2018-2 期末试题解答

一、单项选择题

1. B　**2.** A　**3.** C　**4.** A　**5.** D　**6.** B

二、填空题

7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x$.　**8.** $2xf_1' + yf_2'$.　**9.** $6y + 20z^3$.　**10.** $\ln 3$.

三、基本计算题

11.取直线 L 上的点 $B(6,1,6)$,则 $\overrightarrow{AB} = \{5,-1,3\}$，直线的方向矢为 $\boldsymbol{s} = \{-1,1,-2\}$.

所求距离为 $d = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|} = \dfrac{|\{-1,7,4\}|}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}$.

12. 方程组对 x 求导得到

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2yy' + \dfrac{1}{z}z' + 3z^2 z' = 0, \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases} \text{代入点 } (0,0,1) \text{ 得到} \begin{cases} 4z'(0) = 2, \\ 1 + y'(0) + z'(0) = 0 \end{cases}.$$

解得 $y'(0) = \dfrac{-3}{2}, z'(0) = \dfrac{1}{2}$.

13. 令 $\begin{cases} f_x = 4 + 2y - 2x = 0, \\ f_y = 2x - 6y = 0 \end{cases}$,

解得唯一驻点 $x = 3, y = 1$.　　（4 分）

继续求二阶导数得到 $f_{xx} = -2, f_{yy} = -6, f_{xy} = 2$，所以 $\Delta = AC - B^2 = 8 > 0$.

函数在 $(3,1)$ 取得极大值 $f(3,1) = 6$.

14. 由轮换性得 $I = 3\iiint\limits_{\Omega} z dv$

$$= 3\int_0^1 z\sigma(z) dz$$　（$\sigma(z)$ 为 $z =$ 常数截 Ω 所得三角形的面积）

$$= 3\int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{1}{8}.$$

15. 因 $Q_x = P_y = 2x - 2y\cos x$.

所以　$(2xy - y^2\cos x)dx + (x^2 - 2y\sin x)dy$ 是某个二元函数的全微分，直接凑微分的

$I = [x^2 y - y^2 \sin x]_{(0,1)}^{(\pi,1)} = \pi^2$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!!}$ 为正项级数，因 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2}=0<1$，

由比值判别法可得， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!!}$ 收敛.

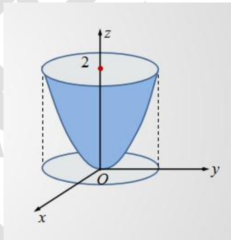
同理 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)!!}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 绝对收敛，所以原级数为绝对收敛.

四、应用题

17. 解 $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$.故

$$S=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy(D:x^2+y^2\le 2)$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\cdot\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13\pi}{3}.$$

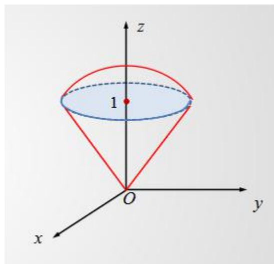


2018-2（期末）-17 图

18. 由 Gauss 公式得

$$I=\iiint_\Omega 2zdv$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho=\pi .$$



2018-2（期末）-18 图

五、 综合题

19. 由 Green 公式，得

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy,$$

因为 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$ 具有轮换性，所以

$$\iint_D f(y)dxdy=\iint_D f(x)dxdy,$$

从而 $\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\ge\iint_D 2dxdy=2\pi .$

20. 将函数 $f(x)=\frac{x}{2},-\pi<x<\pi$ 展开为正弦级数. 则

$a_n=0, n=0,1,2,\cdots.$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n = 1,2,3,\cdots.$$

根据收敛定理$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi.$