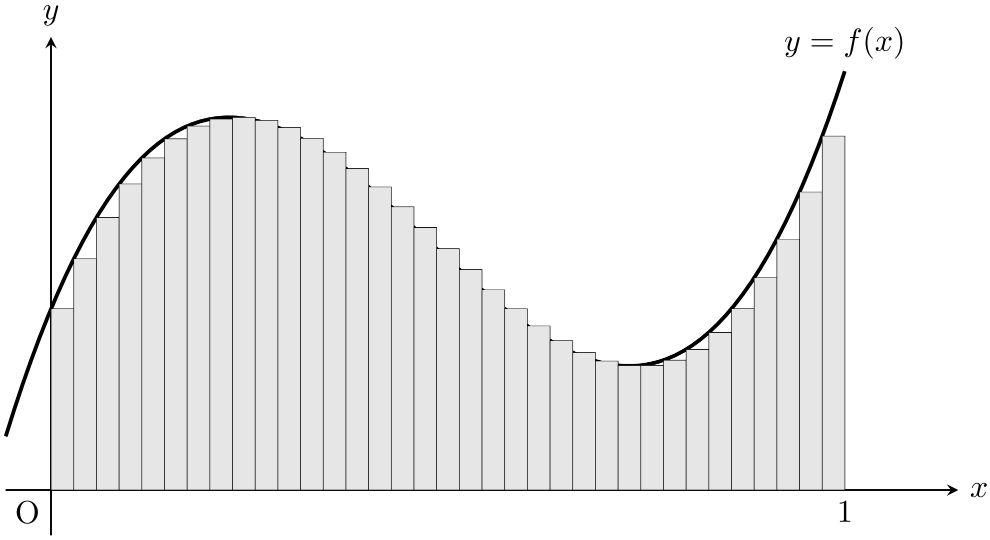
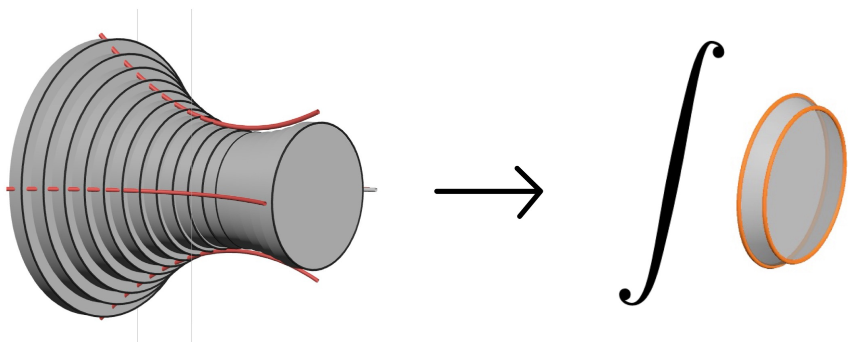
積分法の応用：体積

まずは積分で面積が求まった理由を思い出そう．曲線と x 軸とで囲まれた部分を幅が小さいの長方形で分割し，それらを足しわせることで面積を計算していた．



$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

この考えを応用して，立体の体積を求めることもできる．すなわち，立体を薄い柱体に分割し，それらの体積の和として体積を計算するのである．



Point

平面 $x=t$ による立体の断面積を $S(x)$ とするとき，この立体の $a \leqq x \leqq b$ の部分の体積 V は,

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

で求められる．

【例題】

x 軸上の点 $\mathrm{P}(x, 0)$ と曲線 $y = 1 - x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{Q}(x, 1 - x^2)$ を結ぶ線分を 1 辺とする平行四辺形で，xy-平面に垂直であるものを考える．点 P が $0 \leqq x \leqq 1$ を動くとき，この正三角形の通過領域の体積を求めよ．

Point. 体積→断面積の積分

解答.

P が $(x, 0)$ にいるときの正三角形の断面積を $S(x)$ とすると，$\mathrm{PQ} = 1 - x^2$ より

$$S(x) = (1 - x^2)^2 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - x^2)^2$$

である．よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - x^2)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{15} \end{aligned}$$

【問 1】

x 軸上の点 $\mathrm{P}(x, 0)$ と曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ 上の点 $\mathrm{Q}(x, \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形で，xy-平面に垂直であるものを考える．点 P が $0 \leqq x \leqq 1$ を動くとき，この正三角形の通過領域の体積を求めよ．

解答.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

回転体の体積

体積を求める問題は入試でよく問われるが，次に考える回転体は特に頻出である．というか，記述式の試験でない限り回転体以外は出ないと思って問題ない．

【例題】

曲線 $y = \log x$ と x 軸，直線 $x = e$ とで囲まれた図形を x 軸まわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

