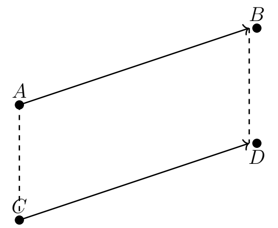
第1章　平面上のベクトル

1.1　ベクトル

右図のように，線分 AB に「A から B へ向かう向き」を与えたものを**ベクトル**といい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とかく．A を**始点**，B を**終点**という．

ベクトルは大きさと向きだけを考えると約束する．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動した $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は**同じベクトルである**と考える．



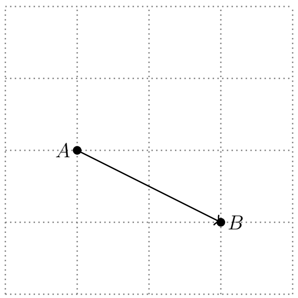
記法の注意：
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさを $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と書く．また，ベクトルを $\overrightarrow{a}$ と書くことも多い．$\overrightarrow{a}$ の大きさは $|\overrightarrow{a}|$ と書く．

1.2　ベクトルの成分表示

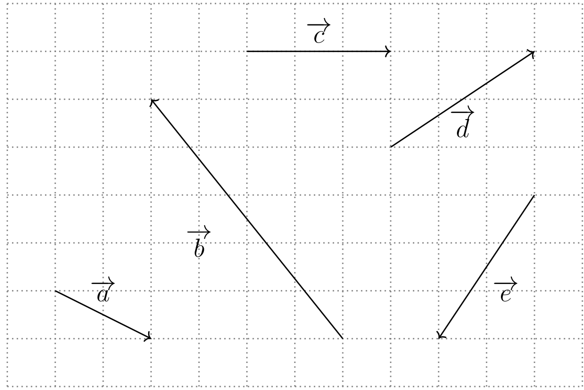
ベクトルの向きと大きさを表すためには，ベクトルを座標平面上に置いて x 成分と y 成分に分けて書くとよい．これをベクトルの**成分表示**という．例えば，右のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 進んでいるので，成分表示は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -1)$$

となる．



問 1.
下図の各ベクトルの成分表示を求め，その大きさを計算せよ．



1.3　ベクトルの和・差・実数倍

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ に対し，その和・差・実数倍を次のように定める．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)\\ k\overrightarrow{a} &= k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)\end{aligned}$$

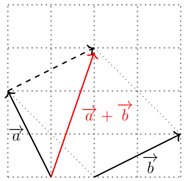


図 1.1: 和

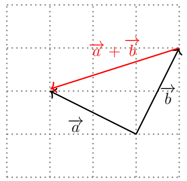


図 1.2: 差

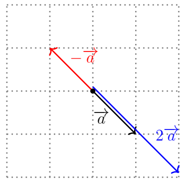


図 1.3: 実数倍

例.
$\vec{a}=(5,-1), \vec{b}=(-4,2)$ のとき，$3\vec{a}+2\vec{b}$ の成分表示は

$$3\vec{a}+2\vec{b}=3(5,-1)+2(-4,2)=(15,-3)+(-8,4)=(7,1)$$

である．

問 2.
$\vec{a}=(2,3), \vec{b}=(1,-4)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ．

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-2\vec{b}$　(3) $3\vec{b}-4\vec{a}$

問 3.
$\vec{a}=(5,3), \vec{b}=(2,1)$ のとき，次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を求めよ．

(1) $\vec{a}+\vec{x}=2\vec{b}$　(2) $2\vec{a}-3\vec{x}=6\vec{b}-5\vec{x}$

問 4.
2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行であるための条件は，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在することである．その理由を説明せよ．

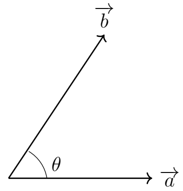
問 5.
$\vec{a}=(3,4)$ と逆向きで，大きさが 1 のベクトル $\vec{e}$ を求め，$\vec{a}$ とともに図示せよ．このように，大きさが 1 のベクトルのことを**単位ベクトル**と呼ぶ．

