２０　大修

専門科目（午前）

数学

時間　９：００～１１：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題3題すべてに解答せよ.
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で2ページからなる.

記号について:

$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

[1] α, β を複素数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} .$$

が対角化可能であるための条件を求めよ．また，そのとき A を対角化する正則行列 P を一つ求めよ．

[2] 以下の問に答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ は収束することを示せ．

(2) $\alpha > 0$ に対して

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \qquad \text{および} \qquad \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

を計算せよ．

[3] X, Y を位相空間とし，写像 $f: X \to Y$ のグラフ

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

には積空間 $X \times Y$ の部分空間の位相を与えておく．このとき

(1) f が連続ならば X と $G(f)$ は同相になることを示せ．

(2) f が連続で Y がハウスドルフ空間のとき $G(f)$ は $X \times Y$ の閉集合になることを示せ．

(3) $\mathbf{R}$ を通常の位相をもつユークリッド空間とする．写像 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ のグラフ $G(f)$ が $\mathbf{R}^2$ の閉集合となるとき f は連続か．

２０　大修

専門科目（午後）

数学

時間　１２：３０～１５：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ. ただし口頭試問を
   代数系で受けることを希望する者は、問２～問４のうちから少なくとも１題、
   幾何系で受けることを希望する者は、問５～問７のうちから少なくとも１題、
   解析系で受けることを希望する者は、問８～問１１のうちから少なくとも１題、
   を選択する１題の中に入れること
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で４ページからなる.

記号について:

$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

[1] 整数を成分とする2次正方行列 A のべき A^n が $n \longrightarrow \infty$ のとき収束するならば，A^2 は零行列であるか又は $A^2 = A$ であることを証明せよ．

[2] p を素数として，位数が p^2 である群 G は可換であることを示せ．

[3] k を標数 p の体，k' を k の拡大体とする．最高次係数が1の多項式 $f \in k'[x]$ が $(m,p)=1$ なる正整数 m に対して $f^m \in k[x]$ を満たしているとする．このとき $f \in k[x]$ となることを示せ．ただし，$p=0$ のときは，任意の m に対して $(m,0)=1$ と約束する．

[4] 3個の元からなる体 $\mathbf{F}_3$ の一つの代数閉包を $\overline{\mathbf{F}_3}$ とする．$\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{F}_3}$ を

$$\alpha^3 - \alpha - 1 = 0, \quad \beta^2 + 1 = 0$$

をみたすようにとる．X, Y を不定元とし，

$$k = \mathbf{F}_3(\alpha, \beta), \quad K = k(X), \quad L = K(y)$$

とする．ただし，y の K 上の最小多項式は $Y^2 - (X^3 - X + 1)$ であるとする．このとき

(1) 拡大次数 $[k : \mathbf{F}_3]$ を求めよ．

(2) $Y^2 - (X^3 - X + 1)$ が K 上の分離的既約多項式であることを確かめよ．

(3) $\theta \in \mathrm{Aut}(L/k)$ で $\theta(X) = \alpha - X$, $\theta(y) = \beta y$ となるものがただ一つ存在することを示せ．

(4) θ の位数を求めよ．

[5] $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$ とし, $P=(0,0,1)$ から xy 平面 $\{z=0\}$ への立体射影を $\phi:S^2-\{P\}\to\mathbf{R}^2$ とする.

(1) xy 平面上のベクトル場 $x^\alpha\frac{\partial}{\partial x}$ (α は非負整数) を ϕ^{-1} によって $S^2-\{P\}$ に写して得られるベクトル場を $(\phi^{-1})_*(x^\alpha\frac{\partial}{\partial x})$ とする. この $(\phi^{-1})_*(x^\alpha\frac{\partial}{\partial x})$ が S^2 全体で定義された連続なベクトル場に拡張できるための必要十分条件を求めよ.

(2) ベクトル場 $(\phi^{-1})_*(x^\alpha\frac{\partial}{\partial x})$ の積分曲線を図示せよ.

[6] M を $2n$ 次元のコンパクト多様体とする.

(1) M 上の 2 次微分形式 ω について, 次の 2 条件 (a) と (b) は同値であることを示せ.

(a) M の各点 p において

$$\overbrace{\omega\wedge\cdots\wedge\omega}^{n}$$

は 0 でない.

(b) M の各点 p において, 任意の 0 でない $X\in T_pM$ に対し, ある $Y\in T_pM$ で

$$\omega(X,Y)\neq 0$$

となるものが存在する.

(2) $n>1$ のとき $2n$ 次元球面 S^{2n} 上には次の (c) と (d) をともに満たす 2 次微分形式 ω は存在しないことを示せ.

(c) $d\omega=0$

(d) ω は同値な条件 (a), (b) を満たす.

[7]

$$S^1=\{\vec{p}=(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x^2+y^2=1\},$$
$$S^2=\{\vec{q}=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$$

とする. $S^1\times S^2$ に同値関係 $\sim$ を

$$(\vec{p},\vec{q})\sim(\vec{p'},\vec{q'})\iff(\vec{p'},\vec{q'})=(\vec{p},\vec{q})\text{ または }(\vec{p'},\vec{q'})=(-\vec{p},-\vec{q})$$

で定める. 商空間 $M=(S^1\times S^2)/\sim$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

[8] 正定数 α に対して $f(x,y)=(x^2+\sin y+2)^\alpha$ とおく.

(1) 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ がともに $\mathbf{R}^2$ で有界であるための必要十分条件を求めよ.

(2) f が $\mathbf{R}^2$ において一様連続であるための必要十分条件を求めよ.

[9] 次の (1), (2) に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx$ を求めよ.

(2) f が区間 $[0,1]$ 上の連続関数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}(f(x)-f(1))dx$ を求めよ.

[10] 上半平面 $\mathbf{H}=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ の点 z に対して

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{t-z}dt$$

と定める. また, $\delta>0$ に対し, $\mathbf{H}_\delta=\mathbf{H}\setminus\{|z|<\delta\}$ とおく. このとき

(1) $f(z)$ を定める広義積分は収束し, f は $\mathbf{H}$ 上正則であることを示せ.

(2) $z\in\mathbf{H}$, $|z|\neq\delta$ のとき

$$f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbf{H}_\delta}\frac{e^{-t^2}}{t-z}dt$$

の値を求めよ. ただし, $\partial\mathbf{H}_\delta$ は $\mathbf{H}_\delta$ の境界で正の向きを持つとする.

(3) $f(z)$ は実軸を越えて解析接続されることを示せ.

[11] $\mathcal{F}$ を区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数で $f(0)=1$, $\int_0^1 f(t)dt=0$ を満たすもの全体の集合とする.

(1) $f\in\mathcal{F}$ に対して $\displaystyle\int_0^1 f'(t)(1-t)dt$ を求めよ.

(2) $f\in\mathcal{F}$ に対して $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|^2dt\geq 3$ を示せ.

(3) $m=\inf\left\{\int_0^1|f'(t)|^2dt\ :\ f\in\mathcal{F}\right\}$ とする. このとき $m=\int_0^1|f'(t)|^2dt$ なる $f\in\mathcal{F}$ を求めよ.