【2016 年 PM 問 3】

$\zeta = \exp(2\pi i/9)$ を 1 の原始 9 乗根とするとき，$\mathbb{Q}(\zeta)$ の部分体をすべて求めよ．

解答欄

素体 $\mathbb{Q}$ を含むので，$\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めればよい．ζ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は

$$f(X) = \frac{X^9 - 1}{X(X-\zeta^3)(X-\zeta^6)} = \frac{X^8 + \cdots X + 1}{X^2 + X + 1} = X^6 + X^3 + 1$$

である．実際，$f(X+1)$ は $p=3$ のアイゼンシュタイン多項式で既約．よって，拡大次数は 6 である．

あとは適当に計算すれば，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ は $\sigma : \zeta \mapsto \zeta^2$ が生成する巡回群になることがわかる．

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

である．$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times = \{1,2,4,5,7,8\}$ であり，この群は 2 を生成元とする位数 6 の巡回群である．$\mathbb{Z}/6Z$ の部分群は

$$\{1\},\ \langle\sigma^3\rangle,\ \langle\sigma^2\rangle,\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

の 4 つであるから，ガロアの基本定理によって $\mathbb{Q}(\zeta)$ の部分体は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}(\zeta)$ 自身を含めて全部で 4 つ存在する．

次いで，対応する部分体を決定する．まず，$\{1\}$ に対応するのは $\mathbb{Q}(\zeta)$ で，$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ に対応するのは $\mathbb{Q}$ である．

(1) $\langle\sigma^3\rangle$ の固定体

$\sigma^3 : \zeta \mapsto \zeta^8 = \overline{\zeta}$ が複素共役写像であることから，σ^3 は $\Re\zeta = \cos 2\pi/9$ を固定する．3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ で $\theta = 2\pi/9$ とすることにより，$\cos 2\pi/9$ は

$$-\frac{1}{2} = 4X^3 - 3X \implies 8X^3 - 6X + 1 = 0$$

の根であることがわかる．$X \mapsto X+1$ としてアイゼンシュタインの判定法を使えば既約とわかるので，これが最小多項式．$\langle\sigma^3\rangle$ の固定体は 3 次拡大なので，対応する体は $\mathbb{Q}(\cos 2\pi/9)$ である．

(2) $\langle\sigma^2\rangle$ の固定体

$\sigma^2 : \zeta \mapsto \zeta^4$ なので，σ^2 は $\zeta^3 = \exp(2\pi i/3)$ を固定する．よって，対応する体は $\mathbb{Q}(i\sin 2\pi/3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ である．

以上より，求める部分体は $\mathbb{Q}(\zeta)$，$\mathbb{Q}(\cos 2\pi/9)$，$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$，$\mathbb{Q}$ である．