1.4　ベクトルの内積

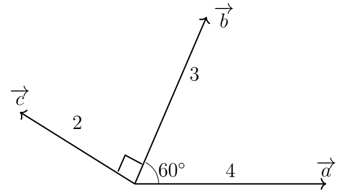
0 でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とする．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．このとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**という．
　どちらかのベクトルが $\vec{0}$ のとき，内積は 0 であると約束する．



例.
下の図の状況のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ を求めてみよう．



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 150^\circ=4\cdot 2\cdot\cos 150^\circ=8\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4\sqrt{3}$$

問 6.
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(1) $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, \theta=45^\circ$　(2) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3, \theta=120^\circ$
(3) $|\vec{a}|=9999, |\vec{b}|=18298, \theta=90^\circ$

問 6 の (3) からわかるように，直交するベクトルの内積は 0 である．逆に，$\vec{0}$ でない 2 本のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積が 0 であったする．このとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$$

である．$|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$ であるから，両辺を $|\vec{a}||\vec{b}|$ で割って

$$\cos\theta=0$$

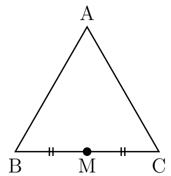
を得る．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ ゆえ $\theta=90^\circ$ であるので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する．

重要事項：
$\vec{0}$ でない 2 本のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，

$$\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{が直交する} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

問 7.

1辺の長さが2の正三角形ABCがある．辺BCの中点をMとするとき，次の内積を求めよ．
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$



問 8.
ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$$

が成り立つことを示せ．

1.4.1　内積の成分表示

ベクトルを扱うには成分表示が便利であったが，このままでは内積が計算しづらい．

問 9.
$\overrightarrow{a} = (1,2)$, $\overrightarrow{b} = (3,1)$ とするとき，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を求めよ．

このような問題を簡単に解くために，成分表示のまま内積を計算する方法を紹介する．

定理

ベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ に対して，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

が成り立つ．

これを用いると，問9は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 5$$

と簡単に計算できる．

問 10.
次のベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の内積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{a} = (-4, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{b} = (0, 2)$　　(2) $\overrightarrow{a} = (3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, -3)$

1.4.2　内積と角度

$\overrightarrow{0}$ でない2つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ がなす角を θ とすると，その内積は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

であった．これを $\cos\theta$ について解くと

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

特に，$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ と成分表示されているときには

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{†}$$

が成り立つ．

問 11.
式(†)を示せ．

問 12.
次の2つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を求めよ．

(1) $\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 3)$　　(2) $\overrightarrow{a} = (1, -3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{b} = (-\sqrt{3}, 2)$

問 13.
ベクトル $\overrightarrow{a} = (3, -6)$, $\overrightarrow{b} = (x^2 - 6x, x - 6)$ が直交するような x をすべて求めよ．

問 14.
ベクトル $\overrightarrow{a} = (1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{b} = (-x, \sqrt{6})$ のなす角が 60° となる x を求めよ．

問 15.
$\overrightarrow{a} = (3, -4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

1.4.3　内積の計算法則

　ベクトルの内積に対して，次の計算法則が成り立つ．これは今後もよく使うので必ず覚えておこう．

定理．
ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ と実数 k に対し，次が成り立つ．

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

(2) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$

(3) $(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b})=k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

例．
$|\overrightarrow{a}|=2,\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4$ のとき，

$$\overrightarrow{a}\cdot(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=2|\overrightarrow{a}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=8+4=12$$

次の等式はとても重要である．

定理．

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$$

証明．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2&=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\\&=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}\\&=|\overrightarrow{a}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2\\&=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2\end{aligned}$$

□

問 16.
次の等式が成り立つことを示せ．

$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$$

問 17.
$|\overrightarrow{a}|=3, |\overrightarrow{b}|=\sqrt{5},\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2$ のとき，$|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ の値を求めよ．

