

数学的帰納法

「 $(n + 1)$ 回目の試行の確率が、 n 回目(場合によっては $(n - 1)$ 回目)の試行の確率のみに依存する」
 ような確率の問題には、漸化式が極めて有効である。

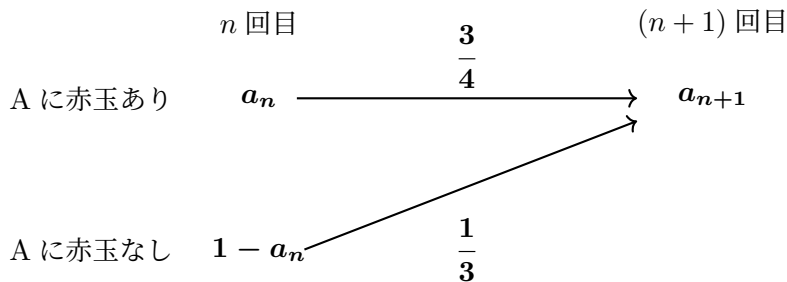
例題 1

A の袋には赤玉が 1 個と黒玉 3 個が、B の袋には黒玉が 3 個入っている。それぞれの袋から同時に 1 個ずつの玉を取り出して入れ替える操作を繰り返す。この操作を n 回繰り返したときに、A の袋に赤玉が入っている確率を a_n とおく。

- (1) a_1, a_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) a_n を求めよ。

Point.

図を書くと漸化式が立てやすい。



解答

- (1) 初期状態では A に赤玉が入っているので、 a_1 は A から黒球を取り出す確率と同じである。
 よって、 $a_1 = \frac{3}{4}$ である。次いで、 a_2 を求めよう。2 回目の試行の後に A に赤玉が入っているのは、

- ・ 1 回目の試行の後に A に赤玉があり、2 回目の試行で A から黒玉を取り出す場合
- ・ 1 回目の試行の後に B に赤玉があり、2 回目の試行で B から赤玉を取り出す場合

のいずれかである。前者の確率は $a_1 \cdot \frac{3}{4}$ 、後者の確率は $(1 - a_1) \cdot \frac{1}{3}$ であるから、

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{3}(1 - a_1) = \frac{31}{48}.$$

(2) $(n+1)$ 回目の試行の後に A に赤玉が入っているのは,

- ・ n 回目の試行の後に A に赤玉があり, $(n+1)$ 回目の試行で A から黒玉を取り出す場合
 - ・ n 回目の試行の後に B に赤玉があり, $(n+1)$ 回目の試行で B から赤玉を取り出す場合
- のいずれかである (Point の図を参照). よって,

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$$

(3) (2) で導いた漸化式を解くと, $a_n = \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12} \right)^n + \frac{4}{7}$.

問 1

正三角形 ABC の頂点を点 P が次のルールに従って移動する:

- ・ 時刻 0 に P は A にいる.
- ・ 1 秒ごとに P は $\frac{1}{5}$ の確率で今いる頂点にとどまり, それぞれ $\frac{2}{5}$ の確率で他の 2 頂点のいずれかに移動する.

このとき, n 秒後に P が A にいる確率を p_n を求めよ.

問 2

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある. 点 P は 1 秒ごとに隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか, もとの頂点に確率 $1-a$ でとどまる. はじめ頂点 A にいた点 P が, n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする. ただし, $0 < a < 1$ とし, n は自然数とする.

- (1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ.
- (2) 確率 p_n を求めよ.

(北海道大)