2016 ～2017 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷) 解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列命题正确的是【 D 】.

A. 若$\{x_n\}$发散，则$\{y_n\}$必发散　　B. 若$\{x_n\}$收敛，则$\{y_n\}$必收敛

C. 若$\{x_n\}$有界，则$\{y_n\}$必为无穷小　　D. 若$\{\dfrac{1}{x_n}\}$有界，则$\{y_n\}$必为无穷小

2. 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\neq 0$，$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$，

则$x=0$是函数$g(x)$的【 A 】.

A.连续点　　B.跳跃间断点　　C.无穷间断点　　D. 可去间断点

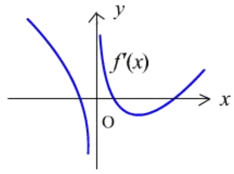
3. 当$x\to 1$时，无穷小量 $\ln x^2$ 的无穷小主部为【 D 】.

A. x　　B. x^2-1　　C. $2(1-x)$　　D. $2(x-1)$

4. 若函数$f(x)$在原点连续，$F(x)=f(x)|\sin x|$，则$f(0)=0$是$F'(0)$存在的【 A 】.

A. 充要条件　　B.充分但非必要条件　　C.必要但非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

5. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，其导函数图形如图所示，则$f(x)$的极值点的个数为【 D 】



A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

6. 若函数$f(x)=2^{\frac{1}{x}}+\arctan\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$，下面哪一条直线*不是* 此函数的渐近线【 C 】.

A. $x=0$　　B. $y=1-\dfrac{\pi}{4}$　　C. $x=2$　　D. $y=1+\dfrac{\pi}{4}$

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin x^3}=$______ .

解：$.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

8. $\int_0^1 x(1-x)^{99}dx=$________.

$$\int_0^1 x(1-x)^{99}dx=\int_1^0(1-t)t^{99}(-dt)=\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{1}{10100}.$$

9. 设点 $(1,4)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$_______，$b=$_______.

解：$a+b=4, 6a+2b=0$ 解得：$a=-2, b=6$.

10. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{x^3}{1+\sin^4 x}+\sin^4 x\cos x)\,dx=$_____________.

解：原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\,dx=\dfrac{2}{5}$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定的隐函数，求导数 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

解：对方程两边关于变量 x 求导，则 $e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$，

将 $x=0$ 代入原方程得到 $y=1$，

所以 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=-2$.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$ 确定，求导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(1+t)$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3/2}{2(1-t)}=\frac{3}{4(1-t)}.$$

13. 求定积分 $I=\int_0^{\pi}\sin^5 x\sqrt{1-\sin^2 x}dx$.

解：$I=\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cdot\cos x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^5 x\cdot\cos x dx$

$$=\frac{\sin^6 x}{6}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\sin^6 x}{6}\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{3}.$$

14. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to+\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$.

解：$l=\exp\{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]\}$

$$=\exp\{\int_0^1\ln(1+x)dx\}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

15. 求微分方程 $y'-e^{x-y}=1$ 的通解。

解 1：令 $u=y-x,\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}-1$，所以原方程化为：$\frac{du}{dx}=e^{-u}$，

这是一个分离变量的方程，采用分离变量法，并积分得 $\int e^u du=\int dx$，

求解得 $e^u=x+C$，

所以原方程通解为 $e^{y-x}=x+C$ 或者 $e^y=e^x(x+C)$.

解 2：原方程可转化为：$(e^y)'-e^y=e^x$，

用一阶线性微分方程的公式得原方程的通解为：$e^y=e^{\int dx}(\int e^x e^{\int -dx}dx+C)=e^x(x+C)$.

16. 求反常积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x^2}dx$.

解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $I=2\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t^3}dt$，

利用分部积分得 $I=-\int_1^{+\infty}\ln(t+1)d(\frac{1}{t^2})=[-\frac{\ln(t+1)}{t^2}-\frac{1}{t}+\ln\frac{t+1}{t}]\Big|_1^{+\infty}=1$.

