton en 1843.

Rappel : une algèbre sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-algèbre) est une structure algébrique $(A, +, ., \times)$ telle que :

1. $(A, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. la loi $\times$ est définie de $A \times A$ dans A (loi de composition interne)
3. la loi $\times$ est bilinéaire : $\forall x, y, z \in A$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
   - $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$
   - $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
   - $(ax) \times (by) = (ab)(x \times y)$

Remarque : $+$ loi additive interne, . loi multiplicative externe sur $\mathbb{R}$, $\times$ loi multiplicative interne

2.1 Non commutativité des rotations

Les rotations du plan sont commutatives, mais celle de l'espace 3D ne le sont pas.

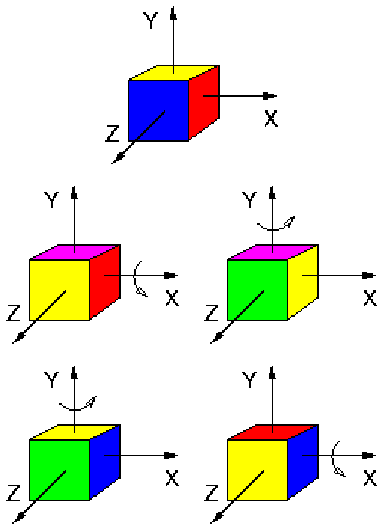

FIGURE 3 – Rotations (Ox), puis (Oy) et (Oy), puis (Ox)

Les quaternions ne vérifient pas non plus la commutativité du produit interne.

2.2 Définitions

1) Table de multiplication

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Remarque :
– les trois parties imaginaires i, j, k ont des carrés valant -1
– $\forall m, n \in \{i, j, k\}, m \neq n$, on a $m \times n = m \wedge n$

Hamilton a établi cette table afin de construire une multiplication entre les quaternions permettant créer le lien avec le produit scalaire (et donc la norme) sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni d'une base orthonormée.

2) $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel de dimension 4 de base $(1, i, j, k)$
Tout quaternion q s'écrit de manière unique.

$$q = a1 + bi + cj + dk$$

a : partie réelle, (b, c, d) : quaternion pur (partie vectorielle).

On peut noter aussi que $q = u + vj$, avec $u = a + bi$ et $v = c + di$

3) Soit le quaternion $q = a1 + bi + cj + dk$.

   On pose $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 0, 1)$

   - On notera $q = (a, b, c, d)$
   - On notera $q = a + \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v} = (0, b, c, d)$ dans la base (i, j, k) du plongement de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$
   - $q \in \mathbb{R} \iff \overrightarrow{v} = (0, 0, 0, 0)$
   - q est un quaternion pur si $a = 0$.

2.3 Somme et multiplication de quaternions

Pour tout $q = (a, b, c, d) = a + \overrightarrow{u}$ et $q' = (a', b', c', d') = a' + \overrightarrow{v}$, on a :

1) $(0, 0, 0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{H}$ pour $+$ et $-q = (-a, -b, -c, -d)$

2) $q + q' = (a + a', b + b', c + c', d + d')$, $+$ est commutative

3) $$\begin{aligned} q \times q' &= (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - dc', ac' - bd' + ca' + db', ad' + bc' - cb' + da') \\ &= (aa' - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + (a\overrightarrow{v} + a'\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

4) $\times$ est associative et distributive à gauche et à droite de $+$

5) $\times$ n'est pas commutative, en effet :

   $i \times j = (0, 1, 0, 0) \times (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1) = k$

   $j \times i = (0, 0, 1, 0) \times (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -k$

6) $(1, 0, 0, 0)$ est l'élément neutre de $\times$

   On a $(1, 0, 0, 0) \times (a, b, c, d) = (a, b, c, d)$

7) Si $q \in \mathbb{H}^*$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ b_1 = \dfrac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ c_1 = \dfrac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ d_1 = \dfrac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \end{array} \right.$$

   On a : $(a, b, c, d) \times (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_1, b_1, c_1, d_1) \times (a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$

   En fait, l'inverse de q, noté $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{||q||}$

8) $(q \times q')^{-1} = q'^{-1} \times q^{-1}$

2.4 Conjugaison dans $\mathbb{H}$, norme et produit scalaire sur $\mathbb{H}$

Soient $q = (a, b, c, d) = a + \overrightarrow{u}$ et $q' = (a', b', c', d') = a' + \overrightarrow{v}$ deux quaternions quelconques.

