総合演習 (解答)

問 1

$f(x)=-x^2+2ax-a^2-1\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ.

解答

$f(x)=-x^2+2ax-a^2-1=-(x^2-2ax+a^2)-1=-(x-a)^2-1$ これは軸が $x=a$、頂点が $(a,-1)$ で上に凸の放物線である．定義域は $-1 \leqq x \leqq 1$ であり、軸の位置で場合分けする．

(i) $\boldsymbol{a<-1}$ のとき定義域内で関数は単調減少する．よって、$x=-1$ で最大値をとる．最大値は $f(-1)=-(-1-a)^2-1=\boldsymbol{-a^2-2a-2}$.

(ii) $\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 1}$ のとき頂点が定義域内にあるため、$x=a$ で最大値をとる．最大値は $f(a)=\boldsymbol{-1}$.

(iii) $\boldsymbol{a>1}$ のとき定義域内で関数は単調増加する．よって、$x=1$ で最大値をとる．最大値は $f(1)=-(1-a)^2-1=\boldsymbol{-a^2+2a-2}$.

問 2

x, y を実数とし, $x^2-xy+y^2=1$ を満たすとする．$t=x+y$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) xy を t を用いて表せ.

(2) t の値の範囲を求めよ.

(3) $2x+3xy+2y$ の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ.

(22 滋賀大)

解答

(1) $t=x+y$ の両辺を 2 乗して $t^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$．与式 $x^2-xy+y^2=1$ より $x^2+y^2=1+xy$ であるから、$t^2=(1+xy)+2xy=1+3xy$ これを xy について解くと $\boldsymbol{xy=\dfrac{t^2-1}{3}}$.

(2) x, y は、u についての 2 次方程式 $u^2-(x+y)u+xy=0$ の実数解である．(1) の結果を代入すると $u^2-tu+\dfrac{t^2-1}{3}=0$．この方程式が実数解をもつ条件は、判別式 $D \geqq 0$ である．$D=(-t)^2-4\left(\dfrac{t^2-1}{3}\right)=\dfrac{3t^2-4t^2+4}{3}=\dfrac{4-t^2}{3}$ $D \geqq 0$ より $4-t^2 \geqq 0 \implies t^2 \leqq 4$．よって t の値の範囲は $\boldsymbol{-2 \leqq t \leqq 2}$.

(3) $Z=2x+3xy+2y=2(x+y)+3xy$ とおく．Z を t で表すと $Z(t)=2t+3\left(\dfrac{t^2-1}{3}\right)=t^2+2t-1$．定義域 $-2 \leqq t \leqq 2$ でこの関数の最大・最小を求める．$Z(t)=(t+1)^2-2$ より、頂点は $(-1,-2)$.

- $t=-1$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$.
  このとき $x+y=-1, xy=0$ より、$(\boldsymbol{x, y})=(\boldsymbol{0,-1}),(\boldsymbol{-1,0})$.

- 軸から最も遠い $t=2$ のとき最大値 $\mathbf{7}$.
  このとき $x+y=2, xy=1$ より、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

問 3

a, b を正の定数とする．x, y を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を満たす実数とするとき, $z=\left(\frac{x}{a}\right)^4+\left(\frac{y}{b}\right)^4$ のとりうる値の範囲は $\boxed{②} \leq z \leq \boxed{③}$ である． (20 関西大)

解答

$u=\frac{x}{a}, v=\frac{y}{b}$ とおくと、条件式は $u^2+v^2=1$ となる．このとき $z=u^4+v^4$ である．$z=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=1^2-2u^2v^2=1-2u^2v^2$ $s=u^2$ とおくと、$v^2=1-u^2=1-s$. $u^2 \geqq 0, v^2 \geqq 0$ より、$s \geqq 0, 1-s \geqq 0$ なので、$0 \leqq s \leqq 1$. z を s で表すと、$z(s)=1-2s(1-s)=2s^2-2s+1$. $0 \leqq s \leqq 1$ の範囲で $z(s)$ の値域を求める．$z(s)=2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ これは頂点が $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で下に凸の放物線である．

- $s=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$
- $s=0,1$ のとき最大値 1

よって z のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq z \leqq 1}$. $\boxed{②}$ は $\frac{1}{2}$, $\boxed{③}$ は 1.

