2019 ～2020 学年第一学期

《微积分（一)》（上）期中考试试卷(B 卷) (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级__________ 学号__________ 姓名__________

考试日期: 2019-11-15　　　　　　　　考试时间: PM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 且 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，那么(更正) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$ __ a __.

如果不修改试题，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\text{任何非负实数以及}+\infty\text{都有可能，}\ a=1\\ 0,\ a<1\\ +\infty,\ a>1\end{cases}$

2. $\inf\{r\in Q: r^2>2\text{且}r>0\}=$ __ $\sqrt{2}$ __.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n-1})^{2-n}=$ __ $\dfrac{1}{e}$ __.

4. 设 $y=\sin\left(e^{u(x)}+v^2(x)\right)$，$u(x),v(x)$ 可微，则 $dy=$ __ $\cos(e^u+v^2)\cdot(e^u u'+2vv')dx$ __.

5. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$，则函数在 $\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$ 的最大值是 __ $\dfrac{3}{8}$ __.

得　分	
评卷人	

二. 选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 当 $n\to\infty$，如下发散的是（　B　）.

A. $\dfrac{n!}{n^n}$　　B. $\dfrac{\sqrt{n-1}}{\ln\frac{1}{n}}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{n^2+3}}{4\sqrt{n}+n^2}$　　D. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$

2. 下列叙述错误的是（　B　）.

A. Dirichlet 函数不是连续函数

B. 一个函数的导函数可以不连续，并且有第一类和第二类间断点

C. $O(x^2)=o(x)(x\to 0)$

D. 已知 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\forall x$ 有 $f'(x)\neq 0$，则 f 有严格单调可导的反函数

解答内容不得超过装订线

3. 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导，f' 严格递增且 $f(a)=f(b)=0$，则下列叙述正确的是（　D　）

更正：依教材定义，默认必须有邻域处在定义域内，极值只能是内点，故 C 也对

A. $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)$ 为函数的最大值　　　　B. $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)\geq 0$

C. f 在 $[a,b]$ 上可能没有极大值　　　　D. $f(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立

得　分	
评卷人	

三． 计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{-x\cdot x^2}=-\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

先取对数求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^{n-1}}\ln\left(\frac{2}{2^2-1}\right)+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left[\ln\left(\frac{2}{2^2-1}\right)+2\ln\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)+\cdots+2^{n-2}\ln\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)\right]$$ Stolz 定理

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)}{2^{n-1}-2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=\ln\frac{1}{2}$$

从而原式$=\dfrac{1}{2}$.

4．设 $y=(\sin x)^6+(\cos x)^6$，求 $y^{(n)}(0)$.

解：$y=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x$，

$y^{(n)}=4^n\dfrac{3}{8}\cos(4x+\dfrac{n\pi}{2})$，所以 $y^{(n)}(0)=3\cdot 2^{2n-3}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

5．已知 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-(\sin t)^2}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

得　分	
评卷人	

四. 解答题（每小题 7 分, 共 14 分）

1．请给出一函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且其二阶导函数在点 $x=0$ 处不连续，其余处处连续，并给出论证过程。

解：答案不唯一，仅供参考。

令 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 经计算可得 $f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

同样再次计算得，$f''(x)=\begin{cases} 12x^2\sin\dfrac{1}{x}+2x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ 不存在，二阶导函数在点 $x=0$ 处不连续，而在非零点连续.

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，请讨论 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

解：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递减. 证明：$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，$\forall x\in(0,+\infty)$.

$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$，其中 $0<\xi<x$．于是 $f(x)\ge f'(x)\cdot x$，从而 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\le 0$，

$\forall x\in(0,+\infty)$，所以 $\frac{f(x)}{x}$ 单调递减.

得　分	
评卷人	

五. 证明题（每小题 8 分, 共 24 分）

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

（此题可以有多种证法，可依据极限定义，可以用 Cauchy 收敛准则，也可以假设有极限推出矛盾，请改卷老师灵活处理。）

证明：据 Cauchy 准则，即要证明，$\exists\varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists n,m>N,$ 使得 $|\sin n-\sin m|\ge\varepsilon_0$.

取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\forall N>0$，令 $n=\left[2N\pi+\frac{3}{4}\pi\right]$，$m=[2N\pi+2\pi]$，则 $m>n>N,$

且 $2N\pi+\frac{1}{4}\pi<n<2N\pi+\frac{3}{4}\pi, 2N\pi+\pi<m<2N\pi+2\pi$，

从而 $|\sin n-\sin m|\ge\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，证明：$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续.

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 知，$\forall\delta>0$，取 $M=\frac{2}{\delta}$，则存在 $N>0$，当 $x>N$ 时，有 $f'(x)>M$．

再取 $x_1,x_2>N$，且 $x_1<x_2$ 和 $|x_1-x_2|=\frac{\delta}{2}<\delta$ 时，$|f(x_2)-f(x_1)|=f'(\xi)(x_2-x_1)\ge M\cdot\frac{\delta}{2}=1$. 这就否定了一直连续的定义.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上连续，且 $x>1$ 时有 $f'(x)>c>0$，又 $f(1)<0$．证明：方程 $f(\mathrm{x})=0$ 在区间 $(1,1-\frac{f(1)}{c})$ 内有且只有一个根.

证明：由 $f(1)<0$，知 $1-\frac{f(1)}{c}>1$．在区间 $(1,1-\frac{f(1)}{c})$ 上应用 Lagrange 中值定理

$f(1-\frac{f(1)}{c})-f(1)=f'(\xi)[(1-\frac{f(1)}{c})-1]=f'(\xi)[-\frac{f(1)}{c}]$，其中 $\xi\in(1,1-\frac{f(1)}{c})$.

又因为 $f'(\xi)>c$，所以 $f(1-\frac{f(1)}{c})-f(1)>-f(1)$，$f(1-\frac{f(1)}{c})>0$．但 $f(1)<0$，由连续函数介值性，知 $\exists x_0\in(1,1-\frac{f(1)}{c})$，使得 $f(\mathrm{x}_0)=0$．又 $x>1$ 时有 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 严格递增，所以 $f(\mathrm{x})=0$ 在区间 $(1,1-\frac{f(1)}{c})$ 内只有一个根.