単元別演習　数と式③

因数分解・高次方程式

例題 1

x^4-2x^3-x+2 を因数分解せよ．

Point.

3 次以上の因数分解→強引に「$=0$ の解」(根という) を見つけて因数定理を使う．有理数解の候補は

$$\pm\frac{\text{(定数項の約数)}}{\text{(最高次数の係数の約数)}}$$

の形のみなので，ここから攻めるとよい．

解答

$x=1$ を代入すると 0 になるので，因数定理により，$(x-1)$ で割った余りは 0 である．つまり，x^4-2x^3-x+2 は $x-1$ で割り切れる．実際に割り算をしてみると，

$$x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x^3-x^2-x-2)$$

である．

次に，x^3-x^2-x-2 を因数分解する．$x=2$ を代入すると 0 になるので，上と同様に $x-2$ で割り切れる：

$$x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1).$$

x^2+x+1 は (有理数の範囲では) これ以上因数分解できないので，以上の結果を合わせて

$$\boldsymbol{x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)}.$$

!

2 次式が有理数の範囲でこれ以上因数分解できないことは，$=0$ の解を探せばすぐに分かる．$x^2+x+1=0$ の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ なので，これ以上因数分解するなら

$$x^2+x+1=\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

しかありえない．よって，有理数の範囲ではこれ以上因数分解できないことがわかる．

3 次以上の場合はそう簡単にいかないので注意．$x^4+4=0$ は実数解すら持たないが，

$$x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

と因数分解できる．

問 1

次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3-4x^2-7x+10$　　(2) x^3+2x^2-2x-1

例題 2

3 次方程式 $x^3-4x^2-7x+10=0$ を解け.

Point.

まずは 2 次以下が出てくるまで因数分解しよう．2 次式が更に因数分解するなり解の公式を使うなり自由にやって OK.

解答

左辺を因数分解すると，$x^3-4x^2-7x+10=(x-1)(x+2)(x-5)$ なので，$\boldsymbol{x=1,-2,5}$

問 2

次の方程式を解け.

(1) $x^3+2x^2-2x-1=0$　　(2) $x^3-5x^2+6x=0$

(3) $x^4+3x^2-4=0$　　(4) $x^3+3x^2+3x+1=0$

因数分解いろいろ (自習用)

計算の工夫が必要な因数分解の入試問題を集めたので，自習に使ってください.

問 3

次の式を因数分解せよ.

(1) $(x^2+2x-30)(x^2+2x-8)-135$　(北海学園大)

(2) $(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)+24$　(東洋大)

(3) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$　(松山大)

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$　(九州東海大)

問 4

次の式を因数分解せよ.

(1) $2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2$　(京都産業大)

(2) $2x^2+3xy-2y^2+5y-2$　(京都産業大)

(3) $a^3+a^2-2a-a^2b-ab+2b$　(摂南大)