华中科技大学2021 ~ 2022学年第一学期

《数学分析（一）》期中考试

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (每题 4 分，共 24 分)

1. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$,则$\sup E =$ ___2___; $\inf E =$ ___1___

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n =$ ___e^2___

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \log_{10}(1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 10^x)) =$ ___0___

4. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, k为正整数,则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}(a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n) =$ ___$\frac{a}{k+1}$___

5. 用ε语言给出$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq 0$的定义: $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x \in (x_0, x_0 + \delta), |f(x)| \geqslant \varepsilon_0$

6. 方程$x \sin x = 1$在$\mathbb{R}$上有多少个根: ___无穷个___

阅卷人	
得 分	

二、计算 (每题 8分，共 16分)

7. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + 4\times 6 + \cdots + n(n+2))}}{n^3(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

解:当$n \to \infty$时,$1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$.且由$k^2 < k(k+2) < (k+1)^2$得

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + n(n+2) < 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2$.

即$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) < 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + n(n+2) < \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) - 1$

从而$\sqrt{1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+n(n+2)}\sim \frac{1}{\sqrt{3}}n^{\frac{3}{2}},(n\to\infty)$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(1\times 3+2\times 4+\cdots+n(n+1))}}{n^3(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{\sqrt{3}}}{\frac{n^2}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 求$\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x^2}+\sin\frac{1}{x^4})^{x^4}$.

解:记$\cos\frac{1}{x^2}+\sin\frac{1}{x^4}=1+f(x)$,其中$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

则$\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x^2}+\sin\frac{1}{x^4})^{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+f(x))^{1/f(x)}]^{x^4f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^4f(x)}$.

令$\frac{1}{x^2}=t$,则$x\to\infty$时$t\to 0^+$,

于是$\lim\limits_{x\to\infty}x^4f(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\cos t+\sin t^2-1}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\cos t-1}{t^2}+\frac{\sin t^2}{t^2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

所以原式$=e^{\frac{1}{2}}$

阅卷人	
得 分	

三、解答题 (每题 12 分，共 24 分)

11. 给定数列$\{x_n\}$,令 $L=\{$数列$\{x_n\}$的全体部分极限$\}$.

(1) 若数列$\{x_n\}$有界,证明L有上确界.

(2) 是否存在数列$\{x_n\}$,满足$L=\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\cdots\}$?说明理由.

(3) 用闭区间套定理证明: 若数列$\{x_n\}$有界,则必存在最大的部分极限点.

解:(1)数列$\{x_n\}$有界,由列紧性原理,$\{x_n\}$有收敛子列,所以L非空.设$\{x_n\}$的上界为M,即$\forall n,x_n\leqslant M$,则对$\{x_n\}$的任意收敛子列 $\{x_{n_k}\}$有$\forall k,x_{n_k}\leqslant M$,由极限的保号性,$x_{n_k}$的极限值也不大于$M$.因此$M$为$L$的一个上界.由确界原理,$L$有上确界.........4'

(2)不存在.........1'.假设存在这样的数列$\{x_n\}$,则$\forall k\in\mathbb{N}_+$, $\frac{1}{k}$是部分极限,所以有子列收敛到$\frac{1}{k}$,特别地,$\exists x_{n_k}$,满足$|x_{n_k}-\frac{1}{k}|<\frac{1}{k}$. 于是$|x_{n_k}|<\frac{2}{k}$.考虑子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$,由夹逼原理得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=0$.而$0\notin L$,矛盾.所以不存在这样的数列..........3'

(3)数列$\{x_n\}$有界,不妨设$\{x_n\}\subseteq[a,b]$.二等分该区间,若$[\frac{a+b}{2},b]$包含无穷项x_n,取$[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$,否则令$[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$.继续不断二等分,可得闭区间套:$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots[a_k,b_k]\supseteq\cdots$满足$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim\limits_{k\to}\frac{1}{2^k}=0$,且对$\forall k$,数列$\{x_n\}$仅有有限项大于$b_k$.由闭区间套定理,$\exists!\xi\in[a_k,b_k],\forall k$.由构造过程得$[a_k,b_k]$包含数列$\{x_n\}$中的无穷项,故$\exists x_{n_k}\in[a_k,b_k]$, 易得$x_{n_k}\to\xi\ (k\to\infty)$.即$\xi$是部分极限点.而任取$c>\xi,\exists K,c>b_K$,而$\{x_n\}$中仅有有限项大于$b_K$,所以$c\notin L$,因此$\xi$是最大的部分极限点..........4'

12. 若存在常数M,满足$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant M,\ (n=1,2,\cdots)$, 则称数列$\{x_n\}$为有界变差数列.

(1) 设$x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$,验证$\{x_n\}$是否为有界变差数列.

(2) 证明:有界变差数列一定是收敛数列.

(3) 收敛数列是否一定是有界变差数列？若是,给出证明;若不是,举出反例.

解:(1)对任意的正整数k,都有$|x_{k+1}-x_k|=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$,所以
$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<2(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2})$
$<2(1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)})=2(1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$
$=2(1+1-\frac{1}{n+1})<4$.所以$\{x_n\}$是有界变差数列.........4'
(2)设$\{x_n\}$是有界变差数列,记$A_{n+1}=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$.则存在常数$M$,$A_n\leqslant M$且 $A_{n+1}-A_n=|x_{n+1}-x_n|\geqslant 0$,即$A_n$是单调递增有界数列.所以$A_n$收敛,从而$A_n$是Cauchy列.所以$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,p\in\mathbb{N},|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon$.此时
$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|=|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon$
所以$\{x_n\}$也是Cauchy列,从而是收敛数列.........4'
(3)不是.....1'例:$x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.则$x_n$收敛.另一方面,$|x_{k+1}-x_k|=\frac{1}{k+1}$.
所以$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}>\ln(n+1)$.所以不是有界变差数列. ....3'

