

微积分（一）期中考试试卷答案

一、基本计算（要有过程，每小题 6 分，共 60 分）

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n}$.

解 显然 $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 \sin^2 n + 3 \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{3}$, [其他上界比如 $\sqrt[n]{5}$ 不影响极限计算] (3 分)

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$ 及夹逼定理知, 原式 = 1. (6 分)

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 求 $u = \sqrt[3]{x^2} - 1$ 关于基本无穷小 $x - 1$ 的阶数与主部.

解 $\sqrt[3]{x^2} - 1 = (1 + x^2 - 1)^{1/3} - 1 \sim \frac{x^2 - 1}{3} = \frac{(x+1)(x-1)}{3} \sim \frac{2}{3}(x-1)$, (5 分)

或 $\sqrt[3]{x^2} - 1 = (1 + (x-1))^2 - 1 \sim \frac{2}{3}(x-1)$, 或 $\sqrt[3]{x^2} - 1 = e^{\frac{2}{3} \ln x} - 1 \sim \frac{2}{3} \ln x \sim \frac{2}{3}(x-1)$,

故阶数为 1, 主部为 $\frac{2(x-1)}{3}$. (6 分)

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln \cos x}$.

解

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{-\frac{1}{2}x^3} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{2}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

或 $l = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = -2 \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right\} = -\frac{2}{3}$,

或用泰勒公式.

4. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - \sin x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$, (4 分)

所以 $l = \sqrt{e}$. (6 分)

5. 设 $f(x) = x^{\tan x}$. 求 $f'(\frac{\pi}{4})$.

解 利用对数求导法得 $f'(x) = x^{\tan x} (\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x})$. (4 分)

代入 $x = \frac{\pi}{4}$ 得 $f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{4}$. (6 分)

6. 求曲线 $\cos x + \ln(y - x) = y^2$ 在点 (0,1) 处的切线方程.

解 方程两边对 x 求导得到

$$-\sin x + \frac{1}{y-x}(y'-1) = 2yy'. \quad (4 \text{ 分})$$

代入 $x=0, y=1$ 解得 $y'(0)=-1$. 切线方程为 $x+y=1$. (6 分)

7. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 求 $y=f(\sin x)$ 的二阶导数.

解 $y' = f'(\sin x) \cos x$. (2 分)

$$y'' = f''(\sin x) \cos^2 x - f'(\sin x) \sin x. \quad (6 \text{ 分})$$

8. 设 $y = x \ln x$, 求 $y^{(6)}$.

解法一 根据 Leibniz 法则得到

$$y^{(6)} = x(\ln x)^{(6)} + 6(\ln x)^{(5)} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= x\left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} + 6\left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = \frac{24}{x^5} \quad (6 \text{ 分})$$

解法二 $y^{(6)} = (1 + \ln x)^{(5)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = \frac{24}{x^5}$. [每一步得 2 分]

9. 求 a, b 的值使得函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0 \\ b - \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续并且可导.

解 直接得到 $f(0^+) = b, f(0^-) = 1$. 所以 $b = 1$. (3 分)

求导得到 $f'_+(0) = -2, f'_-(0) = a$. 所以 $a = -2$. (6 分)

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t + \ln t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{t+1}{t(2t+2)} = \frac{1}{2t}$. (2 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1/2t)'}{2t+2} = \frac{-1}{4t^2(t+1)}. \quad (6 \text{ 分})$$

二、综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x-1}{x+1}$. 指出 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

解 函数 $f(x)$ 的间断点为 $0, -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, f((-1)^+) = -\frac{\pi e}{2}, f((-1)^-) = \frac{\pi e}{2}. \quad (3 \text{ 分})$$

所以 $x=0$ 是第二类间断点. $x=-1$ 是第一类间断点, 是跳跃间断点. (6 分)

12. 设 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 为 n 次实系数多项式. 证明当 n 为奇数时, 方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

证 当 n 为奇数时, 显然 $f(+\infty) = +\infty, f(-\infty) = -\infty$. (2 分)

于是存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. (4 分)

函数 $f(x)$ 显然连续. 根据介值定理方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根. (6 分)

13. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导, $f(2) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(2 + \frac{1}{n})}{f(2)} \right]^n$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(2 + \frac{1}{n})}{f(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{f(2 + \frac{1}{n})}{f(2)} - 1 \right] = \frac{1}{f(2)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2 + \frac{1}{n}) - f(2)}{\frac{1}{n}} = \frac{f'(2)}{f(2)}, \quad (5 \text{ 分})$

或 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(2 + \frac{1}{n})}{f(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(2 + \frac{1}{n})| - \ln |f(2)|}{1/n} = \{ \ln |f(x)| \}'_{x=2} = \frac{f'(2)}{f(2)},$

所以原式 $= e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}.$ (6 分)

14. 设一个雪球以 $2 \text{ cm}^3 / \text{min}$ 的速度融化. 设雪球在融化过程中始终保持球形. 求当雪球半径为 10 cm 的时候半径变化的速率.

解 根据几何关系得到 $V = \frac{4\pi r^3}{3}.$ (2 分)

两边对 t 求导得到 $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$ (4 分)

代入 $dV/dt = -2$ 以及 $r = 10$ 得到 $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{200\pi} \text{ cm/min}.$ (6 分)

即半径以 $\frac{1}{200\pi} \text{ cm/min}$ 的速度减小.

15. 写出函数 $f(x) = x \cos x$ 带皮亚诺余项的五阶麦克劳林公式..

解 先写出

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \quad (3 \text{ 分})$$

进一步得到

$$x \cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^6). \quad (6 \text{ 分})$$

[系数变化写法;直接法由高阶导计算出所有系数;以及余项变化为 $o(x^5)$ 都算正确]

三、分析证明 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = \sqrt{6}, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 给出. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限值.

证明 显然有 $x_2 > x_1$, 再根据 $x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n$, 利用数学归纳法知 $\{x_n\}$ 严格单调增加. 另外显然 $x_1 < 3$. 设 $x_n < 3$, 可推出 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$, 再根据数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界. (4 分)

根据单调有界收敛准则知数列极限存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 对 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 两边取极限得到

$$l = \sqrt{6 + l}, \text{ 解得 } l = 3. \quad (5 \text{ 分})$$

17. 设 $0 < a < b$. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$.

证 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 和 $G(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $G'(x) \neq 0$. (2 分)

由柯西中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = -\xi f'(\xi) + f(\xi). \quad (5 \text{ 分})$$

两边变号即得所证.