専門科目（午前）	17	大修
数学	時間	9:00 – 11:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題３題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.

[1]　n は 2 以上の整数とし，A を n 次正方行列とする．いま，次の条件 $(*)$ を満たす A を決定することを考える：

$(*)$　　　　n 次正方行列 X, Y に対して, $XY = A$ ならば $YX = A$

ただし，行列はすべて複素数成分の行列とする．また n 次単位行列を E_n と表す.

(1)　0 でない複素数 a に対して $A = aE_n$ は条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(2)　M を n 次正方行列とする．$MX = XM$ が全ての n 次正則行列 X に対して成立するなら，ある複素数 z があり $M = zE_n$ となることを証明せよ.

(3)　条件 $(*)$ を満たす行列 A は (1) のものだけであることを示せ.

[2]　$\alpha > 0$ として，閉区間 $[0, \pi]$ 上の函数列

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \cos kx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を考える.

$$X_\alpha = \{x \in [0, \pi] \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ が存在する }\}$$

とし，X_α 上の関数 $f(x)$ を $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定義する.

(1)　X_α は空集合ではないことを示せ.

(2)　$\alpha > 1$ ならば，$X_\alpha = [0, \pi]$ であり，$f(x)$ は $[0, \pi]$ 上で連続であることを示せ．さらに $m = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\int_0^\pi f(x) \cos mx dx$$

を求めよ.

(3)　$\alpha > 2$ ならば，$f(x)$ は $[0, \pi]$ 上で微分可能であることを示せ.

[3] $\mathbf{R}$ を実数全体に通常の位相を入れたものとし, $\mathbf{R}_+$ を $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 0\}$ に $\mathbf{R}$ の部分空間としての位相を入れたものとする. $\mathbf{R}$ における同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Longleftrightarrow y = 2^n x \text{ となる整数 } n \text{ が存在する}$$

により定義する. また, $\mathbf{R}$ の部分空間 X の, 同値関係 $\sim$ による商空間を $X/\sim$ と書く. 次の各問に答えよ.

(1) $\mathbf{R}_+/\sim$ は円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ と同相であることを示せ.

(2) $(\mathbf{R} - \{0\})/\sim$ はハウスドルフ空間か. またコンパクトか.

(3) $\mathbf{R}/\sim$ はハウスドルフ空間か. またコンパクトか.

専門科目（午後）	17	大修
数学	時間	12:30 – 15:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ. ただし口頭試問を
   代数班で受けることを希望する人は, 問 １ ー 問 ３のうちから少なくとも１題,
   幾何班で受けることを希望する人は, 問 ４ ー 問 ６のうちから少なくとも１題,
   解析班で受けることを希望する人は, 問 ７ ー 問 １０のうちから少なくとも１題,
   を選択する１題の中に入れること.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で５ページからなる.
6. 口頭試問を代数, 幾何, 解析のどの班で受けることを希望するか解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：

$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す.

$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.

$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.

$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

[1] n を自然数とし，G を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ により生成される加法群とする．

(1) $n \geq 2$ とし，H を G の部分群とする．

$$I = \left\{ a_1 \in \mathbf{Z} \ : \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in H \text{ となる整数 } a_2, \ldots, a_n \text{ が存在する} \right\}$$

とおく．I は $\mathbf{Z}$ の部分群であることを示せ．

(2) G の任意の部分群は n 個以下の元で生成されることを証明せよ．

[2] I を整係数一変数多項式環 $\mathbf{Z}[X]$ の極大イデアルとする．

(1) $\mathbf{Z}[X]/I$ は標数が正ならば有限体であることを示せ．

(2) $\mathbf{Z}[X]/I$ の標数は 0 にならないことを示せ．

[3] K を標数 $p > 0$ の体，s を 2 以上の自然数，L を K の $(sp-1)$ 次巡回拡大とし，σ を L/K のガロア群の生成元とする．ここで，L から L への写像 f を

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i(x)$$

により定義する．

(1) f は K 線形写像であるが L 線形写像ではないことを示せ．

(2) $c \in L$ とする．x の方程式 $f(x) = c$ が L 内に解を持つためには $\mathrm{Tr}_{L/K}(c) = 0$ が必要十分であることを証明せよ．ただし $y \in L$ に対して $\mathrm{Tr}_{L/K}(y) = \sum_{m=0}^{sp-2} \sigma^m(y)$ である．

[4]

$$S^3 = \{(u,v) \in \mathbf{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\},$$
$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とし, C^∞ 写像 $f : S^3 \to S^2$ を

$$f(u,v) = \big(2\,\mathrm{Re}(u\overline{v}),\, 2\,\mathrm{Im}(u\overline{v}),\, |u|^2 - |v|^2\big)$$

により定義する．ただし複素数 w に対して $\mathrm{Re}(w)$ と $\mathrm{Im}(w)$ はそれぞれ w の実部と虚部を表す.

