単元別演習　数と式④

証明問題

例題 1

a, b, c を整数とする．このとき，次のことを示せ．

(1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である．

(2) a^2+b^2 が 3 の倍数ならば，a, b はともに 3 の倍数である．

解答

(1) 3 で割った余りを考えるので，はじめから a も 3 で割った余りで分類しておけばいい．

① $a=3k$ のとき

$a^2=9k^2$ より，3 で割った余りは 0.

② $a=3k+1$ のとき

$a^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$ より，3 で割った余りは 1.

③ $a=3k+2$ のとき

$a^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$ より，3 で割った余りは 1.

以上より，a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である．(**この結果はよく使うので覚える．**)

(2) a^2+b^2 の情報から a, b を復元するのは難しいので，対偶命題

「a, bのうち少なくとも一方が3の倍数でない $\Rightarrow$ a^2+b^2 は3の倍数ではない」

を示す．

a が 3 の倍数でないと仮定しても一般性は失わない (条件は a, b に関して対称だから)．このとき，(1) より a^2 を 3 で割った余りは 1 である．b^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 であるから，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 1 または 2 である．よって，a^2+b^2 は 3 の倍数ではない．対偶命題が示されたので，元の命題も示された．(証明終)

問 1

a, b, c を整数とするとき，次の問に答えよ．

(1) a^2 を 4 で割ると余りは 0 または 1 であることを示せ．

(2) a^2+b^2 が 4 の倍数ならば，a, b はともに偶数であることを示せ．

問 2

n を奇数とするとき，次の問に答えよ．

(1) n^2-1 は 8 の倍数であることを示せ．

(2) n^5-n は 3 の倍数であることを示せ．

[千葉大]