漸化式(応用①)

例題 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \ b_1 = 3, \ \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$$

Point.

連立漸化式は $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ を満たす α, β を求めて等比数列の形にする.

₩ 解答

 $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n) \cdots (*)$ に与えられた漸化式を代入して a_{n+1}, b_{n+1} を消去すると,

$$(3a_n + b_n) + \alpha(2a_n + 4b_n) = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

であるから、これを整理すると

$$(2\alpha + 3)a_n + (4\alpha + 1)b_n = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

である. 両辺の係数を比較することにより,

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 &= \beta \\ 4\alpha + 1 &= \alpha\beta \end{cases}$$

これを解くと, $(\alpha,\beta)=\left(-\frac{1}{2},\ 2\right),\ (1,\ 5)$ である.

$$(1)$$
 $(\alpha,\beta) = \left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$ を $(*)$ に代入すると,

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$$

なので, $\left\{a_n-\frac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}$,公比 2 の等比数列である. したがって,

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$

(2) $(\alpha, \beta) = (1, 5)$ を (*) に代入すると,

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)$$

なので、 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=4$ 、公比 5 の等比数列である。したがって、

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

以上より,

$$a_n = \frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}, \ b_n = \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$$

❷問1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)
$$a_1 = 3$$
, $b_1 = 2$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$$
 (2) $a_1 = 1$, $b_1 = 2$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}$$

分数型の漸化式

 $a_{n+1}=rac{\gamma a_n+\delta}{\alpha a_n+\beta}$ の形の漸化式を、分数型の漸化式という。 $\delta=0$ の場合は簡単だが、そうでない場合は入試応用レベルに難しくなる.

例題 2

 $a_1=1,\; a_{n+1}=rac{2a_n}{a+n+4}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

Moint.

 $a_n \neq 0$ を適当にチェックしてから両辺の逆数をとり, $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくとうまくいく.

₩ 解答

初項と漸化式の形から,任意の n に対して $a_n \neq 0$ は明らか *1 . そこで,両辺の逆数をとると,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 4}{2a_n} = \frac{2}{a_n} + \frac{1}{2}$$

となるから、 $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_1 = 2, \ b_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{2}$$

で定まる数列である.これを解くと $b_n=3\cdot 2^{n-2}-\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2^{n-1}-1}{2}$ であるから,

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$$

 $^{^{*1}}$ 厳密には数学的帰納法で示すべきだが、面倒だしそこまで求められてないと思うので適当でいい。

□ 問 2

 $a_1=2,\,a_{n+1}=rac{3a_n}{1-5a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

例題 3

 $a_1=7,\,a_{n+1}=rac{7a_n+3}{a_n+5}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

Point.

特性方程式 $x=rac{7x+3}{x+5}$ の解 lpha を 1 つ選び, $b_n=a_n-lpha$ とおく.

₩ 解答

特性方程式 $x=\frac{7x+3}{x+5}$ を解くと,x=-1,3 である.今回は $\alpha=3$ とする. a_n-3 を作るため に,与えられた漸化式の両辺から 3 を引くと,

$$a_{n+1} - 3 = \frac{7a_n + 3}{a_n + 5} - 3 = \frac{4a_n - 12}{a_n + 5} = \frac{4(a_n - 3)}{(a_n - 3) + 8}$$

と変形できる. $b_n=a_n-3$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_1 = 4, b_{n+1} = \frac{4b_n}{b_n + 8}$$

で定まる数列である.例題 2 と同じようにして解くと, $b_n = \frac{4}{2^{n+1}-1}$ なので,

$$a_n = b_n + 3 = \frac{3 \cdot 2^{n+1} + 1}{2^{n+1} - 1}$$

₽問3

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)
$$a_1 = 2$$
, $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}$

(2)
$$a_1 = 5$$
, $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$

■_____ 復習用問題



次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)
$$a_1 = 2$$
, $b_1 = -1$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \end{cases}$$
 (2) $a_1 = 3$, $b_1 = 2$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

❷問 5

$$a_1=rac{1}{2},\,a_{n+1}=rac{a_n}{4a_n-3}$$
 で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$\overline{a_1} = \frac{1}{3}, \ a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n}$$
 で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.