华中科技大学2021 ~ 2022学年第一学期

《数学分析（一）》期中考试

考试方式:闭卷　考试日期:2021/11/18　考试用时:150分钟

院系:____________________　班级:____________________

学号:____________________　姓名:____________________

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (每题 4 分，共 24 分)

1. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$,则$\sup E =$ __________; $\inf E =$ __________

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n =$ __________

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \log_{10}(1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 10^x)) =$ __________

4. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, k$为正整数,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}(a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_k) =$ __________

5. 用ε语言给出$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq 0$的定义: ____________________

6. 方程$x\sin x = 1$在$\mathbb{R}$上有多少个根: __________

阅卷人	
得 分	

二、计算 (每题 8分，共 16分)

7. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(1\times 3+2\times 4+3\times 5+4\times 6+\cdots+n(n+1))}}{n^3(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

8. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x^2}+\sin\frac{1}{x^4})^{x^4}$.

阅卷人	
得 分	

三、解答题 (每题 12 分，共 24 分)

11. 给定数列$\{x_n\}$,令 $L=\{$数列$\{x_n\}$的全体部分极限$\}$.

(1) 若数列$\{x_n\}$有界,证明L有上确界.

(2) 是否存在数列$\{x_n\}$,满足$L=\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\cdots\}$?说明理由.

(3) 用闭区间套定理证明: 若数列$\{x_n\}$有界,则必存在最大的部分极限点.

12. 若存在常数M,满足$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant M,\ (n=1,2,\cdots)$, 则称数列$\{x_n\}$为有界变差数列.

(1) 设$x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$,验证$\{x_n\}$是否为有界变差数列.

(2) 证明:有界变差数列一定是收敛数列.

(3) 收敛数列是否一定是有界变差数列？若是,给出证明;若不是,举出反例.

阅卷人	
得 分	

四、证明题 (13–15每题 8 分；16–17每题6分,共36分)

13. 用$\varepsilon-\delta$语言证明:$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2+x-10}=\frac{4}{9}$.

14. 证明如下形式的Heine定理: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的充分必要条件是: 对趋于正无穷的任意数列$\{x_n\}$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

15. 用闭区间套定理证明连续函数的零点存在定理:设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$连续且$f(a) < 0, f(b) > 0$.则$\exists \xi \in (a, b)$,使得$f(\xi) = 0$.

16. 设x_n为非负数列,a_n为单调递增有界数列,且$x_{n+1} - x_n \leqslant a_{n+1} - a_n \ (n = 1, 2, \cdots)$.
证明:x_n收敛.

17. 设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$无第二类间断点,且对$\forall x,y\in(a,b)$均有

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证明: f是(a,b)上的连续函数.