华中科技大学启明学院 2017 级

微积分学(一)(上)期中考试试卷(下午用卷)

班级______________　　　　　　　　　　姓名______________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、**判断题**（4′×3, 共 12 分）**请在正确说法的括号中画“ √ ”,在错误说法的括号中画“×”.**

1. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值，则它在 x_0 的某左邻域内单调减少, 在 x_0 的某右邻域内单调增加. [×]

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界. [√]

3. 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 为两个收敛数列，若 $x_n > y_n\ (\forall n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. [×]

二、**填空题**（4’×2, 共 8 分）

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+2017^n} =$ ___2017_____.

5. 设 $x\to 0$ 时 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 是与 x^5 同阶的无穷小, 则 $ab =$ __$-\dfrac{4}{9}$___.

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

6. 设 $f(x)=\ln(1+2x-3x^2)$，求 $f^{(2017)}(0)$.

解：$f(x)=\ln(1+2x-3x^2)=\ln(1+3x)+\ln(1-x)$　　(2’)

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(3x)^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(-x)^k}{k}+o(x^n),$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}[3^k+(-1)^k]x^k}{k}+o(x^n),$$　　(6’)

所以 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}[3^n+(-1)^n]}{n}$,　　(9')

令 $n=2017$，得 $f^{(2017)}(0)=2016!(3^{2017}-1)$.　　(10')

另解：

$f(x)=\ln(1+2x-3x^2)=\ln(1+3x)+\ln(1-x)$， $f'(x)=\dfrac{3}{1+3x}-\dfrac{1}{1-x}$,

$f''(x)=(-9)(1+3x)^{-2}-(1-x)^{-2}$,

$f'''(x)=(-3^3)(-2)(1+3x)^{-3}-2(1-x)^{-3}$，归纳得：

$f^{(2017)}(x)=(-3^{2017})(-2)\cdots(-2016)(1+3x)^{-2017}-1\cdot 2\cdots(2016)(1-x)^{-2017}$

$f^{(2017)}(0)=2016!(3^{2017}-1)$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}$.

解: 令 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}$, 则 $\ln f(x)=x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})-x\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}=e^{-\frac{1}{2}}$.

8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}=2017$，求常数 α 与 β.

解　由 $2017=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta[(1+1/n)^\beta-1]}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{\beta n^{\beta-1}}$（利用 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x, x\to0$）

得 $\alpha=\beta-1,\beta=\dfrac{1}{2017}$，所以 $\alpha=-\dfrac{2016}{2017}$,　$\beta=\dfrac{1}{2017}$.

9．求曲线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}(a>0)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程，并求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\sin t+\sin t+t\cos t}=\tan t$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$.

$t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1+\dfrac{\pi}{4})$，　$y=x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1-\dfrac{\pi}{4})$.

∴ 切线方程为

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-\frac{\pi}{4})+x-\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+\frac{\pi}{4})\text{，即 } y=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a+x.$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sec^2 t}{at\cos t}$，∴ $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{a\pi}$.

四、简单证明题（每小题 5 分，共 20 分）

10. 设 $f(x)=(x+1)^2D(x)$，其中 $D(x)$ 为 Direchlet 函数. 证明：$f(x)$ 在 $x=-1$ 处可微.

又，问 f 在其他点处的可微性如何？请给出你的结论(无须证明).

证：（1）当 $x=-1$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^2D(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1\backslash}(x+1)D(x)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，从而可微. (4’)

(2)对任意的 $x_0\neq-1$，$f(x)$ 在 x_0 处不可微. (5’)

11. 用极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

证 对 $x\neq1$，有

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-x+1}{3(2x+1)}\right|=\frac{|x-1|}{3|2x+1|}\qquad 2\text{ 分}$$

限制 $0<|x-1|<1$，则 $|2x+1|=|2(x-1)+3|\geq3-2|x-1|>1$，　3 分

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$. 由极限的定

义，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.　　　　5 分

12. 证明：若函数 f 在有界区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0\,(\forall x\in[a,b])$, 则存在正常数 M，使对任意 $x\in[a,b]$, 有 $f(x)>M$.

证: 因为正函数 $f\in C[a,b]$, 所以存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)>0$.　　(3')

取 $M=\dfrac{f(x_0)}{2}$, 则 $M>0$, 且 $\forall x\in[a,b]$, 有 $f(x)\ge f(x_0)>M$.　　(5')

13. 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 试用确界原理证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在.

证：因数列 $\{a_n\}$ 有下界, 由确界原理数列 $\{a_n\}$ 有下确界, 记为 $a=\inf\{a_n\}$.　　（2’）

下证 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 事实上, 任给 $\varepsilon>0$, 按下确界的定义, 存在 a_N, 使 $a<a_N<a+\varepsilon$, 而数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 于是 $n>N$ 时, $a-\varepsilon<a<a_n<a_N<a+\varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.　（5 分）.

五. 证明题 (两小题各 10 分, 共 20 分)

14. 设函数 $f(x)$ 定义在 $[-1,1]$ 上且 $f'(0)$ 存在. 又设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个以零为极限的数列, 满足 $-1<a_n<0<b_n<1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}=f'(0).$$

证 记 $I_1=\dfrac{f(a_n)-f(0)}{a_n}$, $I_1=\dfrac{f(b_n)-f(0)}{b_n}$, 则由

$$I=\frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}=\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_n-b_n}+\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}\cdot\frac{-b_n}{a_n-b_n}$$

知 I 介于 I_1、I_2 之间. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}I_1=\lim\limits_{n\to\infty}I_2=f'(0)$, 由两边夹法则得证 $\lim\limits_{n\to\infty}I=f'(0)$.

15. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $f(0)=0$, 且 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加. 证明: 函

数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上也严格单调增加.

证　对 $x>0$，有

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(f'(x)-f'(\xi)\right),$$

其中 $\xi\in(0,x)$ 来自于 Lagrange 中值公式: $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(\xi)$.　　(5')

由 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加得到 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'>0 \quad (x>0)$. 故函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加.　　(10')