

専門科目（午前）

数学

時間 9:00～11:30

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数系, 幾何系, 解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について： \mathbb{R} は実数全体を表す.

[1] (1) 広義積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^\alpha dx dy$$

が収束するための実数 α に関する条件を求めよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき実数 a に収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + \cdots + a_n) = a$$

となることを示せ.

[2] \mathbb{R} 上の連続関数 $f(x)$ が

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

を満たすとする.

(1) $f(x)$ は \mathbb{R} 上で有界であることを示せ.

(2) $f(x)$ は \mathbb{R} 上で一様連続であることを示せ.

(3) \mathbb{R} 上の連続関数 $g(x)$ が

$$g(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$$

を満たすとする. $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$f_n(x) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) g(ny) dy$$

とおくとき, 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に \mathbb{R} 上で一様収束することを示せ.

[3] a, b を 0 でない実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

とする. A の固有値をすべて求め, 各固有空間の基底を一組ずつ求めよ. また, A の最小多項式を求めよ.

[4] n を正整数とし, A を n 次複素正方行列とする.

(1) 不等式

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} (E_n - A) \geq n \quad (*)$$

を示せ. ここで E_n は n 次単位行列である.

(2) 不等式 (*) で等号が成り立つためには $A^2 = A$ が必要十分であることを示せ.

[5] \mathbb{R}^2 の部分集合族 \mathcal{O} を

$$\mathcal{O} = \{U \times \mathbb{R}; U \text{ は } \mathbb{R} \text{ の通常の位相に関する開集合}\}$$

で定める. また,

$$I = \{t \in \mathbb{R}; 0 < t < 1\}, \quad J = \{t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 1\}$$

とおく.

(1) \mathcal{O} は開集合系の公理を満たすことを示せ.

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間か.

(3) 部分集合 $I \times I, I \times J, J \times I, J \times J$ は位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ のコンパクト集合か.

(4) $I \times I, I \times J, J \times I, J \times J$ の $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ における閉包を求めよ. (答のみでよい.)

専門科目（午後）

数学

時間 13:00～15:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち2題を選択して解答せよ.
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で3ページからなる.
6. 口頭試問を代数系, 幾何系, 解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと. (午前と同じ系を書くこと.)

記号について：

- \mathbb{R} は実数全体を表す.
- \mathbb{C} は複素数全体を表す.
- \mathbb{Z} は整数全体を表す.
- \mathbb{Q} は有理数全体を表す.

[1] 体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の拡大体 $K = k(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5})$ を考える.

(1) K/k はガロア拡大であることを示し, ガロア群を求めよ.

(2) K/k のすべての中間体を求めよ.

[2] m を正整数とし, $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とおく. 一変数多項式環 $R[x]$ の可逆元が R の可逆元だけであるためには, p^2 が m の約数となるような素数 p が存在しないことが必要十分であることを示せ.

[3] \mathbb{R}^3 内の単位球面を

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とする.

(1) \mathbb{R}^3 上の 1 次微分形式 dz を S^2 に制限して得られる 1 次微分形式 $dz|_{S^2}$ の零点集合 (0 になる点全体) を求めよ.

(2) \mathbb{R}^3 上の 2 次微分形式 $dx \wedge dy$ を S^2 に制限して得られる 2 次微分形式 $(dx \wedge dy)|_{S^2}$ の零点集合を求めよ.

(3) \mathbb{R}^3 上の 2 次微分形式

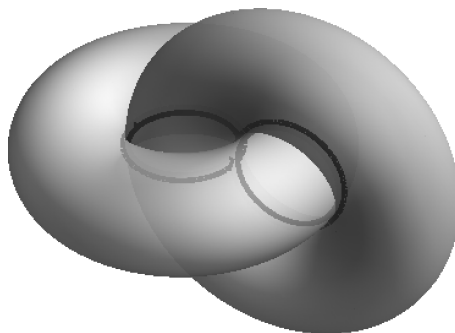
$$\alpha = dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

を S^2 に制限して得られる 2 次微分形式 $\alpha|_{S^2}$ の零点集合を求めよ.

[4] \mathbb{R}^3 において, xz 平面上の円周 $S_1: (x-1)^2 + z^2 = 1$ を, z 軸に平行な直線 $x = -1, y = 0$ の周りに回転して得られるトーラスを T_1 とする. また, xy 平面上の円周 $S_2: (x+1)^2 + y^2 = 1$ を, y 軸に平行な直線 $x = 1, z = 0$ の周りに回転して得られるトーラスを T_2 とする.

(1) T_1 と T_2 の共通部分 $T_1 \cap T_2 = S_1 \cup S_2$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) T_1 と T_2 の和集合 $T_1 \cup T_2$ の整係数ホモロジー群を求めよ.



[5] 自然数 n に対して

$$A_n = \int_0^\pi \frac{nx^2}{1+nx} \cos x \, dx, \quad B_n = \int_0^\pi \frac{nx}{1+nx^2} \cos x \, dx$$

とする. このとき数列 $\{A_n\}$ および $\{B_n\}$ の収束・発散を調べ, 収束する場合はその極限值を求めよ.

[6] (1) n を自然数とするとき

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n+1}} dx = \frac{\pi}{(2n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}$$

が成り立つことを示せ.

(2) φ を $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ で正則で, すべての $z \in \Delta$ に対して $\varphi(z) \neq 0$ なるものとする. このとき $0 < r < 1$ なる任意の r に対して

$$\log |\varphi(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(re^{i\theta})| d\theta$$

が成り立つことを示せ.

[7] $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ 上の関数の列 $\{h_j(x, t)\}_{j=0}^\infty$ を次の漸化式によって定義する.

$$h_0(x, t) = \sin x,$$

$$h_{j+1}(x, t) = h_0(x, t) + \int_0^t \frac{h_j(x, s)^2}{(t-s)^{1/2}} ds.$$

$\mathbb{R} \times [0, \infty)$ 上の関数 h と各 $T > 0$ に対して, $\|h\|_T = \sup_{0 < t < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x, t)|$ と定める.

(1) $h_1(x, t)$ を求めよ.

(2) 十分小さな $T > 0$ に対して, $\|h_j\|_T \leq 2$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) となることを示せ.

(3) 十分小さな $T > 0$ に対して

$$\|h_j - h_k\|_T \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty)$$

となることを示せ.