平成１２年度東工大大学院試験問題

平成１１年８月２３日　　実施

専門科目（午前）　数学（基礎）：9:00–11:30

注意事項：以下の問題のうち、問１〜 問３は３題とも、問４〜 問６の中からは１題を選択し、解答せよ。

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体をあらわす。

[1]　A を (m,n) 型の 0 でない複素行列とする。

(1) (n,m) 型行列 $X \neq 0$ で $AX=0$、$XA=0$ を満たすものが存在するための A に対する必要十分条件を求めよ。

(2) A は (1) の条件を満たすものとする。このとき $Ax=0$ となる $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ と ${}^tAy=0$ となる $y \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ が存在することを示せ。さらに、$X = x{}^ty$ とおくと、X は (1) の解となることを示せ。

(3) 上の (2) で得られた X の階数を求めよ。また、(2) のようにしては得られない解 X を持つ A の例を挙げよ。

[2]　$X=[-1,1]\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ に普通のユークリッド距離位相を入れる。

(1) X 内の曲線を

$$l=\{-1\}\times\mathbb{R},\quad m=\{1\}\times\mathbb{R},\quad c(a)=\{(x,\frac{x}{1-x^2}+a)\mid -1<x<1\}\quad (a\in\mathbb{R})$$

で定義する。X 内の 2 点が同一の l, m または $c(a)$ 上にあるとき同値とする同値関係を σ とする。σ による X の商空間 $Y=X/\sigma$ に X からの商位相を入れる。このとき Y は $[-1,1]$ と同相であることを示せ。

(2) $c(a)$ の代わりに $d(a)=\{(x,\frac{1}{1-x^2}+a)\mid -1<x<1\}$ $(a\in\mathbb{R})$ を使うと Y はハウスドルフ空間になるか。

[3]　$\alpha>0$ とする。関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

で定義するとき、以下の (1), (2) を示せ。

(1) f が原点 $(0,0)$ で連続となるための必要十分条件は $\alpha>\frac{1}{2}$ となることである。

(2) f が原点 $(0,0)$ で全微分可能となるための必要十分条件は $\alpha>1$ となることである。

（以上が必修問題、以下は選択問題）

[4]　$N(x)\in\mathbb{C}[x]$ を 1 次以上の多項式とする。$a(x)\in\mathbb{C}[x]$ の $A=\mathbb{C}[x]/(N(x))$ への像を $\overline{a(x)}$ と書く。このとき次は同値であることを示せ。

(1) $N(x)=0$, $a(x)=0$ は共通根を持たない。

(2) $\overline{a(x)}$ は A の零因子ではない。

(3) $\overline{a(x)}$ は A の単元である。

[5]　S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面、c を正の実数とする。S 上の点を位置ベクトル $\mathbf{p}$ で表し。$\mathbf{p}$ を $c\mathbf{p}$ に移すことにより、S を相似拡大した曲面 S^* が得られる。$\mathbf{p}\in S$ と $c\mathbf{p}\in S^*$ におけるガウス曲率がどのような関係にあるか理由を述べて記述せよ。

[6]　$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ とし、$f(x,y,t)$ を $\mathbb{R}^3$ の開集合 $D \times \mathbb{R}$ で定義された連続関数で、次の 2 条件を満たすものと仮定する：

(i) ある正数 K が存在して、集合 $\{(x,y) \in D \mid x^2 + y^2 \geq K\} \times \mathbb{R}$ 上で、$f(x,y,t) = 0$,

(ii) ある正数 M が存在して、集合 $D \times \mathbb{R}$ 上で、$|f(x,y,t)| \leq \frac{M}{|x-y|^{1/2}}$,

このとき、次の問に答えよ。

(1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して積分

$$F(t) = \iint_D f(x,y,t)dxdy$$

が存在することを示せ。

(2) $F(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であることを示せ。

専門科目（午後）　数学（専門）：13:00–15:30

注意事項：以下の問題から 3 題を選択し答えよ。ただし、

口頭試問を代数班で受けることを希望する人は問 2 〜問 4 から少なくとも 1 題、

口頭試問を幾何班で受けることを希望する人は問 5 〜問 7 から少なくとも 1 題、

口頭試問を解析班で受けることを希望する人は問 8 〜問１１ から少なくとも 1 題を、

選択する 3 題の中に入れること。

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体をあらわす。

[1]　$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ のノルムを $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ で定義する。$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$, $\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ とする。

(1) $\bar{D}$ 上の実数値関数 f が C^1 級ならば Lipschitz 連続である。すなわち、正定数 M が存在して

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \quad (\forall x, y \in \bar{D})$$

であることを示せ。

(2) 関数 g が $\bar{D}$ 上 Lipschitz 連続ならば C^1 級か？C^1 級ならば証明を、そうでないならば反例を与えよ。

(3) D 上の C^1 級関数 h は Lipschitz 連続か？ Lipschitz 連続ならば証明を、そうでないならば反例を与えよ。

[2]　p_1, p_2, p_3 を相異なる素数とする。$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{p_3})$ に含まれる $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大をすべて求めよ。

