筆答専門試験科目（午前）　　2020 大修

数 学 系　　時間　９：００～１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題５題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題ごとに別々の答案用紙に記入せよ.
4. 各答案用紙ごとに必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを答案用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] 関数 $f(x)$ は区間 $[\,a,\,b\,]$ 上で微分可能かつ $\bigl|f'(x)\bigr| \leq K$ を満たすものとする．このとき，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \right| \;\leq\; \frac{K\,(b-a)^2}{N}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$x_k = a + \dfrac{k}{N}\,(b-a)$ とする．

[2] $\bigl\{a_n\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし，$\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \bigl(a_{n+1} - a_n\bigr) = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$ が存在することを示し，その値を求めよ．

[3] $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X = \Bigl\{\,(0,\,0),\,(0,\,1)\,\Bigr\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n},\,y\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\,0 \leq y \leq 1 \right\}$$

に対して，$\mathbb{R}^2$ の通常位相から定まる相対位相を与える．

(1) X の $(0,\,0)$ を含む連結成分を求めよ．

(2) X の部分集合 A で，以下の条件 (i) と (ii) をともに満たすものは存在するか．

 (i) $(0,\,0) \in A$ かつ $(0,\,1) \notin A$.

 (ii) A は X の開集合かつ閉集合.

[4] V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $\mathrm{End}(V)$ を V の線形変換全体のなす集合とする. 零写像でない $f \in \mathrm{End}(V)$ に対して, 次の 2 つの条件 (a), (b) は同値であることを証明せよ.

(a) f は同型写像である.

(b) 任意の $g \in \mathrm{End}(V)$ に対して, $\mathrm{rank}(f \circ g) = \mathrm{rank}(g \circ f)$ が成り立つ.

[5] d を 2 以上の整数とし, 次数が d より小さい複素数係数多項式の全体のなす $\mathbb{C}$ 上の d 次元ベクトル空間 V_d を考える.

$$V_d = \left\{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \;\middle|\; \deg f(x) < d \right\}$$

また, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ に対して, V_d の線形変換 $\varphi_{a,b} \colon V_d \to V_d$ を

$$\varphi_{a,b} \colon f(x) \longmapsto f(ax+b)$$

で定義する.

(1) $d = 4$, $a = -1$ のとき, $\varphi_{a,b}$ の固有値を求め, 各固有値に関する固有空間の基底を求めよ.

(2) 一般の d, a および b に対し, $\varphi_{a,b}$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\varphi_{a,b}$ が V_d の適当な基底により対角行列で表現できるための必要十分条件を, a と b を用いて表せ.

筆答専門試験科目（午後）　2020 大修

数 学 系　時間　１３：００〜１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題ごとに別々の答案用紙に記入せよ.
4. 各答案用紙ごとに必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを答案用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] $f\colon A\to B$ を可換環の準同型，I を A のイデアルとする．IB で $f(I)$ で生成された B のイデアルを表し，$p\colon A\to A/I$ と $q\colon B\to B/IB$ は標準的全射準同型とする．

(1) $\overline{f}\circ p=q\circ f$ を満たす環準同型 $\overline{f}\colon A/I\to B/IB$ が一意的に存在することを示せ．

(2) $h\circ f=p$ かつ $q=\overline{f}\circ h$ を満たす環準同型 $h\colon B\to A/I$ が存在するとき，任意の $y\in B$ は，ある $z\in A$ と $w\in \mathrm{Ker}(h)$ によって $y=f(z)+w$ と書けることを示せ．

(3) (2) のとき，$\overline{f}$ は同型であることを示せ．

[2] K は標数 $p>0$ の代数閉体とする．整数 $r\geq 1$ および K-係数の p^r 次多項式

$$f=c_0X+c_1X^p+\cdots+c_rX^{p^r}=\sum_{j=0}^{r}c_jX^{p^j}$$

を固定する．ただし $c_0\neq 0,\, c_r\neq 0$ と仮定する．f が定める写像

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

も同じ記号 f により表す．写像 $f:K\to K$ を k 回合成したものを f^k と表す．

$A=\mathbb{F}_p[T]$ を p 元体 $\mathbb{F}_p$ 上の 1 変数多項式環とする．A の K への作用を，$a=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kT^k\in A$ および $x\in K$ に対し

$$ax\;=\;\sum_{k=0}^{n}a_kf^k(x)$$

により定める．これにより K は A-加群となる．また，各 $a\in A$ に対し $V_a=\{x\in K \mid ax=0\}$ とおく．

(1) $a\neq 0$ ならば V_a は有限生成 A-加群であることを示せ．

(2) $a=T$ のとき，V_a の A-加群としての構造を

$$A^{\oplus m}\oplus A/a_1A\oplus\cdots\oplus A/a_lA$$

(m,l は 0 以上の整数，$a_1,\cdots,a_l\in A$) の形で求めよ．

(3) K は A-加群として有限生成ではないことを示せ．

[3] c を実定数とする．4 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M_c を次のように定める．

$$M_c=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4=c\right\}$$

(1) $c\neq 0$ のとき，M_c は $\mathbb{R}^4$ の部分多様体であることを示せ．

(2) $c\neq 0$ のとき，M_c は $\mathbb{R}^2\times S^1$ と微分同相であることを示せ．ここで，S^1 は円周を表す．

[4] $\omega \in \mathbb{C}$ を 1 の原始立方根とし, $a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$[a,\, b] \;=\; \left\{\, ta + (1-t)b \;\middle|\; t \in \mathbb{R},\, 0 \le t \le 1 \,\right\}$$