問 18.
$|\overrightarrow{a}|=1, |\overrightarrow{b}|=3\sqrt{2},\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=3$ のとき，$|3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ の値を求めよ．

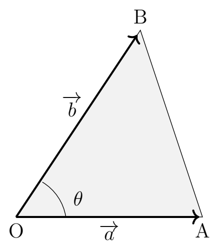
問 19.
$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{3}, |\overrightarrow{b}|=5$ で，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が 120° とき，$|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|$ の値を求めよ．

問 20.
次の空欄に当てはまる適切な数式を答えよ．

右の △OAB の面積 S を求めたい．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ とおき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とする．このとき，△OAB の面積 S は

$$S=[\quad 1\quad]\sin\theta$$

とかける．



三角比の相互関係から $\sin^2\theta=[\quad 2\quad]$ なので，

$$S^2=\frac{1}{4}\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2(1-[\quad 3\quad]\}=\frac{1}{4}\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-([\quad 4\quad])^2\}$$

が成り立つ．$S\geqq 0$ であるから，次の式を得る．

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{[\quad 5\quad]}$$

特に，$O=(0,0), A=(x_1,y_1,), B=(x_2,y_2)$ のときは $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の成分表示がそれぞれ

$$\overrightarrow{a}=[\quad 6\quad],\quad \overrightarrow{b}=[\quad 7\quad]$$

となるので，上の結果から

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1)^2(x_2^2+y_2^2)-[\quad 8\quad]}=\frac{1}{2}\sqrt{([\quad 9\quad])^2}$$

となるので，

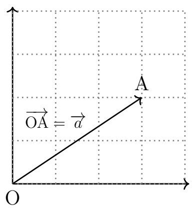
$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

が成り立つ．

問 21.
(1) $A=(1,2), B=(3,4), C=(5,1)$ のとき，△ABC の面積を求めよ．
(2) $O=(0,0), A=(-1,3), B=(5,-1)$ のとき，△OAB の面積を求めよ．

1.5　位置ベクトル

ベクトルを使うと，平面上の点の位置を表すことができる．例えば，右の図において，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$ は原点 O を基準とした点 A の位置を表している．
　ベクトルの便利なところは，この「基準」となる点を自由に決められることである．



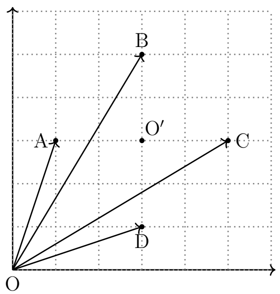
左下の図では原点 O を基準にして 4 点 A,B,C,D をベクトルで表している．それぞれの成分表示は

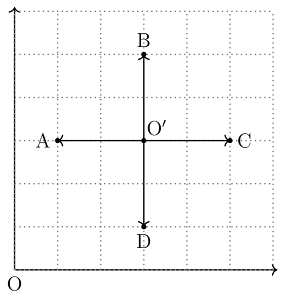
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,3),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,5),\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=(5,3),\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=(3,1)$$

である．次に，基準を O から $\mathrm{O}'=(3,3)$ にして 4 点 A,B,C,D をベクトルで表したものが右図である．各ベクトルの成分表示は

$$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=(-1,0),\ \overrightarrow{\mathrm{O'B}}=(0,1),\ \overrightarrow{\mathrm{O'C}}=(1,0),\ \overrightarrow{\mathrm{O'D}}=(0,-1)$$

である．よって，基準の取り方によって成分表示が異なることがわかる．





このように，ある基準点 O から見た点 A の位置を表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$ を，点 O を基準とする A の**位置ベクトル**という．位置ベクトルが $\overrightarrow{a}$ である点 A を $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ と書く．

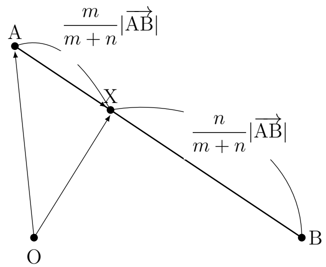
問 22.
2 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$$