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 设曲线段 $y=ax^2$ $(a>0,0\le x\le 1)$ 与 x 轴及直线 $x=1$ 围成一个曲边三角形 A，图形 A 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积记为 V_1，图形 A 绕直线 $x=1$ 旋转一周所得旋转体的体积记为 V_2，求 a 取何值时体积差 V_2-V_1 最大？

解：$V_1=\int_0^1\pi y^2dx=\pi a^2\int_0^1 x^4dx=\frac{\pi a^2}{5}$，$V_2=\int_0^a\pi(1-x)^2dy=2\pi a\int_0^1(1-x)^2xdx=\frac{\pi a}{6}$，

所以 $f(a)=\dfrac{\pi}{30}(5a-6a^2), a>0$，

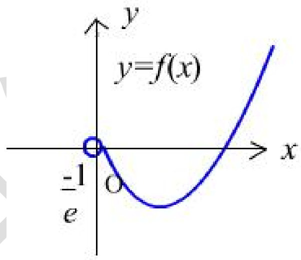
令 $f'(a)=\dfrac{\pi}{30}(5-12a)=0$，得到 $a=\dfrac{5}{12}$，

且 $0<a<\dfrac{5}{12}$ 时，$f'(a)>0$，且 $a>\dfrac{5}{12}$ 时，$f'(a)<0$，

所以 当 $a=\dfrac{5}{12}$ 时，体积差 $V_2-V_1=f(a)$ 达到最大值。

18. 应用微分学知识讨论方程 $x\ln x+a=0$ 的根问题：（1）a 取何值时，该方程有一个实根？（2）a 取何值时，该方程有两个实根？

解：令 $f(x)=x\ln x$，$0<x<+\infty$；



则 $f'(x)=\ln x+1$，

当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

$0<x<\dfrac{1}{e}$，函数 $f(x)$ 单调递减；

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$；

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $f_{\min}=f(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$，

从而通过绘图可知：$a\le 0, a=\dfrac{1}{e}$，方程只有一根；$0<a<\dfrac{1}{e}$，方程有且有两根。

五. 综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19． 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a>0)$ 上有二阶连续导数，并且在区间内部取得最小值为 -1，

$f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{16}{(b-a)^2}$.

证：由 $f(x)$ 在某个 $x=c$ $(a<c<b)$ 处取得极小值知 $f(c)=-1, f'(c)=0$，

利用泰勒公式有 $f(a)=f(c)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2, a<\xi_1<c$，即 $f''(\xi_1)=\dfrac{4}{(a-c)^2}$；

$f(b)=f(c)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2, c<\xi_2<b$，即 $f''(\xi_2)=\dfrac{4}{(b-c)^2}$；

若 $c=\dfrac{b-a}{2}$ 时，则取 $\xi=\xi_1$ 或者 ξ_2 时，结论成立；

当 $c\ne\dfrac{b-a}{2}$ 时，则 $f''(\xi_1)$ 和 $f''(\xi_2)$ 一个大于 $\dfrac{16}{(b-a)^2}$，一个小于 $\dfrac{16}{(b-a)^2}$，此时对

对 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]\in(a,b)$ 上利用连续函数的介值定理，

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使结论成立。

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单调递减的连续函数，则有 $\int_a^b (x-a)^3 f(x)dx \le \dfrac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)dx$.

证　设 $F(t)=\dfrac{(t-a)^3}{4}\int_a^t f(x)dx-\int_a^t (x-a)^3 f(x)dx$ ，

$$F'(t)=\frac{3}{4}(t-a)^2\int_a^t f(x)dx+\frac{(t-a)^3}{4}f(t)-(t-a)^3 f(t)$$

$$=\frac{3}{4}(t-a)^2\left[\int_a^t f(x)dx-(t-a)f(t)\right]$$

$$=\frac{3}{4}(t-a)^2(t-a)(f(\xi)-f(t))\ge 0$$

于是由连续性　$F(b)\ge F(a)=0$.

注意：有些题目解法不止一种，会参照给分。其次有步骤分！