単元別演習　数と式②

整式の除法 (解答)

問 1

整式 $f(x)$ を $x+1$ で割った余りが 1，$x-2$ で割った余りが 4 のとき，$f(x)$ を x^2-x-2 で割った余りを求めよ．

解答

求める余りは 1 次以下の整式なので，$ax+b$ とおく．商を $q(x)$ とすると，

$$f(x)=(x^2-x-2)q(x)+ax+b=(x-2)(x+1)q(x)+ax+b$$

と書ける．因数定理より $f(-1)=1, f(2)=4$ であるから，

$$\begin{cases} f(-1)=-a+b=1 \\ f(2)=2a+b=4 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$a=1, b=2$ を得る．よって求める余りは $\boldsymbol{x+2}$.

問 2

a を定数，n を正の整数とする．x の整式 $f(x)=x^n+2x^{n-1}-a$ が $x+1$ で割り切れるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．
(2) $f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ．

[00 佐賀大]

解答

(1) $f(x)$ が $x+1$ で割り切れるので，因数定理より $f(-1)=0$ である．

$$f(-1)=(-1)^n+2(-1)^{n-1}-a=(-1)^{n-1}(-1+2)-a=(-1)^{n-1}-a=0$$

よって，$\boldsymbol{a=(-1)^{n-1}}$.

(2) $f(x)$ を $x^2-1=(x-1)(x+1)$ で割った余りを $rx+s$ とおく．

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+rx+s$$

$f(-1)=0$ より，$-r+s=0$ $\cdots$① である．また，$f(1)=1^n+2\cdot1^{n-1}-a=3-a$ より，$r+s=3-a$ $\cdots$②．よって，①と②より

$$r=s=\frac{3-a}{2}$$

である．(1) より $a=(-1)^{n-1}$ であったから，$r=s=\dfrac{3-(-1)^{n-1}}{2}$.

したがって，求める余りは $\boldsymbol{\dfrac{3-(-1)^{n-1}}{2}x+\dfrac{3-(-1)^{n-1}}{2}}$.

問 3

x^{10} を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ.

解答

x^{10} を $(x-1)^2$ で割った商を $q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと,

$$x^{10} = (x-1)^2 q(x) + ax + b \cdots (\mathrm{A})$$

(A) に $x=1$ を代入すると, $1 = a + b \cdots$①. 次に, (A) の両辺を x で微分すると,

$$10x^9 = 2(x-1)q(x) + (x-1)^2 q'(x) + a$$

この式に $x=1$ を代入すると, $10 = a \cdots$②. これを①に代入して $b=-9$.
よって, 求める余りは $\boldsymbol{10x-9}$.

問 4

x^n を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ.

解答

x^n を $(x-1)^2$ で割った商を $q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと,

$$x^n = (x-1)^2 q(x) + ax + b \cdots (\mathrm{A})$$

(A) に $x=1$ を代入すると, $1 = a + b \cdots$①. 次に, (A) の両辺を x で微分すると,

$$nx^{n-1} = 2(x-1)q(x) + (x-1)^2 q'(x) + a$$

この式に $x=1$ を代入すると, $a = n \cdots$②. これを①に代入して $b = 1-n$.
よって, 求める余りは $\boldsymbol{nx+1-n}$.

問 5

因数定理の主張を述べ, それを証明せよ.

解答

主張: 整式 $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ である.

証明: $f(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $q(x)$, 余りを r とすると, $f(x) = (x-a)q(x) + r$ と書ける. これより, $r = f(a)$ がしたがう. (証明終)

問 6

$(x+1)^{12}$ を x^2-1 で割った余りを求めよ．　[08 日本歯科大]

解答

$f(x)=(x+1)^{12}$ を $x^2-1=(x-1)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおく．

$$(x+1)^{12}=(x-1)(x+1)q(x)+ax+b$$

因数定理より $2^{12}=f(1)=a+b, 0=f(-1)=-a+b$ なので $a=b=2^{11}=2048$．よって，求める余りは $\boldsymbol{2048x+2048}$.

問 7

n は 3 以上の奇数として，多項式 $P(x)=x^n-ax^2-bx+2$ を考える．$P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a=\boxed{\text{あ}}$，　$b=\boxed{\text{い}}$ であり，$(x+1)^2$ で割り切れるときは $a=\boxed{\text{う}}$，　$b=\boxed{\text{え}}$ である．　[11 慶應義塾大]

解答

- $P(x)$ が $x^2-4=(x-2)(x+2)$ で割り切れるとき
  因数定理より $P(2)=0, P(-2)=0$ なので，
  $$\begin{cases} P(2)=2^n-4a-2b+2=0 \\ P(-2)=(-2)^n-4a+2b+2=0 \end{cases}$$
  これより，
  $$\begin{cases} 4a+2b=2^n+2 \\ 4a-2b=2-2^n \end{cases}$$
  連立方程式を解くと，$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}\cdots}$**(あ)**，　$\boldsymbol{b=2^{n-1}\cdots}$**(い)**
- $P(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れるとき
  $P(x)=(x+1)^2q(x)$ と書けるので，$P(-1)=0$．また，この両辺を x で微分すると $P'(x)=2(x+1)q(x)+(x+1)^2q'(x)$ なので $P'(-1)=0$.
  $P(-1)=0$ より，$-a+b+1=0\cdots$①，$P'(-1)=0$ より，$n+2a-b=0\cdots$② である．
  ①と②より，$\boldsymbol{a=-n-1\cdots}$**(う)**，　$\boldsymbol{b=-n-2\cdots}$**(え)**

問 8

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で，$x+2$ で割ったときの余りが -4 である．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．
(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．
(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

[山形大]

解答

$P(x)=(x-1)^2q_1(x)+4x-5\cdots$ ①，$P(x)=(x+2)q_2(x)-4\cdots$ ②とおく．

(1) 因数定理より $x-1$ で割った余りは $P(1)$ である．よって，求める余りは①より $P(1)=4\cdot1-5=\boldsymbol{-1}$.

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおく．$P(1)=-1, P(-2)=-4$ なので，

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=-4 \end{cases}$$

これを解いて $a=1, b=-2$．よって余りは $\boldsymbol{x-2}$.

(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割った余りは 2 次以下の式なので，$r(x)$ とおく．

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)q(x)+r(x)$$

この式より，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは，$r(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りと等しい．①よりこの余りは $4x-5$ なので，$r(x)$ は定数 a を用いて

$$r(x)=a(x-1)^2+4x-5$$

と書ける．よって，

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)q(x)+a(x-1)^2+4x-5$$

ここに $x=-2$ を代入すると，②より $P(-2)=-4$ なので，

$$-4=P(-2)=9a-13$$

これより $a=1$ なので，求める余りは $1\cdot(x-1)^2+4x-5=\boldsymbol{x^2+2x-4}$.