筆答専門試験科目（午前）　　２９ 大修

数 学 系　　時間　９：００〜１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題５題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

[1] V を 3 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間とし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．また，通常の行列の積に関して A と可換な V の元全体を W とする．

(1) W は V の部分空間であることを示せ.

(2) A を対角化せよ.

(3) W の任意の元は A の実数係数の多項式として表されることを示し，W の次元を求めよ.

[2] n 次複素正方行列 A に対し，$\operatorname{rank} A^n = \operatorname{rank} A^{n+1}$ であることを示せ.

[3] $a \in \mathbb{R}$, $r \geqq 0$ に対し，$\mathbb{R}$ の部分集合

$$U(a;r) = (-a-r, -a+r) \cup (a-r, a+r)$$

を考える．ただし，$U(a;0) = \emptyset$ とする．

(1) $\mathcal{B} = \{U(a;r) \mid a \in \mathbb{R},\, r \geqq 0\}$ は $\mathbb{R}$ のある位相 $\mathcal{O}$ の開基（開集合系の基底）となることを示せ.

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間ではないことを示せ.

(3) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ は連結であることを示せ.

(4) $[0,1]$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ のコンパクト集合であるが閉集合ではないことを示せ.

[4] (1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log n}$ が収束する実数 p の範囲を求めよ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数の列 $\{f_n\}$ がある関数 f に $\mathbb{R}$ 上で一様収束している．各 n について f_n が多項式であるとき，f もまた多項式であることを示せ．

[5] f は区間 $[0,1)$ 上で連続な実数値関数とする．

(1) 左極限

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)$$

が有限の値ならば，f は $[0,1)$ 上で一様連続であることを示せ．

(2) 不等式

$$\limsup_{x\to 1-0} f(x) > \liminf_{x\to 1-0} f(x)$$

が成り立つならば，f は $[0,1)$ 上で一様連続ではないことを示せ．

(3) f は $[0,1)$ 上で微分可能で，導関数 f' は $[0,1)$ 上で連続とする．ある $\alpha \in (0,1)$ に対して，

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^{\alpha} f'(x)$$

が有限の値ならば，f は $[0,1)$ 上で一様連続であることを示せ．

筆答専門試験科目（午後）　　　　　　２９ 大修

数 学 系　　　　時間　１３：００～１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 5 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について：

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] $f(x) = x^4 - 1$ とする．

(1) 剰余環 $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ の素イデアルをすべて求めよ．

(2) 剰余環 $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ の素イデアルと極大イデアルをすべて求めよ．

(3) 剰余環 $\mathbb{Z}[x]/(5, f(x))$ の素イデアルをすべて求めよ．

[2] (1) G, H を 2 つの群とし，$\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ を群準同型とする．直積集合 $G \times H$ に次のような積 $*$ を考える：$(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ に対して，

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \varphi(h_1)(g_2), h_1 h_2).$$

このとき， $G \times H$ はこの積に関して群になることを示せ．また，φ が自明でないなら，この群はアーベル群ではないことを示せ．ただし，$\mathrm{Aut}(G)$ は G の自己同型群を表し，$\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ が自明でないとは $\varphi(h)$ が G の恒等写像とならないような $h \in H$ が存在することである．

(2) p を素数とし，n を 3 以上の自然数とするとき，位数 p^n の群でアーベル群ではないものが存在することを示せ．

[3] ζ を 1 の原始 9 乗根 $e^{2\pi\sqrt{-1}/9}$ とするとき，$\mathbb{Q}(\zeta)$ の部分体をすべて求めよ．

[4] n を 2 以上の自然数とし，$\mathbb{C}^n$ の部分集合 M を次で定める．

$$M = \left\{ (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 1 \right\}.$$

(1) $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ とみなすとき，M は $\mathbb{R}^{2n}$ の部分多様体であることを示せ．

(2) 写像 $p\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$p(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Re}\, z_2, \ldots, \mathrm{Re}\, z_n)$$

で定め，p を M に制限して得られる写像を $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ とする．f の臨界点と臨界値をすべて求めよ．ただし，$\mathrm{Re}\, z$ は複素数 z の実部を表す．

