２５ 大修

# 専門科目（午前）

## 数学　　時間 9：00〜11：00

**注意事項：**

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．

2. 以下の問題５題すべてに解答せよ．

3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ．

4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．

5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる．

6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと．

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．

[1] $a>0$ とし, $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0\}$ とする. このとき次の広義積分を計算せよ.

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(a^2+x^2+y^2+z^2)^2}$$

[2] $a>0$ とし, $f(x)$ を区間 $I=[-a,+a]$ で定義された関数とする.

(1) $f(x)$ が $I$ 上で連続ならば, ある $b\in I$ に対して

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2af(b)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x)$ が $I$ 上で連続ならば, ある $c\in I$ に対して

$$\int_{-a}^{+a} x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}a^3 f(c)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $f(x)$ が $I$ 上で連続かつ微分可能で, しかも $f'$ が $I$ 上で連続ならば, ある $d\in I$ に対して

$$\int_{-a}^{+a} xf(x)dx = \frac{2}{3}a^3 f'(d)$$

が成り立つことを示せ.

[3] 写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が条件

$$(\varphi(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

を全ての $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して満たすとする. ここで

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \left(\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\right)$$

は $\mathbb{R}^n$ の内積である.

(1) 零ベクトル $\mathbf{0}$ に対して $\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ を示せ.

(2) $\varphi$ は線形写像となることを示せ.

(3) 直交行列 $A$ が存在して $\varphi(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と表されることを示せ.

[4] $V$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし, $W_1, W_2$ を $V$ の部分ベクトル空間とする.
$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$ とおく.

(1) $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ が $V$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間を $X$ とし, $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間を $Y$ とするとき, $X + Y$, $X \cap Y$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

[5] 正の整数 $n$ に対して

$$X^n := \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (\mathbf{0} = (0, \cdots, 0))$$

とおき,

$$d : X^n \times X^n \ni (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \mapsto d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = |\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}| \in \mathbb{R}$$

とすると $d$ は $X^n$ 上の距離を定める. ただし $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ の通常のユークリッド・ノルムである.
このとき, 各 $n$ について次は正しいか. 理由をつけて答えよ.

(1) 距離空間 $(X^n, d)$ は連結である.

(2) 距離空間 $(X^n, d)$ の有界閉集合はコンパクトである.

(3) 距離空間 $(X^n, d)$ はある完備距離空間 $(Y, \delta)$ と同相である.

２５ 大修

# 専門科目（午後）

## 数学　　　時間　１２：３０～１５：００

**注意事項**：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．

2. 以下の問題のうち２題を選択して解答せよ．

3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ．

4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．

5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる．

6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと．（午前と同じ系を書くこと．）

**記号について**：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す．

[1] $G$を有限群とする. $G$の元の位数のなす集合を$a(G)$, $G$の部分群の位数のなす集合を$b(G)$, $G$の位数の約数のなす集合を$c(G)$とする.

(1) $a(G) \subset b(G) \subset c(G)$を証明せよ.

(2) $a(G) = b(G) = c(G)$が成り立つことと$G$が巡回群であることは同値であることを証明せよ.

(3) $G$が有限アーベル群ならば$b(G) = c(G)$が成り立つことを証明せよ.

(4) $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$のとき$a(G)$, $b(G)$, $c(G)$を求めよ.

(5) $G = S_3$ (3次対称群)のとき$a(G)$, $b(G)$, $c(G)$を求めよ.

[2] 次の各問に答えよ.

(1) 可換環$R$の極大イデアルは素イデアルであることを証明せよ.

(2) 実数係数一変数多項式環$\mathbb{R}[x]$の素イデアルをすべて求めよ.

(3) $\sigma$は$\mathbb{R}[x]$の自己環同型で, すべての定数$r \in \mathbb{R}$に対し$\sigma(r) = r$であり, $\sigma(x) = -x$であるものとする. $\mathbb{R}[x]$の素イデアル$I$で$\sigma(I) = I$を満たすものをすべて求めよ.

[3]

$$H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ p,\ q,\ r \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおき, $A \in H(\mathbb{Z})$に対し, $f_A : H(\mathbb{R}) \to H(\mathbb{R})$を

$$f_A(X) = AX$$

により定める.

(1) $H(\mathbb{R})$上の1-形式$\alpha = dz - xdy$に対し, どの点でも$\alpha \wedge d\alpha \neq 0$であることを示せ.

(2) $f_A^* \alpha = \alpha$を示せ.

(3) $H(\mathbb{R})$の元$X$と$Y$に対し, $Y = f_A(X)$となる$A \in H(\mathbb{Z})$が存在するとき$X \sim Y$とすることにより同値関係$\sim$を定める. 商空間$H(\mathbb{R})/\sim$はコンパクト多様体になることを示せ.

(4) $\alpha$は$H(\mathbb{R})/\sim$上の1-形式を定めることを示せ.

[4] $\mathbb{R}^3$の部分集合$A$, $B$を

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ \ |x| + |y| \leqq 1\}$$

によって定義し, $X = A \cup B$とおく. $\mathbb{R}^3$の通常の位相に関する相対位相によって$X$を位相空間と考えるとき, $X$の整係数ホモロジー群を求めよ.

[5] $f$ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分な実数値関数とし，関数 $g(t)$ を

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-t^2 x^2} dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義する.

(1) $g$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

(2) $g$ は $t > 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) $h(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} g(t) e^{-\lambda t^2} dt$ $(\lambda > 0)$ とおく．このとき $\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda)$ を求めよ.

[6] 広義積分 $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$ を求めよ.