2017 ～2018 学年第一学期
《微积分（一）》（上）课程考试试卷(A 卷)

(闭卷，88 学时用)

参考答案与评分标准

一. 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{2n+1}=1$.　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)+\sin 2x}{\tan x-3\arctan 2x}=-\dfrac{3}{5}$.

3. $\mathrm{dy}=2\cos[u^2(x)+v^2(x)]\bullet[u(x)u'(x)+v(x)v'(x)]dx$.　　4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 20x}{\ln\tan 18x}=1$.

5. $x=0$.　　6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^2 x}=-\cot x-x+C$.

7. $\tan(x-y+1)=x+C$.

二. 计算题(每小题 7 分，共 28 分)

8.解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\bigg/\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cot t-\dfrac{1}{2}$　　（3 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\bigg/\dfrac{dx}{dt}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cot t-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}\csc^3 t$$　　（5 分）

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{9\sqrt{3}}{8}\frac{\cos t}{\sin^5 t}.$$　　（7 分）

9. 解： $\cos(\sin x)-\cos x=1-\dfrac{1}{2!}(\sin x)^2+\dfrac{1}{4!}(\sin x)^4-\left(1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4\right)+o(x^5)$　　（3 分）

$$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^5)$$　　（6 分）

$$=\frac{1}{6}x^4+o(x^5)(x\to 0)$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\dfrac{1}{6}.$　　（7 分）

10. 解：进行换元 $x=\tan t$， $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t\ln\tan t}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}d\tan t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t\ln\tan t}{1+\tan^2 t}dt$　　（4 分）

由于 $\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}=\dfrac{\cot t\ln\cot t}{1+\cot^2 t}=-\dfrac{\tan t\ln\tan t}{1+\tan^2 t}$，可以知道上述积分中的被积函数关于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 反对称，可知其积分值为 0. （7 分）

备注：此题也可以采用先求出被积函数的原函数，再用广义的牛顿莱布尼兹公式：计算原函数在 0 和正无穷处的极限值再相减的方法，阅卷老师可以对过程和最后的结果给予相应的判定。

11. 解： $dl=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt$ （4 分）

$=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\sin\dfrac{t}{2}dt$ （6 分）

$l=\int_0^{2\pi}2a\sin\dfrac{t}{2}dt=2a\left(-2\cos\dfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=8a.$ （7 分）

三. 解答题（每小题 7 分，共 21 分）

12. 回答存在的给 1 分，并提出正确例子的给 5 分，并给出较完整证明的给足 7 分。

参考解答：存在这样的函数。构造函数如下：在 $x\neq 0$ 时 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$，在 $x=0$ 时 $f(x)=0$.

在 $x\neq 0$ 的点，f 是普通的初等函数，可导且其导函数为 $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$，由于 $\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时极限不存在，而 $\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x}=0$，可知 $f'(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限不存在；

在 $x=0$ 处，根据导数定义进行计算，$\left|\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}\right|=\left|t\sin\dfrac{1}{t}\right|\le|t|\to 0$ 如果 $t\to 0$，

可知 $f'(0)=0$. 从而 $f(x)$ 在实数域上可导但导函数不连续。

13. 解：（此题只要能够从基本概念出发完成可积的讨论即可按完成度给予相应的分数，如下是一个解答及评分标准供阅卷老师参考）

不妨设函数总共有 k 个间断点从小到大记为 $s_1,s_2,\cdots,s_k$，且 $\sup|f|\le M$.

设任意的 $\varepsilon>0$，我们按如下的方法构造区间的分割 $T=\{\mathrm{x}_0=a,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n}=b\}$：使得每个 s_j 属于一个小分割段内部（是一个开区间）记为 I_j，且总长度 $|I_1|+\cdots+|I_k|\le\dfrac{\varepsilon}{4M}$； （3 分）

再利用函数在 $[a,b]\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{k}I_j$ 上连续且一致连续，则存在一个 $\delta>0$，使得任意两点距离不超过 δ 则函数

值之差不超过$\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$，于是令剩下的分割段每一段的长度均小于$\delta$。（6分）

从而对这个分割T，我们有 Riemann 上和下和之差的估计式：

$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\dfrac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon$，可知函数是 Riemann 可积的.（7分）

14. 解： 考虑有限积分式

$$\begin{aligned}\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx&=\int_r^R\frac{f(ax)}{x}dx-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}dx\\&=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}dx\\&=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}dx\end{aligned}$$

（3分）

对上式第一个积分应用积分中值定理，得：$\int_{ar}^{br}\dfrac{f(x)}{x}dx=f(\xi)\int_{ar}^{br}\dfrac{1}{x}dx=f(\xi)\ln\dfrac{b}{a},ar<\xi<br$，

从而令$r\to0$，则$\xi\to0$，由函数连续性得：$\int_{ar}^{br}\dfrac{f(x)}{x}dx\to f(0)\ln\dfrac{b}{a}(r\to0)$；（5分）

再由$\int_{A}^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$收敛的 Cauchy 收敛准则，$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{aR}^{bR}\dfrac{f(x)}{x}dx=0$.

综上所述，反常积分收敛且$\int_0^{+\infty}\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.（7分）

四. 证明题（每小题 8 分, 共 16 分）

15．证明： 令$F(x)=f(x)g(x)$，从而$F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle 中值定理，存在$\eta\in(0,1)$，

成立$F'(\eta)=f'(\eta)g(\eta)+f(\eta)g'(\eta)=0$.（3分）

另外我们断言$g(\eta)\neq0$，否则如果$g(\eta)=0$，又$g(0)=0$会推出，存在τ，$g'(\tau)=0$，

这与已知条件$g'(x)\neq0$不符。（5分）

因此，我们有$\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=-\dfrac{f(\eta)}{g(\eta)}=-\dfrac{f(\eta)-f(0)}{g(\eta)-g(0)}=-\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，其中

最后一个等式使用了 Cauchy 中值定理，$0<\xi<\eta$. 命题得证.（8分）

16. 证明：由$f(x)$递增，对任意$x_1,x_2,x_3\in[a,b]$ $(x_1<x_2<x_3)$，有

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \le f(x_2)$$

$$\le \frac{1}{x_3-x_2}\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = \frac{F(x_3)-F(x_2)}{x_3-x_2}. \qquad \text{（6 分）}$$

得到 $\dfrac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{F(x_3)-F(x_2)}{x_3-x_2}$ 即为等价于说 F 是凸函数. （8 分）

备注：此题如果采用其它方法只要能正确的推出凸函数的等价刻画即可。

五. 证明题（7 分）

17. 证明：由于存在 $f''(a)$，因此至少在 a 的一个邻域中 f 可微.

当 h 充分小时，可在 a 和 $a+h$ 之间用 Lagrange 中值定理，得到

$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$ 其中 $0<\theta<1$. （*） （2 分）

考虑分式 $I=\dfrac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}$，若令 $F(x)=f(a+x)-f(a)-f'(a)x$，

$G(x)=x^2$，则上式的分子为 $F(h)-F(0)$，分母为 $G(h)-G(0)$，用 Cauchy 中值定理，

存在 η 在 0 和 h 之间, 使得 $I=\dfrac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}$. （4 分）

另一方面，由（*）式，$I=\dfrac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^2}=\dfrac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{h}$，

等置以上两个表达式，并写成

$$\theta\bullet\left(\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}\right)=\frac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}$$

由于 $0<\theta<1$，η 在 0 和 h 之间，而且有条件 $f''(a)\ne 0$，因此在上式两边令 $h\to 0$，

就可以得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$. 证毕. （7 分）