が成り立つことを図を用いて確認せよ．

1.5.1　内分点と外分点

数学 A で内分点と外分点を表す式を学んだと思うが，これはベクトルを使うと意味を理解しやすい．2 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を考えよう．AB を $m:n$ に内分する点 P は，A を出発して線分 AB 上を $\dfrac{m}{m+n}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ だけ進んだところにある．



よって，X の位置ベクトル $\overrightarrow{p}$ を表すには，$\overrightarrow{a}$ に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さを $\dfrac{m}{m+n}$ 倍したものを足してやればよい．問 22 より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ なので，

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{a}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{a}$$

が成り立つ．

定理．内分点の位置ベクトル
2 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $m:n$ に内分する点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ の位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{p}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{a}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{b}$$

で表される．

例.
$\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $3:5$ に内分する点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ の位置ベクトルは,

$$\overrightarrow{p} = \frac{5}{3+5}\overrightarrow{a} + \frac{3}{3+5}\overrightarrow{b} = \frac{5}{8}\overrightarrow{a} + \frac{3}{8}\overrightarrow{b}$$

である.

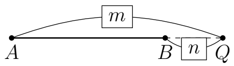
問 23.
(1) $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $3:2$ に内分する点の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ で表せ.
(2) $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ の中点の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ で表せ.

問 24.

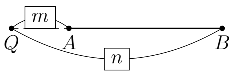
$\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $m:n$ に外分する点 $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ の位置ベクトルは,

$$\overrightarrow{Q} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{a} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{b}$$

で表されることを示せ.



$m > n$ の場合



$m < n$ の場合

> **定理. 外分点の位置ベクトル**
> 2点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $m:n$ に外分する点 $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ の位置ベクトルは,
>
> $$\overrightarrow{q} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{a} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{b}$$
>
> で表される.

問 25.
(1) $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $3:2$ に外分する点の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ で表せ.
(2) $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ を $1:5$ に外分する点の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ で表せ.

1.6　一次独立性

ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が一次独立であるとは,

$$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = 0$$

を満たす実数の組 (s,t) が $(0,0)$ しか存在しないことをいう. 平面上の零でない2本のベクトルに対しては,「それらが平行でないこと」と「一次独立であること」は同値である.

ベクトルを用いて図形の問題を解くときは, 一次独立性が重要になる. よくあるのは, ベクトルの係数を比較するときである.

ベクトルの等式

$$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$$

を考えよう. この等式から $s=3, t=2$ としたくなるが, これは必ずしも正しくない. 全て左辺に移項して

$$(s-3)\overrightarrow{a} + (t-2)\overrightarrow{b} = 0$$

とする. もし $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が一次独立ならば, $(s-3, t-2) = (0,0)$ しかありえないので, $s=3, t=2$ としてよい.

一方で, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が一次独立でないときは $s=3, t=2$ とは限らない. 例えば, $\overrightarrow{a} = (1,0), \overrightarrow{b} = (2,0)$ としてみよう. これらは平行なので一次独立ではない. このとき,

$$(s-3)\overrightarrow{a} + (t-2)\overrightarrow{b} = 0 \iff s + 2t - 7 = 0$$

なので, $(s,t) = (3,2)$ 以外にも無数の候補がある.

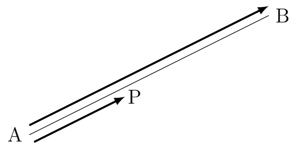
このように, ベクトルが一次独立でないときは係数の比較ができないことを覚えておこう.[1]

[1] 実際の入試において, 係数比較ををしたい場面では一次独立なものしかでてこないので, あまり気にする必要はないのが正直なところ...
記述式のときは, 係数比較をする前にとりあえず「$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は一次独立なので...」とか書いておこう.

