2017 ～2018 学年第一学期

《微积分（一)》（上）课程考试试卷(A 卷) (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级__________ 学号__________ 姓名__________

考试日期: 2018-01-15　　　　　　　　　　考试时间: 8：30-11：00 AM

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	28	28	21	16	7	100
得分						

得　分	
评卷人	

解答内容不得超过装订线

一. 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{2n+1} =$________.

（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)+\sin 2x}{\tan x - 3\arctan 2x} =$________.

3. 设 $y=\sin\left(u^2(x)+v^2(x)\right)$，$u(x), v(x)$ 可微，

则 $dy =$____________________.

4. 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-9)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+9)}$，则 $f'(1) =$______.

5. 设函数 $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$，则函数图像拐点的横坐标为 $x=$ ______.

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^2 x} =$____________.

7. 微分方程 $y'=\sin^2(x-y+1)$ 的通解为____________________.

得　分	
评卷人	

二. 计算题(每小题 7 分，共 28 分)

8. 设椭圆的参数方程为 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t,\ y=\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t$，计算 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

9. 请利用 Maclaurin 公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

10. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

11. 计算摆线$x=a\left(t-\sin t\right),y=a\left(1-\cos t\right),a>0$一拱（$0\le t\le 2\pi$）的弧长.

得　分	
评卷人	

三． 解答题（每小题 7 分，共 21 分）

12. 问：是否存在函数 f，它在定义域上可导，但导函数不连续？

请给出你的详尽解答.

13. 请用 Riemann 积分的理论（积分的定义，Riemann 和，上和下和振幅等）分析：有界闭区间 $[a,b]$ 上间断点的个数为有限个的有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上是否是可积的.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，对某个正数 A，$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，给定常数 $a,b>0$，判断反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ 的敛散性, 并给出你的推理过程. (不能直接用 Froullani 公式的结论)

得　分	
评卷人	

四. 证明题（每小题 8 分, 共 16 分）

15. 设 $f,g\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=g(0)=f(1)=0, g'(x)\neq 0$，求证：存在 $\xi,\eta\in(0,1), \xi<\eta$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=0.$

16. (1) 设函数 $h(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足：对任意 $x_1,x_2,x_3\in[a,b]$ $(x_1<x_2<x_3)$，有

$$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{h(x_3)-h(x_2)}{x_3-x_2}.$$

求证：$h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，求证：$F(x)=\int_c^x f(t)dt\ (a<c<b)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数.

得　分	
评卷人	

五. 证明题（7 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在点 a 处二阶可导，且 $f''(a)\ne 0$，求证：

在 $|h|$ 充分小时，存在 $0<\theta<1$，成立 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$，而且其中的 θ 具有性质 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{2}$.