問 1. $\star$
次の複素数を $z = a + bi$ (a, b は実数) の形で表せ.

$$(1)\ z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-2i}{1+2i} \quad (2)\ z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

問 2. $\star\star\star$
$\alpha = 2 + 2i,\ \beta = 3 - 2i,\ \gamma = -1 - i$ とし，複素数平面上に点 $\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(\gamma)$ を定める．さらに $\mathrm{D}(\delta)$ とする．4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ が平行四辺形の頂点となるような複素数 δ をすべて求めよ.

問 3. $\star\star$

(1) $z = 4 + 2i$ を原点まわりに $\pi/3$ だけ回転させた点を表す複素数を求めよ.
(2) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 1 + i$ を極形式で表し，$\cos\dfrac{\pi}{12},\ \sin\dfrac{\pi}{12}$ を求めよ.

問 4. $\star\star$
$\theta = \dfrac{\pi}{18}$ のとき，次の値を求めよ.

$$\frac{6(\cos 8\theta + i\sin 8\theta)(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)}{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$$

問 5. $\star\star$
二次方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ について，次の問に答えよ.

(1) この方程式の解を極形式で表せ.
(2) $z^6 + \dfrac{1}{z^{12}}$ の値を求めよ.

問 6. $\star\star$
複素数平面上で，次の式を満たす点 z の全体はどのような図形を表すか.

$$(1)\ |z+2i| = 3 \quad (2)\ |z-2i-1| = |iz+1| \quad (3)\ \left|\frac{z}{z-5}\right| = \frac{2}{3}$$

問 7. $\star\star$
複素数平面上で，点 $\mathrm{P}(z)$ が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，$w = 1/z$ の表す点 $\mathrm{Q}(w)$ はどのような図形を描くか.

問 8. $\star\star\star\star$
$\pi < \theta < 2\pi$ を満たす θ について，$z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ とする.

(1) z を極形式で表せ.
(2) z^{2025} が正の実数になるような θ の個数を求めよ.

解答

問 1.

(1) $\dfrac{-3+i}{5}$

(2) $z = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ なので，ド・モアブルの定理より $z^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

問 2.

D(δ) の位置により 3 種類の平行四辺形が考えられることに注意する．

(i) ABCD が平行四辺形になるとき，
$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので，$\alpha - \beta = \delta - \gamma$ より

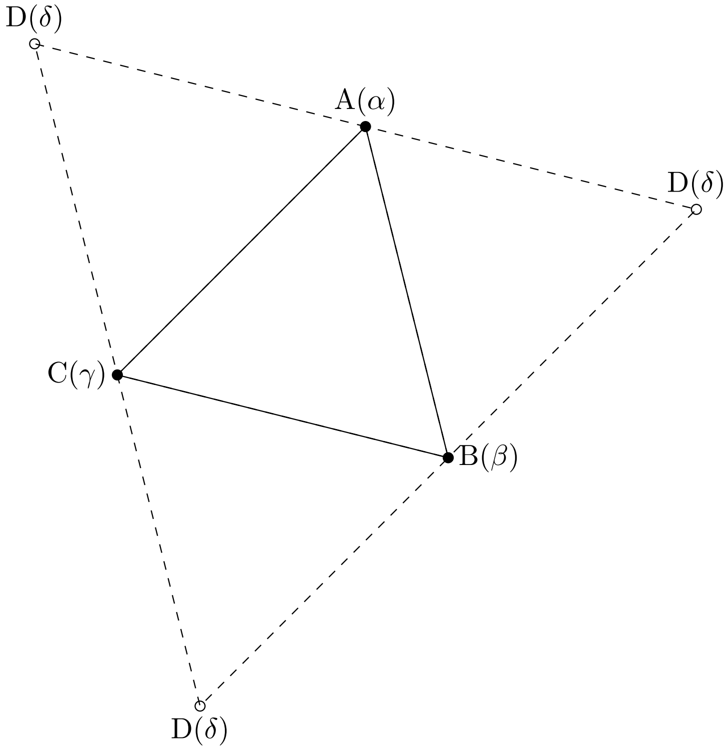
$$\delta = -1 + 4i - 1 - i = -2 + 3i$$

(ii) ABDC が平行四辺形になるとき，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので，$\beta - \alpha = \delta - \gamma$ より

$$\delta = 1 - 4i - 1 - i = -5i$$

(iii) ADBC が平行四辺形になるとき，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ なので，$\delta - \alpha = \beta - \gamma$ より

$$\delta = 4 - i + 2 + 2i = 6 + i$$



よって，求める複素数 δ は,

$$\delta = -2 + 3i, -5i, 6 + i$$

問 3.

