単元別演習　数列④

漸化式 (応用③)

n の式が入っているやつ

例題 1

$a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n+4n+3$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

Point.

$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+qn+r}$ は，

$$\boldsymbol{a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=p(a_n+\alpha n+\beta)}$$

となる α,β を求めて等比数列に帰着させる*1.

解答

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$ が成り立つとするとき，これを整理すると

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n-\alpha+\beta$$

となるので，与えられた漸化式と係数を比較すると，

$$\begin{cases}\alpha &=4\\ -\alpha+\beta &=3\end{cases}$$

より，$\alpha=4,\beta=7$ である．よって，

$$a_{n+1}+4(n+1)+7=2(a_n+4n+7)$$

と変形できるので，数列 $\{a_n+4n+7\}$ は初項 17，公比 2 の等比数列である．したがって，$a_n+4n+7=17\cdot 2^{n-1}$ より，

$$\boldsymbol{a_n=17\cdot 2^{n-1}-4n-7}$$

問 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n-1$　　(2) $a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n$

問 2

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-n^2+2n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

*1 $a_{n+1}=pa_n+qn^2+rn+s$ なら，2 次式を用いて

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma)$$

と変形する．