単元別演習　数列①

漸化式 (基本)　(解答)

問 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+3$　　(2) $a_1=\dfrac{3}{2},\ 2a_{n+1}=5a_n+3$

解答

(1) 特性方程式 $\alpha=\dfrac{1}{3}\alpha+3$ の解は $\alpha=\dfrac{9}{2}$ である．よって，与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-\frac{9}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{9}{2}\right)$$

と変形できる．これより，数列 $\left\{a_n-\dfrac{9}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{9}{2}=1-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{7}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$\boldsymbol{a_n=-\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{9}{2}}$$

(2) 与式は $a_{n+1}=\dfrac{5}{2}a_n+\dfrac{3}{2}$ と変形できる．特性方程式 $\alpha=\dfrac{5}{2}\alpha+\dfrac{3}{2}$ の解は $\alpha=-1$ である．よって，与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-(-1)=\frac{5}{2}(a_n-(-1))\iff a_{n+1}+1=\frac{5}{2}(a_n+1)$$

と変形できる．これより，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$，公比 $\dfrac{5}{2}$ の等比数列であるから，

$$\boldsymbol{a_n=\left(\frac{5}{2}\right)^n-1}$$

問 2

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+2^n$　　(2) $a_1=5,\ a_{n+1}=3a_n+5\cdot 3^n$

解答

(1) 両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{2}{2}=1,\ b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$ で定まる数列である．特性方程式 $\alpha=\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}$ の解は $\alpha=-1$ なので，

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

と変形できる．数列 $\{b_n+1\}$ は初項 2，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから，$b_n+1=2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ となり，$b_n=2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$．よって，

$$\boldsymbol{a_n=2^nb_n=4\cdot3^{n-1}-2^n}$$

(2) 両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{5}{3}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\dfrac{5}{3}$，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{5}{3}$ で定まる数列である．これは初項 $\dfrac{5}{3}$，公差 $\dfrac{5}{3}$ の等差数列であるから，$b_n=\dfrac{5}{3}+(n-1)\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}n$．よって，

$$\boldsymbol{a_n=3^nb_n=5n\cdot3^{n-1}}$$

問 3

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=2,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$　　(2) $a_1=0,\ a_2=2,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$

解答

(1) 特性方程式 $x^2=x+2$ の解は $x=2,-1$ であるから，

$$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$$

と変形できるので, 数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 3, 公比 2 の等比数列なので, $a_{n+1}+a_n=3\cdot2^{n-1}$ である．よって，指数関数型の漸化式 $a_{n+1}=-a_n+3\cdot2^{n-1}$ が得られたので，これを解いて，

$$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+(-1)^{n-1}}$$

(2) 特性方程式 $x^2=4x-4$ の解は $x=2$（重解）であるから，

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形できるので, 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 2, 公比 2 の等比数列なので, $a_{n+1}-2a_n=2^n$. つまり，$a_{n+1}=2a_n+2^n$．これを解いて，

$$\boldsymbol{a_n=(n-1)2^{n-1}}$$

復習用問題

問 4

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 3a_n - 8$　　(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n - 15$

解答

(1) 特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 8$ の解は $\alpha = 4$ である．よって，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} - 4 = 3(a_n - 4)$$

と変形できる．これより，数列 $\{a_n - 4\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列であるから，
$a_n - 4 = 2 \cdot 3^{n-1}$ である．よって，

$$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4}$$

(2) 特性方程式 $\alpha = 6\alpha - 15$ の解は $\alpha = 3$ である．よって，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} - 3 = 6(a_n - 3)$$

と変形できる．これより，数列 $\{a_n - 3\}$ は初項 -1，公比 6 の等比数列であるから，
$a_n - 3 = (-1) \cdot 6^{n-1}$ である．よって，

$$\boldsymbol{a_n = -6^{n-1} + 3}$$

問 5

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n$　　(2) $a_1 = -10,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{4}{3^n}$

解答

(1) 問 2(1) と同じである．$\boldsymbol{a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2^n}$.

(2) 両辺に 3^{n+1} をかけて，$3^{n+1}a_{n+1} = 3(3^n a_n) + 12$ となるので，$3^n a_n = -8 \cdot 3^n - 6$．よって，

$$\boldsymbol{a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 8}$$

問 6

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ (2) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

解答

(1) 特性方程式 $x^2 = x + 6$ の解は $x = 3, -2$ であるから,

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n)$$

と変形できる. 数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 -1, 公比 -2 の等比数列なので, $a_{n+1} - 3a_n = -(-2)^{n-1}$. よって, $\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{5}\left(4 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}\right)}$.

(2) 特性方程式 $x^2 = x + 1$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと,

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形できる. これより, 数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $1 - \alpha = \beta$, 公比 β の等比数列なので, $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n$. 同様に, $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n$. 辺々を引くと, $(\alpha - \beta)a_n = \alpha^n - \beta^n$. ここで, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ であるから,

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$