単元別演習　数と式②

整式の除法

例題 1

整式 $f(x)$ を $x+2$ で割った余りが 3，$x-3$ で割った余りが -1 のとき，$f(x)$ を x^2-x-6 で割った余りを求めよ． [05 立教大]

Point.

商を $q(x)$，余りを $r(x)$ として $\boldsymbol{f(x)=g(x)q(x)+r(x)}$ の形で表す．

解答

$f(x)$ を $x+2$ で割った余りが 3 であるから，商を $q_1(x)$ とすると

$$f(x)=(x+2)q_1(x)+3 \ \cdots ①$$

また，$f(x)$ を $x-3$ で割った余りは -1 であるから，商を $q_2(x)$ とすると

$$f(x)=(x-3)q_2(x)-1 \ \cdots ②$$

と書ける．$f(x)$ を x^2-x-6 で割った余りは一次式であるから，これを $ax+b$ とおく．商を $q(x)$ とすると

$$f(x)=(x^2-x-6)q(x)+ax+b=(x-3)(x+2)q(x)+ax+b \ \cdots ③$$

と表せる．①より $f(-2)=3$，②より $f(3)=-1$ なので，③より連立方程式

$$\begin{cases} -2a+b & =3 \\ 3a+b & =-1 \end{cases}$$

を得る．これを解いて，$a=-\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$ となるので，求める余りは $\boldsymbol{-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{7}{5}}$ である．

補足.

①，②を書かずに**因数定理**を用いてもよい．問題文より直ちに $f(-2)=3$，$f(3)=-1$ がわかる．

【因数定理】

整式 $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ である．

証明.

$f(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $q(x)$，余りを r とすると，$f(x)=(x-a)q(x)+r$ と書ける．これより，$r=f(a)$ がしたがう． (証明終)

問 1

整式 $f(x)$ を $x+1$ で割ったあまりが 1，$x-2$ で割った余りが 4 のとき，$f(x)$ を x^2-x-2 で割った余りを求めよ．

問 2

a を定数，n を正の整数とする．x の整式 $f(x)=x^n+2x^{n-1}-a$ が $x+1$ で割り切れるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．
(2) $f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ．

[00 佐賀大]

例題 2

ax^3+bx^2-2 が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，a,b の値を求めよ．　[06 早稲田大　改]

Point.

$(x-a)^n$ で割る問題の多くは，例題 1 と同じようにやると条件が足りずに手詰まりとなる．この系統の問題は，**微分を使って条件式を増やす**と簡単に解ける．

解答

ax^3+bx^2-2 が $(x-1)^2$ で割り切れるから，商を $q(x)$ とすると

$$ax^3+bx^2-2=(x-1)^2q(x) \quad \cdots \text{(A)}$$

と書ける．ひとまず (A) に $x=1$ を代入すると，$a+b-2=0$ $\cdots$① がわかる．

①だけだと a,b が求まらないので，式がもう 1 本必要である．そこで，**(A) の両辺を x で微分すると**，

$$3ax^2+2bx=2(x-1)q(x)+(x-1)^2q'(x) \quad \cdots \text{(B)}$$

である．(B) に $x=1$ を代入すれば，$3a+2b=0$ $\cdots$② がわかる．①と②より，$\boldsymbol{a=-4,\ b=6}$．

問 3

x^{10} を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ．

問 4

x^n を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ．

復習問題

問 5

因数定理の主張を述べ，それを証明せよ．

問 6

$(x+1)^{12}$ を x^2-1 で割った余りを求めよ． [08 日本歯科大]

問 7

n は 3 以上の奇数として，多項式 $P(x)=x^n-ax^2-bx+2$ を考える．$P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a=\boxed{\text{あ}}$， $b=\boxed{\text{い}}$ であり，$(x+1)^2$ で割り切れるときは $a=\boxed{\text{う}}$， $b=\boxed{\text{え}}$ である． [11 慶應義塾大]

問 8

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で，$x+2$ で割ったときの余りが -4 である．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．
(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．
(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

[山形大]