Point. 回転体の断面積→円

求める体積を V とすると，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^e (\log x)^2 \pi dx \\
&= \pi \int_1^e (x)'(\log x)^2 dx \\
&= \pi \left(\left[x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2\log x dx \right) \\
&= \pi e - 2\pi \left[x \log x - x \right]_1^e \\
&= \pi(e-2)
\end{aligned}
$$

この例からわかるように，回転体の体積で重要なのは**断面積が円になる**ことである．前の例題とよりも断面積の計算が楽になるので解きやすい．

Point

曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸まわりに 1 回転させて得られる立体の体積 V は，

$$
V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx
$$

で計算できる．

【問 2】

次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(1) $y = 1 - x^2,\ x$ 軸　　(2) $y = \dfrac{2}{x+2},\ x$ 軸, y 軸, $x = 2$

解答.

(1) $\dfrac{16}{15}\pi$ (2) π (3) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (4) $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2} - 4)$

【問 2】

次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(1) $y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$, x 軸　　(2) $y = e^x - e^{-x}$, x 軸, $x = 1$

解答.

(1) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (2) $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2} - 4)$

【例題】

曲線 $y=\log x$ と x 軸，直線 $x-(e-1)y-1=0$ とで囲まれた図形を x 軸まわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

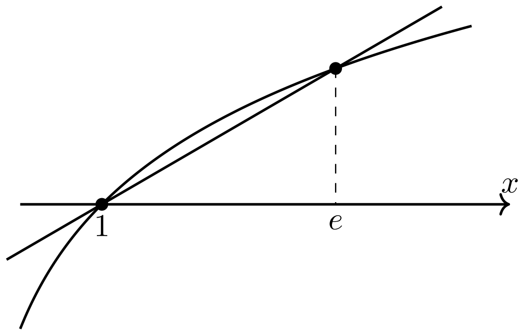
解答.

図を見ればわかるが，考えるべき立体は $y = \log x$ を回転させた図形から円錐をくり抜いたものであることに注意しよう.

$y=\log x$ と $x-(e-1)y-1=0$ の交点の x 座標は

$$\log x = \frac{x-1}{e-1}$$

の解である．これを解くのは難しいが，グラフを見れば交点が 2 個であることはすぐに分かる．適当に値を代入すれば $x=1, e$ と求まる．よって，求める体積を V は



$$V = \pi\int_1^e (\log x)^2 dx - \pi\int_1^e \left(\frac{x-1}{e-1}\right)^2 dx$$
$$= \frac{2e-5}{3}\pi$$

【問 3】

次の定積分を計算せよ.

$$(1)\ \int_1^e (\log x)^2 dx \qquad (2)\ \pi\int_1^e \left(\frac{x-1}{e-1}\right)^2 dx$$

解答.

(1) $e-2$ (2) $\dfrac{e-1}{3}\pi$

【問 4】

次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(1) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$　　　(2) $y=\sin x\ y=\cos x,\ x=\dfrac{\pi}{4}$

解答.

(1) $\dfrac{3}{10}\pi$　(2) $\dfrac{\pi}{2}$

【問 5】

次の曲線や直線で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(1) $y = \log(1+x),\ y = 1,\ x = 0$ (2) $2y = x^2,\ y = \sqrt{x}$

(3) $y = x^2,\ x = 1,\ x = 2,\ x$ 軸

Point. 体積→図を描いて断面積の積分

解答.

(1) $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - 4e + 5)$ (2) $\dfrac{12}{5}\pi$ (3) $\dfrac{15}{2}\pi$

【問 6】

曲線 $y = x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸とで囲まれた部分を y 軸まわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ.

Hint. 図を描いて積分区間を確認しよう.

解答.

$\dfrac{\pi^2}{8}$

【問 7】

$a>1$ とする．

(1) $x \geqq 0$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{ax}$ と直線 $y=ax$，$y=\dfrac{x}{a}$ とで囲まれた図形を x 軸周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V(a)$ を求めよ．

(2) $V(a)$ の最大値を求めよ．

解答.

(1) $V(a)=\dfrac{4}{3a^2}(a-1)\pi$ (2) $a=2$ で最大値 $\dfrac{\pi}{3}$

【問 8】

n を自然数とする．曲線 $y = \dfrac{1}{n^5}(x-n)(2n-x)$ と x 軸とで囲まれた図形を y 軸まわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V_n を求めよ．

Hint. ただの 2 次関数なので平方完成をしてグラフを描こう．

解答.

$V_n = \dfrac{\pi}{2n}$