

Metody i modele probabilistyczne

Lista zadań nr 1. (zadania na ocenę)

Zad. 1.1 (6 pkt.) Rozważmy n -elementowy ciąg zmiennych losowych o symetrycznym rozkładzie dwupunktowym postaci:

$$\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0,5 & 0,5 \end{array}.$$

Przez k -elementowy blok jedynek rozumiemy k -elementowy podciąg kolejnych „1” ograniczony z obu stron zerami (ewentualnie początkiem lub końcem całego ciągu) tzn. podciąg postaci:

$$0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, 1, 0$$

Wiadomo, że średnia liczba k -elementowych bloków w n -elementowym ciągu powinna wynosić około $n/2^{k+2}$ (przy założeniu, że n jest duże, a k dużo mniejsze niż n).

Napisz program, który:

- pozwala użytkownikowi wprowadzić n -elementowy ciąg „0” i „1” lub korzystając z systemowego generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie $U(0, 1)$ generuje n zmiennych losowych o symetrycznym rozkładzie dwupunktowym,
- wyznacza liczby k -elementowych bloków jedynek w tym ciągu dla $k = 1, 2, \dots, \lfloor \log_2 n \rfloor$ i porównuje je z wartościami teoretycznymi,
- podaje długość najdłuższego bloku jedynek w ciągu.

Zad. 1.2 (10 pkt.) W książce R. Wieczorkowskiego i R. Zielińskiego *Komputerowe generatory liczb losowych* (str. 66–69) opisano trzy metody generowania zmiennych losowych o rozkładach dyskretnych postaci

$$\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array},$$

gdzie $x_i \in \mathbb{R}$, $p_i > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Napisz program, który:

- pozwala użytkownikowi wprowadzić n -elementowe ciągi x_1, \dots, x_n oraz p_1, \dots, p_n lub wczytuje te dane z pliku tekstowego, którego pierwszy wiersz zawiera liczbę n , a n kolejnych wierszy zawiera pary liczb x_i i p_i (oddzielone spacją),
- korzystając z wybranych dwóch algorytmów z podanego tekstu oraz z systemowego generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie $U(0, 1)$ generuje M zmiennych losowych o zadanym rozkładzie dyskretnym,
- wyświetla podsumowanie wyników działania generatorów w postaci tabeli oraz wykresu słupkowego (przez podsumowanie rozumiemy zestawienie liczby wystąpień każdego z wyników x_i i porównanie ich z odpowiednimi wartościami teoretycznymi),
- wyświetla całkowitą oraz średnią liczbę porównań wykonanych przez oba algorytmy.

Zad. 1.3 (10 pkt.) W książce R. Wieczorkowskiego i R. Zielińskiego *Komputerowe generatory liczb losowych* (str. 70–71) opisano trzy metody generowania zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym $B(n, p)$ tzn. rozkładzie postaci

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

dla $k = 0, 1, \dots, n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$. Napisz program, który:

- pozwala użytkownikowi wprowadzić parametry rozkładu n oraz p ,
- korzystając z trzech algorytmów z podanego tekstu oraz z systemowego generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie $U(0, 1)$ generuje M zmiennych losowych o zadanym rozkładzie $B(n, p)$,
- wyświetla podsumowanie wyników działania generatorów w postaci tabeli oraz wykresu słupkowego (przez podsumowanie rozumiemy zestawienie liczby wystąpień każdego z wyników i porównanie ich z odpowiednimi wartościami teoretycznymi),
- wyświetla całkowitą oraz średnią liczbę porównań wykonanych przez oba algorytmy, a także całkowitą oraz średnią liczbę wygenerowanych zmiennych o rozkładzie jednostajnym.

Zad. 1.4 (15 pkt.) Napisać program, który pozwala badać własności generatorów liniowych rozkładu jednostajnego, tzn. generatorów postaci:

$$X_{n+1} = (a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \dots + a_k X_{n-k+1} + c) \mod m,$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_k, c, m$ są ustalonymi liczbami całkowitymi.

Program powinien:

- umożliwić użytkownikowi (najlepiej za pomocą interfejsu graficznego) wprowadzenie: parametrów generatora $a_1, a_2, \dots, a_k, c, m$ (można założyć, że $1 \leq k \leq 4$), wartości początkowych generatora (ziarna) X_0, X_1, \dots, X_k , parametrów rozkładu jednostajnego $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oraz liczby generowanych zmiennych $N \in \mathbb{N}$,
- za pomocą zdefiniowanego generatora liniowego wygenerować ciąg zmiennych losowych U_1, U_2, \dots, U_N o rozkładzie $U(a, b)$,
- obliczać średnią oraz odchylenie standardowe wylosowanych liczb,
- wyświetlać histogram dla liczb wygenerowanych przez generator (mile widziana możliwość ustawienia liczby słupków),
- wyświetlać na wykresie punkty (U_i, U_{i+1}) dla $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Uwaga 1: wykonujemy tylko jedno wybrane zadanie z listy.

Uwaga 2: pliki pdf do zadań 2 i 3 (zawierające opis algorytmów) znajdują się na platformie Moodle.

Wyrażam zgodę na drukowanie przez studentów WMiI UMK treści zawartej w niniejszym pliku.

Bartosz Ziemkiewicz, WMiI, UMK