単元別演習

10月25日の問題

問 1

$a_1 = 10,\ a_{n+1} = a_n^2$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

問 2

数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とすると，$S_n = \dfrac{3}{2}a_n + 3 - 4n$ が成り立つとする.

(1) a_1 を求めよ.

(2) a_{n+1} と a_n の漸化式を作れ.

(3) a_n を求めよ.

問 3

正の実数 a についての関数 $f(a)$ を $f(a) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x^2 - a^2| dx$ により定める.

(1) $f(a)$ を求めよ.

(2) $f(a)$ の最小値を求めよ.

問 4

1 次式 $f_n(x) = a_n x + b_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ が

$$f_1(x) = x + 1, \quad x^2 f_{n+1}(x) = x^3 + x^2 + \int_0^x t f_n(t) dt\ (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たすとする.

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が満たす漸化式を求めよ.

(2) $f_n(x)$ を求めよ.

問 5

放物線 C ： $y = x^2$ とその上の点 (a, a^2) $(0 < a \leqq 1)$ における接線を l とするとき，次の問いに答えよ.

(1) l の方程式を求めよ.

(2) 直線 $x = 0$, $x = 1$, 放物線 C と接線 l とで囲まれた部分で，$y \geqq 0$ を満たす部分の面積 $S(a)$ を求めよ.

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ.

単元別演習

10月25日の宿題

問 1

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で，$x+2$ で割ったときの余りが -4 である．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

[山形大]

問 2

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は 1 秒ごとに隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ でとどまる．はじめ頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 確率 p_n を求めよ．

(北海道大)

問 1 の解答例

$P(x)=(x-1)^2q_1(x)+4x-5\cdots$ ①，$P(x)=(x+2)q_2(x)-4\cdots$ ②とおく．

(1) 因数定理より $x-1$ で割った余りは $P(1)=4\cdot 1-5=\mathbf{-1}$.

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおく．$P(1)=-1, P(-2)=-4$ なので，

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=-4 \end{cases}$$

これを解いて $a=1, b=-2$．よって余りは $\boldsymbol{x-2}$.

(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割った余りは 2 次以下の式なので，$r(x)$ とおく．

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)q(x)+r(x)$$

この式より，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは，$r(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りと等しい．①よりこの余りは $4x-5$ なので，$r(x)$ は定数 a を用いて

$$r(x)=a(x-1)^2+4x-5$$

と書ける．よって，

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)q(x)+a(x-1)^2+4x-5$$

ここに $x=-2$ を代入すると，②より $P(-2)=-4$ なので，

$$-4=P(-2)=9a-13$$

これより $a=1$ なので，求める余りは $1\cdot(x-1)^2+4x-5=\boldsymbol{x^2+2x-4}$.

問 2 の解答例

(1) 図形の対称性から，n 秒後に P が B,C,D にいる確率はそれぞれ等しいので，これを q_n とおく．このとき，$p_n+3q_n=1$ に注意しておく．$n+1$ 秒後に P が A にいるのは，
   - n 秒後に A にいて，その場にとどまる．
   - n 秒後に B,C,D のいずれかにいて，$n+1$ 秒後に A に移る．

   のいずれかである．確率は順に $p_n(1-a_n)$，$3q_n\cdot\dfrac{a}{3}=aq_n$ であるから，求める漸化式は

$$\boldsymbol{p_{n+1}=p_n(1-a_n)+aq_n=\left(1-\frac{4a}{3}\right)p_n+\frac{a}{3}}.$$

(2) 上で導いた漸化式を解けば，

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4a}{3}\right)^n}$$