2013-1 期中试卷解答

一、基本题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 计算数列极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdots\frac{2n-1}{4n}$.

解法 1：$x_n=x_{n-1}\frac{2n-1}{4n}=\frac{x_{n-1}}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n}<x_{n-1}$，以及 $x_n>0$，所以数列 x_n 单调减且有下界. 从而 $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，由通项公式得 $l=\frac{l}{2}$，$\therefore l=0$

解法 2：由于 $0<x_n{}^2<\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdots\frac{2n-1}{4n}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{12}{7}\cdots\frac{4n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}$，

因 $\frac{1}{2n+1}\to 0$，由夹挤原理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

解法 3：$0<\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdots(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n})<\frac{1}{2^n}$，因 $\frac{1}{2^n}\to 0$，由夹挤原理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x^2}-3^{x^2}}{(2^x-3^x)^2}$.

解法 1　基于等价替换和极限非零的因式极限可以单算，得

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}[(\frac{2}{3})^{x^2}-1]}{(3^x)^2[(\frac{2}{3})^x-1]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[(\frac{2}{3})^{x^2}-1]}{[(\frac{2}{3})^x-1]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\frac{2}{3}}{x^2\ln^2\frac{2}{3}}=\frac{1}{\ln 2-\ln 3}.$$

解法 2：基于洛比达法则极限非零的因式极限可以单算，得

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{2x(2^{x^2}\ln 2-3^{x^2}\ln 3)}{2(2^x-3^x)(2^x\ln 2-3^x\ln 3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-3^x}\lim_{x\to 0}\frac{(2^{x^2}\ln 2-3^{x^2}\ln 3)}{(2^x\ln 2-3^x\ln 3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x\ln 2-3^x\ln 3}=\frac{1}{\ln 2-\ln 3}.$$

3. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}$.

解 $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$，因为 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$，故 $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

4. 设 $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$，求 $f'(x)$

解 $f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$

5. 设 $\begin{cases}x=t+t^2\\ y=te^t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t(1+t)}{1+2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}[\frac{e^t(1+t)}{1+2t}]\cdot\frac{dt}{dx}=\{\frac{e^t(1+t)}{(1+2t)}+\frac{e^t[(1+2t)-2(1+t)]}{(1+2t)^2}\}\cdot\frac{1}{1+2t}=\frac{te^t(3+2t)}{(1+2t)^3}.$$

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=h(x^2+y^2)$ 确定，$h(x)$ 处处可导，且 $h'(x)\neq\dfrac{1}{2y}$，求 y'.

解 方程两边对 x 求导： $y'=h'(x^2+y^2)(2x+2yy')$ ，$y'=\dfrac{2xh'(x^2+y^2)}{1-2yh'(x^2+y^2)}$.

7. 求 $f(x)=\sin\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处带 peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

解法 1 直接法求展开式：$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}\cos\ln(1+x)$，$f'(0)=1$，

$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}\cos\ln(1+x)-\dfrac{1}{(1+x)^2}\sin\ln(1+x)$，$f''(0)=-1$，

类似地求得 $f'''(0)=1$，套用台劳公式得：$f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$。

解法 2 间接法求展开式：利用已知的泰勒展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)，\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

所以

$$\sin\ln(1+x)=[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)]-\frac{1}{6}[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)]^3+o(x^3)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)。$$

8. 求 $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

解法 1 基于泰勒公式中系数与导数的关系。因为

$$\frac{x}{1+2x}=x[\sum_{k=0}^{n}(-2x)^k+o(x^n)]=\sum_{k=0}^{n}(-2x)^k x+o(x^{n+1}),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的台劳公式的第 n 项系数为 $a_n=(-2)^{n-1}$，于是 $f^{(n)}(0)=n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$。

解法 2　基于莱布尼兹规则和已知 n 阶导数公式求。

$$\left(\frac{1}{1+2x}\right)^{(n)}\bigg|_{x=0}=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(1+2x)^{n+1}}\bigg|_{x=0}=(-1)^n 2^n n!,$$

$$f^{(n)}(0)=x(\frac{1}{1+2x})^{(n)}\bigg|_{x=0}+n(\frac{1}{1+2x})^{(n-1)}\bigg|_{x=0}$$

于是 $f^{(n)}(0)=n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$。

解法 3　基于函数化简和已知 n 阶导数公式求。因为 $f(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{1+2x})$，

$$f^{(n)}(0)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{1+2x})^{(n)}\bigg|_{x=0}=-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n 2^n n!}{(1+2x)^{n+1}}\bigg|_{x=0}=(-1)^{n-1}2^{n-1}n!$$

9. 求曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的斜渐近线方程.

解　斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{e}$.

因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x})-1]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}\quad（令\frac{1}{x}=t）$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{e+t}=\frac{1}{e}.$$

10. 指出 $f(x)=\left(1-e^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}$ 的间断点与类型.