1.7　図形問題への応用

異なる 2 点 A, B をとるとき，3 点 A,B,P が同一直線上にあるということは

- $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AP}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$



のどちらかが成り立つことと同じである．よって，次のことがわかる．

> **3 点が同一直線上にあるための条件**
> 2 点 A, B は異なるとする．3 点 A,B,P が同一直線上にあるための必要十分条件は，
> $$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$$
> を満たす実数 k が存在することである．

問 26.
平行四辺形 OABC の対角線 AC を $2:5$ に内分する点を D，辺 AB を $2:3$ に内分する点を E とする．$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とするとき，3 点 O,D,E が同一直線上にあることを示せ．

問 27.
平行四辺形 OABC の対角線 AC を $2:1$ に内分する点を P，辺 BC の中点を Q とする．このとき，3 点 O,P,Q が同一直線上にあることを示せ．

問 28 (頻出問題！)**.**
△OAB で，辺 OA を $2:1$ に内分する点を M，辺 OB を $3:2$ に内分する点を N，2 直線 AN, BM の交点を P とする．$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ として，$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せ．

HINT： $\mathrm{AP}:\mathrm{PN} = s:(1-s)$，$\mathrm{BP}:\mathrm{PM} = t:(1-t)$ とおき，$\overrightarrow{p}$ を表す．

問 29.
△OAB で，辺 OA の中点を M，辺 OB を $3:1$ に内分する点を N，2 直線 AN, BM の交点を P とする．$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ として，$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せ．

問 30.
鋭角三角形 ABC において，頂点 B,C からそれぞれ直線 AC,AB に下ろした垂線の交点を H とする．点 A から直線 BC にう下ろした垂線は H を通ることを示せ．

HINT： AH と BC が直交することを示せば十分．

1.8　ベクトル方程式

ベクトル方程式は，今までに学んだ直線や円の方程式をベクトルで表そうというものである．一見難しそうだが，大したことはない．

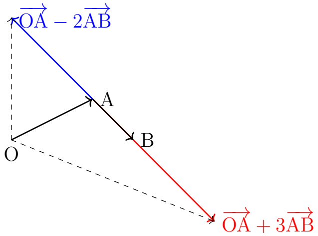
1.8.1　直線のベクトル方程式

2 点 A,B を通る直線上の点 Y は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad (*)$$

と表される．このように，図形の方程式をベクトルを用いた式で表したものを**ベクトル方程式**といい，t を**媒介変数 (パラメータ)** という．

$(*)$ は式の意味を考えればすぐ理解できる．はじめに $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を使って点 A まで移動し，A から B に向かって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を伸ばしている．実数 t を調整してやれば，直線上の全ての点を表せる．よって，この式は A,B を通る直線に他ならない．



今まで習った直線の方程式は $y = ax + b$ という形だった．傾き a が直線の方向を表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に，b 位置を調整するベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に対応している．

$$\begin{array}{cccccc} y & = & a & x & + & b \\ \downarrow & = & \downarrow & \downarrow & + & \downarrow \\ \overrightarrow{\mathrm{OY}} & = & \overrightarrow{\mathrm{AB}} & t & + & \overrightarrow{\mathrm{OA}} \end{array}$$

結局，少し記号が変わっただけで，変数の値を決めると直線上の点が 1 つ決まるという考え方は全く同じである．

上の説明からもわかるように，直線のベクトル方程式を求めるためには

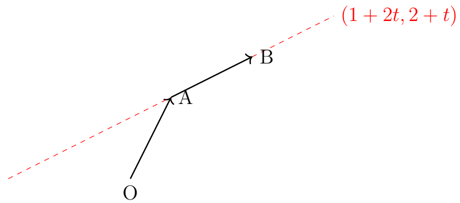
- 通る点 1 つ
- 方向を表すベクトル

を求めればよい．通る点はすぐに分かるので，方向を表すベクトルを求めるのが腕の見せどころである．

例.
2 点 $\mathrm{A} = (1,2)$, $\mathrm{B} = (3,3)$ を通る直線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,2) + t(2,1) = (1+2t, 2+t)$$

