# 2021 ～ 2022 学年第一学期

# 《微积分（一）》（上）期中考试参考答案 (启明学院用)

考试日期: 2021-11-21　　　　考试时间: 8:30-11:00AM

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

## 一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 且 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=$ ____$a$____.

2. $\sup\{r\in Q:r^2<2\}=$ ____$\sqrt{2}$____.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=$ ____$e$____.

4. 设 $y=\arcsin\left(\ln u(x)-v^2(x)\right)$，$u(x),v(x)$ 可微，

则 $dy=$ ____$\dfrac{\dfrac{u'(x)-2u(x)v(x)v'(x)}{u(x)}}{\sqrt{1-(\ln u(x)-v^2(x))^2}}$____.

5. 设 $ye^{xy}-x+1=0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ____$0$____.

解答内容不得超过装订线

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

## 二. 选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 当 $n\to\infty$，如下收敛的是____$C$____.

A. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

B. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

C. $\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}$

D. $\sin n(\pi+1)$

2. 下列叙述错误的是 ____$C$____.

A. 单调函数的间断点都是第一类间断点

B. $o(x^2)=O(\sin x)(x\to 0)$

C. 有界数列必有收敛子列，且都收敛到同一个极限

D. $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续

3. 设函数$f(x)=\sqrt{1+x}\ \tan x$在$x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为$ax+bx^2+cx^3$，则__$D$__.

A. $a=1,b=2,c=\frac{5}{24}$

B. $a=1,b=2,c=-\frac{5}{24}$

C. $a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{5}{24}$

D. $a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{5}{24}$

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

**三. 计算题（每小题 7 分，共 28 分）**

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$.

解：由 Stolz 公式:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2}=\frac{a}{2}$$

2. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：设$u=\dfrac{sinx}{x}$， $v=\dfrac{1}{x^2}$

计算$\lim\limits_{x\to 0}(u-1)v=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

则$\lim\limits_{x\to 0}u^v=e^{-\frac{1}{6}}$

3.设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\geq 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解：当$x<0$ 时，$f^{'}(x)=-\,sinx$；

当$x>0$ 时，$f^{'}(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

当$x=0$ 时，

$f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{cosx}{x}$不存在. 显然，$f'(0)$不存在。

$$\therefore f^{'}(x)=\begin{cases}-sinx, & x<0\\ \frac{2x}{1+x^2}, & x>0\end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

4. 设 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$，求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{asint}{a(1-cost)}=\frac{sint}{1-cost}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{t}(\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{cost(1-cost)-(sint)^2}{(1-cost)^2}}{a(1-cost)}=-\frac{1}{a(1-cost)^2}$

## 四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

1．在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

(1)在 $x=0$ 处连续；

(2)在 $x=0$ 处可导；

(3)在 $x=0$ 处导函数连续.

解：(1)因为 $0\le\left|x^n\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|^{\mathrm{n}}$，而当 $\mathrm{n}>0$ 时，$\lim\limits_{n\to0}|x|^n=0$。

由夹挤原理

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^n sin\frac{1}{x}=0=f(0).$

即当 $\mathrm{n}>0$ 时，$f(x)$在点$x=0$ 处连续。

(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}sin\frac{1}{x}$

当且仅当 $\mathrm{n}>1$ 时，上述极限存在，

即当 $\mathrm{n}>1$ 时，$f(x)$在$x=0$ 处可导，且$f'(0)=0$。

(3)$\because f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}sin\frac{1}{x}-x^{n-2}cos\frac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $(\mathrm{n}>1)$

由上式可知：

当 $\mathrm{n}>2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$，即$f'(x)$在$x=0$ 处连续。

2. 已知函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上有连续的导函数，且导函数在端点的单侧极限 $f'(a+)$ 与 $f'(b-)$ 都存在且有限，请论证函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上的一致连续性.

