启明学院 2016 - 2017 学年第一学期

《微积分（一）》（上）课程考试试卷(A 卷) (闭卷)

参考答案与评分标准

一、（每小题 3 分）

1. $\sup E = 0, \inf E = -\dfrac{\pi}{2}$；　　　2. $a = 1, b = -1$；

3. $x = 1, y = x - 5$　　　4. $\dfrac{x}{\ln x} + C$;

5. $\dfrac{16\pi^3}{3}$；　　　6. $2\ln 2 - 1$；

7. $\forall \varepsilon > 0, \exists G > 0, \forall u_1, u_2 > G : |\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx| < \varepsilon.$

二、（每小题 3 分）　8. A；　9. D；　10. B.

三、（每小题 6 分，共 30 分）

11. 解：特征方程为 $r^2 + 4 = 0$, 特征根 $r_{1,2} = \pm 2i$

对应齐次方程的通解：$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$　　(2 分)

设非齐次方程的特解为 $y^* = a\cos x + b\sin x$　　(3 分)

代入原方程得 $-a\sin x - b\cos x + 4(a\sin x + b\cos x) = \sin x$

比较系数得 $a = \dfrac{1}{3}, b = 0$，　$\therefore$　$y^* = \dfrac{1}{3}\sin x$

原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin x$　　(6 分)

12．解：原式=$\lim\limits_{x\to 0} e^{\csc 2x \ln(1+\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt)}{\sin 2x}}$　　(3 分)

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$　　(6 分)

13. 解：令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2, dx = 2tdt$　　(2 分)

原式=$\int \dfrac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}} 2tdt = \int 2\arcsin t d(\arcsin t)$

$= (\arcsin t)^2 + C = (\arcsin\sqrt{x})^2 + C.$　　(6 分)

14. 解：原式=$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x(1+2\sin x+\sin^2 x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x(1+\sin^2 x)dx$ (3 分)

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx = 4\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} - 2\frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}.$$ (6 分)

15.解：$V=\int_0^1 2\pi(1-x)e^{-x}dx = \int_0^1 2\pi(1-x)de^{-x}$ (3 分)

$$= 2\pi(x-1)e^{-x}\Big|_0^1 - 2\pi\int_0^1 e^{-x}dx = 2\pi + 2\pi e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{e}.$$ (6 分)

四、(每小题 8 分，共 16 分)

16.解：因为当 $x\to+\infty$ 时，

$$\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}) = \ln[1+(\cos\frac{1}{x}-1)+\sin\frac{1}{x^2}] \sim (\cos\frac{1}{x}-1)+\sin\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$ (3 分)

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2}$

由比较判别法知，原反常积分收敛. (6 分)

17. 解：$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x+1}$，

由归纳法可知 $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(x+1)^{n+1}}\ (n\in N^+)$，

所以 $f^{(n)}(0) = (-1)^n(1-2^n)n!$， (3 分)

所要求的展开式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \theta\in(0,$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(1-2^k)x^k + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(\theta x+1)^{n+2}} - \frac{2^n}{(2\theta x+1)^{n+2}}\right)x^{n+1}.$$ (6 分)

五、(每小题 8 分，共 24 分)

18. 证明：令 $x=\pi+t$，则

右边=$\int_0^{\pi} f(\pi+t)\sin^2(\pi+t)d(\pi+t) = \int_0^{\pi} f(\pi+t)\sin^2(t)dt$， (2 分)

左边$-$右边=$\int_0^{\pi}[f(t)-f(\pi+t)]\sin^2 tdt$， (4 分)

因为 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调增，所以 $f(x)\le f(x+\pi), x\in[0,\pi]$

左边 $-$ 右边 $=\int_0^{\pi}[f(t)-f(\pi+t)]\sin^2 t dt\le 0$，

即：左边 $\le$ 右边，原式得证. (8 分)

19. 证明：令 $F(x)=f(x)\sin x$， $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上二阶可导，且

$$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x,$$

$$F''(x)=f''(x)\sin x+2f'(x)\cos x-f(x)\sin x. \quad (3\text{ 分})$$

由题设即所设知， $F(0)=F(1)=F(\pi)=0$，由罗尔定理可知，

$\exists\xi_1\in(0,1)$ 及 $\exists\xi_2\in(1,\pi)$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)$. (5 分)

再对 $F(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上用罗尔定理，得

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使得 $F''(\xi)=0$，即：

$f''(\xi)\sin\xi+2f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi=0$，

变形即得 $f''(\xi)+2f'(\xi)\cot\xi=f(\xi)$，

即原方程在 $(0,1)$ 内至少有一个根. (8 分)

20. 证明：（i）当 $x\in[-a,a]$ 时，

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)dt$$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{-a}^{x}tf(t)dt+x\int_{a}^{x}f(t)dt-\int_{a}^{x}tf(t)dt \quad (2\text{ 分})$$

又 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的正值的偶函数，所以

$$g'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)+\int_{a}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt$$

$g''(x)=2f(x)>0$，

所以 $g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的凸函数. (4 分)

（ii）由（i）知， $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有唯一最小值点.

由 $g''(x)>0$，知 $g'(x)$ 连续且单调增，因

$$g'(-a)=-\int_{-a}^{a} f(t)dt<0\text{，}\quad g'(a)=\int_{-a}^{a} f(t)dt>0\text{，}$$

再由零点定理，$g'(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有唯一零点.

又由 $f(x)$ 是偶函数，知

$g'(0)=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{a}^{0} f(t)dt=0$，即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，最小值为

$g(0)=-\int_{-a}^{0} tf(t)dt-\int_{a}^{0} tf(t)dt=2\int_{0}^{a} tf(t)dt$. (6 分)

由题设知 $2\int_{0}^{a} tf(t)dt=f(a)-e^{a^2}$，两边对 a 求导并整理得

$f'(a)-2af(a)=2ae^{a^2}$，且 $f(0)=1$.

上述关于 f 的微分方程的通解为

$$f(a)=e^{\int 2ada}\left(\int 2ae^{a^2}e^{-\int 2ada}da+C\right)=e^{a^2}(a^2+C)\text{，}$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，所以 $f(a)=e^{a^2}(a^2+1)$，

即 $f(x)=(x^2+1)e^{x^2}$. (8 分)