単元別演習　2 次関数②

# 2変数関数の最大・最小(解答)

## 問 1

$x+y=1,\ 0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$x-2y^2$ の最大値と最小値を求めよ．　(07 関西大)

## 解答

$x+y=1$ より $y=1-x$ を用いて $y$ を消去すると，

$$x-2y^2=x-2(1-x)^2=-2x^2+5x-2$$

である．これを平方完成すると

$$-2x^2+5x-2=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

であるから，グラフは $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{8}\right)$ を頂点とする上に凸の放物線である．$0 \leqq x \leqq 2$ に注意すると，$x=\frac{5}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{8}}$，$x=0$ で最小値 $\boldsymbol{-2}$ をとることがわかる．

## 問 2

$x^2-8xy+17y^2+6x-30y+10$ の最小値とそのときの $x,y$ を求めよ．　(15 北海学園大)

## 解答

与えられた式を $x$ の 2 次式と思って平方完成したのち，残りをさらに平方完成すると，

$$\begin{aligned} x^2-8xy+17y^2+6x-30y+10 &= x^2+(6-8y)x+17y^2-30y+10 \\ &= (x-4y+3)^2+y^2-6y+1 \\ &= (x-4y+3)^2+(y-3)^2-8 \end{aligned}$$

である．これより，$x-4y+3=0, y-3=0$ ，すなわち、$\boldsymbol{x=9, y=3}$ で最小値 $\boldsymbol{-8}$ をとる．

## 問 3

$x+y=4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ を満たすとき，$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ の最大値と最小値を求めよ．

## 解答

$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ は $x$ と $y$ の対称式であるから，基本対称式 $x+y, xy$ で表せる．実際，

$$x^2y^2+x^2+y^2+xy=(xy)^2+(x+y)^2-2xy+xy=(xy)^2-xy+(x+y)^2$$

$x+y=4$ であるから，

$$x^2y^2+x^2+y^2+xy=(xy)^2-xy+16.$$

これは $xy$ の 2 次関数であるから，$t=xy$ とおく．$t=xy=x(4-x)$ であり，$x \geqq 0$ と $y=4-x \geqq 0$ より $0 \leqq x \leqq 4$ なので，

$$x(4-x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$$

より $0 \leqq t \leqq 4$ とわかる．$0 \leqq t \leqq 4$ のもとで $t^2-t+16$ の最大値と最小値を求めよう．

$$t^2-t+16=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{63}{4}$$

なので，グラフは $\left(\frac{1}{2}, \frac{63}{4}\right)$ を頂点とする下に凸の放物線．よって，$t=\frac{1}{2}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{63}{4}}$，$t=4$ で最大値 **28** をとる．

## 問 4

実数 $x, y$ は $2x+y=2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ を満たすとする．

(1) $xy$ の最大値と最小値を求めよ．
(2) $x^2y^2+4x^2+y^2+2xy$ の最大値と最小値を求めよ．

## 解答

$x \geqq 0,\ y=2-2x \geqq 0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ であることに注意する．

(1) $xy=x(2-2x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ なので，$x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，$x=0,1$ で最小値 **0**.

(2) $x^2y^2+4x^2+y^2+2xy$ を $2x+y=2$ が使えるように変形すると，

$$x^2y^2+4x^2+y^2+2xy=(xy)^2+(2x+y)^2-4xy+2xy=(xy)^2-2xy+4.$$

これは $xy$ の 2 次関数であるから，$t=xy$ とおくと，(1) より $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$．平方完成すると

$$t^2-2t+4=(t-1)^2+3$$

であるから，$t=0$ で最大値 **4**，$t=\frac{1}{2}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{13}{4}}$ をとる．

## 問 5

$x^2-4xy+5y^2+2x-2y+7$ の最小値とそのときの $x, y$ を求めよ.

## 解答

与えられた式を $x$ の 2 次式と思って平方完成したのち，残りをさらに平方完成すると，

$$\begin{aligned} x^2-4xy+5y^2+2x-2y+7 &= (x-2y+1)^2+y^2+2y+6 \\ &= (x-2y+1)^2+(y+1)^2+5 \end{aligned}$$

これより $x-2y+1=0, y+1=0$，すなわち $\boldsymbol{x=-3, y=-1}$ で最小値 **5** をとる.