とおく. $\mathbb{C}$ の部分集合

$$P \;=\; \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \,\right\} \cup \big[0,\, 1\big] \cup \big[0,\, \omega\big] \cup \big[0,\, \omega^2\big]$$

に対し, $P \times [0,\, 1]$ の,

$$\big(z,\, 0\big) \sim \big(\omega z,\, 1\big) \quad (z \in P)$$

で生成される同値関係による商空間

$$X \;=\; P \times \big[0,\, 1\big] \,/\, \sim$$

を考える. X の整数係数ホモロジー群 $H_*(X)$ を求めよ.

[5] D を $\mathbb{C}$ 内の原点 0 を含む単連結領域とし, 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は $f(0) = 0$ かつ $z \neq 0$ のとき $f(z) \neq z$ を満たすものとする. また, $\lambda = f'(0)$ とおき, 0 を中心とする D 内の円周 C を 1 つとり,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - f(z)}\, dz$$

とおく. ただし, 積分路は円周 C 上を反時計回りに 1 周するものとする.

(1) $\lambda \neq 1$ のとき, I の値を求めよ.

(2) $\lambda = 1$ かつ $I = 2019$ となるような $f : D \to \mathbb{C}$ の例を 1 つ求めよ.

[6] 実数 $1 \le p < \infty$ に対して, 数列空間

$$l^p = \left\{ \left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; a_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|^p < \infty \right\}$$

は $\left\| \left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{l^p} = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|^p \right)^{1/p}$ をノルムとしてバナッハ空間になる. また, 実数 $\alpha \ge 0$ に対して,

$$T_\alpha\Big(\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} \Big) = \left\{n^{-\alpha} a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

と定める.

(1) 任意の $p > 1$ に対して, $l^1 \subset l^p$ であることを示せ.

(2) $\alpha > \dfrac{1}{2}$ ならば, T_α は l^2 から l^1 への有界線形作用素となることを示せ.

(3) $T_{1/2}$ が l^2 から l^1 への有界線形作用素となるかどうかを判定し, それを証明せよ.

(4) $\alpha > \dfrac{1}{2}$ ならば, l^2 の任意の有界集合の T_α による像が, l^1 の相対コンパクト集合となることを示せ.

[7] $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値ルベーグ可積分関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，ほとんどすべての点である関数 f に収束しているものとする．このとき，以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

(1) ϕ はある有界区間の外では値 0 をとる連続関数とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)f_n(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)f(x)\,dx$$

が成り立つ．

(2) 任意の $\epsilon>0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} m\Big(\big\{\,x\in\big[-\epsilon^{-1},\,\epsilon^{-1}\big]\ \big|\ \big|f(x)-f_n(x)\big|>\epsilon\big\}\ \Big)\ =\ 0$$

が成り立つ．ここで，m はルベーグ測度である．

(3) Φ は $\mathbb{R}$ 上で定義された非負値連続関数で，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\Phi\big(f_n(x)\big)\,dx=0$$

とする．このとき，$\Phi\big(f(x)\big)=0$ がほとんどすべての x に対して成り立つ．

(4) Ψ は $\mathbb{R}^2$ 上で定義された連続関数で，あるコンパクト集合の外では値 0 をとるとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\Psi\big(x,\,f_n(x)\big)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\Psi\big(x,\,f(x)\big)\,dx$$

が成り立つ．

[8] 実数値関数 $u(t)$ は $t\geq 0$ で連続であるとする．

(1) $u(t)$ がすべての $t\geq 0$ に対して

$$u(t)\leq\int_0^t u(s)\,ds+c\quad(c\text{ は定数})$$

を満たせば，$t\geq 0$ に対して $u(t)\leq c\,e^t$ が成り立つことを示せ．

(2) $u(t)$ がすべての $t\geq 0$ に対して

$$u(t)\leq\int_0^t (s+1)^{-1}u(s)\,ds+(t+1)^2$$

を満たせば，$t\geq 0$ に対して

$$u(t)\leq 2\,t^2+3\,t+1$$

が成り立つことを示せ．

(3) 「すべての $t\geq 0$ に対して

$$u(t)\geq\int_0^t u(s)^2\,ds+1\quad」$$

を満たすような $u(t)$ は存在しないことを示せ．