単元別演習　数列⑤

確率漸化式

「**$(n+1)$回目の試行の確率が,n回目(場合によっては$(n-1)$回目)の試行の確率のみに依存する**」ような確率の問題には，漸化式が極めて有効である．

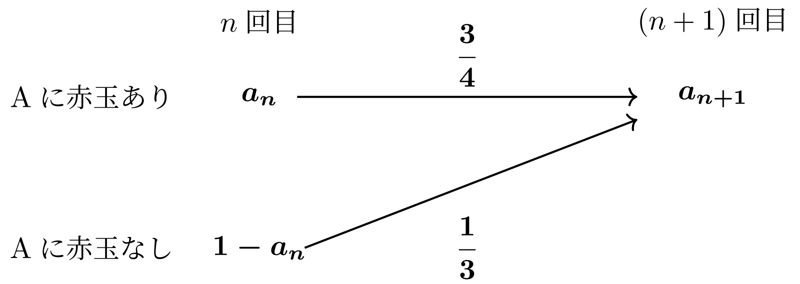
例題 1

A の袋には赤玉が 1 個と黒玉 3 個が，B の袋には黒玉が 3 個入っている．それぞれの袋から同時に 1 個ずつの玉を取り出して入れ替える操作を繰り返す．この操作を n 回繰り返したときに，A の袋に赤玉が入っている確率を a_n とおく．

(1) a_1，a_2 を求めよ．
(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．
(3) a_n を求めよ．

Point.

図を書くと漸化式が立てやすい．



解答

(1) 初期状態では A に赤玉が入っているので，a_1 は A から黒球を取り出す確率と同じである．よって，$\boldsymbol{a_1 = \frac{3}{4}}$ である．次いで，a_2 を求めよう．2 回目の試行の後に A に赤玉が入っているのは，

・1 回目の試行の後に A に赤玉があり，2 回目の試行で A から黒玉を取り出す場合
・1 回目の試行の後に B に赤玉があり，2 回目の試行で B から赤玉を取り出す場合

のいずれかである．前者の確率は $a_1 \cdot \frac{3}{4}$，後者の確率は $(1-a_1)\cdot\frac{1}{3}$ であるから，

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{3}(1-a_1) = \frac{31}{48}}.$$

(2) $(n+1)$ 回目の試行の後に A に赤玉が入っているのは,

・n 回目の試行の後に A に赤玉があり，$(n+1)$ 回目の試行で A から黒玉を取り出す場合

・n 回目の試行の後に B に赤玉があり，$(n+1)$ 回目の試行で B から赤玉を取り出す場合

のいずれかである (Point の図を参照)．よって,

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}(1-a_n) = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}}$$

(3) (2) で導いた漸化式を解くと，$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}}$.

問 1

正三角形 ABC の頂点を点 P が次のルールに従って移動する：

- 時刻 0 に P は A にいる.
- 1 秒ごとに P は $\frac{1}{5}$ の確率で今いる頂点にとどまり，それぞれ $\frac{2}{5}$ の確率で他の 2 頂点のいずれかに移動する.

このとき，n 秒後に P が A にいる確率を p_n を求めよ.

問 2

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は 1 秒ごとに隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ でとどまる．はじめ頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする.

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ.

(2) 確率 p_n を求めよ.

(北海道大)