证明：令

$$F(x)=\begin{cases} f'(a+), x=a. \\ f'(x), a<x<b. \\ f'(b-), x=b. \end{cases}$$

因为

$$\lim_{x\to a^+} F(x)=\lim_{x\to a^+} f^{'}(x)=f^{'}(a+)=F(a)$$
$$\lim_{x\to b^-} F(x)=\lim_{x\to b^-} f^{'}(x)=f^{'}(b-)=F(b)$$

所以$F(x)$在闭区间$[a,b]$ 连续，从而有界。因此$F(x)$在$(a,b)$也有界，所以 $f^{'}(x)$在开区间$(a,b)$有界。所以对任意$x\in(a,b)$，存在常数$M>0$，使得 $\left|f^{'}(x)\right|\le M$ 。

对任意的 $\varepsilon>0$，任意$x_1,x_2\in(a,b)$，存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，由拉格朗日公式，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，当$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时，

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f^{'}(\xi)\right|\left|x_1-x_2\right|\le M\left|x_1-x_2\right|\le M\delta<\varepsilon$$

因此函数$f(x)$在上$(a,b)$一致连续。

解
答
内
容
不
得
超
过
装
订
线

## 五. 证明题（第 1 题 6 分，第 2、3 题各 9 分，共 24 分）

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

1. 设$f(x)$在$(a,b)$上连续且在端点的单侧极限发散至$+\infty$，即 $f(a+)=+\infty$与 $f(b-)=+\infty$，证明： $f(x)$在$(a,b)$上有最小值.

证明：因为$f(a+)=+\infty$和$f(b-)=+\infty$，所以存在常数$M$足够大，使得当$x\in(a,a+\delta)$和$\mathrm{x}\in(b-\delta,b)$时，$f(x)\geq M>0$成立。

因为$f(x)$在$\left[a+\delta，b-\delta\right]$连续，所以有最小值$N$，即$\forall x\in\left[a+\delta，b-\delta\right]$，$f(x)\geq N$。

因此$f(x)$在$(a,b)$有最小值$N$。

2. 已知数列满足$x_1=a$，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$且$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

（1）

先证$x_n$有界：

因为 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$，假设 $0<x_n<\dfrac{\pi}{2}$， 则 $0<x_{n+1}=\sin x_n<1<\dfrac{\pi}{2}$。由数学归纳法可知，$0<x_n<\dfrac{\pi}{2}$。

再证$x_n$单调：因为$x_n>0$，$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$。

因此，由单调有界定理知，$x_n$极限存在，记为$a$。

对$x_{n+1}=\sin x_n$两边取极限，得$a=\sin a$，因此，$a=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

（2）

要证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$，即证$\lim\limits_{n\to\infty}n{x_n}^2=3$。由*stolz*公式可得：

$$\lim_{n\to\infty} n{x_n}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{{x_n}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{{x_n}^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2 x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)}{x_{n-1}^2-(x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3}{6}+o(x_{n-1}^3))^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)}{\frac{x_{n-1}^4}{3}+o(x_{n-1}^4)}=3$$



3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$. 在 $(0,1)$ 中 $f(x)$ 可导且 $|f'(x)|\le f(x)$. 证明：$f(x)\equiv 0$.

证法 1：令 $F(x)=e^{-2x}f^2(x)$，则 $F^{'}(x)=2e^{-2x}f(x)[f^{'}(x)-f(x)]\le 0$ 。因此 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，所以 $F(x)=e^{-2x}f^2(x)\le F(0)=0$，所以 $f(x)\equiv 0$ 在 $(0,1)$ 恒为 $0$ 。再根据 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性可知，$f(x)\equiv 0$ 在 $\left[0,1\right]$。

证法 2：当 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，则拉格朗日中值定理知，$\exists\xi_1\in(0,x)$，有 $f(x)-f(0)=f^{'}(\xi_1)x$，

$\left|f(x)\right|=\left|f^{'}(\xi_1)x\right|<\frac{1}{2}f(\xi_1)$ 。同理有 $\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得 $\left|f(\xi_1)\right|<\frac{1}{2}f(\xi_2)$ 。从而有

$\left|f(x)\right|<\frac{1}{2}f(\xi_1)<\frac{1}{2^2}f(\xi_2)<\cdots\frac{1}{2^n}f(\xi_n)<\cdots$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(\xi_n)=0$，所以 $f(x)\equiv 0, x\in(0,\frac{1}{2}]$ 。

同理可证 $f(x)\equiv 0, x\in[\frac{1}{2},1)$，即 $f(x)\equiv 0, x\in[0,1)$ 。再根据 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性可知，$f(x)\equiv 0$ 在 $\left[0,1\right]$。