Définition Le conjugué d'un quaternion q est le quaternion $\overline{q} = (a, -b, -c, -d) = a - \overrightarrow{u}$. Cette définition prolonge celle du conjugué d'un complexe.

Remarques :

- $q = \overline{q} \Longleftrightarrow q \in \mathbb{R}$
- $q + \overline{q} \in \mathbb{R}$
- $$\begin{aligned} q \times \overline{q} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, -ab + ba - cd + cd, -ac + ca + bd - db, da - ad - bc + cb) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, 0, 0, 0) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Définition La norme de q est $||q|| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + ||\overrightarrow{u}||^2}$.

Cette norme coïncide avec la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^4$. De plus,

- $||q \times q'|| = ||q \times q'|| = ||q||||q'||$
- $||\overline{q}|| = ||q||$

Définition Le produit scalaire de q et q' est $q.q' = aa' + bb' + cc' + dd' = aa' + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, qui représente le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^4$

Définition On notera le quaternion unitaire de q par $U_q = \dfrac{q}{||q||}$

Propriétés

- $\overline{\overline{q}} = q$
- $\overline{q^{-1}} = (\overline{q})^{-1} = \dfrac{q}{||q||^2}$
- $\overline{q + q'} = \overline{q} + \overline{q'}$
- $\overline{q \times q'} = \overline{q'} \times \overline{q}$

3 Notation matricielle et rotation

3.1 Notation matricielle

Soient $q = a + bi + cj + dk$ et l'application $p \longmapsto q \times p$ linéaire sur $\mathbb{H}$. Cette application a pour matrice dans la base $1, i, j, k$:

$$M(q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

On peut définir le quaternion q comme la matrice $M(q)$. On a

$$M(1) = I_4,\ M(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $M(q) = aM(1) + bM(i) + cM(j) + dM(k)$

3.2 Rotation

Propriété Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ un vecteur unitaire et un angle $\theta \in [0, 2\pi]$.

On note $q = \cos\frac{\theta}{2} + x\sin\frac{\theta}{2}i + y\sin\frac{\theta}{2}j + z\sin\frac{\theta}{2}k = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u})$.

On désire caractériser la rotation d'axe $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ (dans le sens direct) d'un vecteur $\overrightarrow{v}$. On note $\overrightarrow{v'}$ l'image de $\overrightarrow{v}$ par cette rotation. On a

$$(0, \overrightarrow{v'}) = q \times (0, \overrightarrow{v}) \times \overline{q}$$

Propriété Composée de rotations

La multiplication de deux quaternions correspond à la composition de rotations. Si p et q sont des quaternions représentant des rotations, alors la rotation de $\overrightarrow{v}$ par $p \times q$ est

$$p \times q \times (0, \overrightarrow{v}) \times \overline{p \times q} = p \times q \times (0, \overrightarrow{v}) \times \overline{q} \times \overline{p} = p \times (q \times (0, \overrightarrow{v}) \times \overline{q}) \times \overline{p}$$

Ce qui revient à tourner par q, puis par p.

3.3 Matrice de rotation et exemples

Soit $q = a + bi + cj + dk$ unitaire. Si q représente une rotation depuis l'origine, on peut le représenter à l'aide d'une matrice 3×3 (dans un repère direct)

$$\begin{pmatrix} 1 - 2c^2 - 2d^2 & 2bc - 2da & 2bd + 2ca \\ 2bc + 2da & 1 - 2b^2 - 2d^2 & 2cd - 2ba \\ 2bd - 2ca & 2cd + 2ba & 1 - 2b^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

La somme est le produit de deux quaternions correspondent respectivement à la somme et au produit des matrices qui leur correspondent.

Exemples

1. Rotation d'angle a autour de l'axe $(0z)$. Donner le quaternion associé et retrouver la matrice de rotation.
2. Rotation d'axe $\overrightarrow{v} = i + j + k$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Donner le quaternion associé et calculer l'image de $\overrightarrow{v} = ai + bj + ck$ à l'aide de la première formule.