3.2. Metody konstrukcji generatorów dla podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa

3.2.1. Rozkłady dyskretne

Rozkład dwumianowy

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy $b(n,p)$, jeżeli

$$P\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n \tag{3.25}$$

Najprostszy algorytm generowania zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym, oparty na jej definicji (liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego), nie wymaga komentarzy:

ALGORYTM **3.22**

$X = 0$
For $i = 1$ *to* n *do*
    Generuj U *o rozkładzie równomiernym* $U(0,1)$
    If $U \leq p$ *then* $X = X + 1$
Return X

Ten algorytm wymaga wielokrotnego odwoływania się do generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym $U(0,1)$, co czasami może okazać się jego wadą.

Jeżeli n nie jest bardzo duże, to może opłacać się stablicowanie dystrybuanty tego rozkładu, tzn. obliczenie liczb

$$p_k = \sum_{i=0}^{k} P\{X = i\} \tag{3.26}$$

i skorzystanie z następującego algorytmu, który wymaga tylko jednej liczby losowej o rozkładzie $U(0,1)$:

ALGORYTM **3.23**

Generuj U *o rozkładzie równomiernym* $U(0,1)$
$X = 0$
While $U > p_X$ *do* $X = X + 1$
Return X

Jeżeli n jest duże, ale może być przedstawione w postaci $n = km$, gdzie z kolei m nie jest bardzo duże, to może opłacać się generowanie k liczb losowych o rozkładach dwumianowych $b(m,p)$ za pomocą algorytmu 3.23 i obliczenie X jako sumy tak wygenerowanych liczb.

Inny algorytm, który tylko raz odwołuje się do generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym $U(0,1)$, jest oparty na następującym lemacie (patrz Devroye (1986)):

LEMAT 3.8. *Jeżeli zmienna losowa U ma rozkład równomierny $U(0,1)$, to zmienne losowe*

$$\mathbf{1}_{(0,p)}(U) \qquad \textit{oraz} \qquad V = \min\left\{\frac{U}{p}, \frac{1-U}{1-p}\right\}$$

są niezależne i V ma rozkład równomierny $U(0,1)$.

Dowód. Prawdopodobieństwo łącznego zajścia zdarzeń $\{\mathbf{1}_{(0,p)}(U)=1\}$ oraz $\{V \le x\}$, dla $x \le 1$, jest równe px. Prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\mathbf{1}_{(0,p)}(U)=1\}$ jest równe p. Zdarzenie $\{V \le x\}$ przedstawiamy w postaci sumy rozłącznych zdarzeń $\{V \le x, U \le p\}$ i $\{V \le x, U > p\}$. Prawdopodobieństwo pierwszego z tych zdarzeń jest równe px, a drugiego $(1-p)x$, więc prawdopodobieństwo zdarzenia $\{V \le x\}$ jest równe x. □

Z lematu 3.8 wynika, że zmienną losową $\mathbf{1}_{(0,p)}(U)$ możemy traktować jako wskaźnik pojawienia się sukcesu, a zmienną losową V możemy użyć jako zmienną losową o rozkładzie $U(0,1)$ w niezależnym powtórzeniu doświadczenia w schemacie Bernoulliego. Prowadzi to do następującego algorytmu:

ALGORYTM 3.24

Generuj U o rozkładzie równomiernym $U(0,1)$
$X = 0$
For $i = 1$ *to* n *do*
If $U \le p$ *then* $X = X + 1$, $U = U/p$
else $U = (1-U)/(1-p)$
Return X

Podkreślamy jednak, że manipulacje liczbą losową U w tym algorytmie mogą być na niektórych komputerach bardziej czasochłonne niż wielokrotne odwoływanie się do generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym $U(0,1)$ (algorytm 3.22) lub korzystanie z tablic (algorytm 3.23). Jeszcze inny algorytm, dla przypadku rozkładów dwumianowych z dużymi wartościami oczekiwanymi, podali Kachitvichyanukul i Schmeiser (1988).

Rozkład Poissona

Zmienna losowa X ma rozkład Poissona $P(\lambda)$, jeżeli

$$\mathrm{P}\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \qquad x = 0, 1, \ldots \tag{3.27}$$

Najprostszy algorytm generowania zmiennej losowej o tym rozkładzie jest oparty na następującym lemacie: