自習用問題①

複素数・図形

例題 1

0 でない 2 つの複素数 α, β が $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ を満たしている．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ．

(2) 原点を O，複素数 α, β を表す点をそれぞれ A,B とするとき，△OAB はどのような三角形か．

Point.

複素数の関係式が与えられて，それらが作る図形を求める問題では，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ などを調べて，それらの複素数の位置関係を調べるとよい．今回の問題は (1) で OA と OB の長さの比となす角を調べている．

解答

(1) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ の両辺を β で割ると，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 4 = 0$$

であるから，この 2 次方程式を解いて，

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm \sqrt{3}i}$$

と求まる．絶対値と偏角は極形式にすればすぐにわかる．

$$1 \pm \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから，$\boldsymbol{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 2}$**，**$\boldsymbol{\arg\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{\pi}{3}}$

(2) (1) より $\dfrac{\text{OA}}{\text{OB}} = \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = 2$ であるから，OA:OB$= 2:1$．また，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta} = \pm\dfrac{\pi}{3}$ より ∠AOB$=\dfrac{\pi}{3}$ である．以上より，**△OAB は B を直角とする** ∠AOB$=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ **の直角三角形** (図を描けばわかる) である．

問 1

複素数平面上の原点とは異なる点 A(α) と B(β) が $\alpha^2 + 2\beta^2 = 2\alpha\beta, |\alpha - \beta| = 2$ を満たしているとする．このとき，△OAB の面積を求めよ．

例題 2

複素数平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{B}(\beta)$ と $\mathrm{C}(\gamma)$ を考える．

(1) $\alpha = 2+2i,\ \beta = 3+4i,\ \gamma = 5+3i$ のとき，$\angle\mathrm{CAB}$ の大きさを求めよ．

(2) $2\alpha - (1-\sqrt{3}i)\beta = (1+\sqrt{3}i)\gamma$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か．

Point.

3 つの複素数 $\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{B}(\beta)$ と $\mathrm{C}(\gamma)$ に対して，AB と AC がなす角は

$$\angle\mathrm{CAB} = \arg(\beta-\alpha) - \arg(\gamma-\alpha) = \arg\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$$

で表される．

解答

(1) $\angle\mathrm{CAB} = \arg\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \arg\dfrac{1+2i}{3+i} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$\boldsymbol{\angle\mathrm{CAB} = \dfrac{\pi}{4}}$

(2) とりあえず展開すると，$2\alpha-\beta+\sqrt{3}\beta i = \gamma+\sqrt{3}\gamma i$ である．$\alpha-\beta, \gamma-\beta$ の形を作るために，両辺から β を引いて整理すると，

$$2(\alpha-\beta) = \gamma-\beta+\sqrt{3}(\gamma-\beta)i = (\gamma-\beta)(1+\sqrt{3}i)$$

であるから，

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

が成り立つ．よって，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{3}$ で，さらに $\mathrm{BA:BC}=1:1$ なので BA=BC がわかる．したがって，**$\triangle$ABC は正三角形である．**

問 2

複素数平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{B}(\beta)$ と $\mathrm{C}(\gamma)$ を考える．

(1) $\alpha = 1+i,\ \beta = \sqrt{3}+1+2i,\ \gamma = 1+3i$ のとき，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

(2) $\alpha = \gamma+\sqrt{3}i(\gamma-\beta)$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か．

問 3

複素数平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{B}(\beta)$ と $\mathrm{C}(\gamma)$ について，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ が成り立っている．このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か．

Hint.

条件が α,β,γ に関して対称なので，多分答えは正三角形である．とりあえず，2 つの辺の長さの比と角度を求めるために，

$$\square - \bigcirc,\ \triangle - \bigcirc$$

の形を作るように変形してみよう．

自習用問題②

複素数・1のn乗根

例題 3

複素数平面において，単位円に内接する正六角形を考え，頂点を反時計周りに $z_1, \ldots, z_6$ とする．

(1) $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$z_2, z_3, \ldots, z_6$ を z_1 と α で表せ．

(2) $z_1 + z_2 + \cdots + z_6$ の値を求めよ．

(3) n を自然数とするとき，$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ と因数分解できることを示せ．

(4) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)$ の値を求めよ．

Point.