(3) M は $(n-1)$ 次元球面とホモトピー同値であることを示せ．

[5] 5 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^5 = \{(t, x_1, y_1, x_2, y_2) \,|\, t, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$ 上の 1 次微分形式 $\eta = \{\eta_p\}_{p \in \mathbb{R}^5}$ を

$$\eta = dt - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$$

で定義する．

(1) $d\eta$ および $\eta \wedge d\eta \wedge d\eta$ を求めよ．

(2) 各点 $p \in \mathbb{R}^5$ において，$\mathrm{Ker}\,\eta_p$ の 1 組の基底とその次元 $\dim(\mathrm{Ker}\,\eta_p)$ を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^5$ 内の k 次元可微分部分多様体 M^k で，

$$(*) \qquad T_p M^k \subset \mathrm{Ker}\,\eta_p \quad (\, p \in M^k \,)$$

を満たすものを考える．このとき，$d\eta$ の M^k への制限 $d\eta|_{M^k}$ に関して

$$d\eta|_{M^k} = 0$$

が成立することを示せ．ここで $T_p M^k$ は $p \in M^k$ における M^k の接空間を表す．

(4) (3) の条件 $(*)$ を満たす M^k が存在するとき，$k \leqq 2$ であることを示せ．

[6] $\mathbb{R}^3$ 内の互いに接する半径 1 の 3 つの球面 S_1, S_2, S_3 を

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 1\}$$

とし，$I = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqq x \leqq 2\}$ とする．

(1) $X = S_1 \cup I$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) $Y = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

[7] 正の実数 $R > 0$ に対して，

$$D(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

とおく．複素関数 f は $D(R)$ で正則で，$f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ とする．さらに $0 < |z| < R$ において $f(z) \neq 0$ であるとする．このとき，$0 < r < R$ に対して，

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

とおく．

(1) $m = \inf\{|f(z)| \mid z \in \partial D(r)\}$ とするとき，$g(w)$ は $|w| < m$ において正則であることを示せ．

(2) $|w| < m$ である任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して，

$$f(z(w)) = w, \quad |z(w)| < r$$

を満たす $z(w) \in \mathbb{C}$ が唯一つ存在することを示せ．

(3) (2) における w, $z(w)$ について，$z(w) = g(w)$ であることを示せ．

[8] λ を $\mathbb{R}$ 上の 1 次元ルベーグ測度とし，$g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を可積分関数とする．

(1) $r > 0$ に対して $\mathbb{R}$ 上の可測関数 g_r を

$$g_r(x) = \min\{g(x), r\}$$

で定める．

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_r \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$$

および

$$\lim_{r\to+0} \int_{\mathbb{R}} g_r \, d\lambda = 0$$

を示せ．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ で，

$\lambda(A) < \delta$ なる任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\int_A g \, d\lambda < \varepsilon$

を満たすものが存在することを示せ．

(3) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ および $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $|f_n| \leqq g$ $(n \in \mathbb{N})$ および $|f| \leqq g$ を満たす可積分関数とする．さらに，各 $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$$

を示せ．

[9] $C(I)$ を $I=[0,1]$ 上の実数値連続関数全体とし，$C(I)$ 上にノルムを

$$\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$$

で定める．$\alpha \in \mathbb{R}$，$A \in C(I)$ とし，$S\colon C(I) \to C(I)$ を

$$(Sx)(t) = \alpha + \int_0^{t^2} A(s)x(s)\,ds$$

で定める．また，帰納的に $S^{m+1}x = S(S^m x)$ $(m \in \mathbb{N})$ と定める．

(1) ある定数 $M > 0$ に対し，

$$\|Sx - Sy\| \leqq M\|x-y\|$$

が任意の $x, y \in C(I)$ で成り立つことを示せ.

(2) m が十分に大きければ，任意の $x, y \in C(I)$ に対して，

$$\|S^m x - S^m y\| \leqq \frac{1}{2}\|x-y\|$$

が成り立つことを示せ.

(3) $Sx = x$ となる $x \in C(I)$ が唯一つ存在することを示せ．ただし，$C(I)$ が完備であることは用いてよい.