

筆答専門試験科目（午前）

30 大修

数 学 系

時間 9:00～11:30

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題5題すべてに解答せよ.
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で3ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について： \mathbb{R} は実数全体を表す.

[1] 変数 x, y に関する 3 次斉次多項式全体のなす \mathbb{R} 上のベクトル空間を V とする. すなわち

$$V = \{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

このとき $f = f(x, y) \in V$ に対して

$$T(f) = (x + y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

と定める.

- (1) T は V の線形変換であることを示せ.
- (2) T の固有ベクトルから成る V の基底を求めよ.

[2] $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を \mathbb{R} 上の線形写像とし, その階数を r とする. また,

$$S = \{W \subset \mathbb{R}^n \mid W \text{ は } r \text{ 次元部分空間で } f|_W \text{ が単射}\}$$

とする.

- (1) S は空でないことを示せ.
- (2) $r > 0$ であるとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について, $x \in W + W'$ となる $W, W' \in S$ が存在することを示せ.

[3] \mathbb{R}^2 の部分集合

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

を考える. X の部分集合族 \mathcal{O} を

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid (0, 0) \notin U\} \cup \{U \subset X \mid A \subset U\}$$

によって定義する.

- (1) \mathcal{O} が開集合系の公理をみたすことを示せ.
- (2) 位相空間 (X, \mathcal{O}) がハウスドルフ空間ではないことを示せ.
- (3) 位相空間 (X, \mathcal{O}) がコンパクトであることを示せ.
- (4) 位相空間 (X, \mathcal{O}) が可分ではないことを示せ. ただし, 位相空間が可分であるとは, 稠密な高々可算な部分集合をもつことである.

[4] 連続関数 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は極限值 $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ をもつものとする.

(1) $g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx$ に対し, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \alpha$ であることを示せ.

(2) $h(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t x f(x) dx$ に対し, 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ が存在することを示し, その極限值を求めよ.

[5] $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $x < a < y$ かつ $x, y \rightarrow a$ のとき

$$\frac{4}{(x-y)^2} \left\{ f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) \right\} \rightarrow f''(a)$$

が成り立つことを示せ.

筆答専門試験科目（午後）

30 大修

数 学 系

時間 13:00～15:00

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち2題を選択して解答せよ.
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で4ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと. (午前と同じ分野を書くこと.)

記号について:

\mathbb{N} は正の整数全体を表す.

\mathbb{Z} は整数全体を表す. \mathbb{Q} は有理数全体を表す.

\mathbb{R} は実数全体を表す.

\mathbb{C} は複素数全体を表す.

[1] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{-1})$ とする.

(1) K/\mathbb{Q} はガロア拡大であることを示し, そのガロア群を求めよ.

(2) K/\mathbb{Q} のすべての中間体を求めよ.

[2] 有理数係数の 2 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x, y]$ を単項イデアル $(y^2 - x^3 - 1)$ で割った剰余環 $A = \mathbb{Q}[x, y]/(y^2 - x^3 - 1)$ を考える. $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ の A における像を \bar{f} と記す.

(1) $P = (\bar{x}, \overline{y+1})$ は A の極大イデアルであることを示せ.

(2) \bar{x} は A の素元ではないことを示せ.

(3) \bar{x} は A の既約元であることを示せ.

[3] (1) $V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2\}$ が 3 次元 C^∞ 級多様体になることを示せ.

(2) 行列式が正である 3 次実直交行列全体の集合 $SO(3)$ は 3 次実正方行列全体の集合 $M_3(\mathbb{R})$ の 3 次元部分多様体である. これをみとめて (1) の V と $SO(3)$ は微分同相であることを示せ. ただし, $M_3(\mathbb{R})$ は成分をとることにより \mathbb{R}^9 と同一視している.

[4] $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の \mathbb{R}^3 への包含写像を ι とし, \mathbb{R}^3 上の 2 次微分形式

$$\Omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

を考える.

(1) ι による引き戻し $\omega = \iota^* \Omega$ が S^2 上のいたるところ 0 でない微分形式であることを示せ.

(2) 外微分 $d\omega$ を計算せよ.

(3) 3 次実直交行列 A の定める線形写像 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ から誘導される C^∞ 級写像 $f_A: S^2 \rightarrow S^2$ に対して $\left| \int_{S^2} f_A^* \omega \right|$ を計算せよ.

[5] 以下,

$$I = \{t \in \mathbb{R} \mid -1 \leq t \leq 1\},$$

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$$

のそれぞれに \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 の通常の位相に関する相対位相を与えて位相空間と考える. $A \times I$ の二項関係 \sim を

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2), t) \sim ((x'_1, x'_2), t') &\iff ((x_1, x_2), t) = ((x'_1, x'_2), t') \text{ または} \\ &\quad \lceil \{t, t'\} = \{-1, 1\} \text{ かつ } (x'_1, x'_2) = (-x_1, -x_2) \rceil \end{aligned}$$

によって定義する.

- (1) \sim が $A \times I$ の同値関係であることを示せ.
- (2) $A \times I$ の整係数ホモロジー群を求めよ.
- (3) 商空間 $X = (A \times I)/\sim$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

[6] $a > 0$ を定数とする. このとき以下を示せ. ただし, $R > 0$ で

$$L_-(R) = \{-R + it \in \mathbb{C} \mid 0 \leq t \leq a\},$$

$$L_+(R) = \{R + it \in \mathbb{C} \mid 0 \leq t \leq a\}$$

である. また $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ は用いてよい.

$$(1) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_-(R)} e^{-z^2/2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_+(R)} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} \cos ax \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a^2/2}.$$

[7] 以下, (X, \mathcal{B}, μ) を測度空間とし, $\mu(X) < \infty$ とする.

- (1) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を可測関数, k を正の実数, λ を正の実数とする. このとき

$$e^{\lambda k} \mu(\{x \in X \mid f(x) > k\}) \leq \int_X e^{\lambda f(x)} d\mu(x)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $X = \mathbb{R}$, \mathcal{B} をボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, k を正の実数, $d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ とする. このとき

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid x > k\}) \leq e^{-k^2/2}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ は用いてよい.

[8] 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 5x = f(x, x'), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \end{cases}$$

について以下の問いに答えよ. ただし, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ とする.

- (1) $f = 0$ であるとき解 $x(t)$ を求めよ.
- (2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級で $f(0, 0) = 0$ および $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ をみたすとき, $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ のある近傍 U が存在して, $(x_0, x_1) \in U$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となることを示せ. ただし, 解 $x(t)$ が $0 \leq t < \infty$ で存在することは仮定してよい.