単元別演習　数列④

漸化式 (応用③)　(解答)

問 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n - 1$　　(2) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + n$

解答

(1) $\boldsymbol{a_n = 2^n - n}$　　(2) $\boldsymbol{a_n = 2^{2-n} + 2n - 4}$

問 2

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 2n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解答

まず，$a_{n+1} + p(n+1)^2 + q(n+1) + r = 2(a_n + pn^2 + qn + r)$ を満たす p, a, r を求める．これを整理すると

$$a_{n+1} = 2a_n + pn^2 + (2q - 2p)n + (r - p - q)$$

となるので，与えられた漸化式と係数を比較して $p = -1,\ q = 0,\ r = -1$ を得る．よって，

$$a_{n+1} - (n+1)^2 - 1 = 2(a_n - n^2 - 1)$$

より，$\{a_n - n^2 - 1\}$ は初項 -1，公比 2 の等比数列であるから，$a_n - n^2 - 1 = -2^{n-1}$．
したがって，

$$\boldsymbol{a_n = n^2 + 1 - 2^{n-1}}$$