【2021 年 PM 問 3】

体の拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

方針

体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大ではない，なぜなら，$\alpha=\sqrt[6]{2}$ の最小多項式 x^6-2 は，K に含まれない虚数根を持つため，正規拡大ではないからである．

そこで，α の最小分解体（ガロア閉包）$L=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2},\zeta_6)$ に埋め込んで $G=\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ に対するガロア対応を利用する方針を取る．

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ の中間体 F $(\mathbb{Q}\subseteq F\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}))$ は，L の中間体でもある．ガロア理論の基本定理より，体の包含関係は群の包含関係に逆転して対応する．

$$F\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Gal}(L/F)\supseteq\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}))$$

したがって，$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}))$ を部分群として含むような $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の部分群をすべて求め，それらに対応する固定体を決定することが目標となる．

解答欄

(1) ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の構造

$L=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2},\zeta_6)$ とする．体の拡大次数を計算すると，

$$[L:\mathbb{Q}]=[L:\mathbb{Q}(\zeta_6)][\mathbb{Q}(\zeta_6):Q]=6\cdot 2=12$$

となるので，$|G|=12$ である．

G の自己同型写像は生成元の行き先で決まるから，

$$\begin{aligned}\sigma&:\sqrt[6]{2}\mapsto\zeta_6\sqrt[6]{2},\quad \zeta_6\mapsto\zeta_6\\ \tau&:\sqrt[6]{2}\mapsto\sqrt[6]{2},\quad \zeta_6\mapsto\zeta_6^{-1}\quad\text{(複素共役)}\end{aligned}$$

を考える．これらの生成元は $\sigma^6=\tau^2=\mathrm{id},\ \tau\sigma=\sigma^{-1}\tau$ の関係を満たすから，$\langle\tau,\sigma\rangle$ は位数 12 の二面体群 D_6 である．よって $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong D_6$．

(2) $H=\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}))$ の特定

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ を固定する部分群は，$H=\{\mathrm{id},\tau\}$ である．

(3) H を含む部分群のリストアップ

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong D_6$ の部分群 S で，H を含むものを探す．$|S|$ は 12 の約数かつ 2 の倍数なので，候補は位数 2, 4, 6, 12.

- 位数 2: $S_1=H=\{\mathrm{id},\tau\}$
- 位数 4: $S_2=\langle\sigma^3,\tau\rangle=\{\mathrm{id},\sigma^3,\tau,\sigma^3\tau\}$
- 位数 6: $S_3=\langle\sigma^2,\tau\rangle=\{\mathrm{id},\sigma^2,\sigma^4,\tau,\sigma^2\tau,\sigma^4\tau\}$

– 位数 12: $S_4 = G$

H を含む部分群は以上の 4 つのみである．

(4) 対応する固定体

ガロア対応により，これら 4 つの部分群が求める中間体のすべてに対応する．

$S_1 = H$　固定体は $L^H = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$．次数は $12/2 = 6$．

$S_4 = G$　固定体は $L^G = \mathbb{Q}$．次数は $12/12 = 1$．

$S_2 = \langle \sigma^3, \tau \rangle$　対応する固定体の次数は $12/4 = 3$．この体の元は τ と σ^3 の両方で固定される．$x = (\sqrt[6]{2})^2 = \sqrt[3]{2}$ を考えると，$\tau(x) = x$ (実数なので)．$\sigma^3(x) = \sigma^3((\sqrt[6]{2})^2) = (\sigma^3(\sqrt[6]{2}))^2 = (-\sqrt[6]{2})^2 = \sqrt[3]{2}$．よって $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ はこの固定体に含まれる．次数が一致するため，固定体は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$．

$S_3 = \langle \sigma^2, \tau \rangle$　対応する固定体の次数は $12/6 = 2$．この体の元は τ と σ^2 の両方で固定される．$y = (\sqrt[6]{2})^3 = \sqrt{2}$ を考えると，$\tau(y) = y$ (実数なので)．$\sigma^2(y) = \sigma^2((\sqrt[6]{2})^3) = (\sigma^2(\sqrt[6]{2}))^3 = (\zeta_6^2 \sqrt[6]{2})^3 = \zeta_6^6(\sqrt[6]{2})^3 = \sqrt{2}$．よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ はこの固定体に含まれる．次数が一致するため，固定体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$．

以上より，$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ の中間体は，$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ の 4 つである[*1]．

[*1] 固定体を求めるのは面倒なので，個数がわかったら後は具体的に構成してしまっても OK.