単元別演習　数列②

漸化式 (応用①)　(解答)

問 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \end{cases}$　(2) $a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n - b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n \end{cases}$

解答

(1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n) \cdots (*)$ に与えられた漸化式を代入して a_{n+1}, b_{n+1} を消去すると，

$$(2a_n + b_n) + \alpha(3a_n + 4b_n) = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

これを整理すると，

$$(3\alpha + 2)a_n + (4\alpha + 1)b_n = \beta a_n + \alpha\beta b_n$$

両辺の係数を比較することにより，

$$\begin{cases} 3\alpha + 2 = \beta \\ 4\alpha + 1 = \alpha\beta \end{cases}$$

これを解くと，$(\alpha, \beta) = \left(-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$，$(1,\ 5)$ である．

(i) $(\alpha, \beta) = \left(-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ を $(*)$ に代入すると，

$$a_{n+1} - \frac{1}{3}b_{n+1} = a_n - \frac{1}{3}b_n$$

なので，$\left\{a_n - \dfrac{1}{3}b_n\right\}$ は初項 $a_1 - \dfrac{1}{3}b_1 = 3 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{3}$，公比 1 の等比数列である．したがって，

$$a_n - \frac{1}{3}b_n = \frac{7}{3} \quad \therefore 3a_n - b_n = 7$$

(ii) $(\alpha, \beta) = (1,\ 5)$ を $(*)$ に代入すると，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5\,(a_n + b_n)$$

なので，$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 3 + 2 = 5$，公比 5 の等比数列である．したがって，

$$a_n + b_n = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$$

以上より

$$\boldsymbol{a_n = \frac{5^n + 7}{4},\ b_n = \frac{3 \cdot 5^n - 7}{4}}$$

(2) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)\cdots(*)$ に与えられた漸化式を代入して a_{n+1}, b_{n+1} を消去すると，

$$(2a_n-b_n)+\alpha(a_n+4b_n)=\beta(a_n+\alpha b_n)$$

これを整理すると，

$$(\alpha+2)a_n+(4\alpha-1)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$$

両辺の係数を比較することにより，

$$\begin{cases}\alpha+2=\beta\\4\alpha-1=\alpha\beta\end{cases}$$

これを解くと，$(\alpha,\beta)=(1,3)$．このとき，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

となり，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列なので，

$$a_n+b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

これより $b_n=3^n-a_n$．これを $a_{n+1}=2a_n-b_n$ に代入すると，

$$a_{n+1}=2a_n-(3^n-a_n)=a_{n+1}=3a_n-3^n$$

これは指数関数型の漸化式なので簡単に解けて，$a_n=3^nc_n=3^n\cdot\dfrac{2-n}{3}=(2-n)3^{n-1}$ である．これより

$$b_n=3^n-a_n=(n+1)3^{n-1}.$$

以上より，

$$\boldsymbol{a_n=(2-n)3^{n-1},\ b_n=(n+1)3^{n-1}}$$

問 2

$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{1-5a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解答

初項と漸化式の形から $a_n\neq 0$ である．与えられた漸化式の両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3a_n}-\frac{5}{3}$$

であるから，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n-\dfrac{5}{3}$．これより $b_n=\dfrac{6-5\cdot 3^{n-1}}{2\cdot 3^{n-1}}$ であるから，

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2\cdot 3^{n-1}}{6-5\cdot 3^{n-1}}}$$

問 3

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 4}$　　(2) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$

解答

(1) $\boldsymbol{a_n = \dfrac{4 \cdot 5^{n-1} + 2^n}{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}}$　　(2) $\boldsymbol{a_n = \dfrac{6n - 1}{2n - 1}}$

問 4

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 2,\ b_1 = -1,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 2b_n \end{cases}$　　(2) $a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 3b_n \end{cases}$

解答

(1) $\boldsymbol{a_n = 4^{n-1} + 1,\ b_n = 4^{n-1} - 2}$

(2) $\boldsymbol{a_n = \dfrac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2},\ b_n = \dfrac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}}$

問 5

$a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n - 3}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{(-3)^{n-1} + 1}}$$

問 6

$a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - 2a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}}$$