解　间断点是 $x=1$，$x=0$。$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$，$x=1$ 是跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$，$x=0$ 是第二类间断点.

二、综合题（每小题 7 分，共 28 分）

11 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$f(0)\neq 0$，且对一切 x,y 有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，证明 $f(x)$ 处处连续.

证 取 $x=y=0$，$f(0)=\left[f(0)\right]^2$，$\because f(0)\neq 0$，$\therefore f(0)=1$

由于 $f(x)$ 在原点连续，所以 $\lim\limits_{h\to 0}(f(h)-1)=0$. $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0+x_0)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0)f(x_0)-f(x_0)]$$

$=f(x_0)\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)-1]=\ f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}(f(h)-1)=0$ $\therefore f(x)$ 处处连续.

12 方程 $\ln x-\dfrac{x}{e}+1=0$ 有几个实根？给出你的论证。

解 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+1$，$x>0$，由于 $f(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e^2}<0$，$f(e)=1>0$，

$f(e^3)=4-e^2<0$，$f(0^+)=-\infty, f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{ex}{e^{x/e}}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ex}{e^{x/e}}=-\infty$，

故方程在区间 $(0,e)$ 和区间 $(e,+\infty)$ 内均有实根.

又 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$ 在区间 $(0,e),(e,+\infty)$ 上依次为正，负，于是 $f(x)$ 在区间 $(0,e),(e,+\infty)$ 上依次为严格增，严格减，故所论方程恰好有两个根.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，$f(2)\neq 0, f'(2)$ 为已知。求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}\right]^x$.

解法 1：依据 1^∞ 未定型 u^v 变化法：$\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$，有

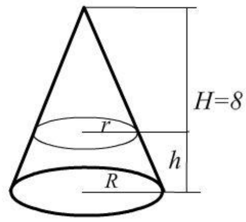
$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}-1)}=e^{\frac{1}{f(2)}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{x})-f(2)}{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}.$$

解法 2：依据通用未定型 u^v 变化法：$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$，有原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}}$

因为 $$\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)-f(2)}{f(2)})=\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty}x\left[f(2+\frac{1}{x})-f(2)\right]$$

$$=\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{x})-f(2)}{\frac{1}{x}}=\frac{f'(2)}{f(2)}$$ 故，原式 $=e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}$.

14. 如图，圆锥形容器的高为 8m，底半径为 $R = 2\sqrt{2}$ m，今向其中注水。设当水深 $h = 6$m 时，水面上升的改变率为 $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{\pi} m/\min$，求此时水的体积的改变率 $\dfrac{dV}{dt}$.



解 依题意有 $\dfrac{r}{R} = \dfrac{8-h}{8}$，$r = \dfrac{R}{8}(8-h)$ ，

$$V = \frac{8}{3}\pi R^2 - \frac{8-h}{3}\pi r^2 = \frac{8}{3}\pi R^2 - \frac{(8-h)^3}{3}\pi\frac{R^2}{64} \ ,$$

$\dfrac{dV}{dt} = \pi\dfrac{R^2}{64}(8-h)^2\dfrac{dh}{dt}$，代入条件得 $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{h=6,\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi}} = 2m^3/\min$.

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

15. 证明：当 $0 < x < 1$ 时，成立不等式 $\dfrac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

注 不等式 $\dfrac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$ 可以有不同的等价形式，如

$e^{2x}(1-x) < 1+x$，$1-x < (1+x)e^{-2x}$

或者取对数 $2x < \ln(1+x) - \ln(1-x)$

证法 1：所论问题等价于 $2x < \ln(1+x) - \ln(1-x)$，设 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$，

则 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} - 2 = \dfrac{2}{1-x^2} - 2 > 0$，$0 < x < 1$

于是当 $0 < x < 1$ 时，由单调性判别法得 $f(x) > f(0) = 0$

证法 2：所论问题等价于 $e^{2x}(1-x) < 1+x$,设 $f(x) = 1+x-e^{2x}(1-x)$，则

$f'(x) = 1 + e^{2x}(2x-1)$， $f''(x) = 4xe^{2x} > 0$, 于是当 $0 < x < 1$ 时，连续使用单调性判别法得 $f'(x) > f'(0) = 0$，$f(x) > f(0) = 0$.

16. 设 $0 < x_1 < x_2$，证明 $x_1\ln x_2 - x_2\ln x_1 = (\ln\xi - 1)(x_1 - x_2)$，其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

证目标关系变形后等同于

$$\frac{x_1\ln x_2 - x_2\ln x_1}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{\ln x_2}{x_2} - \dfrac{\ln x_1}{\ln x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}} \ ,$$

于是取 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$，在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用柯西定理，便有

$\dfrac{\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_1}{\ln x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\dfrac{1-\ln\xi}{\xi^2}(-\xi^2)=\ln\xi-1$，$\xi$ 在 x_1 与 x_2 之间，化简即得.