2012-1 期中试卷解答

一、计算（每小题 5 分，共 60 分）

1. 计算极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

解 $\because \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}<\dfrac{n}{n+1}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，由夹挤准则得 $l=1$.

2. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

解 $$l=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解 $$l=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-1-x}{(1+x)2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

4. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{\sin x^2}$.

解法一 （有理化分子）

$$l=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-(1+x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+2x}+1+x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x}=-\frac{1}{2}$$

解法二（洛必达法则之后分子用等价代换）

$$l=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}}-1}{2x\cos x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+2x}}{2x\sqrt{1+2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-2x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

5. 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$，求 $f'(1)$.

解 $f'(1)=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)(x-1)}=-\dfrac{1}{10100}$

6. 设 $f(x)=\ln\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$，求 $f'(0)$.

解 $y'\big|_{x=0}=\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)\right]'$

$$=\frac{1}{2\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)}\left[1+\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{7}{8}.$$

7. 设 $y=y(x)$ 由 $xe^{f(y)}=x^y\ln3$ 确定，$f(y)$ 可导，且 $f'(y)\neq\ln x$，求 dy.

解 取对数 $\ln x+f(y)=y\ln x+\ln\ln3$，

方程两边对 x 求导 $\dfrac{1}{x}+f'(y)y'=y'\ln x+\dfrac{y}{x}$，

解出 $y'=\dfrac{y-1}{x[f'(y)-\ln x]}$，所以 $dy=\dfrac{y-1}{x[f'(y)-\ln x]}dx$.

8. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}y=t^m\\x=\ln2t\end{cases}$ 给出，计算 $\left.\dfrac{d^ny}{dx^n}\right|_{t=1}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{mt^{m-1}}{\dfrac{2}{2t}}=mt^m$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(mt^m)\dfrac{dt}{dx}=m^2t^{m-1}\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}}=m^2t^m$，

所以 $\left.\dfrac{d^n y}{dx^n}\right|_{t=1} = m^n t^m\big|_{t=1} = m^n$.

9. 设当 $x \to 0$ 时，$u = \sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{1-x} - 1 \sim cx^k$，求 c,k 的值.

解　利用 Taylor 公式

$$u = \left[1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]\left(1-\frac{x}{3}+o(x)\right)-1 = -\frac{x}{3}+o(x) \sim -\frac{x}{3},$$

故 $c = -\dfrac{1}{3}$，$k=1$.

10. 设 $g(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, x<0 \\ bx, x \ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，$f(x)=\sin x$。求 b 以及 $\left.\dfrac{d}{dx}f\big(g(x)\big)\right|_{x=0}$.

解 $g(0)=0$，$g'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}-0}{x} = -\dfrac{\pi}{2} = g'_+(0) = b$，

$$\left.\frac{d}{dx}f(g(x))\right|_{x=0} = f'(g(0))g'(0) = f'(0)g'(0) = b\cos 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

11. 设 $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2+x-1}$，计算 $f^{(n)}(0)$.

解 因 $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{x+1}$，所以

$$f^{(n)}(0) = \left.\frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right|_{x=0} = n!\left[(-1)^n - 2^n\right].$$

12. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$，求出其所有间断点，并说明间断点类型.

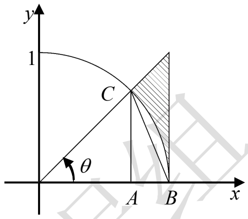
解　$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \\ \text{不存在}, & x=-1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$

$f(1^-)=0$，$f(1^+)=1$，$\therefore x=1$ 是跳跃间断点.

$f(-1^-)=1$，$f(-1^+)=0$，$\therefore x=-1$ 是跳跃间断点.

二、综合证明（每小题 7 分，共 28 分）

13. 如右图所示，在单位圆内，当 $\theta\to 0$ 时，证明三角形 ABC 的面积 $a(\theta)$ 与阴影部分的面积 $b(\theta)$ 是同阶无穷小.



解　$a(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$，$b(\theta)=\dfrac{1}{2}\tan\theta-\dfrac{1}{2}\theta$，显然 $\lim\limits_{\theta\to 0}a(\theta)=0$，$\lim\limits_{\theta\to 0}b(\theta)=0$，

所以当 $\theta\to 0$ 时，$a(\theta),b(\theta)$ 是无穷小.

又 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\tan\theta-\theta}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta^3}{\tan\theta-\theta}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{3\theta^2}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1}$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}=\frac{3}{2}$$

故当 $\theta\to 0$ 时，$a(\theta)$ 与 $b(\theta)$ 是同阶无穷小.

14. 证明当 n 充分大时，$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)<\dfrac{1}{n^2}$.

分析　即证当 n 充分大时，$\dfrac{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)}{\dfrac{1}{n^2}}<1$，如果能证明

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)}{\dfrac{1}{n^2}}<1$，则利用极限的保号性，结论成立.

证明 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}$,

先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}$.　　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\sqrt[x]{x}-1)}{x}}$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt[x]{x}-1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[x]{x}(1-\ln x)}{(\sqrt[x]{x}-1)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\ln x}$$

（其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$，$\sqrt[x]{x}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\dfrac{\ln x}{x},x\to+\infty$）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}-1}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=1$，$l=\dfrac{1}{2}<1$，故当 n 充分大时，不等式成立.

15. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$，依据极限定义证明当 n 充分大时：$x_n<y_n$.

证　对于 $\varepsilon_0=\dfrac{b-a}{2}>0$，当 n 充分大时，有 $|x_n-a|<\varepsilon_0$，$|y_n-b|<\varepsilon_0$ ，所以

$x_n<a+\varepsilon_0=\dfrac{b+a}{2}=b-\varepsilon_0<y_n$，得证.

16. 设物体 P 沿抛物线 $x=y^2(y>0)$ 自原点向右移动，与原点的距离为 r.设其水平速度 $\dfrac{dx}{dt}$ 保持为常量 A，（1）计算 $\dfrac{dr}{dt}$（2）随着物体的移动，$\dfrac{dr}{dt}$ 是逐渐变大还是逐渐变小或者忽大忽小；（3）计算 $\dfrac{dr}{dt}$ 的最终极限.

解 （1）由题设 $r=\sqrt{x^2+x}$，所以 $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}A$；

（2）因 $\dfrac{d^2r}{dt^2}=(\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}})'A^2$

$$=\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{x^2+x}-\dfrac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x}}}{(x^2+x)}A^2=\frac{1}{4}\frac{4(x^2+x)-(2x+1)^2}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}A^2<0\,,$$

故 $\dfrac{dr}{dt}$ 逐渐变小，

（3）最终极限是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}A=A$.

三、（每小题 6 分，共 12 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得：

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

解 对 $\dfrac{f(x)}{e^x}$ 在 $\left[a,b\right]$ 上用柯西中值定理，$\exists\eta\in(a,b)$，

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}\text{，（1），}$$

又 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，代入（1）式即得所证等式.

18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，证明存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=f(x_0+\dfrac{1}{4})$.

证 设 $F(x)=f(x)-f(x+\dfrac{1}{4})$，显然 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$ 上连续.

又平均值

$$\frac{F(0)+F(\frac{1}{4})+F(\frac{2}{4})+F(\frac{3}{4})}{4}$$

$$=\frac{f(0)-f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{4})-f(\frac{2}{4})+f(\frac{2}{4})-f(\frac{3}{4})+f(\frac{3}{4})-f(1)}{4}=0$$

由介值定理，$\exists x_0\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right]\subset\left[0,1\right]$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f(x_0+\dfrac{1}{4})$.