２１　大修

専門科目（午前）
数学試験　I　(基礎)

時間　９：００〜１１：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．
2. 以下の問題 3 題すべてに解答せよ．
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ．
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 2 ページからなる．

記号について：

$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す．

$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す．

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．

$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す．

[1] 2 変数 X, Y に関する複素係数 2 次斉次多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を V とする．各 $f(X,Y) \in V$ に対し

$$(Tf)(X,Y) = f(2X+Y, X-2Y)$$

とおいて V の一次変換 T を定める．このとき V の基底で T の固有ベクトルから成るものを一組求めよ．

[2] (1) $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が $[0,1]$ 上 f に一様収束すれば，f は $[0,1]$ 上の連続関数になることを示せ．

(2) $P(x), Q(x)$ は互いに素な多項式で，P の次数を m，Q の次数を n とする．更に，任意の $x \geq 0$ で $P(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\int_0^\infty \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$$

が存在するための必要十分条件を m, n を用いてあらわせ．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ かつ無限級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ が発散する例をつくれ．

[3] 整数を境界とする開区間の和集合すべて，および空集合を開集合系とする $\mathbb{R}$ の位相を $\mathcal{O}_1$ とする．
(1) $\mathcal{O}_1$ に関する閉集合系を求めよ．
(2) $x \in \mathbb{R}$ とするとき，1 点 $\{x\}$ の $\mathcal{O}_1$ に関する閉包を求めよ．
(3) $a \in \mathbb{R}$ とする．写像 $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f_a(x) = x + a$ が $\mathcal{O}_1$ に関して連続であるための必要十分条件を求めよ．
(4) $\mathbb{R}$ の部分集合で，通常の位相に関しては連結でないが，$\mathcal{O}_1$ に関しては連結である例を一つあげよ．
(5) $\mathbb{R}$ の部分集合が $\mathcal{O}_1$ に関してコンパクトであるためには，有界であることが必要十分条件であることを示せ．

２１ 大修

専門科目（午後）

数学試験 II

時間 １２：３０～１５：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．
2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ．ただし，口頭試問を
   代数系で受けたいものは，１～３のうちから，
   幾何系で受けたいものは，４～６のうちから，
   解析系で受けたいものは，７～１０のうちから
   少なくとも１題を選択すること．
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ．
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で４ページからなる．

記号について：

$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す．

$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す．

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．

$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す．

[1] 位数 m の巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ について，以下が正しいならば証明し，正しくないならば反例をあげよ．

(1) m が素数ならば $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ は巡回群である．

(2) m が素数 p の冪で $m = p^e$ となっているなら $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ は巡回群である．

(3) 異なる素数 p, q に対し $m = pq$ となっているなら $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ は巡回群である．

[2] $f : A \to B$ を環の準同型とする．以下が正しいならば証明し，正しくないならば反例をあげよ．

(1) $I \subset B$ が素イデアルならば $f^{-1}(I)$ は素イデアル．

(2) $I \subset B$ が極大イデアルならば $f^{-1}(I)$ は極大イデアル．

(3) $J \subset A$ が素イデアルならば $f(J)B$ は素イデアル．

[3] (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$ は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であるか否かを判定せよ．

[4] $\mathbb{R}^2$ の直線 $ax + by + c = 0, (a, b) \neq (0, 0)$ で単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と交わるもの全体がなす集合を M とする．

(1) M は境界付き 2 次元多様体の構造を持つことを示せ．

(2) M はメビウスの帯と同相であることを示せ．

[5] $\mathbb{R}^3$ の座標を x, y, z とし，$\alpha = xdy + dz$ とおく．

(1) $\alpha \wedge d\alpha$ を計算せよ．

(2) $i(X)\alpha = 1, i(X)d\alpha = 0$ となるベクトル場 X を求めよ．ただし，p-form ω に対し，$(p-1)$-form $i(X)\omega$ は

$$(i(X)\omega)(Y_1, \ldots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{p-1})$$

により定義される．

[6] (1) $\mathbb{R}^3$ を3次元ユークリッド空間とする．$\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ に同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x = -y$$

で入れ，商空間を $X = (\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})/\sim$ とする．X の整係数ホモロジー群 $H_*(X;\mathbb{Z})$ を計算せよ．

(2) X の一点コンパクト化を X^* とする．X^* の整係数ホモロジー群 $H_*(X^*;\mathbb{Z})$ を計算せよ．

[7] f を区間 $[-1,1]$ 上の連続関数とする．$t > 0$ に対して

$$u(t) = \int_{-1}^{1} e^{-|y|/t} f(y)\, dy$$

とおく．

(1) u は $(0,\infty)$ 上の連続関数であることを示せ．

(2) $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$ を示せ．

(3) $t \to \infty$ のとき $tu(t)$ が有限な極限値を持つための f に対する条件を求めよ．

[8] $x \geq 0$ で定義された非負値連続関数 f が $\int_0^\infty xf(x)\, dx < \infty$ を満たしているとする．$\phi(t) = \int_0^\infty f(x) \sin^2 tx\, dx$ とおく．次を示せ．

(1) ϕ は $C^1(\mathbb{R})$-級である．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\phi(t)}{t^2}\, dt < \infty.$

[9] $0 < \alpha, \epsilon < 1$ なる α, ϵ に対して

$$D(\alpha,\epsilon) = \{z = re^{i\theta} : \epsilon < r < 4, \ -\alpha\pi < \theta < \alpha\pi\}$$

とおく.

(1) $\sin z = 0$ なる $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha,\epsilon)} \frac{dz}{\sin z}$$

を求めよ.

(3) $\Gamma_\epsilon = \partial D(\alpha,\epsilon) - \{|z| = \epsilon\} \cap \partial D(\alpha,\epsilon)$ とおく.

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{\sin z}$$

を求めよ.

[10] n を自然数とし, X を n 次以下の複素係数多項式全体のなす線形空間とする. X 上の内積 (u,v) を

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}\,dx, \quad u, v \in X$$

により定義し, $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ とする.
X から X への作用素 K を

$$(Ku)(x) = \int_0^1 (1 + x^n y^n) u(y)\,dy$$

により定義する.

(1) $\|K\| = \sup\{\|Ku\| : u \in X, \ \|u\| = 1\}$ とおく. 複素数 z が $|z| > \|K\|$ を満たすならば, $zI - K$ は1対1写像であることを示せ. ただし, I は X 上の恒等写像である.

(2) K^* を K の共役作用素とする. $K^* = K$ であることを示せ.

(3) K の 0 でない固有値を全て求めよ.