2014~2015 学年第一学期

启明学院《微积分（一）》课程期中考试试卷

院(系) 启明学院 专业班级________ 学号________ 姓名________

一、判断题（2'×3）

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 等价于：对于任意 $\delta>0$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $0<|x-a|<\varepsilon$ 时，有 $|f(x)-A|<\delta$． [√]

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} q, x=\dfrac{p}{q}, p,q\in N^+,(p,q)=1, \\ 0, \quad x\in R\setminus Q \end{cases}$ 在 $(0,1)$ 内任何点的任何邻域内都是有界的． [X]

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微且有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必一致连续． [X]

二、写出下列否定命题的肯定表述（2'×4）：

4. $f(x)$ 在区间 I 内无界 $\Leftrightarrow$ $\forall M>0,\ \exists x_0\in I,\ s.t.\ |f(x_0)|>M.$

5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 不存在的 Cauchy 准则 $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0>0,\ \forall \delta>0,$ $\exists x_1, x_2\in(x_0,x_0+\delta)$ 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$.

三、计算题（每小题 9 分，共 36 分）

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{e^{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-(e^{x^2}-1)}{x(e^{x^2}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]-\left[x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)\right]}{x\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^3}$$

$$=0.$$

用洛必达法则亦可.

7. 设 $f(x)=x^2\cos 2x$，求 $f^{(2014)}(0)$.

解：$f(x)=x^2\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\right]$

$$=x^2-\frac{2^2}{2!}x^4+\frac{2^4}{4!}x^6-\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n+2}+o(x^{2n+2})$$

$$\therefore\ a_{2n+2}=(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}$$

$$f^{(2n+2)}(0)=(2n+2)!\,a_{2n+2}=(-1)^n\cdot\frac{2^{2n}}{(2n)!}\cdot(2n+2)!$$

$$=(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot(2n+2)\cdot(2n+1).$$

$$f^{(2014)}(0)=2^{2012}\cdot 2014\cdot 2013.$$

注：用莱布尼兹公式先求 $f^{(2014)}(x)$，再令 $x=0$ 亦可.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：两边对 x 求导：$2y'-1=(1-y')\ln(x-y)+(x-y)\cdot\frac{1}{x-y}(1-y')$

解得：$y'=\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}=\dfrac{x}{2x-y}$ （用到 $\ln(x-y)=\dfrac{2y-x}{x-y}$）

$$y''=\frac{(2x-y)-x(2-y')}{(2x-y)^2}=\frac{(2x-y)-x\left(2-\frac{x}{2x-y}\right)}{(2x-y)^2}$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{(2x-y)^3}=\frac{(x-y)^2}{(2x-y)^3}$$

$$=\frac{1}{(2x-y)^3\ln^2(x-y)}.$$

9. 设 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,x]$（$x>0$）上应用拉格朗日中值定理得：存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\theta x)x$，试求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta(x)$.

解：$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. $f'(\theta x)=(\theta^2x^2+1)^{-1}$. 由原式得

$$\theta^2=\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$$

$$\therefore \lim_{x\to0^+}\theta^2=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac13$$

$$\therefore \lim_{x\to0^+}\theta=\frac{1}{\sqrt3}\quad(\because\theta>0)$$

四、证明题（每题 10 分，共 50 分）

10. 设 $a>0$，$0<x_1<a$，$x_{n+1}=x_n(2-\frac{x_n}{a})$，$n\in N$，证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证：由 $0<x_1<a \Rightarrow x_2=x_1(2-\frac{x_1}{a})>0$，$2-\frac{x_1}{a}>0$，$1-\frac{x_1}{a}>-1$

又由 $\frac{x_1}{a}>0 \Rightarrow 1-\frac{x_1}{a}<1$. 即 $|1-\frac{x_1}{a}|<1$.

$$x_{n+1}=x_n(2-\frac{x_n}{a})=a-a(1-\frac{x_n}{a})^2$$

$$\frac{x_{n+1}}{a}=1-(1-\frac{x_n}{a})^2$$

$$1-\frac{x_{n+1}}{a}=(1-\frac{x_n}{a})^2=\cdots=(1-\frac{x_1}{a})^{2^n}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x_{n+1}}{a})=0$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注：用单调有界原理也行：先证 $0<x_n<a$，再证 $x_n\nearrow$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存. $\Rightarrow A=A(2-\frac{A}{a}) \Rightarrow A=0$（舍去），$A=a$.

11. 证明不等式：$a^ab^b\ge(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ $(a>0,b>0)$.

证：设 $f(x)=x\ln x$，$x>0$. $\because f''(x)=\frac1x>0$ $(x>0)$.

$\therefore f(x)=x\ln x$ 在 $x>0$ 时为严格凸函数. 于是

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac12(f(a)+f(b))，\text{即}$$

$$\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}\le\frac12(a\ln a+b\ln b)$$

$$\Rightarrow \ln(a^ab^b)\ge(a+b)\ln\frac{a+b}{2}\ge(a+b)\ln(\sqrt{ab})\quad(\ln x\nearrow).$$

$$=\ln(ab)^{\frac{a+b}{2}}.$$

即 $a^ab^n\ge(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

注：用其它方法亦可证.

12. 证明 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证：$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，有

$$|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}|\le|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\le\sqrt{|x_1-x_2|}$$

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon^2$，$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

有 $|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}|\le\sqrt{|x_1-x_2|}<\varepsilon$.

$\therefore \sin\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

13. （1）求 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 的二阶麦克劳林多项式 $T_2(x)$；

（2）证明不等式：$\left|\sqrt{1+x}-T_2(x)\right|\le\frac{1}{16}$，$x\in[0,1]$.

解：(1). $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. $f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$.

$T_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$.

(2) $f(x)=T_2(x)+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3$

当 $x\in[0,1]$ 时，$\theta\in(0,1)$. 所以有

$\left|\sqrt{1+x}-T_2(x)\right|=\left|f(x)-T_2(x)\right|=\left|\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3\right|$

$=\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}\cdot x^3\le\frac{1}{16}$.

14. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证：令 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$. s.t. $F'(\xi)=0$.

又 $F'(x)=f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$. 代入 ξ 得

$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)$.. 又 $g''(\xi)\neq 0$.

$\Rightarrow \frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.