



“离散数学（一）”考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷 考试日期 2023.5 考试时长 150 分钟  
专业班级                      学 号                      姓 名                     

题号	一	二	三	四	五	六	总分	核对人
分值	14	62	24				100	
得分								

分 数	
评卷人	

一. 判断与填空题(每小题 2 分，共 14 分)

- (1) 有理数集合和实数集合等势。 ( )
- (2) A、B、C 均为集合，则  $A \times B \times C = (A \times B) \times C$ ，“ $\times$ ”为笛卡尔积。( )
- (3) 关系的复合运算满足结合律。( )
- (4) 欧拉公式适用于有多个连通分量的平面图。( )
- (5) 每个图的极大点独立集都是极小支配集。( )
- (6) 任意集合 A 的幂集  $P(A)$  上定义的包含关系是全序关系。( )
- (7) 集合  $A=\{a,b,c\}$ ,  $B=\{1,2,3\}$ ，A 到 B 上的关系有\_\_\_\_个；函数有\_\_\_\_个。

分 数	
评卷人	

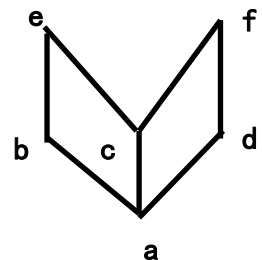
二. 解答题（共 62 分）

- (8) 设三个函数  $f: R \rightarrow R, f(x)=x^2-2$ ;  $g: R \rightarrow R, g(x)=x+4$ ;  $h: R \rightarrow R, h(x)=x^3-1$ 。请分别求  $f \circ g$  和  $g \circ f$ ，并判断他们是否为单射、满射和双射函数。此外判断 f, g 和 h 哪些有反函数，如果有请给出相应反函数。[提示:  $f \circ g(x)=g(f(x))$ ]（8 分）

解答内容不得超过装订线

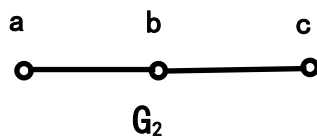
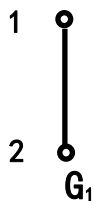
(9) 给出集合  $A=\{a,b,c\}$  上的一个二元关系  $R$ ，使得  $R$  不具有以下五个性质(自反，反自反，对称，反对称，传递)中任一性质，解释这个关系  $R$  为什么没有这些性质，并画出  $R$  的关系图；此外分别给出关系  $R$  的自反、对称和传递闭包,并画出其相应的关系图。(6 分)

(10) 下图是偏序集  $\langle X, \leq \rangle$  的哈斯图，求集合  $X$  和关系  $\leq$  的集合表达式，并指出该偏序集的极大元、极小元、最大元和最小元。(6 分)



(11) 两图  $G_1$  和  $G_2$  如下所示，请画出  $G_1$  和  $G_2$  的合成图  $G$ ，即  $G=G_1[G_2]$ ，并作说明。

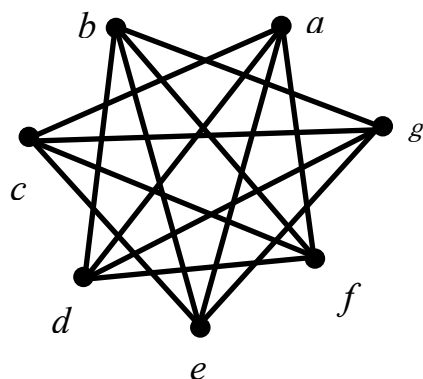
(4 分)



(12) 请判断度数序列  $(1,1,1,2,2,2,2,3)$  是否可以构成一个无向树；如果可以，请画出至少四个满足该度数序列的非同构无向树。(6 分)

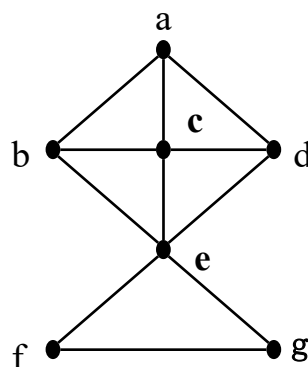
(13) 画一颗权为  $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$  的最优 5 叉树，并计算它的权。(6 分)

(14)判断下图是否是欧拉图、哈密顿图、对偶图和平面图，请说明理由。(8 分)

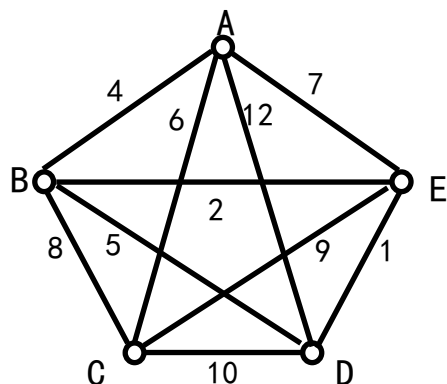


(15)设按顺序排列的 13 张梅花纸牌，"A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K"，经过 1 次洗牌后牌的顺序变为"3,8,K,A,4,10,Q,J,5,7,6,2,9"，问再经两次同样方式的洗牌后牌的顺序是怎样的？需给出求解过程。(6 分)

(16)请在下图中分别给出两个最小支配集和两个最小点覆盖，并说明理由。(6 分)



(17)假设有 5 个信息中心 A、B、C、D、E，它们之间的距离(以百公里为单位)如图所示。要交换数据，我们可以在任意两个信息中心之间通过光纤连接，但是费用的限制要求铺设尽可能少的光纤线路。重要的是每个信息中心能和其它中心通信，但并不需要在任意两个中心之间都铺设线路，可以通过其它中心转发。请给出此方案和详细求解过程。(6 分)



分 数	
评卷人	

三. 证明(每题 8 分，共 24 分)

(18)设函数  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f(\langle x, y \rangle) = \langle (x+y)/2, (x-y)/2 \rangle$ , 证明  $f$  是双射函数。

(19) 设  $G$  为  $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶简单无向图, 边数  $m = ((n-1)(n-2))/2 + 2$ , 证明图  $G$  是哈密顿图。

(20) 设  $G$  是  $n$  阶  $m$  条边的简单连通平面图, 已知  $m < 30$ , 证明图  $G$  中节点最小度数  $\delta(G) \leq 4$ 。