筆答専門試験科目（午前）　　2022 大修

数 学 系　　時間　9：００～１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] V を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_5$ を基底とする 5 次元複素ベクトル空間とする．5 文字の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し, V から V への線型写像 f_σ を各 $i = 1, 2, \ldots, 5$ に対して $f_\sigma(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_{\sigma(i)}$ で定まるものとする．V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_5$ に関する線形写像 f_σ の表現行列を A_σ とするとき, 次の問に答えよ．

(1) 行列 A_σ の固有多項式および最小多項式を求めよ．

(2) 線型写像 f_σ の固有値をすべて求め, 各固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ与えよ．

[2] V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, その線形変換全体のなす集合を $\mathrm{End}(V)$ で表す．このとき任意の $f \in \mathrm{End}(V)$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす $g, h \in \mathrm{End}(V)$ が存在することを証明せよ：

(i) g は同型,

(ii) $h^2 = h$,

(iii) $f = g \circ h$.

[3] 標準的な絶対値関数 $|\cdot| \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ を用いて

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ と } S_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\} \text{ とし, } X = S_1 \cup S_2$$

とおく．任意の $a = e^{\alpha i} \in S_1$ と $\varepsilon > 0$ について (ただし $i = \sqrt{-1}$ であり, $\alpha \in [0, 2\pi)$ と ε は実数とする)

$$U_\varepsilon(a) = \{e^{\theta i} \mid \alpha \leq \theta < \alpha + \varepsilon\} \cup \{2e^{\theta i} \mid \alpha < \theta < \alpha + \varepsilon\}$$

とする．さらに, 任意の $b = 2e^{\beta i} \in S_2$ (ただし $\beta \in \mathbb{R}$) と $\varepsilon > 0$ に対して

$$V_\varepsilon(b) = \{e^{\theta i} \mid \beta - \varepsilon < \theta < \beta\} \cup \{2e^{\theta i} \mid \beta - \varepsilon < \theta \leq \beta\}$$

とおく．$\{U_\varepsilon(a) \mid a \in S_1 \text{ かつ } \varepsilon > 0\} \cup \{V_\varepsilon(b) \mid b \in S_2 \text{ かつ } \varepsilon > 0\}$ を開基とする X の位相 $\mathcal{O}$ に関して, 次の問いに理由をつけて答えよ．

(1) 絶対値の制限 $|\cdot| \colon X \to \mathbb{R}$ は, $\mathcal{O}$ と $\mathbb{R}$ の通常位相に関して, 連続写像であるか．

(2) $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間であるか．

(3) $(X, \mathcal{O})$ はコンパクト空間であるか．

(4) S_1 は, $\mathcal{O}$ に関して, X のコンパクトな部分集合であるか．

[4] f と g は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で，f はすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = f(x+1)$ をみたし，g は $g(x) \to 0$ $(x \to \pm\infty)$ をみたすとする．また，実数列 $\{a_n\}$ に対して関数列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ をそれぞれ $f_n(x) = f(x+a_n)$, $g_n(x) = g(x+a_n)$ で定める．

(1) 任意の $\{a_n\}$ に対して，関数列 $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する部分列を持つことを示せ．

(2) 任意の $\{a_n\}$ に対して，関数列 $\{f_n + g_n\}$ は区間 $[0,1]$ 上で一様収束する部分列を持つことを示せ．

[5] $t > 0$, $-\infty < a < b < \infty$ とし，$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(2) $0 \notin [a,b]$ のとき，

$$\lim_{t\to+0} \int_a^b \frac{t}{t^2+x^2} f(x)\,dx$$

を求めよ．

(3) $0 \in (a,b)$ のとき，

$$\lim_{t\to+0} \int_a^b \frac{t}{t^2+x^2} f(x)\,dx = \pi f(0)$$

が成り立つことを示せ．

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

数 学 系　　時間　１３：００〜１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] p を奇素数とする.

(1) 位数 p^3 の非可換群 G と, その中心 $Z(G)$ について, $G/Z(G)$ の構造を決定せよ.

(2) 位数 p^3 の群で位数 p^2 の元を持たないものを分類せよ.

[2] $\mathbb{Z}$ 上の 3 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x,y,z]$ のイデアル

$$I = (x^2+x+1, y^2+x^2, z^3+4x^2z^2+5x^4z+2x^6)$$

に対し, 剰余環 $\mathbb{Z}[x,y,z]/I$ を R とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) R が整域であるかどうかを判定せよ.

(2) K を標数 0 の代数閉体とするとき, R から K への環準同型をすべて求めよ.

(3) K を標数 $p>0$ の代数閉体とするとき, R から K への環準同型をすべて求めよ.

[3] $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ の部分体をすべて求めよ.

[4] $n>1$ とし,

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

とおく.

(1) $k>0$ とし, $f(x_0,x_1,\dots,x_n)$ を実数係数の同次 k 次式 (すなわちすべての単項式が k 次であるような多項式) とするとき, f は

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$$

をみたすことを示せ.