問 4

2 次関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ (a, b は定数) は区間 $0 \leq x \leq 3$ における最大値が 3, 最小値が -5 である．このとき, a, b の値の組をすべて求めよ． (名城大)

解答

$f(x)=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$. 軸は $x=1$. 定義域は $0 \leq x \leq 3$.

(i) $\boldsymbol{a>0}$ のとき (下に凸) 最小値は頂点 $x=1$ でとり、$f(1)=-a+b=-5$. 最大値は軸から最も遠い $x=3$ でとり、$f(3)=a(3-1)^2-a+b=3a+b=3$. この連立方程式を解くと、$4a=8 \Longrightarrow a=2$. $b=-5+a=-3$. $a>0$ を満たすので、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\mathbf{2}, \mathbf{-3})$ は解である．

(ii) $\boldsymbol{a<0}$ のとき (上に凸) 最大値は頂点 $x=1$ でとり、$f(1)=-a+b=3$. 最小値は軸から最も遠い $x=3$ でとり、$f(3)=3a+b=-5$. この連立方程式を解くと、$4a=-8 \Longrightarrow a=-2$. $b=3+a=1$. $a<0$ を満たすので、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\mathbf{-2}, \mathbf{1})$ は解である．

(iii) $a=0$ のとき、$f(x)=b$ (定数) となり最大値と最小値が一致するため不適．以上より、求める組は $(\mathbf{2}, \mathbf{-3}), (\mathbf{-2}, \mathbf{1})$.

問 5

a を定数とするとき, 2 次関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ について

(1) 区間 $0 \leq x \leq 2$ におけるこの関数の最大値と最小値を求めよ．

(2) 区間 $0 \leq x \leq 2$ におけるこの関数の最小値が 20 であるとき, a の値を求めよ．

(宇都宮大)

解答

$y = x^2 - 2ax + 2a^2 = (x-a)^2 + a^2$．軸は $x = a$．定義域は $0 \leq x \leq 2$．

(1) 軸の位置で場合分けして最大値と最小値を求める．**最小値**

- $a < 0$ のとき、$x = 0$ で最小値 $\boldsymbol{2a^2}$
- $0 \leq a \leq 2$ のとき、$x = a$ で最小値 $\boldsymbol{a^2}$
- $a > 2$ のとき、$x = 2$ で最小値 $\boldsymbol{2a^2 - 4a + 4}$

最大値 (定義域の中央 $x = 1$ と軸 $x = a$ の位置関係で場合分け)

- $a < 1$ のとき、$x = 2$ で最大値 $\boldsymbol{2a^2 - 4a + 4}$
- $a = 1$ のとき、$x = 0, 2$ で最大値 $\mathbf{2}$
- $a > 1$ のとき、$x = 0$ で最大値 $\boldsymbol{2a^2}$

(2) (1) の最小値の場合分けを用いて、最小値が 20 となる a を求める．

- $a < 0$ のとき、$2a^2 = 20 \implies a^2 = 10$．$a < 0$ より $\boldsymbol{a = -\sqrt{10}}$.
- $0 \leq a \leq 2$ のとき、$a^2 = 20 \implies a = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$．これらは範囲外なので不適.
- $a > 2$ のとき、$2a^2 - 4a + 4 = 20 \implies a^2 - 2a - 8 = 0 \implies (a-4)(a+2) = 0$．$a > 2$ より $\boldsymbol{a = 4}$.

以上より、求める a の値は $\boldsymbol{-\sqrt{10}, 4}$.

問 6

2 次方程式 $mx^2 - x - 2 = 0$ の 2 つの実数解が, それぞれ以下のようになるための m の条件を求めよ.

(1) 2 つの解がともに -1 より大きい.
(2) 1 つの解は 1 より大きく, 他の解は 1 より小さい.
(3) 2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい.