(1) 点を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させるには，$\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ をかければよい．よって，求める点は

$$z\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (4+2i)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 2 - \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i$$

(2) $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \tag{1}$$

である．一方で，普通に z_1/z_2 を計算すると,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \tag{2}$$

であるから，(1) と (2) の実部と虚部を比較して，

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

と求まる．

問 4.

与えられた式を整理すると，

$$\begin{aligned}
\frac{6(\cos 8\theta + i\sin 8\theta)(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)}{\cos 2\theta + i\sin 2\theta} &= \frac{6(\cos 8\theta + i\sin 8\theta)(\cos(-3\theta) + i\sin(-3\theta))}{\cos 2\theta + i\sin 2\theta} \\
&= 6(\cos(8-3-2)\theta + i\sin(8-3-2)\theta) \\
&= 6(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \\
&= 6\left(\cos\left(3\times\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(3\times\frac{\pi}{18}\right)\right) \\
&= 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 3\sqrt{3} + 3i.
\end{aligned}$$

問 5.

(1) 解の公式から $z = \dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ なので，これを極形式で表すと

$$z = \cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6}$$

(2) ド・モアブルの定理により，

$$\begin{aligned}
z^6 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
\frac{\pi}{12} &= z^{-12} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1
\end{aligned}$$

なので，$z^6 + \dfrac{1}{z^{12}} = -1 + 1 = 0$ を得る．

問 6.

(1) $|z+2i| = |z-(-2i)| = 3$ なので，この等式を満たす z 全体の集合は $-2i$ からの距離が 3 である複素数全体の集合である．つまり，求める図形は $2i$ を中心とする半径 3 の円．

(2) $|z-(1+2i)| = |i||z-i| = |z-i|$ と変形できるので，この等式を満たす z 全体の集合は $1+2i$ からの距離と i からの距離が等しい複素数全体の集合である．つまり，求める図形は $1+2i$ と i を結ぶ線分の垂直二等分線．

(3) $3|z| = 2|z-5|$ の両辺を 2 乗すると，

$$9z\overline{z} = 2(z-5)(\overline{z}-5) = 4z\overline{z} - 20z - 20\overline{z} + 100$$

であるから，

$$5z\overline{z} + 20z + 20\overline{z} - 100 = 5(z+4)(\overline{z}+4) - 180 = 0$$

両辺を 5 で割れば

$$|z+4|^2 = (z+4)(\overline{z}+4) = 36$$

より

$$|z+4| = 6$$

となるので，求める図形は -4 を中心とする半径 6 の円である．

問 7.

原点を中心とする半径 2 の円周上の点 z は 実数θ を用いて $z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書けるので，

$$w = \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{2}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

である．θ が実数全体を動くとき，$-\theta$ も実数全体を動くので，w が表す図形は原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円である．

問 8.

(1) $1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ であること，および $\pi < \theta < 2\pi$ より $\cos\dfrac{\theta}{2} < 0$ であることに注意して $|z|$ を計算すると，

$$|z| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = -2\cos\frac{\theta}{2}$$

である．次に，$\arg z$ を求めよう．$\arg z = \alpha$ とおくと，

$$\cos\alpha = \frac{1+\cos\theta}{-2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{-2\cos\frac{\theta}{2}} = -\cos\frac{\theta}{2} = \cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\theta}{-2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{-2\cos\frac{\theta}{2}} = -\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)$$

が成り立つ．よって，z の極形式表示は

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

(2) ド・モアブルの定理より，

$$z^{2025} = \left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2025}\left(\cos 2025\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin 2025\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$-2\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ なので，z^{2025} が正の実数になるための条件は，

$$\cos 2025\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) = 1 \Longleftrightarrow 2025\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) = 2n\pi \ (n \text{ は整数}) \tag{3}$$

である．さらに，$\pi < \theta < 2\pi$ より

$$\frac{6075}{2}\pi < 2025\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) < 5050\pi$$

であるから，(3) と合わせて

$$1518.75 = \frac{6075}{4} < n < \frac{5050}{2} = 2525$$

を得る．これを満たす整数 n は $n = 1519, 1520, \ldots, 2523, 2524$ の合計 1006 個である．

$$\theta = \frac{2(2n - 2025)\pi}{2025}$$

なので，求めるべき θ も 1006 個ある．