2変数関数の最大・最小

例題 1

 $x>0,\ y>0,\ x+y=1$ のとき, $f(x,y)=\left(2+rac{1}{x}
ight)\left(2+rac{1}{y}
ight)$ の最小値を求めよ.

#Point.

2 変数関数の基本は、文字を消して 1 変数関数に帰着させることである。 難関大ではたまに出るので経験があると安心.

₩ 解答

x + y = 1 に注意して展開すると,

$$f(x,y) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{1}{y}\right) = 4 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{xy} = 4 + \frac{2(x+y)+1}{xy} = 4 + \frac{2\cdot 1 + 1}{xy} = 4 + \frac{3}{xy}$$
 である. $y = 1 - x$ より y を消去すると、

$$f(x,y) = 4 + \frac{3}{x(1-x)}$$

f(x,y) が最小になるのは, x(1-x) が最大になるときである. $x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ なので, $x = \frac{1}{2}$ のときに f(x,y) は 最大値16 をとる.

❷問1

 $x + y = 1, 0 \le x \le 2$ のとき, $x - 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ. [07 関西大]

例題 2

 $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 4x + 6$ の最小値とそのときの x, y を求めよ. [14 摂南大]

#Point.

文字を消すための式が足りないときは、ひとまず平方完成をしてみるとよい.

₩ 解答

まずはxの関数として平方完成をして、次に残りをyの関数として平方完成すると.

$$x^{2} + 2(2 - y)x + 2y^{2} - 2y + 6 = (x + (2 - y))^{2} - (y^{2} - 4y + 4) + 2y^{2} - 2y + 6$$
$$= (x - y + 2)^{2} + y^{2} + 2y + 2$$
$$= (x - y + 2)^{2} + (y + 1)^{2} + 1$$

と変形できるので, x-y+2=0, y+1=0 のときに最小値 1 をとる. つまり, x=-3, y=-1 で最小値 1.

1

₽ 問 2

 $\overline{x^2-8xy+17y^2+6x-30y+10}$ の最小値とそのときの x,y を求めよ. [15 北海学園大]

復習問題

₽問3

 $x+y=4, \ x \ge 0, \ y \ge 0$ を満たすとき, $x^2y^2+x^2+y^2+xy$ の最大値と最小値を求めよ.

₽<u>間4</u>

実数 x, y は 2x + y = 2, $x \ge 0$, $y \ge 0$ を満たすとする.

- (1) xy の最大値と最小値を求めよ.
- (2) $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 2xy$ の最大値と最小値を求めよ.

₽ 問 5

 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 7$ の最小値とそのときの x, y を求めよ.