2011-1 期中试卷解答

一、计算（每小题 5 分，共 60 分）

1. 计算极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2011^n}{n!}$.

解法一 当 $n>2011$ 时， $0<\dfrac{2011^n}{n!}<\dfrac{2011^{2011}}{2011!}\cdot\dfrac{2011}{n}$，由夹挤原理得 $l=0$

解法二 当 $n>2011$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2011}{n}<1$，故数列单调减且有下界 0，从而极限存在，

对 $a_n=\dfrac{2011}{n}a_{n-1}$ 两边取极限，得 $l=0$.

2.设 $x\to 0$ 时，无穷小量 $u=\sqrt[4]{1-a\arctan x^2}-1$ 与 $v=\ln\cos x$ 等价，求常数 a 的值.

解 因 $u\sim-\dfrac{a}{4}\arctan x^2\sim-\dfrac{a}{4}x^2$, $v\sim\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，故 $a=2$.

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$.

解法一（先恒等变形再用洛必达法则）

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}\cdot e^{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

解法二 （先用 Lagrange 中值定理再用洛必达法则）

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}(x-\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

解法三 （直接用洛必达法则）

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2 x+e^{\sin x}\sin x}{6x}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}\cos^2 x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}\cos^3 x+e^{\sin x}\sin 2x}{6}=0$，

所以 $l=\dfrac{1}{6}$.

4. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 $l=\exp[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{-1}-1}{2x}=-\frac{1}{2},$$

故 $l=\exp[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]=e^{-1/2}$.

5. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\arctan 2x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{1}{n})$.

解 由题设知 $f(0)=0, f'(0)=\dfrac{2}{1+4x^2}\Big|_{x=0}=2$，

故 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1/n)-f(0)}{1/n}=f'(0)=2$.

6. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 连续，且任给自然数 n，有 $\varphi(\dfrac{n}{n+1})=\sqrt[n]{n}$.

（1）求 $\varphi(1)$；（2）设 $f(x)=(x-1)\varphi(x)$，求 $f'(1)$.

解 由连续性条件知极限 $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\varphi(1)$ 存在， 特别，

$$\varphi(1)=\lim_{n\to\infty}\varphi(\frac{n}{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

由导数定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}==\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\varphi(1)=1$

[注意，从 $f'(x)=(x-1)\varphi'(x)+\varphi(x)$ 中令 $x=1$ 得出 $f'(1)$ 不给分]

7. 设 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，求 $dy(1)$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$，$dy(1)=y'(1)dx=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}dx$.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 确定，求 y'， y''.

解 $2x-(y+xy')+2yy'=0$， $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$；

$$y''=\frac{(2-y')(x-2y)-(2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}=\frac{6}{(x-2y)^3}.$$

9. 设 $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\sin t-t\cos t)'}{(\ln\cos t)'}=-t\cos t$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(-t\cos t)'}{(\ln\cos t)'}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{\tan t}$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\frac{\pi}{4}).$$

10. 设 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+5x+2}$，求 $f^{(n)}(x)(n>1)$.

解 因 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+5x+2}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{x+2})$，

所以 $f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{3}\{2^n\dfrac{(-1)^n n!}{(2x+1)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\}$.

11. 确定自然数 n 的范围，使 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 欲使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在，应有 $n>1$，此时 $f'(0)=0$，

欲使导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$

于是从 $f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ 中得到必须 $n>2$.

12. 设函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x+1}{x-1}$，指出其间断点，并说明间断点类型.

解 间断点为 0，1. 因

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0，\ f(1^+)=\frac{\pi}{2e},f(1^-)=-\frac{\pi}{2e},$$

故 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃点.

二、（每小题 6 分，共 24 分）

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可微，且 $f(0)\cdot f(2)>0, f(0)\cdot f(1)<0$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证明：由题设，$f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处以及 $x=1,x=2$ 处异号，于是由连续函数的零点定理知存在 $\eta_1\in(0,1),\eta_2\in(1,2)$，使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$.

设 $g(x)=e^{-x}f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 可导，且 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,2)$，使 $g'(\xi)=0$，即有 $f'(\xi)=f(\xi)$.

14. 设函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $x=\varphi(y)$ 均存在三阶导数，且 $y'\neq 0$，请推导出反函数的求导公式 $\frac{dx}{dy},\frac{d^2x}{dy^2}$ 和 $\frac{d^3x}{dy^3}$ [用 y',y'',y''' 表示].

解 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，$\frac{d^2x}{dy^2}=(\frac{1}{y'})'\cdot\frac{1}{y'}=\frac{-y''}{(y')^3}$，$\frac{d^3x}{dy^3}=(\frac{-y''}{y'^3})'\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y'y'''-3(y'')^2}{(y')^5}$.

15. 证明：当 $x\geq 1$ 时，有 $\arctan x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

证 当 $x=1$ 时，结论成立.

当 $x>0$ 时，设 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0$，

所以 $f(x)=C$，又 $f(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{4}$，故 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$.

综上所述，当 $x\ge 1$ 时，有 $\arctan x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)>1$. 若 $f(a)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,a-f(a))$ 内有唯一根.

证明 记 $b=a-f(a)>a$，则

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)>f(a)+(b-a)=f(a)+(-f(a))=0,$$

由零点定理存在 $c\in(a,b)$，$f(c)=0$.

又 $f(x)$ 是严格单调增加的，故 c 是方程 $f(x)=0$ 在 $(a,a-f(a))$ 内的唯一根。

或者用反证法，如果有两个以上的根，则由罗尔定理，导函数就有零点，与条件矛盾.

三、（每小题 8 分，共 16 分）

17. 分别叙述数列 x_n 有界和收敛（以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 为例）的定义，并证明：收敛数列是有界数列.

叙述：x_n 有界 $\Leftrightarrow \exists M>0,\forall n:|x_n|\le M$；

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N:|x_n-a|<\varepsilon.$$

证明 取 $\varepsilon=1$，由 $\lim x_n=a$ 知，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<1$，从而

$$|x_n|=|x_n-a+a|<1+|a|,$$

取 $M=\max\{1+|a|,|x_1|,|x_2|,\cdots|x_N|\}$，则 $\forall n\ge 1$，有 $|x_n|\le M$.

18. 如果记$\xi=\theta\cdot x$，$0<\theta<1$，则拉格朗日中值公式$f(x)-f(0)=xf'(\xi)$可以写作：

$f(x)-f(0)=xf'(\theta x), 0<\theta<1$，$\theta$的大小通常与$x$相关.（1）若$f''(0)\neq 0$，试证：

$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$；[5 分]（2）设$f(x)=\arctan x$，求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$. [3 分]

证明 （1）由$f(x)-f(0)=xf'(\theta x), 0<\theta<1$，来凑二阶导数：

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}\quad（将 f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}代入）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{\theta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}}{\theta}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$

故从$f''(0)\neq 0$推出，$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\arctan x-0=\dfrac{1}{1+(\theta x)^2}x, 0<\theta<1$，解出

$$\theta^2=\frac{\dfrac{x}{\arctan x}-1}{x^2}=\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x},$$

$$\lim_{x\to 0}\theta^2=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.