

因数分解・高次方程式(解答)

問 1

次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

(2) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

✓ 解答

(1) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 1)(x + 2)(x - 5).$

(2) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(x^2 + 3x + 1).$

問 2

次の方程式を解け.

(1) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$

(2) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

(3) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

(4) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

✓ 解答

(1) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(x^2 + 3x + 1) = 0$ より $x = 1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

(2) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x - 2)(x - 3) = 0$ より $x = 0, 2, 3.$

(3) $x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1) = (x^2 + 4)(x - 1)(x + 1) = 0$ より $x = \pm 1, \pm 2i.$

別解

$X = x^2$ とおくと, $x^4 + 3x^2 - 4 = X^2 + 3X - 4 = (X + 4)(X - 1)$ より $X = -4, 1.$

よって, $x^2 = -4, 1$ より, $x = \pm 1, \pm 2i.$

(4) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 = 0$ より, $x = -1.$

問 3

次の式を因数分解せよ.

(1) $(x^2 + 2x - 30)(x^2 + 2x - 8) - 135$

(北海学園大)

(2) $(x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3) + 24$

(東洋大)

(3) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$

(松山大)

(4) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3$

(九州東海大)

✓ 解答

(1) $x^2 + 2x = X$ とおくと $(X - 30)(X - 8) - 135 = X^2 - 38X + 105 = (X - 3)X(A - 35).$

よって, (与式) = $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 35) = (x - 1)(x + 3)(x - 5)(x + 7)$

(2) (与式) = $(x + 3)(x - 4)(x + 1)(x - 2) + 24 = (x^2 - x - 12)(x^2 - x - 2) + 24$ であるから,
 $x^2 - x = X$ とおくと, $(x - 12)(x - 2) + 24 = X^2 - 14X + 48 = (X - 6)(X - 8)$.
よって, (与式) = $(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 8) = (x + 2)(x - 3)(x^2 - x - 8)$

(3) (与式) = $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1$ であるから, $x^2 + 3x = A$ とおくと, $A(A + 2) + 1 = (A + 1)^2$. よって, (与式) = $(x^2 + 3x + 1)^2$

(4) (与式) = $(x + 1)(x + 4)(x + 3)(x + 2) - 3 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$ であるから,
 $x^2 + 5x = X$ とおくと, $(A + 4)(A + 6) - 3 = A^2 + 10A + 21 = (A + 3)(A + 7)$.
よって, (与式) = $(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7)$

問 4

次の式を因数分解せよ.

(1) $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$ (京都産業大)

(2) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2$ (京都産業大)

(3) $a^3 + a^2 - 2a - a^2b - ab + 2b$ (摂南大)

解答

文字を 1 つ選び, 降べきの順で整理するとよい. (3) は共通因数 $a^2 + a - 2$ でくくる方がはやすい.

$$\begin{aligned} (1) \quad 2x^2 + (5y - 3)x + (3y^2 - 5y - 2) &= 2x^2 + (5y - 3)x + (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x + (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x + y - 2)(2x + 3y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 &= 2x^2 + 3yx - (2y - 1)(y - 2) \\ &= \{x + (2y - 1)\}\{2x - (y - 2)\} \\ &= (x + 2y - 1)(2x - y + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad a^3 + a^2 - 2a - a^2b - ab + 2b &= a(a^2 + a - 2) - b(a^2 + a - 2) \\ &= (a - b)(a^2 + a - 2) \\ &= (a - b)(a - 1)(a + 2) \end{aligned}$$