2019-1 期中试卷解答

一、基本计算（要有过程，每小题 6 分，共 60 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+3\cos^2 n}$.

解 显然 $\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{2\sin^2 n+3\cos^2 n}\le\sqrt[n]{3}$.

根据夹逼定理得到原式$=1$

[其他上界也对，比如 $\sqrt[n]{5}$.]

2. 当 $x\to 1$，求 $\sqrt[3]{x}-1$ 关于 $x-1$ 的主部.

解 $\sqrt[3]{x}-1=(1+x-1)^{1/3}-1\sim\dfrac{x-1}{3}$.　　　　主部为 $\dfrac{x-1}{3}$.

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\ln\cos x}$.

解

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{-\frac{1}{2}x^3}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

4. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 注意到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

所以 $l=\sqrt{e}$.

5. 设 $f(x)=x^{\tan x}$. 求 $f'(\frac{\pi}{4})$.

解 利用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\frac{\tan x}{x}).$$

代入 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 得 $f'(\dfrac{\pi}{4})=1+\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求曲线 $\cos x+\ln(y-x)=y^2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解 方程两边对 x 求导得到

$$-\sin x+\frac{1}{y-x}(y'-1)=2yy'.$$

代入 $x=0, y=1$ 解得 $y'(0)=-1$.

所求切线方程为$x+y=1$.

7. 设函数$f(x)$二阶可导, 求$y=f(\sin x)$的二阶导数.

解 $y'=f'(\sin x)\cos x$.

$y''=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x$.

8. 设 $y=x\ln x$, 求$y^{(6)}$.

解法一 根据 Leibniz 法则得到

$y^{(6)}=x(\ln x)^{(6)}+6(\ln x)^{(5)}$

$=x\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(5)}+6\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(4)}=\dfrac{24}{x^5}$

解法二

$y^{(6)}=(1+\ln x)^{(5)}=(\dfrac{1}{x})^{(4)}=\dfrac{24}{x^5}$.

[每一步得 2 分]

9. 求a,b的值使得函数$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x<0 \\ b-\sin 2x, & x\ge 0\end{cases}$在点$x=0$连续并且可导.

解 直接得到$f(0^+)=b, f(0^-)=1$.所以$b=1$.

求导得到$f'_+(0)=-2, f'_-(0)=a$.所以$a=-2$.

10. 设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=t+\ln t\end{cases}$确定, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t+1}{t(2t+2)}=\dfrac{1}{2t}$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(1/2t)'}{2t+2}=\dfrac{-1}{4t^2(t+1)}$.

二、综合题（每小题 6 分，共 30 分）

11. 设函数$f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$.指出$f(x)$的间断点，并判断其类型.

解 函数$f(x)$的间断点为$0,-1$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty,\ f(-1^+)=-\frac{\pi e}{2},\ f(-1^-)=\frac{\pi e}{2}.$$

所以 $x=0$ 是第二类间断点.　　（3 分）

$x=-1$ 是第一类间断点，是跳跃间断点.

12. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为 n 次实系数多项式. 证明当 n 为奇数时，方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

证 当 n 为奇数时, 显然有

$$f(+\infty)=+\infty, f(-\infty)=-\infty .$$

于是存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1)>0, f(x_2)<0$.

函数 $f(x)$ 显然连续. 根据介值定理方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 可导，$f(2)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}\right]^x$.

解 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\dfrac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)-f(2)}{f(2)})=\dfrac{1}{f(2)}\lim\limits_{x\to\infty} x\left[f(2+\frac{1}{x})-f(2)\right]$

$$=\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{x})-f(2)}{\frac{1}{x}}=\frac{f'(2)}{f(2)}$$

所以 原式 $=e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}$.

14. 设一个雪球以 $2\,\mathrm{cm}^3/\min$ 的速度融化. 设雪球在融化过程中始终保持球形. 求当雪球半径为 10cm 的时候半径变化的速率.

解 根据几何关系得到

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

两边对 t 求导得到

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$

代入 $dV/dt=-2$ 以及 $r=10$ 得到

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{200\pi}\text{ .cm/min.}$$

即半径以 $\frac{1}{200\pi}$ cm/min 的速度减小.

15. 写出函数 $f(x)=x\cos x$ 带皮亚诺余项的五阶麦克劳林公式..

解 先写出

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4),$$

进一步得到

$$x\cos x=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5+o(x^5).$$

[系数写 $\frac{1}{2!},\frac{1}{4!}$ 也算对;求导求出所有系数也算对.]

三、分析证明（每小题 5 分，共 10 分）

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1=\sqrt{6}, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 给出. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限值.

证明 显然有 $x_2>x_1$. 再根据 $x_{n+2}^2-x_{n+1}^2=x_{n+1}-x_n$，利用数学归纳法知 $\{x_n\}$ 严格单调增加.

另外显然 $x_1<3$. 设 $x_n<3$, 可推出 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+3}=3$. 再根据数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界.

根据单调有界收敛准则知数列极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限得到.

$a=\sqrt{6+a}$. 解得 $a=3$

17. 设 $0<a<b$. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$.

证 显然函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 和 $G(x)=\frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 并且 $G(x)$ 的导数不为 0.

根据柯西中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=-\xi f'(\xi)+f(\xi).$$

两边变号即得所证.