1 の n 乗根は

$$\boldsymbol{\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}}$$

と表される．偏角を見れば分かる通り，これは円を n 等分する複素数である．この問題の α は 1 の 6 乗根であるから，偏角は...

解答

(1) 各 z_k は正六角形の頂点であるから，円周を 6 等分する．よって，z_1 を $\dfrac{\pi}{3}$ ずつ回転させれば他の頂点を表せる．$\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるので，$z_k = \alpha^{k-1}z_1$ $(k = 2, 3, 4, 5, 6)$ である．

(2) (1) より，$z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = z_1 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_1 + \alpha^3 z_1 + \alpha^4 z_1 + \alpha^5 z_1$ であるから，等比数列の和の公式を用いて，

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = z_1\frac{z_1(1-\alpha^6)}{1-\alpha} = \mathbf{0}$$

(3) 等比数列の和の公式より，$1 + x + \cdots x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x-1}$ が成り立つので，両辺に $x-1$ をかけて

$$(x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1) = (x-1)\frac{x^n-1}{x-1} = x^n - 1$$

が成り立つ．

(4) α は 1 の 6 乗根であるから α^k もそうである．よって，因数定理から

$$z^6 - 1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)(z-\alpha^5)$$

一方で，(3) より $z^6 - 1 = (z-1)(z^5 + \cdots + z + 1)$ であるから，

$$(z-1)(z^5 + \cdots + z + 1) = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)(z-\alpha^5)$$

が成り立つ．両辺を $z-1$ で割ると z の恒等式

$$(z^5+\cdots+z+1)=(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)(z-\alpha^5)$$

が得られるので，ここに $z=1$ を代入すれば,

$$\boldsymbol{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)=6}$$

問 4

複素数平面において，単位円に内接する正 n 角形を考え，頂点を反時計周りに $z_1,\ldots,z_n$ とする．また，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする．

(1) $z_1+z_2+\cdots+z_n$ の値を求めよ．

(2) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$ の値を求めよ．

自習用問題①

複素数・図形 (解答)

問 1

複素数平面上の原点とは異なる点 A(α) と B(β) が $\alpha^2+2\beta^2=2\alpha\beta, |\alpha-\beta|=2$ を満たしているとする．このとき，$\triangle$OAB の面積を求めよ．

解答

与えられた関係式 $\alpha^2+2\beta^2=2\alpha\beta$ を変形すると，$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ となる．$\beta\neq 0$ であるから，両辺を β^2 で割ると，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+2=0$$

これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ についての 2 次方程式として解くと，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i$$

この結果から，点 A と点 B の位置関係がわかる．

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=|1\pm i|=\sqrt{1^2+(\pm1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\arg(1\pm i)=\pm\frac{\pi}{4}$$

したがって，$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\sqrt{2}$ であり，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$ である．$\triangle$OAB に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos(\angle\mathrm{AOB})$$

$|\alpha-\beta|=2$ より $\mathrm{AB}=2$ であり，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}\mathrm{OB}$ であるから，

$$2^2=(\sqrt{2}\mathrm{OB})^2+\mathrm{OB}^2-2(\sqrt{2}\mathrm{OB})\cdot\mathrm{OB}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$4=2\mathrm{OB}^2+\mathrm{OB}^2-2\sqrt{2}\mathrm{OB}^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4=3\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OB}^2=\mathrm{OB}^2$$

よって，$\mathrm{OB}=2$ (長さなので正) となり，$\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$ である．$\triangle$OAB の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}$$

と求まる．

問 2

複素数平面上の相異なる 3 点 A(α) と B(β) と C(γ) を考える.

(1) $\alpha = 1 + i,\ \beta = \sqrt{3} + 1 + 2i,\ \gamma = 1 + 3i$ のとき, ∠BAC の大きさを求めよ.

(2) $\alpha = \gamma + \sqrt{3}i(\gamma - \beta)$ を満たすとき, △ABC はどのような三角形か.