[3]　G は群、N はその正規部分群、$N \cong \mathbb{Z}$, $G/N \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のとき、G はアーベル群であり、さらに $G \cong \mathbb{Z}$ または、$G \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ となることを示せ。

[4]　p を素数とし、$f(x) = x^7 - 1 \in F_p[x]$ とする。

(1) $p = 2$ のとき $f(x)$ を既約多項式の積に分解せよ。

(2) $\xi \in \overline{F_p}$ を $\xi \neq 1$ かつ $f(\xi) = 0$ とする。拡大次数 $[F_p(\xi) : F_p]$ を求めよ。ただし F_p は標数 p の素体、$\overline{F_p}$ はその代数的閉包とする。

[5]　M, N, L を滑らかな多様体、L を N の部分多様体とする。M から N への滑らかな写像 f があって $f(p) = q$ なる任意の p, q に対し

$$df(T_pM) + T_qL = T_qN$$

が成り立っているならば、$f^{-1}(L)$ は M の部分多様体になることを示せ。

[6]　$\mathbb{R}^3$ 内の 2 次微分形式 $\boldsymbol{\sigma}$ を $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4\pi}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$ とおく。

(1) 3 次直交行列 A の定める線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し $f^*\boldsymbol{\sigma} = \pm\boldsymbol{\sigma}$ が成り立つことを示せ。

(2) S^2 を $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とし、$\iota : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする。$\int_{S^2} \iota^*$ を計算せよ。

[7]　$\mathbb{R}^3$ 内の曲線 $S^1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対して、$\mathbb{R}^3 - S^1$ の整係数ホモロジー群を計算せよ。

[8]　$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は独立な確率変数列で、各 X_n は $\{0\}, \{1\}$ の値をとり、$P(X_n = 1) = \alpha$、$P(X_n = 0) = 1 - \alpha$ とする。ただし $0 < \alpha < 1$。いま $X_n = 1$, $X_{n-1} = 1$ となる始めての番号 $n (\geq 2)$ を Y とする。すなわち、

$$Y = \min\{n \geq 2 \mid X_n = X_{n-1} = 1\}$$

(1) $p(k) = P(Y = k)$, $(k \geq 2)$ とおくとき $p(2), p(3), p(4), p(5)$ を求めよ。

(2) $k \geq 4$ に対して、

$$p(k) = \alpha(1 - \alpha)p(k - 2) + (1 - \alpha)p(k - 1)$$

を示せ。

(3) Y の母関数 $G(s) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} p(k)s^k$, $(|s| \leq 1)$ 及び Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ。

[9]　a, b を正の実数とし、$R = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re z \leq a,\ 0 \leq \Im z \leq b\}$ とおく。f は R の内部で非定数有理型で、任意の $\zeta \in \partial R$ に対し、$f(\zeta) = \displaystyle\lim_{z \to \zeta} f(z)$ が存在し $f(\zeta) \neq \infty$ となるものとする。ただし z は R の内部から ζ へ近づくものとする。さらに、

$$f(x) = f(x + bi), \quad f(yi) = f(a + yi),$$

が任意の $x \in [0, a]$ と任意の $y \in [0, b]$ に対して成り立つと仮定する。このとき以下を示せ。

(1) f は $\mathbb{C}$ 全体に有理型に拡張される。

(2) R 内の f の極の位数の和は 2 以上である。

(3) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し、$f(\zeta) = \alpha$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は無限個ある。

[10]　$\mathbf{B}$ を $\mathbb{R}$ のボレル集合体とし、μ は $\mathbf{B}$ 上の測度で $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |x|} \mu(dx) < \infty$ を満たすとする。φ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で定数 M に対し $|\varphi(x)| \leq \dfrac{M}{1 + |x|}$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ であるとする。

$$f_\eta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{\eta^2 + |x - \xi|^2} \mu(dx), \quad (\xi \in \mathbb{R},\ \eta > 0)$$

とおくとき、次の (1)、(2) を示せ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(\xi)|\varphi(\xi)|d\xi < \infty.$

(2) $\displaystyle\lim_{\eta \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mu(dx).$

[11]　f は $[-1, 1]$ 上の Hölder 連続、すなわち $\alpha \in (0, 1)$ と、$c > 0$ が存在して、$|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^\alpha$, $(\forall t, s \in [-1, 1])$ を満たすとする。$z \in \mathbb{C} - [-1, 1]$ に対して、$F(\zeta) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt$ とおく。

(1) F は $\mathbb{C} - [-1, 1]$ 上の正則関数であることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t - i\epsilon}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{\epsilon \downarrow 0} F(i\epsilon)$ の存在を示せ。