

微积分（上）期中试卷 1 解答

一、计算（每小题 5 分，共 60 分）

1. 计算极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017^n}{n!}$.

解法一 当 $n > 2017$ 时, $0 < \frac{2017^n}{n!} < \frac{2017^{2017}}{2017!} \cdot \frac{2017}{n}$, 由夹挤原理得 $l = 0$.

解法二 当 $n > 2017$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2017}{n} < 1$, 故数列单调减且有下界 0, 从而极限存在,

对 $a_n = \frac{2017}{n} a_{n-1}$ 两边取极限, 得 $l = 0$.

2. 设 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $u = \sqrt[4]{1 - a \arctan x^2} - 1$ 与 $v = \ln \cos x$ 等价, 求常数 a 的值.

解 因 $u \sim -\frac{a}{4} \arctan x^2 \sim -\frac{a}{4} x^2$, $v \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2} x^2$, 故 $a = 2$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

解法一（先恒等变形再用洛必达法则）

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x - \sin x} - 1}{x^3} \cdot e^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

解法二（先用 Lagrange 中值定理再用洛必达法则）

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi}(x - \sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

解法三（直接用洛必达法则）

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} \sin x}{6x}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \sin x}{6x} = \frac{1}{6}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^2 x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^3 x + e^{\sin x} \sin 2x}{6} = 0,$$

所以 $l = \frac{1}{6}$.

4. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$.

解 $l = \exp\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]$, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-1} - 1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

故 $l = \exp\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right] = e^{-1/2}$.

5. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \arctan 2x$ 在原点相切, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right)$.

解 由题设知 $f(0) = 0, f'(0) = \frac{2}{1+4x^2} \Big|_{x=0} = 2$,

故 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = f'(0) = 2$.

6. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 连续, 且任给自然数 n , 有 $\varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sqrt[n]{n}$.

(1) 求 $\varphi(1)$; (2) 设 $f(x) = (x-1)\varphi(x)$, 求 $f'(1)$.

解 由连续性条件知极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \varphi(1)$ 存在, 特别,

$$\varphi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

由导数定义 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \varphi(1) = 1$

[注意, 从 $f'(x) = (x-1)\varphi'(x) + \varphi(x)$ 中令 $x=1$ 得出 $f'(1)$ 不给分]

7. 设 $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, 求 $dy(1)$.

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$, $dy(1) = y'(1)dx = \frac{3}{4\sqrt{2}} dx$.

8. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 确定, 求 y' , y'' .

解 $2x - (y + xy') + 2yy' = 0$, $y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$;

$$y'' = \frac{(2 - y')(x - 2y) - (2x - y)(1 - 2y')}{(x - 2y)^2} = \frac{6}{(x - 2y)^3}.$$

9. 设 $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin t - t \cos t)'}{(\ln \cos t)'} = -t \cos t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-t \cos t)'}{(\ln \cos t)'} = \frac{\cos t - t \sin t}{\tan t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

10. 设 $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+5x+2}$, 求 $f^{(n)}(x) (n > 1)$.

解 因 $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+5x+2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x+2} \right)$,

所以 $f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left\{ 2^n \frac{(-1)^n n!}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right\}$.

11. 确定自然数 n 的范围, 使 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

解 欲使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$ 存在, 应有 $n > 1$, 此时 $f'(0) = 0$,

欲使导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 应有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$

于是从 $f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 中得到必须 $n > 2$.

12. 设函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1}$, 指出其间断点, 并说明间断点类型.

解 间断点为 0, 1. 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f(1^+) = \frac{\pi}{2e}, \quad f(1^-) = -\frac{\pi}{2e},$$

故 $x=0$ 是可去间断点, $x=1$ 是跳跃点.

二、(每小题 6 分, 共 24 分)

13. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 上可微, 且 $f(0) \cdot f(2) > 0, f(0) \cdot f(1) < 0$, 证明:

存在 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f'(\xi) = f(\xi)$.

证明: 由题设, $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处以及 $x=1, x=2$ 处异号, 于是由连续函数的零点定理

知存在 $\eta_1 \in (0, 1), \eta_2 \in (1, 2)$, 使得 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$.

设 $g(x) = e^{-x} f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 可导, 且 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$, 由罗尔定理, 存在

$\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 2)$, 使 $g'(\xi) = 0$, 即有 $f'(\xi) = f(\xi)$.

14. 设函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $x = \varphi(y)$ 均存在三阶导数, 且 $y' \neq 0$, 请推导出反函数

的求导公式 $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}$ 和 $\frac{d^3x}{dy^3}$ [用 y', y'', y''' 表示].

$$\text{解 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \left(\frac{1}{y'}\right)' \cdot \frac{1}{y'} = \frac{-y''}{(y')^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \left(\frac{-y''}{y'^3}\right)' \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y'y''' - 3(y'')^2}{(y')^5}.$$

15. 证明: 当 $x \geq 1$ 时, 有 $\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

证 当 $x=1$ 时, 结论成立.

当 $x > 0$ 时, 设 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}$,

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

$$\text{所以 } f(x) = C, \text{ 又 } f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{综上所述, 当 } x \geq 1 \text{ 时, 有 } \arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x) > 1$. 若 $f(a) < 0$, 证明:

方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, a - f(a))$ 内有唯一根.

证明 记 $b = a - f(a) > a$, 则

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) > f(a) + (b-a) = f(a) + (-f(a)) = 0,$$

由零点定理存在 $c \in (a, b)$, $f(c) = 0$.

又 $f(x)$ 是严格单调增加的, 故 c 是方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, a - f(a))$ 内的唯一根.

或者用反证法, 如果有两个以上的根, 则由罗尔定理, 导函数就有零点, 与条件矛盾.

三、(每小题 8 分, 共 16 分)

17. 分别叙述数列 x_n 有界和收敛 (以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 为例) 的定义, 并证明: 收敛数列是有界数列.

叙述: x_n 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n: |x_n| \leq M$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

证明 取 $\varepsilon = 1$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < 1$, 从而

$$|x_n| = |x_n - a + a| < 1 + |a|,$$

取 $M = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}$, 则 $\forall n \geq 1$, 有 $|x_n| \leq M$.

18. 如果记 $\xi = \theta \cdot x$, $0 < \theta < 1$, 则拉格朗日中值公式 $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ 可以写作:

$f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$, $0 < \theta < 1$, θ 的大小通常与 x 相关. (1) 若 $f''(0) \neq 0$, 试证:

$\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$; [5 分] (2) 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$. [3 分]

证明 (1) 由 $f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$, $0 < \theta < 1$, 来凑二阶导数:

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta x) - f'(0)}{\theta x} \quad (\text{将 } f'(\theta x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ 代入})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)}{\theta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}}{\theta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$\text{故从 } f''(0) \neq 0 \text{ 推出, } \lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \arctan x - 0 = \frac{1}{1 + (\theta x)^2} x, 0 < \theta < 1, \text{ 解出}$$

$$\theta^2 = \frac{\frac{x}{\arctan x} - 1}{x^2} = \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$