平成１１年度東工大大学院試験問題

平成１０年８月２４日　　実施

専門科目（午前）　数学（基礎）: 9:00–11:30

注意事項：以下の問題のうち、問１〜問３は３題とも、問４〜問８の中からは１題を選択し、解答せよ。

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体をあらわす。

[1]　実数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ が与えられているとき

$$c_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$$

を (i, j) 成分とする行列 C を考える。

(i) C の固有値は 0 か純虚数であることを示せ。

(ii) C の 0 でない固有値は 2 個以下であることを示せ。

[2]　距離空間 (X, d) において，点 $a \in X$ と実数 $r > 0$ に対し

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}, \quad C(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

とおく.

(1) $\overline{B(a, r)} \subset C(a, r)$ を証明せよ.

(2) $\overline{B(a, r)} \neq C(a, r)$ となる例を示せ.

[3]　$s > 0$ とする。級数 $\displaystyle\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{1}{(j^2 + k^2)^s}$ が収束するための必要十分条件を求めよ。

（以上が必修問題、以下は選択問題）

[4]　$\mathbb{C}[X, Y]$ を X, Y を変数とする複素数体 $\mathbb{C}$ 上の二変数多項式環とし、2 次実直交行列で行列式が 1 であるもの全体のなす群を G とする。$f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ と $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対し

$$f^g(X, Y) = f(aX + cY, bX + dY)$$

とおく。$\mathbb{C}[X, Y]$ の部分環 A を

$$A = \left\{ f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y] \,\middle|\, \text{すべての } g \in G \text{ に対して } f^g = f \right\}$$

で定義するとき、

$$A = \mathbb{C}[X^2 + Y^2]$$

となることを示せ。

[5]　$\mathbb{R}^n$ の通常の内積を $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$, ノルムを $|| \ ||$ で表す.

(1) $\mathbb{R}^2$ の原点を通る有向直線全体の集合から

$$S^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid ||\mathbf{u}|| = 1\}$$

への全単射を具体的に構成せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の原点を通る (向きを考えない) 直線全体の集合から S^1 への全単射を具体的に構成せよ.

(3) $\mathbb{R}^2$ の有向直線全体の集合から S^1 の接束

$$TS^1 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid ||\mathbf{u}|| = 1,\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$$

への全単射を具体的に構成せよ.

(4) $\mathbb{R}^2$ の (向きを考えない) 直線全体の集合から S^1 の接束 TS^1 への全単射を具体的に構成せよ.

(5) $n \geq 3$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ の有向直線全体の集合から S^{n-1} の接束

$$TS^{n-1} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid ||\mathbf{u}|| = 1,\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$$

への全単射を具体的に構成せよ．$\mathbb{R}^n$ の向きを考えない直線全体の集合からのこのような写像は構成できるか？

[6]　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \cos nx$ は任意の $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ に対して収束し，その極限関数 $f(t, x)$ は $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数になることを示せ.

[7]　区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = |x|$ のフリーエ級数展開を考えることにより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ。

[8]　$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ の開区間の列で

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

を満たすものとする．このとき，$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ の中から互いに交わらない有限個の開区間 $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_k}$ がとれて

$$|I_{n_1}| + |I_{n_2}| + \cdots + |I_{n_k}| > \frac{1}{2}$$

となることを示せ．ただし $|I_{n_\nu}|$ は区間 I_{n_ν} の長さをあらわす.

専門科目（午後）　数学（専門）: 13:00–15:30

注意事項：以下の問題から３題を選択し答えよ。

口頭試問を代数班で受けることを希望する人は問１～問３から少なくとも１題、

口頭試問を幾何班で受けることを希望する人は問４～問６から少なくとも１題、

口頭試問を解析班で受けることを希望する人は問７～問 10 から少なくとも１題を、

選択する３題の中に入れること。

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体をあらわす。

[1]　位数 1998 の群は可解であることを示せ。

[2]　$A = \mathbb{Z}[X, Y]$ を X, Y を変数とする整数環 $\mathbb{Z}$ 上の二変数多項式環とする。p を素数、 I を $p - XY$ で生成される A の単項イデアルとし、商環 $B = A/I$ を考える。

(1) B の素イデアル $\mathfrak{p}$ で次の条件 (i)(ii) をみたすものを全て求めよ。$B/\mathfrak{p}$ の商体を k としたとき

(i) k の標数は p であり、かつ

(ii) k の、素体 F_p 上の超越次数は 1 である。

(2) $\mathfrak{m}$ を p, X, Y の B での像で生成される B のイデアルとする。また $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ をガウスの整数環とする。$p \equiv 3\,(\mathrm{mod}4)$ のとき、環準同型

$$\varphi : B \longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$$

で $\varphi(\mathfrak{m}) \neq \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ なるものは存在しないことを示せ。