(岐阜大)

解答

$f(x) = mx^2 - x - 2$ とおく．2 つの実数解をもつので $m \neq 0$．判別式 $D = (-1)^2 - 4(m)(-2) = 1 + 8m \geqq 0 \implies m \geqq -\frac{1}{8}$．よって考える m の範囲は $[-\frac{1}{8}, 0) \cup (0, \infty)$．軸は $x = \frac{1}{2m}$.

(1) 2 つの解がともに -1 より大きい.

条件は (i) $D \geq 0$, (ii) 軸 > -1, (iii) $mf(-1) > 0$．(ii) $\frac{1}{2m} > -1 \implies \frac{1+2m}{2m} > 0$．よって $m > 0$ または $m < -\frac{1}{2}$．(iii) $f(-1) = m - 1$．$m(m-1) > 0$ より $m > 1$ または $m < 0$．共通範囲を求めると、$m \geqq -\frac{1}{8}$ と $m < -\frac{1}{2}$ に共通部分はない．$m > 0$ の部分では、$m > 0, m > 1$ の共通部分

は $m>1$. よって $\boldsymbol{m>1}$.

(2) 1 つの解が 1 より大きく、他の解が 1 より小さい.

これは 1 が解の間にある条件なので、$mf(1)<0$. $f(1)=m-3$ なので、$m(m-3)<0$. よって $\boldsymbol{0<m<3}$.

(3) 2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい $\iff$ 2 つの解が -1 と 1 の間にある.

条件は (i) $D\geq 0$, (ii) $-1<$ 軸 <1, (iii) $mf(-1)>0$, (iv) $mf(1)>0$. (ii) $-1<\frac{1}{2m}<1$. $m>0$ のとき $\frac{1}{2}<m$. $m<0$ のとき $m<-\frac{1}{2}$. (iii) $m>1$ または $m<0$. (iv) $m>3$ または $m<0$. 共通範囲を求めると、$m\geqq -\frac{1}{8}$ と $m<-\frac{1}{2}$ に共通部分はない. $m>0$ の部分では、$m>\frac{1}{2}, m>1, m>3$ の共通部分は $m>3$. よって $\boldsymbol{m>3}$.

問 7

(1) a は実数の定数とする．2 次関数 $f(x) = 2x^2 - 4ax + a + 1$ が $x \geq 0$ においてつねに $f(x) > 0$ を満たすような, a の値の範囲を求めよ．

(2) $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての実数 x に対して, $x^2 - 2ax + a - 3 \leq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

(秋田大, 千葉工業大)

解答

(1) $f(x) = 2x^2 - 4ax + a + 1$ の $x \geq 0$ での最小値が正であればよい．軸は $x = a$．(i) $a < 0$ のとき：最小値は $f(0) = a + 1$．$a + 1 > 0 \implies a > -1$．よって $-1 < a < 0$. (ii) $a \geq 0$ のとき：最小値は頂点 $f(a) = -2a^2 + a + 1$．$-2a^2 + a + 1 > 0 \implies 2a^2 - a - 1 < 0 \implies (2a+1)(a-1) < 0 \implies -\frac{1}{2} < a < 1$．$a \geq 0$ との共通範囲は $0 \leq a < 1$．(i), (ii) を合わせて $\boldsymbol{-1 < a < 1}$.

(2) $g(x) = x^2 - 2ax + a - 3$ の $0 \leq x \leq 2$ での最大値が 0 以下であればよい．$g(x)$ は下に凸の放物線なので、最大値は定義域の両端のどちらかでとる．よって、$g(0) \leq 0$ かつ $g(2) \leq 0$ であればよい.

- $g(0) = a - 3 \leq 0 \implies a \leq 3$
- $g(2) = 4 - 4a + a - 3 = 1 - 3a \leq 0 \implies a \geq \frac{1}{3}$

両方を満たす a の範囲は $\boldsymbol{\frac{1}{3} \leq a \leq 3}$.