１８　大修

専門科目（午前）

数学

時間　９：００〜１１：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題3題すべてに解答せよ.
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で２ページからなる.

記号について:

$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.

$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

$\boxed{1}$ A を m 行 n 列行列，B を n 行 m 列行列とする．

(1) λ が AB の固有値で，しかも $\lambda \neq 0$ ならば λ は BA の固有値でもあることを示せ．

(2) λ が AB の 0 でない固有値のとき，λ に対する AB の固有空間の次元と BA の固有空間の次元が等しいことを示せ．

$\boxed{2}$ f を区間 $[0,1]$ 上の正値連続関数とする．次を示せ．

(1) $t \to +0$ のとき，

$$\frac{f(x)^t - 1 - t\log f(x)}{t}$$

は $[0,1]$ 上，零に一様収束する．

(2) $$\lim_{t\to+0}\left(\int_0^1 (f(x))^t dx\right)^{1/t} = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)\,dx\right).$$

$\boxed{3}$ $\mathbf{R}$ は通常の位相を持つユークリッド空間とし，$\mathbf{R}$ における次の同値関係 $\sim$ を考える：

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbf{Q}$$

このとき，以下を示せ．

(1) 商集合 $\mathbf{R}/\!\sim$ は非可算集合である．

(2) 商空間 $\mathbf{R}/\!\sim$ はハウスドルフ空間でない．

(3) 商空間 $\mathbf{R}/\!\sim$ はコンパクトである．

１８　大修

専門科目（午後）

数学

時間　１２：３０～１５：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち3題を選択して解答せよ. ただし口頭試問を
代数系で受けることを希望する者は, 問 1～問 3のうちから少なくとも1題,
幾何系で受けることを希望する者は, 問 4～問 6のうちから少なくとも1題,
解析系で受けることを希望する者は, 問 7～問 10のうちから少なくとも1題,
を選択する1題の中に入れること.
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で４ページからなる.
6. 口頭試問を代数系, 幾何系, 解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す.

$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.

$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.

$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

$\boxed{1}$ 正の整数 n に対して位数 n の群の同型類の個数を $g(n)$ とする.

(1) n が素数のとき $g(n)=1$ を示せ.

(2) 各 $n=1,2,3,4,5$ に対して $g(15n)=1$ となるかどうか調べよ.

$\boxed{2}$ p を素数とする.

(1) 環 $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ の可逆元と零因子の個数を求めよ.

(2) 群 $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ の位数 p^2 の巡回部分群の個数を求めよ.

$\boxed{3}$ ζ_{20} を 1 の原始 20 乗根とするとき，体 $\mathbf{Q}(\zeta_{20})$ の部分体はいくつあるか. また各部分体の $\mathbf{Q}$ 上の生成元をみつけよ.

$\boxed{4}$ xy-平面上の直線全体の集合を M とし， x 軸に平行でない直線全体のなす M の部分集合を U, y 軸に平行でない直線全体のなす M の部分集合を V とする. U の元 $ax+by+c=0$ に $\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)$ を対応させる写像 $U \to \mathbf{R^2}$ を φ, V の元 $ax+by+c=0$ に $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{b}\right)$ を対応させる写像 $V \to \mathbf{R^2}$ を ψ とする.

(1) 「M の部分集合 A は $\varphi(A\cap U)$, $\psi(A\cap V)$ がともに $\mathbf{R^2}$ の開集合であるときに M の開集合である」と定めることにより M に位相が入る. この位相に関して M は 2 次元 C^∞ 級多様体になることを示せ.

(2) M の各元に対して原点 $(0,0)$ からこの直線までの距離の 2 乗を対応させる関数 $f : M \to \mathbf{R}$ が C^∞ 級であることを示し，f の臨界点の成す集合 N を求めよ.

(3) N の補集合 $M \setminus N$ が連結であることを示せ.

$\boxed{5}$ S^2 を xyz-空間の原点を中心とする単位球面とし，$f : S^2 \to \mathbf{R}$ を高さ関数 $f(x,y,z)=z$ とする.

(1) f の臨界点，すなわち $df=0$ となる点を求めよ.

(2) M を S^2 の k 個の直積とし，$F : M \to \mathbf{R}$ を M の各点 $(p_1, \cdots, p_k) \in M = S^2 \times \cdots \times S^2$ に対して，

$$F(p_1, \cdots, p_k) = f(p_1) + \cdots + f(p_k)$$

とおく． k が奇数のとき $F^{-1}(0)$ は C^∞ 級部分多様体であること示せ．

$\boxed{6}$ 四面体（内部も含む） $ABCD$ の面 ABC と ADC，面 ABD と CBD をそれぞれ同一視してできる空間を X とする．ただし，頂点がこの順で一致するものとする．また，四面体 $ABCD$ の辺全体からこの同一視によって得られる空間を Y とする．

(1) X のホモロジー群を求めよ．

(2) Y のホモロジー群を求めよ．

(3) Y の 補集合 $X \setminus Y$ のホモロジー群を求めよ．

$\boxed{7}$ f を $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数とし，$t \in \mathbf{R}$ の関数 g を

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos tx \, dx$$

により定義する．f は実数値をとるものとする．以下を示せ．

(1) g は $\mathbf{R}$ 上一様連続である．

(2) $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\int_0^\infty g(t) e^{-\varepsilon t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} dx.$$

(3) f が有界で原点で連続であれば

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^\infty g(t) e^{-\varepsilon t} dt = \pi f(0).$$

$\boxed{8}$ (1) $f(z)$ を単位円板上の非定数正則関数とする．$z_0 \in \mathbf{C}$, $|z_0| < 1$, が f の n 位の a 点（$a \in \mathbf{C}$）のとき $zf'(z)/(f(z) - a)$ の $z = z_0$ での留数を求めよ．

(2) z についての方程式

$$ze^{-z} - w = 0$$

は，w が原点の十分小なる近傍にあるとき，唯一の解 $\varphi(w)$ を持つことを示せ．

(3) (2) で求めた $\varphi(w)$ は $w = 0$ のまわりで正則になることを示し，$w = 0$ のまわりでの φ の Taylor 展開とその収束半径を求めよ．

$\boxed{9}$ $[0,1] \times [0,1]$ 上の連続関数 $f(x,y)$ で

$$f(x,y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(s,t)dsdt$$

を満たすものは高々一つしかないことを示せ．

$\boxed{10}$ $I = (-1,1)$ として，区間 I 上の可積分関数全体からなる Banach 空間 $X = L^1(I)$ を考える．ここで X のノルムは

$$\|u\| = \int_{-1}^1 |u(x)|dx \qquad (u \in X)$$

である．I 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & -1 < x < -1/2, \\ x, & -1/2 \le x \le 1/2, \\ 1/2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

を用いて X 上の作用素 A を

$$(Au)(x) = f(x)u(x) \qquad (u \in X)$$

により定義する．

(1) λ を実数，J を X 上の恒等作用素とする．$A - \lambda J$ が単射になるための必要十分条件および全射になるための必要十分条件を求めよ．

(2) $\|A\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Au\|$ を求めよ．