阅卷人	
得 分	

四、证明题 (13–15每题 8 分；16–17每题6分,共36分)

13. 用$\varepsilon-\delta$语言证明:$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2+x-10}=\frac{4}{9}$.
证明:$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,63\varepsilon\}$.则$\forall x:0<|x-2|<\delta$,有$|x-2|<1$,可得$|2x+5|>7$,此时 $|\frac{x^2-4}{2x^2+x-10}-\frac{4}{9}|=|\frac{x+2}{2x+5}-\frac{4}{9}|=\frac{1}{9}|\frac{x-2}{2x+5}|<\frac{1}{9}\frac{|x-2|}{7}<\frac{\delta}{63}\leqslant\varepsilon$.因此,$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2+x-10}=\frac{4}{9}$.

14. 证明如下形式的Heine定理: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的充分必要条件是: 对趋于正无穷的任意数列$\{x_n\}$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.
证明:必要性:由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$得,$\forall\varepsilon>0,\exists M,\forall x>M$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.设$\{x_n\}$为趋于正无穷的数列,则对上面的$M,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N$,有 $x_n>M$,所以对$\forall n>N$,有
$|f(x_n)-A|<\varepsilon$.因此,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.
充分性:假设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$不成立,得$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x_M>M,|f(x_M)-A|\geqslant\varepsilon$.分别取$M$为$1,2,\cdots,n,\ldots$得,$\exists x_n>n,|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon$. 于是得到数列$\{x_n\}$趋于正无穷,但是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$,与条件矛盾！ 所以假设不成立,从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

15. 用闭区间套定理证明连续函数的零点存在定理:设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$连续且$f(a) < 0, f(b) > 0$.则$\exists \xi \in (a,b)$,使得$f(\xi) = 0$.
证明:假设$\forall x \in [a,b], f(x) \neq 0$,二等分区间$[a,b]$,若$f(\frac{a+b}{2}) < 0$,取$[a_1,b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$;若$f(\frac{a+b}{2}) > 0$,取$[a_1,b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$.总之$f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$.继续二等分$[a_1,b_1]$,可得闭区间$[a_2,b_2]$满足$f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$.如此继续, 得到闭区间套:$[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots [a_n,b_n] \supseteq \cdots$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to}\frac{1}{2^n} = 0$,且对$\forall n, f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.由闭区间套定理,$\exists! \xi \in [a_n,b_n], \forall n$,满足$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$,由于$f$在$\xi$处连续,
$0 \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0$.所以$f(\xi) = 0$.矛盾! 因此,函数$f$有零点.

16. 设x_n为非负数列,a_n为单调递增有界数列,且$x_{n+1} - x_n \leqslant a_{n+1} - a_n (n = 1,2,\cdots)$.证明:$x_n$收敛.
证明:由条件,a_n收敛,设极限为M, 则$\forall n, a_n \leqslant M$.由$x_{n+1} - x_n \leqslant a_{n+1} - a_n$得$x_n - x_1 \leqslant a_n - a_1$.所以$0 \leqslant x_n \leqslant M - a_1 + x_1$,即$x_n$是有界数列,故存在上下极限.由已知,$\forall n, p \in \mathbb{N}$,
$x_{n+p} - x_n = \sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+p} - a_n$ 固定n,令$p \to \infty$,取上极限得,$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k - x_n \leqslant M - a_n$即$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k \leqslant x_n + M - a_n$,再令$n \to \infty$,取下极限得$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.因此,$x_n$的上下极限相等,故$x_n$收敛.
注:无法从条件中直接证明x_n是Cauchy列
证法二:(同上,先证明x_n是有界数列,)所以有收敛子列,记为$x_{n_k} \to a\ (k \to \infty)$.由于$a_n$收敛,$a_n$是Cauchy列. 所以$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, p \in \mathbb{N}$时,有
$x_{n+p} - x_n = \sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+p} - a_n < \varepsilon$.
对上述$\varepsilon > 0$及固定的N, $\exists n_k > N$,使得$\forall m > n_k, |x_{n_k} - a| < \varepsilon$.
所以$x_m - a = x_m - x_{n_k} + x_{n_k} - a < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.对这个$m$,存在$x_{k_l} > m > n_k.|x_{n_l} - a| < \varepsilon$.
所以$a - x_m = a - x_{n_l} + x_{n_l} - x_m < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.
所以$|a - x_m| < 2\varepsilon$,因此数列x_n收敛.

17. 设函数$f : (a,b) \to \mathbb{R}$无第二类间断点,且对$\forall x, y \in (a,b)$均有
$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$
证明: f是(a,b)上的连续函数.
证明:$\forall x_0 \in (a,b)$,由假设f在x_0处的左极限$f(x_0 - 0)$和右极限$f(x_0 + 0)$均存在,且$\forall h$足够小时,有 $f(x_0) + f(x_0 + h) \geqslant 2f(x_0 + \frac{h}{2})$,
两边令$h \to 0^+$得$f(x_0) + f(x_0 + 0) \geqslant 2f(x_0 + 0)$,所以$f(x_0) \geqslant f(x_0 + 0) \cdots (1)$
两边令$h \to 0^-$得$f(x_0) + f(x_0 - 0) \geqslant 2f(x_0 - 0)$,所以$f(x_0) \geqslant f(x_0 - 0) \cdots (2)$.
另一方面,$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) \geqslant 2f(x_0)$,
令$h \to 0^+$得$f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \geqslant 2f(x_0) \cdots (3)$
由(1)(2)(3)可得$f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$.所以$f$在$x_0$处连续,有$x_0$的任意性得,$f$是$(a,b)$上的连续函数.