(2) $f(x_0,x_1,\dots,x_n)$ を (1) の通りとし,

$$V(f) = \left\{ (x_0,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x_0,x_1,\dots,x_n) = 0 \right\}$$

とおく. $S^n \cap V(f)$ の任意の点で

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \neq (0,\dots,0)$$

が成り立っているとき, 共通部分 $S^n \cap V(f)$ は空でなければ $\mathbb{R}^{n+1}$ の余次元 2 の部分多様体であることを示せ.

(3) n を奇数とし, $n=2m+1$ とおく.

$$f(x_0,x_1,\dots,x_n) = x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \quad \left(= \sum_{i=0}^{m} x_{2i}x_{2i+1} \right)$$

とするとき共通部分 $S^n \cap V(f)$ は直積多様体 $S^m \times S^m$ と微分同相であることを示せ.

[5] 通常の位相が与えられた複素平面 $\mathbb{C}$ およびユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 S^1 および S^2 を, それぞれ

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ と } S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

で定める. また, 同相写像 $f_0, f_1, f_2, f_3 \colon S^1 \times S^2 \to S^1 \times S^2$ を

$$f_p(z, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (-z, x_1, x_2, x_3) & (p = 0 \text{ のとき}) \\ (-z, -x_1, x_2, x_3) & (p = 1 \text{ のとき}) \\ (-z, -x_1, -x_2, x_3) & (p = 2 \text{ のとき}) \\ (-z, -x_1, -x_2, -x_3) & (p = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定め, $S^1 \times S^2$ 上の同値関係 $\sim_p$ $(p = 0, 1, 2, 3)$ を

$$(z, x_1, x_2, x_3) \sim_p (z', x_1', x_2', x_3') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (z, x_1, x_2, x_3) = (z', x_1', x_2', x_3'), \text{ または}, \\ f_p(z, x_1, x_2, x_3) = (z', x_1', x_2', x_3') \end{cases}$$

によって定める. 各 $p = 0, 1, 2, 3$ について, $X_p = (S^1 \times S^2)/\sim_p$ を商空間とする.

(1) 各 $p = 0, 1, 2, 3$ について, $(z, x_1, x_2, x_3) \in S^1 \times S^2$ が代表する X_p の点を $[z, x_1, x_2, x_3]$ と書き, 連続写像 $\pi_p \colon X_p \to S^1$ を $\pi_p([z, x_1, x_2, x_3]) = z^2$ で定める. 任意の点 $w \in S^1$ について, この点を S^1 から除いた部分空間 $S^1 - \{w\}$ の π_p による逆像 $\pi_p^{-1}(S^1 - \{w\})$ は, 開区間と S^2 の直積 $(0, 1) \times S^2$ に同相であることを示せ.

(2) 位相空間 X_0, X_1, X_2, X_3 の整数係数ホモロジー群を求めよ.

[6] $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間で $\mu(X) < \infty$ をみたすものとし，X 上の二乗可積分な実数値可測函数全体のなす空間を $L^2(X)$ と書く．X 上の実数値可測函数 f, f_n，$n \in \mathbb{N}$ および $k \in \mathbb{N}$ に対し，可測集合 $E_{n,k} \in \mathcal{F}$ を

$$E_{n,k} := \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

で定める.

(1) $g \in L^2(X)$ とするとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，

$$A \in \mathcal{F} \text{ かつ } \mu(A) < \delta \text{ ならば } \int_A |g(x)|^2 \, d\mu < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ.

(2) f_n が f に 零集合を除いて X 上一様収束しているとき，正の整数に値をもつある数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k, k} \right) = 0$$

となることを示せ.

(3) f_n が f に X 上ほとんどいたるところ収束しているとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して正の整数に値をもつある数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k,k}\right) < \varepsilon$$

となることを示せ．

(4) f_n が f に X 上ほとんどいたるところ収束し，さらに

$$\int_X |f(x)|^2\, d\mu \le M, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2\, d\mu \le M$$

となる定数 $M > 0$ が存在するとする．このとき，任意の $g \in L^2(X)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)g(x)\, d\mu = \int_X f(x)g(x)\, d\mu$$

となることを示せ．

[7] Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域とする．また，$\Omega\times\Omega$ 上の可測関数 $K = K(x,y)$ に対して，積分作用素 T を

$$(Tf)(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)\, dy \quad (x \in \Omega)$$

と定める．

(1) $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = 1$ をみたす定数とする．$K \in L^p(\Omega\times\Omega)$ ならば，T は $L^r(\Omega)$ から $L^p(\Omega)$ への有界線形作用素であることを示せ．

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^r(\Omega)$ が $f \in L^r(\Omega)$ に $L^r(\Omega)$ において弱収束するならば，ほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して，$(Tf_n)(x)$ は $(Tf)(x)$ に収束することを示せ．

(3) T は $L^r(\Omega)$ から $L^p(\Omega)$ へのコンパクト作用素であることを示せ．

[8] (1) N を正の整数とし，C_N は正方形 $\left\{x+iy \in \mathbb{C} \mid |x| \le \left(N+\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ |y| \le \left(N+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right\}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の境界とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z}$$

を求めよ．ただし，C_N には正方形を左側に見る方向に向きがついているとする．

(2) (1) の結果を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

を求めよ．