平成１４年度東工大大学院試験問題

平成１３年８月１日　　　実施

専門科目（午前）　数学：9:00–11:00

注意事項：以下の３題すべてに答えよ。

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体、$\mathbb{C}$ は複素数全体をあらわす。

[1]　A を n 次複素正方行列で $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$ をみたすものとする．いま，$f_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を A の表す線型写像とする．このとき，次を示せ．

(1) $\mathbb{C}^n$ は像 $\mathrm{Im} f_A$ と核 $\mathrm{Ker} f_A$ との直和である．

(2) $m \geq 2$ に対して $\mathrm{rank}(A^m) = \mathrm{rank}(A)$ である．

[2]　(1) $S = \lim_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}$ を求めよ．ただし、α, β は正の定数である．

(2) $\gamma > 0$ とし、$f(x,y) = |x^2 + y^2 + y|^\gamma$ とする．f が $\mathbb{R}^2$ の原点 $(0,0)$ で３回偏微分可能となるための必要十分条件を求めよ．

[3]　次の各命題について正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ．

位相空間 X と Y の直積 $X \times Y$　に積位相をいれる．このとき、

(1) $X \times Y$ がハウスドルフ空間ならば X および Y もハウスドルフ空間になる．

(2) X および Y がハウスドルフ空間ならば $X \times Y$ もハウスドルフ空間になる．

位相空間 X の部分集合 A, B, $A \cup B$ に部分位相をいれる．このとき、

(3) $A \cup B$ がハウスドルフ空間ならば A および B もハウスドルフ空間になる．

(4) A および B がハウスドルフ空間ならば $A \cup B$ もハウスドルフ空間になる．

位相空間 X から集合 Y への全射 $f : X \to Y$ によって、Y に商位相をいれる．このとき

(5) X がハウスドルフ空間ならば Y もハウスドルフ空間になる．

(6) Y がハウスドルフ空間ならば X もハウスドルフ空間になる．

専門科目（午後）：12:30–15:00

注意事項：以下の問題のうち３題を選択して解答せよ．ただし、口頭試問を

(1) 代数班で受けることを希望する人は、問１～問４のうちから少なくとも１題、

(2) 幾何班で受けることを希望する人は、問５～問７のうちから少なくとも１題、

(3) 解析班で受けることを希望する人は、問８～問１１のうちから少なくとも１題

を選択する３題の中に入れること．

記号について：$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, はそれぞれ、整数、有理数、実数、複素数、それぞれの全体を表すものとする。

[1]　$m_1, \ldots, m_n$ を自然数とする．直積

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$$

が巡回群となるための $m_1, \ldots, m_n$ に関する必要十分条件を求めよ．

[2]　素数 p に対して $\alpha^2 = -p$ となる複素数 α をとり

$$R = \{\ m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\ \}$$

とおく．

(1) R は複素数体の部分環であることを示せ．

(2) α は R の既約元かつ素元であることを示せ．

(3) p を R において既約元の積に分解せよ．

(4) R において既約元分解ができることを示せ．

(5) R が一意分解整域（UFD）になる p をすべて求めよ．

[3]　素数 p に対し，$\mathbb{Q}$ の部分環

$$R_p = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ は } p \text{ で割れない} \right\}$$

を考える．

(1) R_p のイデアルを重複なくすべて挙げよ．

(2) R_p-加群 M の元の個数が有限ならば M は p 群であることを示せ．

[4]　素体 $\mathbb{F}_p$ 上の特殊線型群 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_p) = \{\ g \in M_3(\mathbb{F}_p) \mid \det g = 1\ \}$ を考える．

(1) 位数 $|\ \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_p)\ |$ を求めよ．

(2) p シロー群をひとつ求めよ．

[5]　4次元単体 Δ^4 の k-skeleton（k 次元以下のすべての単体からなる部分複体）X_k の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群 $H_*(X_k; \mathbb{Z})$ を求めよ．ここで $k = 0, 1, 2, 3, 4$ である．

[6]　（1）M を境界のない多様体とする．M 上のコンパクトな台を持つベクトル場は完備であることを示せ．

（2）3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上の完備でないベクトル場の例を作れ．

[7]　M を3次元実射影空間とし、$\tilde{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x \\ 3y \\ 2z \\ w \end{pmatrix}$$

で定義する．

（1）$\tilde{f}$ は同相写像 $f : M \to M$ を誘導することを示せ．

（2）次のような点 $p_\infty \in M$ を求めよ．

p_∞ を含むある開集合 U のすべての点 p に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f^n(p) = p_\infty$.

（ただし、f^n は f を n 回合成して得られる写像である.）

（3）この p_∞ に対して、上のような U のうち最大のものを求めよ．

[8]　f を $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクトな台を持つ連続関数とする．F を

$$F(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \log |x-y| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する．

(1) F は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数であることを示せ.

(2) F が $\mathbb{R}^n$ 上で有界になるための必要十分条件を求めよ.

[9]　(1) f は $1 \le |z| < \infty$ で正則かつ有界とする．$M = \max_{|z|=1} |f(z)|$ とすると、$1 \le |z| < \infty$ で $|f(z)| \le M$ となることを証明せよ.

(2) P を次数 k $(k \ge 1)$ の多項式で、$|z| \le 1$ において $|P(z)| \le 1$ であると仮定する．このとき、$|z| \ge 1$ で

$$|P(z)| \le |z|^k$$

を示せ.

[10]　$f \in C^1([0, 2\pi])$ は $f(0) = f(2\pi)$ を満たすとする．このとき

$$c_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx, \quad b_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} f'(x) dx, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

と定める．以下を示せ.

(a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$ かつ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

(c) $\displaystyle g_M(x) = \sum_{n=-M}^{M} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ と定義すると、$M \to \infty$ のとき $g_M(x)$ は $[0, 2\pi]$ 上 一様収束する.

[11]　$X = L^1([0, 2])$ を区間 $I = [0, 2]$ 上の実数値可積分関数からなる Banach 空間とし、$f \in X$ に対して

$$\|f\| = \int_0^2 |f(t)| dt$$

とおく．X から X への作用素 T を

$$Tf(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

で定義する．T の作用素ノルム $\|T\|_{X \to X}$ を

$$\|T\|_{X \to X} = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \|Tf\|$$

と定義する.

(1) $Tf(x)$ は I 上で 1 回微分可能であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \|T^n\|_{X \to X}$ を求めよ.

外国語科目：15:20–16:20

Raoul Bott のインタヴュー記事の和訳。文章自体はここでは割愛する。