単元別演習　数列⑤

確率漸化式　(解答)

問 1

正三角形 ABC の頂点を点 P が次のルールに従って移動する：

- 時刻 0 に P は A にいる．
- 1 秒ごとに P は $\dfrac{1}{5}$ の確率で今いる頂点にとどまり，それぞれ $\dfrac{2}{5}$ の確率で他の 2 頂点のいずれかに移動する．

このとき，n 秒後に P が A にいる確率を p_n を求めよ．

解答

n 秒後に P が B にいる確率を q_n，C にいる確率を r_n とおく．$n+1$ 秒後に A にいるのは，

- n 秒後に A にいて，その場にとどまる．
- n 秒後に B にいて，$n+1$ 秒後に A に移る．
- n 秒後に C にいて，$n+1$ 秒後に A に移る．

のいずれかである．これらの確率は順に $\dfrac{p_n}{5}$，$\dfrac{2}{5}q_n$，$\dfrac{2}{5}r_n$ であるから，

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}(q_n + r_n)$$

ここで，$p_n + q_n + r_n = 1$ であるから，

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}(1 - p_n) = -\frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}$$

$p_1 = \dfrac{1}{5}$ に注意してこの漸化式を解くと，

$$\boldsymbol{p_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}}$$

問 2

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は 1 秒ごとに隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ でとどまる．はじめ頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 確率 p_n を求めよ．

(北海道大)

解答

(1) 図形の対称性から，n 秒後に P が B,C,D にいる確率はそれぞれ等しいので，これを q_n とおく．このとき，$p_n+3q_n=1$ に注意しておく．$n+1$ 秒後に P が A にいるのは，

- n 秒後に A にいて，その場にとどまる．
- n 秒後に B,C,D のいずれかにいて，$n+1$ 秒後に A に移る．

のいずれかである．確率は順に $p_n(1-a_n)$，$3q_n\cdot\dfrac{a}{3}=aq_n$ であるから，求める漸化式は

$$\boldsymbol{p_{n+1}=p_n(1-a_n)+aq_n=\left(1-\frac{4a}{3}\right)p_n+\frac{a}{3}.}$$

(2) 上で導いた漸化式を解けば，

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4a}{3}\right)^n}$$