である．



問 31.
2 点 $(3,2), (-1,9)$ を通る直線の方程式を求めよ．

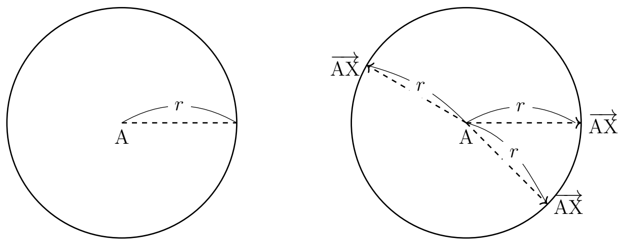
問 32.
$\mathrm{A} = (4,1)$ と $\mathrm{B} = (3,2)$ を $3:2$ に外分する点 Q を通り，$\overrightarrow{d} = (3,1)$ に平行な直線の方程式を求めよ．

問 33.
$\mathrm{A} = (2,4)$ を通り，$\overrightarrow{d} = (3,5)$ と直交する直線の方程式を求めよ．

問 34.
$\mathrm{A} = (1,3)$ と $\mathrm{B} = (-3,-5)$ を $1:3$ に内分する点 P を通り，$\overrightarrow{d} = (1,2)$ となす角度が 30° である直線の方程式を求めよ．

1.8.2　円のベクトル方程式

点 A を中心とする半径 r の円とは，A からの距離が r である点の軌跡のことである．これをベクトルの言葉で置き換えると，$\overrightarrow{\mathrm{AX}}$ の大きさが r となる点全体のことである．



よって，$\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ を中心とする半径 r の円のベクトル方程式は

$$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}| = |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}| = r$$

である．めっちゃカンタン．

1.9　点 P の存在範囲

少し応用の問題に挑戦しよう．

例題 1 .

△OAB において，$\mathrm{A}(\overrightarrow{a}), \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ とする．実数 s, t が $s+t=1$，$s \geqq 0$, $t \geqq 0$ を満たしながら動くとき，

$$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$$

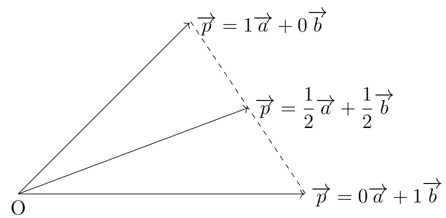
を満たす点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ の存在範囲を図示せよ．

解答.

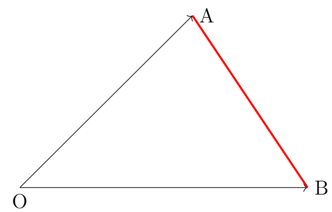
問題文は難しそうだが，やり方さえ知っていればサービス問題である．$s+t=1$ に注目して，

$$\overrightarrow{p} = \frac{s}{s+t}\overrightarrow{a} + \frac{t}{s+t}\overrightarrow{b}$$

と書き換えてみよう．すると，P は線分 AB を $t : s$ に内分する点である．ここで，$s = 1-t$ と書き直して t を 0 から 1 まで動かすと，P は A から B まで動くことがわかる．



よって，P の軌跡は線分 AB である．



問 35.
△OAB において，A($\overrightarrow{a}$),B($\overrightarrow{b}$) とする．実数 s,t が $s+t=\dfrac{1}{2}$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ を満たしながら動くとき，

$$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$$

を満たす点 P($\overrightarrow{p}$) の存在範囲を図示せよ．

問 36.
△OAB において，A($\overrightarrow{a}$),B($\overrightarrow{b}$) とする．実数 s,t が次の条件を満たしながら動くとき，

$$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$$

を満たす点 P($\overrightarrow{p}$) の存在範囲を図示せよ．

(1) $0 \leqq s+t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$

(2) $1 \leqq s+t \leqq 2,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$

(3) $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$

問 37.
△OAB において，A($\overrightarrow{a}$),B($\overrightarrow{b}$) とする．実数 s,t が $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ を満たしながら動くとき，

$$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+(s+t)\overrightarrow{b}$$

