

専門科目（午前）

数学

時間 9 : 0 0 ~ 1 1 : 0 0

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 3 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 2 ページからなる.
6. 口頭試問を代数系, 幾何系, 解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について： \mathbb{R} は実数全体を表す.

[1]

漸化式 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ をみたす実数列 $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ の全体を V とする. V に属する数列 $\mathbf{x} = \{x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_n\}$ および実数 α に対して和 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_n + y_n\}$ と $\alpha\mathbf{x} = \{\alpha x_n\}$ を定義すると, V は線型空間である.

- (1) V に属する数列で, 初めの二項が $x_1 = 1, x_2 = 0$ であるものを \mathbf{e}_1 , 初めの二項が $x_1 = 0, x_2 = 1$ であるものを \mathbf{e}_2 とする. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V の基底となることを示せ.
- (2) V の線型変換 f を $f(\{x_n\}) = \{y_n\}$, ただし $y_n = x_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) により定める. 線型変換 f の $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ に関する表現行列 A を求めよ.
- (3) 表現行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (4) 線型変換 f の固有値と固有ベクトルを求めよ.

[2]

(1) $b_n > 0, n = 2, 3, \dots$, とし, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log b_n) / (\log n) = \alpha$ とする. $\alpha > 1$ ならば $\sum_{n=2}^{\infty} 1/b_n$ は有限の値に収束することを示せ.

(2) 左開区間 $I = (0, 1]$ 上の実数値連続関数 f を考える. 次の命題 (A) と (B) は同値であることを示せ.

(A) f は I 上一様連続である.

(B) 任意の 0 に収束する数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

[3] 次の各命題について正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

1. 位相空間 X のコンパクト集合 A, B の和集合 $A \cup B$ はコンパクトである。
2. 位相空間 X のコンパクト集合 A, B の共通部分 $A \cap B$ はコンパクトである。
3. 位相空間 X の連結部分集合 A, B が交われば、和集合 $A \cup B$ は連結である。
4. 距離空間 (X, d) と狭義単調増加な C^2 級関数 $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\varphi(0) = 0, \varphi''(x) < 0 \quad (0 < x)$$

を満たすものに対して

$$d_1(p, q) = \varphi(d(p, q)) \quad (p, q \in X)$$

とおくと、 d_1 は X 上の距離関数になる。

専門科目（午後）

数学

時間 12:30～15:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題のうち3題を選択して解答せよ。ただし口頭試問を
代数系で受けることを希望する者は、問1～問3のうちから少なくとも1題、
幾何系で受けることを希望する者は、問4～問7のうちから少なくとも1題、
幾何系で受けることを希望する者は、問8～問11のうちから少なくとも1題、
を選択する3題の中に入れること。
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で5ページからなる。
6. 口頭試問を代数系、幾何系、解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の
1ページ目の受験番号の下に書くこと。（午前と同じ系を書くこと。）

記号について：

- \mathbb{R} は実数全体を表す。
 \mathbb{C} は複素数全体を表す。

[1] G を位数 n の巡回群とし $\text{Aut}(G)$ を G の自己同型群とする.

(1) $\text{Aut}(G)$ がアーベル群であることを示せ.

(2) $G^{\text{Aut}(G)} = \{g \in G \mid \text{すべての } \sigma \in \text{Aut}(G) \text{ に対して } \sigma(g) = g\}$ とおくと、 $G^{\text{Aut}(G)}$ が単位元のみから成る群となるための n の条件を求めよ.

[2] 体 K 上の一変数多項式環 $K[X]$ における既約多項式 $f(X)$ と自然数 n に対し、剰余環 $R = K[X]/(f(X)^n)$ の極大イデアルをすべて求めよ.

[3] K を体, \bar{K} を K の代数閉包, \bar{K} の二つの部分体 L, M を K の有限次拡大体とする.

(1) 次の等式

$$[LM : K] = [L : K][M : K] \quad (*)$$

が成立するならば $L \cap M = K$ であることを示せ.

(2) K の標数が素数 p であるとする. K 上代数的な元 α で K 上の最小多項式が $X^p - a$ かつ $L = K(\alpha)$ となるものがあるとする. $L \cap M = K$ ならば等式 $(*)$ が成立することを示せ.

[4] (1) 2次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 に同値関係 \sim を

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}$$

として定義し、商空間を $T = \mathbb{R}^2 / \sim$ とする. \mathbb{R}^2 の線形変換 A を

$$A(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で定義する. ただし $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ かつ $ps - qr = \pm 1$ とする.

このとき A は T の位相同型 f を誘導することを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし、対応する位相同型を $f : T \rightarrow T$ とする.

