华中科技大学2022～2023 学年第二学期

《高等数学（A）》（下）课程期中考试试卷 (闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级________ 学号________ 姓名________

考试日期：2023-04-16　　　　考试时间：8:30 - 11:00

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	24	12	30	16	18	100
得 分						

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $\vec{a}=\{1,-1,2\}$，则与 $\vec{a}$ 方向相反的单位向量是________.

2、微分方程 $y''(x)+k^2y(x)=0$（$k>0$）的通解为________.

3、直线 $L:\begin{cases}x+y+z+3=0,\\2x+y-z=0\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影直线方程为________.

4、函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 的收敛域为________.

5、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xz^2-yz^3+y-1=0$ 在点 $(1,2,1)$ 附近确定的，则 $z_x(1,2)=$________.

6、设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，$F(x)=f(x,f(x,x))$，则 $F'(x)=$________.

得 分	
评卷人	

二、单项选择题(每小题 4 分，共 12 分)

7、若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（　　）.

A. 一定发散　B. 一定条件收敛　C. 一定绝对收敛　D. 敛散性不能确定

8、利用变量代换 $u=x, v=\dfrac{y}{x}$ 一定可把方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为新的方程（　　）.

A. $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　B. $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　C. $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　D. $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

9、函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $(0,0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　　).

A. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}[f(x,y,z)-f(0,0,0)]=0$　B. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}[f_x(x,y,z)-f_x(0,0,0)]=0$

C. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{f(x,y,z)-f(0,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$　D. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{f(x,y,z)-f(0,0,0)}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}=0$

得 分	
评卷人	

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

10、求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+x^2+y^2+y^4}$.

11、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}x^{2n}$ 的和函数.

12、设$z=f(x+y^2,x^2-y)$，且f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13、求微分方程$y'''-y=e^{2x}$的通解.

14、将函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$展开为Maclaurin级数.

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

四、解答题（每小题8分，共16分）

15. 求点$P(2,-1,1)$到直线$L:\begin{cases}x-y+z=2\\x+y+z=0\end{cases}$的距离.

16. 将函数$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},x\in[0,\pi]$ 展成正弦级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$的和.

得 分	
评卷人	

五、证明题（每小题6分，共18分）

17、 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sin(xy)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点$(0,0)$处可微.

18、设$f(x)$是偶函数，且在$x=0$的某邻域内具有连续的二阶导数，又$f''(0)\neq 0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-f(0)\right]$绝对收敛.

解答内容不得超过装订线

19、证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n^2})$ 在$(0,+\infty)$上有连续的导函数.