【2004年 AM 問1】

n は2以上の整数とし，$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．いま，次の条件 $(*)$ を満たす A を決定することを考える：

$$\forall X, Y \in M_n(\mathbb{C}) \text{ に対し，} XY = A \Rightarrow YX = A \tag{$*$}$$

以下，n 次単位行列を E_n と表す．

(1) 任意の $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対し，$A = aE_n$ は条件 $(*)$ を満たすことを示せ．

(2) $M \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$MX = XM$ が任意の $GL_n(\mathbb{C})$ に対して成立するなら，ある $z \in \mathbb{C}$ があり $M = zE_n$ となることを示せ．

(3) 条件 $(*)$ を満たす行列 A は (1) の形に限ることを示せ．

(2)：眺めていてもよくわからないので，適当に成分表示してみるとよい．

(3)：(2) を使えるように，任意の正則行列 X に対して $AX = XA$ を示す．

解答欄

(1) $XY = aE_n$ と仮定すると，$\dfrac{X}{a}Y = E_n$ である．よって，$Y = \left(\dfrac{X}{a}\right)^{-1}$ であるから，$YX = aE_n$ を得る．

(2) $M = (a_{ij}), X = (x_{ij})$ とおく．$MX = XM$ を行列の成分で表すと $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}a_{kj}$ であるから，左辺にすべて寄せて次の等式を得る．

$$a_{i1}x_{1j} + a_{i2}x_{2j} + \cdots + a_{in}x_{nj} - a_{1j}x_{i1} - a_{2j}x_{i2} \cdots - a_{nj}x_{in} = 0 \tag{$\dagger$}$$

以下，等式 $(\dagger)$ を用いて M の各成分を決定する．

まず，$i = j$ の場合を考えると，$(\dagger)$ は次のように整理できる：

$$(a_{i1}x_{1i} - a_{1i}x_{i1}) + (a_{i2}x_{2i} - a_{2i}x_{i2}) + \cdots + (a_{in}x_{ni} - a_{ni}x_{in}) = 0 \tag{$\dagger\dagger$}$$

$k \neq i$ を1つ固定し，X を E_n の i 行目と k 行目を入れ替えた行列とすると，$(\dagger\dagger)$ から $a_{ik} = a_{ki}$ がわかる．次に，E_n の i 行目と k 行目を入れ替えた行列において $x_{ik} = -1$ に置き換えたものを X とすると，$(\dagger\dagger)$ から $a_{ik} + a_{ki} = 0$ がわかる．これら2つの式から $a_{ik} = a_{ki} = 0$ を得るので，$i = 1, 2, \ldots, n$ と $k \neq i$ を動かすことにより M の対角成分以外はすべて0であることがわかる．

次に，対角成分を決定する．M の対角成分以外は0になっているので，$(\dagger)$ において $i = 1$ として

$$a_{11}x_{1j} - a_{1j}x_{1j} = (a_{11} - a_{jj})x_{1j} = 0$$

を得る．X は正則行列なので，適当に行基本変形をして $x_{1j} \neq 0$ なるものを取ってこれる．よって，$a_{11} = a_{jj}$；$j = 2, \ldots, n$ である．以上より，$A = a_{11}E_n$ である．

(3) 任意の正則行列 X に対して $(AX)X^{-1} = A$ であるので，A が条件 $(*)$ を満たすことから $X^{-1}(AX) = A$，つまり $AX = XA$ である．よって，(2) の結果より $A = aE_n$; $a \in \mathbb{C}$ と表せる．あとは $a \neq 0$ を示せばよいが，X, Y を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

で定めると $XY = O$ だが $YX \neq O$ なので $a = 0$ のときは条件 $(*)$ を満たさない．

結局，条件 $(*)$ を満たすならば $A = aE_n$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ である．(1) と合わせて，条件 $(*)$ を満たす A はこの形に限ることがわかった．