华中科技大学启明学院 2018 级

微积分学(一)(上)期中考试试卷

班级______________ 学号______________ 姓名______________

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ $\frac{1+t^2}{4t}$.

2. 写出$y=x^x-1\ (x\to 1)$的主部 x--1__________.

3. 当x充分大时，比较两函数大小：x^3+100x^2+1000 < $0.001x^4$.

4．求曲线$y=x\ln x$平行于直线$3x-y+1=0$的法线方程 $3y+x-7e^2=0$.

(或 $3y-9x+13e^{-\frac{4}{3}}$)

5．指出函数$f(x)=\frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1}$ 的间断点，并补充定义使其连续 x=0 为可去间断点；f(0)=1/2

.

二、计算题（每小题 9 分，共 45 分）

6. 求极限 $\lim_{x\to 1}\frac{(x^{3x-2}-x)\sin 2(x-1)}{(x-1)^3}$.

解：$x^{3x-2}-x=x[e^{3(x-1)\ln x}-1]\sim 3x(x-1)^2$

于是 $\lim_{x\to 1}\frac{(x^{3x-2}-x)\sin(2x-1)}{(x-1)^3}$=6

（若分子是$(x^{3x-2}-x)\sin(\ 2x-1)$则结果是∞）

7. 设 $f(x)=\sin x\cos^2 x$，求$f^{(n)}(x)$.

解：因为$\mathrm{f(x)}=\frac{\sin x+\sin 3x}{4}$

所以$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(x)=\frac{1}{4}(\sin x)^{(n)}+\frac{1}{4}(\sin 3x)^{(n)}=\frac{1}{4}\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}(\sin(3x+n\cdot\frac{\pi}{2}))$

8. 设函数 $f(x)$有 3 阶连续导数，$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解：$1+x+\frac{f(x)}{x}=[e^3+o(1)]^x=e^{xln(e^3+o(1))}=e^{x(3+o(1))}=1+3x+o(x)$

于是$\mathrm{f(x)}=2\mathrm{x}^2+o(x^2)$，与展开式$\mathrm{f(x)=f(0)+f'(0)x}+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$比较，

得$\mathrm{f(0)=f'(0)=0,f''(0)=4}$;

而$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{x}}=e^2$.

9. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导且$\lim_{x\to\infty}f'(x)=A$，求$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x-a)}{a}$， $a\neq 0$.

解：利用$\mathrm{f(x)-f(x-a)=af'(x-\theta a)}(0<\theta<1)$,

得到$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x-a)}{a}=A.$

10．设$x_0=0,\ x_{n+1}=1+\sin(x_n-1)\,(n\geq 0)$，证明：数列$\{x_n\}$收敛并求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

解： 令 $\mathrm{a_n}=x_n-1$，则 $\mathrm{a_0}=-1. a_{n+1}=\sin a_n$. 由不等式 $\mathrm{a}\leq\sin a\ (a\leq 0)$ 得出 $\{\mathrm{x_n}\}$递增有上界，上界为 0，所以该数列收敛. 设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，从 $a=0$, 于是解出 $\lim_{n\to\infty}x_n=1.$

三、证明题（每小题 7 分，共 35 分）

11. 依据极限定义证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{4n^2-2}=\frac{3}{4}.$

解

对任意$\varepsilon>0$,解不等式$\left|\frac{3n^2+n}{4n^2-2}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{2n+3}{8n^2-4}\right|<\frac{3n}{8n^2}<\varepsilon$

得 $\mathrm{n}>\frac{3}{8\varepsilon}$. 取$\mathrm{N}=\left[\frac{3}{8\varepsilon}\right]+1$即可。

12. 判断函数$f(x)=x+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上是否一致连续，并证明.

证明：函数是一致连续的。
对任意$\varepsilon>0$,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|+|\cos x_1-\cos x_2|\le|x_1-x_2|+2|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}|$$
$$\le 2|\mathrm{x}_1-x_2|<\varepsilon$$

取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$即可。

13. 设$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2, f'''(a)\neq 0$. 证明：$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$.

证明：因为$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$

所以$f''(a+\theta h)-f''(a)=\frac{1}{3}f'''(\xi)h$

另外，$\mathrm{f}''(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h})-\mathrm{f}''(\mathrm{a})=\mathrm{f}'''(\eta)\theta\mathrm{h}$

所以：$\theta=\frac{1}{3}\frac{f'''(\xi)}{f'''(\eta)}$ 故， $\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$.

14. 设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，且在(a,b)内可微，$f(a)=f(b)=0$,
证明：存在$\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

证明，做辅助函数$\mathrm{F(x)}=\mathrm{f(x)e}^{\mathrm{g(x)}}$

然后 用罗尔定理即得到结论。

15. 设对任意$x,\mathrm{y}\in\mathrm{R}$ 函数$f(x)$满足 $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^{\alpha}, C>0, \alpha>1$且与$x,y$无关,

证明：$f(x)$恒为常数.

证明：即证$\mathrm{f}'(\mathrm{x})\equiv 0$

$$0 \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < C|x-y|^{\alpha-1}$$

由迫敛性，当$\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{y}$时，$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$.