解答

(1) ∠BAC の大きさは $\arg \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ で与えられる.

$$\beta - \alpha = (\sqrt{3} + 1 + 2i) - (1 + i) = \sqrt{3} + i$$

$$\gamma - \alpha = (1 + 3i) - (1 + i) = 2i$$

よって,

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} = \frac{(\sqrt{3} + i)(-i)}{2i(-i)} = \frac{-\sqrt{3}i - i^2}{-2i^2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

この複素数を極形式で表すと,

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって, $\arg \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = -\dfrac{\pi}{3}$ であるから, 求める角の大きさは $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ である.

(2) 与えられた式 $\alpha = \gamma + \sqrt{3}i(\gamma - \beta)$ を辺 AB, 辺 BC に対応する複素数で表すために変形する.

$$\alpha - \gamma = \sqrt{3}i(\gamma - \beta)$$

$\beta \neq \gamma$ より $\gamma - \beta \neq 0$ なので, 両辺を $\gamma - \beta$ で割ると,

$$\frac{\alpha - \gamma}{\gamma - \beta} = \sqrt{3}i$$

この式の絶対値と偏角を考えると,

$$\left|\frac{\alpha - \gamma}{\gamma - \beta}\right| = |\sqrt{3}i| = \sqrt{3} \implies \frac{|\alpha - \gamma|}{|\gamma - \beta|} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}$$

$$\arg\left(\frac{\alpha - \gamma}{\gamma - \beta}\right) = \arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$$

偏角はベクトル BC をどれだけ回転させるとベクトル CA になるかを表すので, ∠BCA$= \dfrac{\pi}{2}$ である. 以上より, △ABC は $\mathbf{CA : BC} = \boldsymbol{\sqrt{3}} : \mathbf{1}$ **,** $\boldsymbol{\angle \mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}}$ **の直角三角形**である.

問 3

複素数平面上の相異なる 3 点 A(α) と B(β) と C(γ) について，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ が成り立っている．このとき，△ABC はどのような三角形か.

解答

$\beta-\alpha, \gamma-\alpha$ を作る方針で変形する.

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha &= (\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2+\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha-\alpha^2 \\ &= (\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-(\alpha^2-(\beta+\gamma)\alpha+\beta\gamma) \\ &= (\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\end{aligned}$$

3 点 A,B,C は相異なるので，特に $\gamma-\alpha\neq 0$ である．よって，

$$(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$$

の両辺を $(\gamma-\alpha)^2$ で割ると，

$$\left(\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)+1=0$$

である．これを解くと，

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

である (複号同順)．これより，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=1$ すなわち AB $=$ AC がわかる．また，∠CAB=$\frac{\pi}{3}$ なので，△ABC は **正三角形** である.

自習用問題②

複素数・1の n 乗根 (解答)

問 4

複素数平面において，単位円に内接する正 n 角形を考え，頂点を反時計周りに $z_1, \ldots, z_n$ とする．また，$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする．

(1) $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ の値を求めよ．

(2) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$ の値を求めよ．

解答

(1) 正 n 角形の各頂点は，z_1 を中心として $\dfrac{2\pi}{n}$ ずつ回転させたものであるから，

$$z_k = z_1\alpha^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

と表せる．よって，求める和は初項 z_1，公比 α の等比数列の和である．

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = z_1(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1})$$

$\alpha \neq 1$ ($n \geq 2$ の場合) であるから，等比数列の和の公式を用いて，

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

ここで，$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ より，ド・モアブルの定理から $\alpha^n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$ である．したがって，分子が $1 - \alpha^n = 0$ となるため，

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \mathbf{0}$$

(2) $z^n - 1 = 0$ の解は $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ であるから，因数定理より

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{n-1})$$

と因数分解できる．一方，等比数列の和の公式より

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

が成り立つ．よって，$z \neq 1$ において，

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{n-1})$$

これは z に関する恒等式であるから，$z = 1$ を代入しても成立する．$z = 1$ を代入すると，左辺は $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{個}} = n$ となる．右辺は $(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$ となる．したがって，$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$ である．