

## 専門科目（午前）

### 数学

時間 9 : 0 0 ~ 1 1 : 3 0

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない．
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ．
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ．
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 2 ページからなる．
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと．

記号について： $\mathbb{R}$  は実数全体を表す．

[1]  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  とする. このとき広義積分

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^4}$$

の値を求めよ.

[2]  $p$  は実数とする.  $[0, 1]$  上定義された関数列

$$f_n(x) = \frac{n^p x}{1 + n^3 x^3} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

について次の問に答えよ.

- (1)  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  が全ての  $x \in [0, 1]$  に対して収束するための  $p$  の条件を求めよ. またこのとき, 極限関数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  を求めよ.
- (2)  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  が  $[0, 1]$  上で一様収束するための  $p$  の条件を求めよ.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  が存在するための  $p$  の条件を求めよ.

[3] 2 次実正方行列全体の成す線形空間を  $M_2(\mathbb{R})$  とする.  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  に対して,  $M_2(\mathbb{R})$  の線形変換  $L_A$  を  $L_A(X) = AXA$  で定めるとき, 次の (1), (2) に答えよ.

- (1)  $M_2(\mathbb{R})$  の基底を 1 組あげよ.
- (2)  $L_A$  のトレースを求めよ.
- (3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  のとき  $L_A$  の行列式を求めよ.

[4] 3 次の実対称行列  $A$  が与えられたとき,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  上の関数  $F$  を

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni \mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \in \mathbb{R}$$

で定める. ただし  $\langle, \rangle$  は  $\mathbb{R}^3$  の標準的な内積で,  $\mathbb{R}^3$  の要素は列ベクトルとみなしている.

- (1)  $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$  とするとき,  $F(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = F(S^2)$  となることを示せ.
- (2)  $F$  は最大値, 最小値を持つことを示せ.
- (3)  $F$  の最大値  $\alpha$  と最小値  $\beta$  が一致しないとき,  $F(\mathbf{a}) = \alpha$ ,  $F(\mathbf{b}) = \beta$  となる単位ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  をとり,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のベクトル積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を  $\mathbf{c}$  とおく. このときこれらを並べてできる 3 次正方行列  $P = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$  は正則で,  $P^{-1}AP$  は対角行列になることを示せ.

[5] 実数全体の集合  $\mathbb{R}$  において, 右半開区間全体の集合を  $\mathcal{B}$  とする. すなわち,

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

$\mathcal{B}$  で生成される開集合系を  $\mathcal{O}$  とする. このとき, 位相空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  について次は正しいか. 理由をつけて答えよ.

- (1) 位相空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  はハウスドルフ空間である.
- (2) 位相空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  は連結である.
- (3) 閉区間  $[0, 1]$  は位相空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  のコンパクト集合である.

## 専門科目（午後）

### 数学

時間 13 : 00 ~ 15 : 00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題のうち2題を選択して解答せよ。
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で3ページからなる。
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと（午前と同じ系を書くこと。）

記号について：

- $\mathbb{R}$  は実数全体を表す。
- $\mathbb{C}$  は複素数全体を表す。
- $\mathbb{Z}$  は整数全体を表す。
- $\mathbb{N}$  は正の整数全体を表す。

[1]

- (1) 位数 100 の有限アーベル群を分類したい．それぞれの群の invariant factors による直和分解 (位数が順次倍数となるような巡回群の列による直和分解) と, elementary divisors による直和分解 (素数べき位数の巡回群による直和分解) との双方を求めよ．そして, それらの群が互いに同型でないことを示せ．
- (2) 有限体  $\mathbb{F}_q$  の元を成分とする 3 次正方行列で, 行列式が 1 であるものの個数を求めよ．

[2]  $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$  で生成される  $\mathbb{Z}[x]$  のイデアルを  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  で表すものとする．このとき次の間に答えよ．

- (1) 剰余環  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$  の単元を全て求めよ．
- (2)  $I = (x + 3, x^2 + 1)$  は素イデアルではないことを示せ．
- (3)  $J = (3, x^2 + 1)$  は  $\mathbb{Z}[x]$  の極大イデアルであることを示し,  $\mathbb{Z}[x]/J$  の位数を求めよ．

[3]  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $A, B, C$  を

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, 2, 3)\}, \\ B &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2} < x_i < \frac{1}{2} \ (i = 1, 2) \right\}, \\ C &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2} < x_i < \frac{1}{2} \ (i = 2, 3) \right\} \end{aligned}$$