(1) f の微分の階数はいたるところ 2 であることを示せ.

(2) S^2 の任意の点 p に対し, $f^{-1}(p)$ は円周 S^1 と同相であることを示せ.

(3) $S^3 - \{f^{-1}(0,0,1) \cup f^{-1}(0,0,-1)\}$ は $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}$ と同相であることを示せ.

[5] $\mathbf{R}^3$ の座標を (x,y,z) とし, $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{o}\}$ ($\mathbf{o}$ は原点) 上の微分形式 ω を

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

により定める.

(1) $d\omega = 0$ を示せ.

(2) 原点 $\mathbf{o} \in \mathbf{R}^3$ を中心とする単位球面 S^2 に対し,

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi$$

が成り立つことを示せ．ただし, $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ に通常の向きを与え, S^2 には B^3 の境界としての向きが与えられているとする.

(3) 原点 $\mathbf{o} \in \mathbf{R^3}$ を内部に含む有界閉領域 D は, 境界として滑らかな閉曲面 M を持つとし, M の向きは D の向きから定まるものとする．このとき

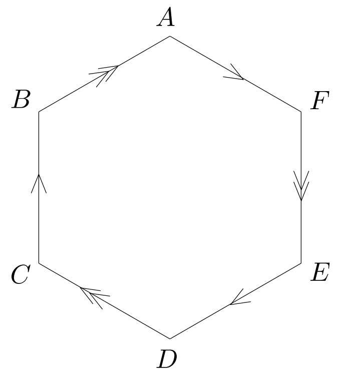
$$\int_{M} \omega = 4\pi$$

が成り立つことを示せ.

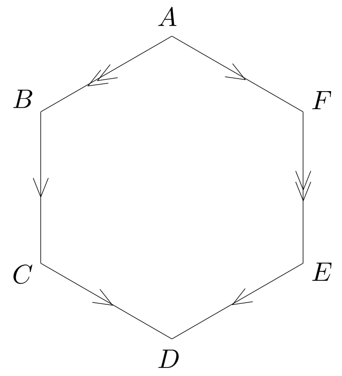
[6] X を正六角形 $ABCDEF$ とする. (周および内部を含む.) X には $\mathbf{R}^2$ の部分空間としての位相が入っているものとする.

(1) X において辺 AF, ED, CB をこの向きで同一視し, さらに辺 FE, DC, BA をこの向きで同一視して得られる空間 Y のホモロジー群を求めよ.

(2) X において辺 AB, FE をこの向きで同一視し, さらに辺 AF, ED, CD, BC をこの向きで同一視して得られる空間 Z のホモロジー群を求めよ.



(1)



(2)

[7] 次の積分の極限値を求め，計算の根拠を説明せよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}dx \quad (a>0)$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n}{n^2+x^2}\sin(x+a)dx \quad (a\in\mathbf{R})$

[8] $u, v \in C^1([a,b])$ および $f \in C(\mathbf{R} \times [a,b])$ が条件

$$\begin{cases} u(a) < v(a), & \\ v'(x) = f(v(x), x), & (a \leq x \leq b) \\ u'(x) < f(u(x), x), & (a \leq x \leq b) \end{cases}$$

を満たしているとき

$$u(x) < v(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：背理法）

[9] $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$，$R = D \setminus \{\cup_{n=2}^{\infty}\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}\}$ とおく．$f(z)$ は R 内の正則関数で，$M > 0$ および $0 < \alpha < 1$ に対して次の不等式を満たすと仮定する：

$$|f(z)| \leq M|z|^{-\alpha} \quad (z \in R).$$

このとき，D 内の正則関数 $\tilde{f}(z)$ で $\tilde{f}(z) = f(z)$ $(z \in R)$ を満たすものが存在することを示せ.

[10] $c_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ を $[0,1]$ 上の実数値連続関数列で,

$$\int_0^1 c_n(x) c_m(x) dx = \begin{cases} 1, & (n = m) \\ 0, & (n \neq m) \end{cases}$$

を満たすものとする.

$$f_{n,t}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(x)}{k} \sin kt \quad (t \in [-\pi, \pi]$$

とおく.

(1) t を固定して，$n \to \infty$ のとき，$\{f_{n,t}\}$ は $L^2([0,1])$ において強収束することを示せ.

(2) (1) における $n \to \infty$ のときの $\{f_{n,t}\}$ の $L^2([0,1])$ での極限を f_t とするとき，定数 a が存在して

$$\int_0^1 f_s(x) f_t(x) dx = a\left(\min\{s,t\} - \frac{st}{\pi}\right) \quad (s, t \in [0, \pi])$$

となることを示せ.