[3]　体 K 上の 4 変数多項式環 $K[x, y, z, w]$ の元 $f(x, y, z, w)$ で

$$f(s^3, s^2t, st^2, t^3) = 0 \qquad (K[s,t] \text{ の中で})$$

となるような f のなす集合を I とする。I は $K[x, y, z, w]$ のイデアルであるが、決して 2 つの元 $\varphi, \psi \in I$ によっては生成されないことを示せ。

[4]　M, N を連結な n 次元 C^∞ 級多様体とし，さらに M はコンパクトとする．$f : M \to N$ は C^∞ 級写像で，M の各点 p で f の微分 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ は全射であるとする．このとき次のことを示せ．

(1) N の任意の点 q に対して $f^{-1}(q)$ は有限集合である．

(2) f は全射である．

(3) N の任意の 2 点 q_1, q_2 に対して，集合 $f^{-1}(q_1)$ の個数と $f^{-1}(q_2)$ の個数は一致する．

[5]　$S^k = \{(x_1, \cdots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2 = 1\}$ を k 次元球面とする．

(1) 自然数 n, $m \geq 1$ に対し，$S^n \times S^m$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) $\mathring{D}^{n+m}$ を $S^n \times S^m$ の部分多様体で $(n+m)$ 次元開球体

$$\{(x_1, \cdots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+m}^2 < 1\}$$

と同相であるものとする．このとき，$S^n \times S^m - \mathring{D}^{n+m}$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

[6]　単位円板 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 上で

$$\theta^1 = \frac{2dx}{1 - x^2 - y^2}, \qquad \theta^2 = \frac{2dy}{1 - x^2 - y^2}$$

とおくことにより，第 1 基本形式 $I = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ を考える (これをポアンカレ計量という)．

(1) 接続形式を ω^i_j とするとき，第 1 構造方程式 $d\theta^i = \sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge \omega^i_j$ を用いて ω^1_2 を求めよ．

(2) 第 2 構造方程式 $d\omega^1_2 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ を用いてガウス曲率 K を求めよ．

[7]　D を 複素平面 $\mathbb{C}$ の領域とする．このとき次の問に答えよ．

(i) f を D 上の正則関数とするとき，任意の $z_0 \in D$ と $\{|z - z_0| \leq r\} \subset D$ なる $r > 0$ に対して

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

となることを示せ．

(ii) $f_1, \dots, f_n$ を D 上の正則関数で

$$|f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n|$$

が定数であるとする．このとき $f_1, \dots, f_n$ も定数になることを示せ．

[8] $C_0^1[0,1]$ で $x=0$ および $x=1$ で 0 となる $[0,1]$ 上の C^1 級関数全体をあらわす．このとき次の問に答えよ．

(i) $\varphi \in C_0^1[0,1]$ ならば

$$\int_0^1 \varphi(x)^2 dx \le \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi'(x)^2 dx$$

となることを示せ．

(ii) $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ を $C_0^1[0,1]$ に含まれる関数列で，n に関係しない定数 $M < \infty$ に対して

$$\int_0^1 \varphi_n'(x)^2 dx \le M \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つとする．このとき，$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{\varphi_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ および $[0,1]$ 上の連続関数 ψ が存在して，φ_{n_ν} は ψ に一様収束することを示せ．

[9] $1 < p < \infty$ とし、f を $\mathbb{R}$ 上の p 乗可積分関数とする。$h > 0$ に対して

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

とおく。このとき次の (i), (ii), (iii) を示せ。

(i) $f_h(x)$ は指数 $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ の Hölder 連続関数である。

(ii) $\|f_h\|_p \le \|f\|_p$.

(iii) f が連続関数ならば $\lim_{h \to 0} \|f_h - f\|_p = 0$.

[10] $X_1, X_2, \dots, X_n$ を独立な正値確率変数列で，各 X_j は共通の確率密度関数 $f(x)$ をもち，$f(x)$ は $(0, \infty)$ 上の連続関数とする．すなわち，$P(E)$ で 事象 E の起こる確率をあらわすとき，

$$P(a \le X_j \le b) = \int_a^b f(x) dx \quad (0 \le a < b, \quad 1 \le j \le n)$$

である．$t > 0$ に対して $[0, t]$ に含まれる $X_1, X_2, \dots, X_n$ の個数を $N_n(t)$ であらわすとき，次の問に答えよ．

(i) $t > 0$ および非負整数 $0 \le k \le n$ に対して $P(N_n(t) = k)$ を求めよ．

(ii) $0 < s < t$ および非負整数 $0 \le k \le m \le n$ に対して $P(N_n(s) = k, N_n(t) = m)$ を求めよ．

(iii) $f(x)$ が $x = 0$ で右極限をもち，$a = \lim_{x \searrow 0} f(x) > 0$ を満たすとき，$0 < s < t$ および非負整数 $0 \le k \le m$ に対して $\lim_{n \to \infty} P\left(N_n(\frac{s}{n}) = k, N_n(\frac{t}{n}) = m\right)$ を求めよ．

外国語科目：16:00–17:00

S.Bochner“The role of Mathematics in the rise of Sciences”より選んだ文章の和訳。文章自体はここでは割愛する。