を満たす点 P($\overrightarrow{p}$) の存在範囲を図示せよ．

第２章　空間上のベクトル

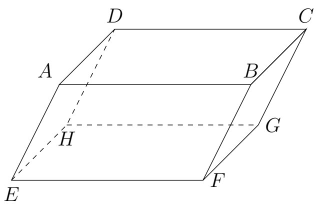
2.1　平面と (ほぼ) 共通の事項

- ベクトルの基本事項
  - 空間上のベクトルは x,y,z 成分に分解して $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$ と書ける．これを空間ベクトルの**成分表示**という．
  - ベクトル $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$ の大きさは，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．これは三平方の定理よりわかる．
  - ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行 $\iff$ $\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$ となる実数 k がある．
- 内積
  - $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，内積は
  $$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$
  である．よって，平面の時と同様に
  $$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$
  が成り立つ．
  - $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$ と $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$ と成分表示されているなら，内積は
  $$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$
  と計算できる．
  - **垂直なら内積は 0．**

- 位置ベクトル
  - $A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b})$ に対し，
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$
  - $A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b})$ に対し，線分 AB を
    - $m:n$ に内分する点 $P(\overrightarrow{p})$ の位置ベクトルは，
$$\overrightarrow{p} = \frac{n\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}}{m+n}$$
    - $m:n$ に外分する点 $Q(\overrightarrow{q})$ の位置ベクトルは，
$$\overrightarrow{q} = \frac{-n\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}}{m-n}$$
  - $A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b}), C(\overrightarrow{c})$ を頂点とする三角形の重心 $\overrightarrow{g}$ の位置ベクトルは
$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

2.2　平行六面体

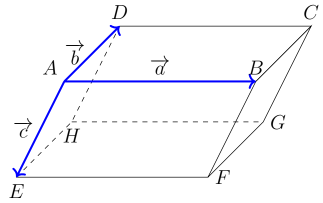
2枚ずつの平行な3組の平面で囲まれた立体を**平行六面体**という．下の図からわかるように，平行四辺形の空間バージョンである．



平行四辺形と同じように，上の平行六面体においては次が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{HG}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{DH}}$$

問 38.
右図の平行六面体 ABCD-EFGH で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{c}$ とする．このとき，次のベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ で表せ．
(1) $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ (4) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$



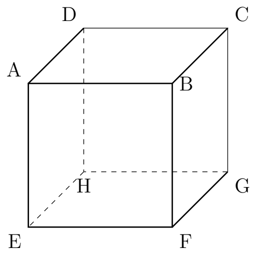
2.3　空間ベクトルの内積

空間ベクトルの内積の定義ははじめに述べたが，もう一度確認しておこう．

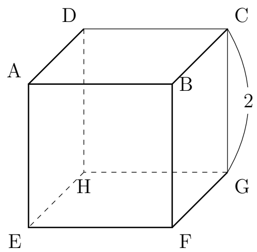
- $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ と $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ のなす角を θ とする．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．このとき，
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$
をベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の**内積**という．$\overrightarrow{a}$ か $\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{0}$ であるときには $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ と約束する．
- $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ と $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ のときには両辺を $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ で割って
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$
が成り立つので，**内積が0であることと2本のベクトルが垂直であることは同値である．**
- $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ と $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$ と成分表示されているなら，内積は
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$
と計算できる．

成分表示されている場合は平面と全く同じなので簡単である．一方で，ベクトルのなす角を使う場合は慣れないと大変なので，ここで練習しておこう．

問 39.
右図の立方体 ABCD-EFGH において，次のベクトルがなす角を 0° 以上 180° 以下で求めよ．
(1) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \overrightarrow{\mathrm{EF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{FH}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}, \overrightarrow{\mathrm{EG}}$
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{GE}}$



問 40.
右図の立方体 ABCD-EFGH において，次の内積を求めよ．
(1) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FH}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}$



問 41.
空間内の 3 点 $\mathrm{A} = (1, -3, 4)$，$\mathrm{B} = (-3, 2, 1)$，$\mathrm{C} = (3, -5, 3)$ に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ．

