2014-1 期中试卷解答

一、基本计算（每小题 6 分，共 60 分）

1. 计算数列极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}(1+n^2+2^n)^{1/n}$.

解 当$n>2$时有：$2=(2^n)^{1/n}\le(1+n^2+2^n)^{1/n}<(2^n+2^n+2^n)^{1/n}=2\sqrt[n]{3}$，两边取极限即得$l=2$

2. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$.

解 （分母等价变形后用洛必达法，然后化简，再归于熟知极限计算）

$$l=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}\frac{1-(1+x^2)\cos x}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}-\cos x\right)=-\frac{1}{6}.$$

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 依据$\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$转换：

$$l=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{1-\cos x}}=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}(1+\cos x)}=e^{\frac{2}{3}}.$$

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right),f'(x)=\arcsin x^2$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{x+1}\right)'=\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\cdot\frac{2}{(x+1)^2}，\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\pi}{2}\cdot2=\pi.$$

5. 设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(3t^2+5t+2)\frac{dt}{dx}=(6t+5)\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{6t^2+11t+5}{t}.$$

6. 计算曲线 $x^2-xy+2y^2=2$ 在点$(1,1)$处的切线方程.

解 $2x-y-xy'+4yy'=0$，$y'=\left.\dfrac{-2x+y}{4y-x}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{1}{3}$，切线方程是 $y-1=-\dfrac{1}{3}(x-1)$.

7. 设 $x=g(y)$ 是 $y=\ln x+\arctan x$ 的反函数，求 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}$ 和 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}+\left.\dfrac{1}{1+x^2}\right|_{x=1,y=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{3}{2}$ ， $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2}{3}$ ，

$$\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x(x+x^2)}{1+x+x^2}\right)\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=1}$$

$$\left.\frac{(1+3x^2)(1+x+x^2)-(x+x^3)(2x+1)}{(1+x+x^2)}\right|_{x=1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$$

（注：也可以用 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{-y''}{y'^3}$ 来计算）

8. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，计算以下函数的导函数 y' 以及 y''：

（1） $y=f(x^2)$ ， （2） $y=(f(x))^2$.

解（1） $y'=f'(x^2)2x$， $y''=2[f''(x^2)2x^2+f'(x^2)]$，

（2） $y'=2f(x)f'(x)$， $y''=2[f'^2(x)+f(x)f''(x)]$.

9. 设函数 $y=\dfrac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5e^x}$，使用对数求导法计算导数 $y'|_{x=1}$.

解 $\ln y=2\ln(1+x)+\dfrac{1}{2}\ln x-5\ln x-x$， $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{x}-1$，

当 $x=1$时， $y=\dfrac{4}{e}$，所以 $y'(1)=y\left.\left(\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{x}-1\right)\right|_{x=1}=-\dfrac{18}{e}$.

10. 求无穷小量 $u(x)=\cos 2x-\dfrac{1}{e^{2x^2}}$（ $x\to 0$ ）的主部.

解 由泰勒公式

$$u(x)=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)-[1-2x^2+\frac{(-2x^2)^2}{2!}+o(x^4)]=-\frac{4x^4}{3}+o(x^4),$$

故主部是$-\dfrac{4x^4}{3}$.

二、综合题（每小题 7 分，共 28 分）

11. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0.\end{cases}$ 问a为何值时，$x=0$是$f(0)$的间断点，并指出该间断点的类型.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

于是（1）当$a=0$时，$x=0$是第二类间断点；（2）当$0<a\ne 1$时，$x=0$是第一类间断点，是跳跃间断点.

12. 设函数$f(x)$在$x=0$处二阶可导，$f'(0)=0,f''(0)=2$. 求$l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}$.

解 依据拉格朗日中值公式，存在介于$x,\tan x$之间的实数ξ，使得

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(\tan x-x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=f''(0)\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}\lim_{x\to 0}\cos^2 x=\frac{2}{3}。$$

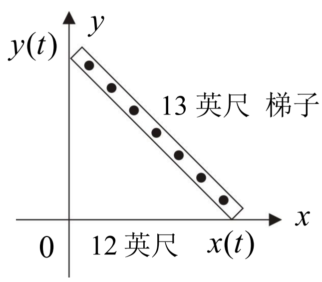
（其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}=1$是因$\xi$介于$x,\tan x$之间，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$用夹逼原则得来）

13. 设$f'(x)$处处连续，$g(x)=f(x)\sin^2 x$，求$g''(0)$.

解 $g'(x)=f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x, g'(0)=0$，第二步必须用定义做：

$$g''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(f'(x)\frac{\sin x}{x}\sin x+f(x)\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=2f(0)$$

14. 如图，一个 13 英尺长的梯子斜靠在墙边上，当梯子的顶端沿着墙面向墙底滑落时，梯子底端沿地面移动的速度是 5 英尺/秒，问当梯子底端的地面长度为 12 英尺时，直角三角形的面积的变化率是多少？



解 设梯子顶端到墙角的距离为$y(t)$，墙角到梯子底端的距离为$x(t)$.

当梯子顶点向墙底滑落时，由题意：$y=\sqrt{13^2-x^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=5$，

$x=12$ 时，$y=5$ ，$\dfrac{dy}{dt}=-12$.

此时，直角三角形的面积及其导数为 $s=\dfrac{1}{2}xy,\quad \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{2}(x'y+xy')=-\dfrac{199}{2}.$

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

15. 设 $f(x),\ g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

证 目标式 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$ 等价于 $f'(\xi)\left[g(b)-g(\xi)\right]-g'(\xi)\left[f(\xi)-f(a)\right]=0$.

设 $F(x)=\left[f(x)-f(a)\right]\cdot\left[g(b)-g(x)\right]$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=0=F(b)$，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

16.设 $f(x)=\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$，已知对一切实数 x，有 $\left|f(x)\right|\le|x|$，试证：$\left|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n\right|\le1$.

证：因为 $\left|f(x)\right|\le\left|x\right|$，所以 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le1$. 于是

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to0}\frac{\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)}{x}\right|$$

$$=\left|\alpha_1\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}+2\alpha_2\lim_{x\to0}\frac{\varphi(2x)-\varphi(0)}{2x-0}+\cdots+n\alpha_n\lim_{x\to0}\frac{\varphi(nx)-\varphi(0)}{nx-0}\right|$$

$$=\left|\alpha_1\,\varphi'(0)+2\alpha_2\varphi'(0)+\cdots+n\alpha_n\varphi'(0)\right|=\left|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n\right|\le\lim_{x\to0}1=1.$$