

【2016 年 PM 問 1】

$f(x) = x^4 - 1$ とする.

- (1) 剰余環 $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ の素イデアルをすべて求めよ.
- (2) 剰余環 $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ の素イデアルと極大イデアルをすべて求めよ.
- (3) 剰余環 $\mathbb{Z}[x]/(5, f(x))$ の素イデアルをすべて求めよ.

✓ 解答欄

- (1) イデアルの対応定理により, $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ の素イデアルは $\mathbb{C}[x]$ の素イデアルで $(f(x))$ を含むものと対応する. $\mathbb{C}[x]$ は体 \mathbb{C} 上 1 変数多項式環なので単項イデアル整域 (PID) である. よって, 素イデアルと極大イデアルは一致し, 既約多項式で生成されるイデアルである.

\mathbb{C} は代数的閉体なので, 0 でない既約多項式は 1 次式に限られる. $f(x) = x^4 - 1$ を含む素イデアルは, $f(x) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ の既約因子で生成されるものである. $(f(x))$ を含む $\mathbb{C}[x]$ の素イデアルは以下の 4 つである.

$$(x-1), \quad (x+1), \quad (x-i), \quad (x+i)$$

したがって, $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ の素イデアルはこれらのイデアルの像ですべてである:

$$(x-1+(f(x))), \quad (x+1+(f(x))), \quad (x-i+(f(x))), \quad (x+i+(f(x)))$$

- (2) イデアルの対応定理より, $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ の素イデアルは, $(f(x))$ を含む $\mathbb{R}[x]$ の素イデアルと対応する. $\mathbb{R}[x]$ は体 \mathbb{R} 上の PID であり, そのゼロでない素イデアルは極大イデアルと一致する. \mathbb{R} 上での $f(x)$ の既約多項式分解は,

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

となる. 各因子は $\mathbb{R}[x]$ 上で既約である. よって, $(f(x))$ を含む $\mathbb{R}[x]$ の素イデアルは以下の 3 つである.

$$(x-1), \quad (x+1), \quad (x^2+1)$$

これらは $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルでもある. したがって, $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ の素イデアルはこれらの像であり, それらは同時に極大イデアルでもある:

$$(x-1+(f(x))), \quad (x+1+(f(x))), \quad (x^2+1+(f(x)))$$

- (3) 第三同型定理により,

$$\mathbb{Z}[x]/(5, f(x)) \cong (\mathbb{Z}[x]/(5))/((\overline{5}, \overline{f(x)})/(\overline{5})) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]/(\overline{f(x)})$$

である. ここで $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は体であり, $\overline{f(x)}$ は $f(x)$ の係数を $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で考えたものである. よって問題は, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ において $(\overline{f(x)})$ を含む素イデアルを求めることに帰着する. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$

は体上の 1 変数多項式環ゆえ PID なので、その素イデアルは $\overline{f(x)}$ の既約因子で生成される単項イデアルに限る。

$\sqrt{-1} = 2$ なので $\overline{f(x)}$ は次のように因数分解される。

$$\overline{f(x)} = x^4 - 1 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

各因子は 1 次式であり、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ で既約である。したがって、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ で $\overline{f(x)}$ を含む素イデアルは以下の 4 つである。

$$(x - 1), \quad (x - 2), \quad (x - 3), \quad (x - 4)$$

環同型を通じて、これらが求める素イデアルに対応する。よって $\mathbb{Z}[x]/(5, f(x))$ の素イデアルは、これらのイデアルの生成元の像で生成されるものですべてである：

$$(x - 1 + (5, f(x))), (x - 2 + (5, f(x))), (x - 3 + (5, f(x))), (x - 4 + (5, f(x)))$$