华中科技大学启明学院 2017 级

微积分学(一)(上)期中考试试卷(上午试卷)

班级______________　　　　　　　　　　姓名______________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、**判断题**（4’×3, 共 12 分）**请在正确说法的括号中画“ √ ”,在错误说法的括号中画“×”.**

1. 如果 $\{x_n\}$ 是一个无界数列但不是无穷大数列，则一定可以找出 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列和一个具有无穷大极限的子列. [√]

2. Riemann 函数在无理点处连续, 有理点处间断. 其间断点是第二类的. [×]

3. 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内可微, 且 $f'(0)<0$, 则 $f(x)$ 在原点的某邻域内单减. [×]

二、**写出下列否定命题的肯定表述**（4’×2, 共 8 分）

4. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M_0>0, \forall \delta>0, \exists x_\delta \in (a,a+\delta)$, э: $f(x_\delta)\geq -M_0$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 不存在(用 Cauchy 收敛准则)

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall M>0, \exists x_1,x_2<-M, \text{э:} |f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0 .$$

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

6. 已知 $f(x)=x^2e^x$，求 $f^{(n)}(x)$.

解：设 $u(x)=x^2, v(x)=e^x$，由 Leibniz 公式有

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)\mathrm{e}^x$$

$$= x^2 \cdot e^x + n \cdot 2x \cdot e^x + 2\frac{n(n-1)}{2}e^x + 0 + \cdots + 0$$

$$= e^x[x^2 + 2nx + n(n-1)]$$

7. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} - 2\right)$.

解: 因为 $e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} - 2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$，所以原式=1.

8. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{n-1}{n} - \frac{\pi}{2}) \cdot \sqrt{2n^2 - n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{n-1}{n} - \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2n^2 - n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\tan(\arctan\frac{n-1}{n} - \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2}n$ （利用等价代换）

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{n} - 1}{1 + \frac{n-1}{n}} \cdot \sqrt{2}n$ （利用 $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ ）

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} \cdot \sqrt{2}n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

另解: 由 Heine 定理, 并用洛必达法则, 得到

$$\lim_{n\to\infty}(\arctan\frac{n-1}{n} - \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2n^2 - n} = \sqrt{2}\lim_{x\to0}\frac{\arctan(1-x) - \frac{\pi}{4}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9．设 $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, x < 0 \\ x^2, \quad x \ge 0 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$ ，并讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $f_-'(0) = \lim\limits_{x\to0^-} x\cos\frac{1}{x} = 0,\quad f_+'(0) = \lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ ，$\therefore\quad f'(0) = 0$.

$$\therefore\quad f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ 2x, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (7’)$$

∵ $\lim\limits_{x\to 0^-} 2x\cos\dfrac{1}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{x}$不存在

∴ $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$不存在. 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处间断.　　(10')

四、简单证明题（每小题 5 分，共 20 分）

10. 设E_1,E_2为非空数集，对于任意$x\in E_1,\mathrm{y}\in\mathrm{E}_2$，有$x\le y$，证明$\sup E_1\le\inf E_2$

证：依假设，E_2中任一数 y 都是E_1的上界，E_1的任一数 x 都是E_2的下界，而E_1,E_2为非空集，所以由确界原理知，$\sup E_1,\inf E_2$存在.　　(2')

现证$\sup E_1\le\inf E_2$. 用反证法. 如果$\sup E_1\ge\inf E_2$，则令

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup E_1-\inf E_2)>0.$$

于是由上确界和下确界的定义知，存在$x_0\in E_1,y_0\in E_2$，使得

$$x_0>\sup E_1-\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup E_1-\inf E_2)$$
$$y_0<\inf E\ +\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup E_1-\inf E_2).$$

所以$x_0>y_0$，这与已知假设矛盾，故$\sup E_1\le\inf E_2$　　(5')

11. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\ne 0$, 用极限的定义证明$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{A}$

证：由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\ne 0$ 知 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|>\dfrac{|A|}{2}>0$，于是 $\exists\delta_1>0$，使当$x\in U^o(x_0,\delta_1)$时, 有$|f(x)|>|A|-\dfrac{|A|}{2}=\dfrac{|A|}{2}$.　　(2')

再由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$, 使当$x\in U^o(x_0,\delta_2)$时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$x\in U^o(x_0,\delta)$时, 成立

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|=\frac{|f(x)-A|}{|f(x)||A|}<\frac{2|f(x)-A|}{|A|^2}<\frac{2}{|A|^2}\varepsilon.$$

由极限定义, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{A}$.　　(5’)

12. 证明函数 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

证：取 $x_n^{'}=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$, $x_n^{''}=\sqrt{2n\pi}, n\in N$，　　（3 分）

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{'}-x_n^{''})=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n^{'})-f(x_n^{''}))=\lim_{n\to\infty}(\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})-\sin(2n\pi))=1\neq 0.$$

故，证明 $\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.　　5 分

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0)=f(1)$，$f(x)\in[0,1]$, $|f''(x)|\le 1$ $(x\in[0,1])$.

证明方程 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上有唯一解。

证　由泰勒公式, 对 $x\in[0,1]$，有

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2,\qquad 0\le\xi_1\le x$$
$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2,\qquad x\le\xi_2\le 1.$$

两式相减, 并利用 $|f''(x)|\le 1$ 得到: $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}(x^2+(1-x)^2)\le\dfrac{1}{2}$　$(0\le x\le 1)$. (3 分)

由微分中值公式, $|f(x)-f(y)|\le\dfrac{1}{2}|x-y|$ (4 分), 再由压缩映射原理得证结论. (5 分)

五. 证明题 (两小题各 10 分, 共 20 分)

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=f(1)=0, f(\dfrac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在 $\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$

（2）存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$, 其中常数 $\lambda\in R$.

证 (1) 令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},g(1)=-1$．由零点存在定理知，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$．　(5')

(2) 设 $F(x)=e^{-\lambda x}\left[f(x)-x\right]$ 则 $F(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上连续，(a,η) 内可导，且 $F(0)=0$，$F(\eta)=0$．于是，由 Rolle 中值定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.\qquad (10')$$

15．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是严格上凸函数，$f(a)=A>0$，$f'(a)<0$．证明：1) $f(a-\frac{f(a)}{f'(a)})<0$；2)方程 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

证：1)由条件知 $f''(x)<0$．(2’) 由 Taylor 公式得到

$$f(a-\frac{f(a)}{f'(a)})=f(a)+f'(a)[(a-\frac{f(a)}{f'(a)})-a]+\frac{f''(\xi_1)}{2!}[(a-\frac{f(a)}{f'(a)})-a]^2$$

$$=\frac{1}{2}f''(\xi_1)[\frac{f(a)}{f'(a)}]^2<0\qquad (5')$$

2)由 $f(a)=A>0$ 及 $f(a-\frac{f(a)}{f'(a)})<0$，$-\frac{f(a)}{f'(a)}>0$ 知

$\exists\xi\in(a,a-\frac{f(a)}{f'(a)})$ 使 $f(\xi)=0$，(7’) 且 $f'(x)<f'(a)<0, f(x)$ 单调

所以方程 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.　(10’)