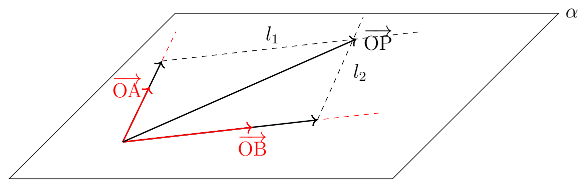
問 42.
1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH の辺 EF,FG,GC の中点をそれぞれ L,M,N とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ のなす角 θ を求めよ．
(Hint：立方体の頂点の 1 つを原点として座標を考える．)

問 43.
問 42 において，$\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ のなす角 θ を求めよ．

2.4　平面

2.4.1　平面のベクトル方程式

三次元空間上の平面 α を考える．α 上の平行でないベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をとり，α 上の点 P を表してみよう．点 P を通り直線 OB と平行な直線を l_1，OA と平行な直線を l_2 とおく．



図より，ある実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せることがわかる．また，実数 s, t を動かせば平面上のどの点もベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せるので，平面のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (s, t \text{ は実数})$$

である．

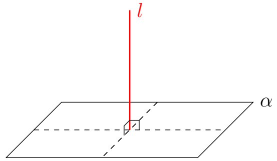
平面のベクトル方程式
三次元空間上の平面 α のベクトル方程式は,，α 上の平行でないベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (s, t \text{ は実数})$$

と表せる．

2.4.2　平面と直線の関係

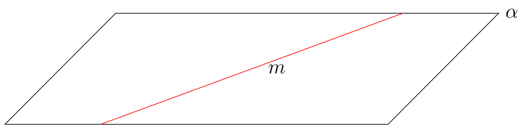
空間上の直線平面 l と α 上の任意の直線 α と直線が垂直であるとき，直線 l と平面 α は**垂直である**といい，$l \perp \alpha$ と書く．



任意の直線との角度を考えることは難しそうに見えるが，実際は α 上の平行でない 2 本のベクトルと垂直であることがいえれば十分である．

問 44.
平面 α 上の平行でない 2 本の直線 m_1, m_2 を任意に選ぶ．このとき，$l \perp m_1, l \perp m_2$ ならば $l \perp \alpha$ であることを示せ．(Hint：平面のベクトル方程式を使う．)

問 45.
平面 α 上のある直線 m と垂直であるが，平面 α とは垂直でないような直線 l の例を図示せよ．



2.4.3　点と平面の距離の公式

最後に，空間上の点と平面の距離を求める公式を導こう．これは数学 II で学んだ点と直線の距離の公式の空間への拡張である．まず，準備として平面の方程式を x, y, z の関係式で表そう．平面の方程式を求める方法は色々あるが，法線ベクトルを用いる方法が最も簡単である．

例.
点 A $= (p, q, r)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ と直交する平面 α の方程式を求めよう． 平面 α 上の点 P $= (x, y, z)$ を任意にとると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-p, y-q, z-r)$ と $\overrightarrow{n}$ は直交する．垂直なら内積は 0 なので，

$$a(x-p) + b(y-q) + c(z-r) = 0$$

と表せる．これが平面 α の方程式である．

これを展開して整理すると，

$$ax + by + cz - (ap + bq + cr) = 0$$

である．後半の定数項をまとめて d とでもおいてやれば

$$ax + by + cz + d = 0$$

を得る．これより，平面は x, y, z の 1 次式で書けることがわかった．

平面の方程式
x, y, z の関係式

$$ax + by + cz + d = 0$$

は，空間上の平面を表す．

問 46.
点 A $= (2, 1, 4)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (-1, 2, 7)$ と直交する平面の方程式を求めよ．

問 47.
3 点 $(1, 1, 2), (0, -2, 1), (3, -1, 0)$ を通る平面の方程式を求めよ．

問 48.
問 47 を，平面のベクトル方程式を用いて解け．

書くのが面倒になったので，点と平面の距離の公式は演習問題とする．

問 49.
数学 II で習った点と平面の距離の公式を書け．

問 50.
空間上の点 (x_0, y_0, z_0) と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で表されることを示せ．