$T \times [0, 1]$ において $(u, 0)$ と $(f(u), 1)$ ($u \in T$) を同一視した空間を X とおく.

X の整係数ホモロジー群を求めよ.

[5] (1) \mathbb{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場

$$V = f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + h(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

と 3 次微分形式

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

に対して、Lie 微分 $L_V \Omega = d(i_V \Omega) + i_V d\Omega$ を計算せよ。ただし i_V は内部積を表す。

(2) S を \mathbb{R}^3 に埋め込まれた境界のない 2 次元コンパクト C^∞ 級多様体とし、 M を S で囲まれた有界領域とする。また、 S 上の外向きの C^∞ 級の単位法線ベクトル場 N が存在するものとする。 S の各点 p で、 $i_N \Omega$ を S の接ベクトル空間 $T_p(S)$ に制限したものを σ_p とすることにより得られる S 上の 2 次微分形式を σ とする。このとき、

$$\int_M \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \Omega = \int_S \langle V, N \rangle \sigma$$

が成り立つことを示せ。ただし \langle, \rangle は通常の内積である。

[6] 正の定数 a, b が $a^2 + b^2 = 1$ を満たしているとき、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^3 への写像 f を

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto f(u, v) = \left(\frac{a \cos u}{\cosh v}, \frac{a \sin u}{\cosh v}, a(v - \tanh v) + bu \right) \in \mathbb{R}^3$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 $(1, 1)$ を含む \mathbb{R}^2 の領域 U で $f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ がはめ込みを与えるような U のうち最大のを求めよ。

(2) 上の U に対し、はめ込まれた曲面 $f(U)$ のガウス曲率を求めよ。

[7] (1)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

は行列の積に関してリー群であることを示せ。

(2) M 上の 3 次微分形式で左不変なものをすべて求めよ。

[8] \mathbb{R}^2 上の実数値連続関数 f を考える. 任意の $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$A_r(x) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|y-x|<r} f(y) dy, \quad r > 0,$$

$$Bf(x) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^2} (A_r(x) - f(x))$$

とする. ただし, 任意の $\rho > 0$ に対して $\{r^{-2}(A_r(x) - f(x)) ; 0 < r < \rho\}$ が下に有界でないときは, $Bf(x) = -\infty$ とする.

(1) $x = a$ で f が極小値をとるならば, $Bf(a) \geq 0$ であることを示せ.

(2) $f(x) = x_1^4$ のとき, $Bf(x)$ を求めよ.

(3) さらに

$$M_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta,$$

$$Pf(x) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r^2} (M_r(x) - f(x))$$

とおく. このとき $Pf(x) \leq Bf(x)$ を示せ.

[9] $f(x)$ ($x \in [0, 1]$) を非負値可測関数とする. $n = 1, 2, \dots$ に対し, $I_n(f)$ を次で定義する.

$$I_n(f) = n \sum_{k=1}^n \left[\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx \right]^2.$$

(i) f が $[0, 1]$ 上で連続であると仮定して, 次式を示せ.

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_0^1 f^2(x) dx.$$

(ii) f は有界とする. 次の事実を用いて $(*)$ を示せ.

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 非負値連続関数 g が存在して $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$.

(iii) $\int_0^1 f^2(x) dx < \infty$ とする. (ii) の結果を用いて $(*)$ を示せ.

[10] f を $D = \{|z| < 1\}$ で正則, $\bar{D} = \{|z| \leq 1\}$ で連続な関数とする. $a \in D$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) z のべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \bar{a}^n$ が D 上で一様収束することを示せ. さらにこの級数の和を求めよ.

(2)

$$\pi f(a) = \iint_D \frac{f(z)}{(1 - a\bar{z})^2} dx dy \quad (z = x + iy)$$

を証明せよ.

[11] $f(u)$ は \mathbb{R} 上のリプシッツ連続な関数で, $f(0) = 0$ および, $u > 0$ に対して $f(u) < 0$ を満たすとする. 微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t)), \quad u(0) = 1$$

の解 $u(t)$ ($t \geq 0$) に対して, 以下の問に答えよ.

(i) 解 $u(t)$ はすべての $t > 0$ について正の値をとり, $t \rightarrow \infty$ のとき $u(t) \rightarrow 0$ となることを示せ.

(ii) $\lim_{u \rightarrow +0} f(u)/u$ が存在して負の値をとるとき, ある正定数 a, b に対して,

$$e^{-at} < u(t) < e^{-bt}, \quad t \in (0, \infty)$$

が成り立つことを示せ.