によって定義する．

$$X = A - (B \cap C), \quad Y = A - (B \cup C)$$

に  $\mathbb{R}^3$  の通常の位相に関する相対位相を与え, 位相空間と考える．

- (1)  $X$  の整係数ホモロジー群を求めよ．
- (2)  $Y$  の整係数ホモロジー群を求めよ．

[4]  $\mathbb{R}^3$  上の  $C^\infty$  級関数  $F(x, y, z), \Phi(x, y, z)$  を次のように定める．

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= z^2 + f(x, y)g(x, y)h(x, y), & \Phi(x, y, z) &= x + y, \\ f(x, y) &= x^2 + y^2 - 16, & g(x, y) &= (x - 2)^2 + y^2 - 1, \\ h(x, y) &= (x + 2)^2 + y^2 - 1. \end{aligned}$$

$M = F^{-1}(0)$  とし,  $\Phi$  を  $M$  に制限して得られる  $M$  上の関数を  $\varphi$  とする．

- (1)  $M$  は 2 次元  $C^\infty$  級多様体であることを示せ．
- (2) 点  $p \in M$  における  $M$  の接空間  $T_p M$  は

$$(\text{grad } F)_p = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right)$$

の直交補空間であることを示せ．ただし,  $T_p \mathbb{R}^3$  は  $\mathbb{R}^3$  と同一視し, 標準的な内積が与えられているものとする．

- (3)  $C^\infty$  級関数  $\varphi$  の臨界点をすべて求めよ．

[5] (1)  $r > 0, \theta \in (0, 2\pi)$  に対して,  $C_\theta(r) = \{re^{i\phi} \mid 0 \leq \phi \leq \theta\}$  とおく. このとき,  $n \geq -1$  なる整数  $n$  に対して

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_\theta(r)} z^n dz$$

を求めよ. ただし, 積分路は偏角の増加方向にとる.

(2)  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  とおく.  $f(z)$  を  $\Delta$  を含む領域で有理型で, その極  $p_1, \dots, p_n$  はすべて  $\Delta$  の境界  $\partial\Delta$  上にあり, その位数はすべて 1 で,  $p_j$  での留数は  $\alpha_j$  であるとする. このとき,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\partial\Delta)_\varepsilon} f(z) dz$$

を求めよ. ただし,  $(\partial\Delta)_\varepsilon = \partial\Delta - \bigcup_{j=1}^n \{z \in \partial\Delta \mid |z - p_j| < \varepsilon\}$  で, 積分路は  $\partial\Delta$  の正の向きに沿ってとるものとする.

[6]  $f(x)$  を区間  $[0, \infty)$  上の可積分な実数値関数とする. 以下の (1) ~ (3) を示せ.

(1)

$$\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty f(x) (1 - e^{-x^n}) dx.$$

(2) 任意の正の整数  $n, N$  に対し,

$$\int_0^N f(x) (1 - e^{-x^n}) dx = - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^N f(x) x^{kn} dx.$$

(3)  $t > 0$  に対して

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+t} dx$$

とおくとき,  $\varphi(t)$  は  $(0, \infty)$  上で  $C^1$ -級である.

[7] 区間  $[0, \pi]$  上の境界値問題

$$\begin{cases} -x''(t) = \lambda x(t) + f(t) & (0 \leq t \leq \pi), \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases} \quad (\text{B})$$

に対し,  $C^2$  級の解について考える. ただし,  $\lambda$  および  $f$  はそれぞれ与えられた実定数および  $[0, \pi]$  上の実数値連続関数である.

(1)  $\lambda$  は  $\lambda \notin \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$  を満たす実定数とする. このとき, (B) の解が高々 1 つであることを示せ.

(2)  $\lambda = n^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) かつ  $\int_0^\pi f(t) \sin ntdt \neq 0$  ならば, (B) の解は存在しないことを示せ.

以下,  $\{c_k\}_{k=1}^\infty$  を有界数列とする.

(3)  $\lambda \notin \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$  かつ  $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \sin kt$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) であるとき, (B) の解を求めよ.

(4) (3) で得られた解を  $x_n(t)$  とおく.  $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$  は  $[0, \pi]$  上で一様収束することを示せ.