2021 ～ 2022 学年第一学期

《微积分（一）》（上）期中考试试卷 (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级__________ 学号___________ 姓名__________

考试日期: 2021-11-21　　　　考试时间: 8:30-10:30AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 且 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=$_________.

2. $\sup\{r\in Q:r^2<2\}=$____________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=$______________.

4. 设 $y=\arcsin\left(\ln u(x)-v^2(x)\right)$，$u(x),v(x)$ 可微，

则 $dy=$______________________________________.

5. 设 $ye^{xy}-x+1=0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$______.

得 分	
评卷人	

二. 选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 当 $n\to\infty$，如下收敛的是_______.

A. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

B. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

C. $\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}$

D. $\sin n(\pi+1)$

2. 下列叙述错误的是 _______.

A. 单调函数的间断点都是第一类间断点

B. $o(x^2)=O(\sin x)(x\to 0)$

C. 有界数列必有收敛子列，且都收敛到同一个极限

D. $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续

3. 设函数$f(x)=\sqrt{1+x}\tan x$在$x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为$ax+bx^2+cx^3$，则_______.

A. $a=1,b=2,c=\frac{5}{24}$

B. $a=1,b=2,c=-\frac{5}{24}$

C. $a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{5}{24}$

D. $a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{5}{24}$

得　分	
评卷人	

三． 计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$.

2. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\geq 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解答内容不得超过装订线

4. 设 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

得　分	
评卷人	

1．在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

(1)在 $x=0$ 处连续；

(2)在 $x=0$ 处可导；

(3)在 $x=0$ 处导函数连续.

2. 已知函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有连续的导函数，且导函数在端点的单侧极限 $f'(a+)$ 与 $f'(b-)$ 都存在且有限，请论证函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一致连续性.

解答内容不得超过装订线

五. 证明题（第 1 题 6 分，第 2、3 题各 9 分，共 24 分）

得　分	
评卷人	

1. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且在端点的单侧极限发散至 $+\infty$，即 $f(a+)=+\infty$ 与 $f(b-)=+\infty$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上有最小值.

2. 已知数列满足 $x_1=a$，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(0)=0$. 在 $(0,1)$ 中 $f(x)$ 可导且 $|f'(x)|\le f(x)$. 证明： $f(x)\equiv 0$.