**問題 1**

$\triangle$ABC において，$A=\dfrac{2}{3}\pi$ とする．

(1) $\sin B+\sin C$ の取りうる値の範囲を求めよ．

(2) $\sin B\sin C$ の取りうる値の範囲を求めよ．

**問題 2.**

$\triangle$ABC において，

$$\frac{\sin C+\sin(A-B)}{\tan(B+C)}=-2\cos A\cos B$$

を示せ．

**問題 3.**

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対し，$f(\theta)=2\sin^2\theta-4\cos^2\theta+6\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$ とする．

(1) $f(\theta)$ を $\sin 2\theta,\cos 2\theta$ の式で表せ．

(2) $f(\theta)=a+r\sin(2\theta-\alpha)$ を満たす実数 $a,r,\alpha$ を求めよ．ただし，$0\leqq\alpha\leqq\pi$ とする．

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ．

**問題 4.**

$f(x)=4^x+4^{-x}-8(2^x+2^{-x})+10$ とする．

(1) $t=2^x+2^{-x}$ とおいて，$f(x)$ を $t$ の式で表せ．

(2) $f(x)$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ．

**問題 5.**

$f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^2 xf(t)dt$ をみたす $f(x)$ を求めよ．

**問題 6.**

曲線 $C_1: y=x^3$ と曲線 $C_2: y=x^2+x-1$ を考える．

(1) $x^3>x^2+x-1$ を解け．

(2) $C_1$ と $C_2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

**問題 6.**

自然数 $n$ に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}$ であることを示せ．

**問題 8.**

正の整数 $k$ に対して，$a_k$ を $\sqrt{k}$ に最も近い整数とする．例えば，$a_5=2$，$a_8=3$ である．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}a_k$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}a_k$ を求めよ．

**問題 9.**

袋の中に 1 から $n$ までの番号がついた合計 $n$ 個の玉が入っている．この袋から玉を 1 個取り出し，番号を調べてもとに戻す操作を $r$ 回行うとき，取り出された玉の番号の最大値を $X$ とし，$X$ の期待値を $E_n$ とおく．

(1) $k=1,2,\dots,n$ に対して，$X=k$ をとなる確率を求めよ．

(2) $r=2$ のとき，$E_n$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}$ を求めよ．

ヒント：区分求積法を用いる．