

専門科目（午前）

数学

時間 9:00～11:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題 3 題すべてに解答せよ。
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 2 ページからなる。

記号について： \mathbf{R} は実数全体を表す。

[1]

- (1) 任意の 2 次実対称行列 A に対して $B^3 = A$ となる実 2 次行列 B が存在することを示せ.
- (2) 次の命題は正しいか. 正しいければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ: 任意の実 2 次行列 A に対して $B^3 = A$ となる実 2 次行列 B が存在する.

[2]

- (1) r を正の定数とする. 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

は $x \in [r, \infty)$ に関し一様収束することを示せ.

- (2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_r^{1/r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx$$

[3] xy 平面の単位円 $S^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ に対して, 写像 $p: S^1 \rightarrow [-1, 1]$ を $p(x, y) = x$ で定める. $\mathcal{O} := \{p^{-1}(V) | V \text{ は } [-1, 1] \text{ の開集合}\}$ とする. ただし, $[-1, 1]$ 上の位相は, \mathbf{R} 上の通常の位相から定まる相対位相を考える.

- (1) \mathcal{O} は開集合系の公理を満たすことを示せ.
- (2) 位相空間 (S^1, \mathcal{O}) はハウスドルフ空間か.
- (3) 位相空間 (S^1, \mathcal{O}) はコンパクト空間か.
- (4) 写像 $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ が連続であるためには, 連続写像 $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して $f = g \circ p$ とかけることが必要十分であることを示せ. ただし S^1 上の位相は \mathcal{O} を, \mathbf{R} 上の位相は通常のものを考える.

専門科目 (午後)

数学

時間 12:30～15:00

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題のうち3題を選択して解答せよ。ただし口頭試問を
代数系で受けることを希望する者は、問1～問3のうちから少なくとも2題、
幾何系で受けることを希望する者は、問4～問6のうちから少なくとも2題、
解析系で受けることを希望する者は、問7～問10のうちから少なくとも2題、
を選択する3題の中に入れること。
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で4ページからなる。
6. 口頭試問を代数系、幾何系、解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと。

記号について:

- Rは実数全体を表す。
Cは複素数全体を表す。

[1] G を 2 次ユニタリ行列全体の群, すなわち

$$G = \{g \in M(2, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} g = I_2\}$$

とする. そのとき,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mid |t_1| = |t_2| = 1, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

$$N = \{g \in G \mid gTg^{-1} \subset T\}$$

に対して

$$N/T$$

を求めよ.

[2] k を標数 0 の体とし, X_1, \dots, X_n を変数とする. $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ に対して

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \in (f)$$

となるための f の条件を求めよ.

[3] 3 個の元から成る有限体を \mathbf{F}_3 で表す.

(1) 変数 X に関する \mathbf{F}_3 上の 2 次既約多項式で最高次の係数が 1 であるものをすべて求めよ.

(2) \mathbf{F}_3 上の多項式

$$f(X) = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 - 1$$

を既約多項式の積として表せ.

(3) $f(X)$ の \mathbf{F}_3 上の最小分解体を K とするとき, K/\mathbf{F}_3 の Galois 群を求めよ.

[4] 2 次元実射影空間 $P^2(\mathbf{R})$ の同次座標を $[X : Y : Z]$, \mathbf{R}^3 の通常の座標を (x, y, z) とし

$$M = \{([X : Y : Z], (x, y, z)) \in P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3 \mid Xy - Yx = Xz - Zx = Yz - Zy = 0\}$$

とする.

(1) M は $P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ の 3 次元閉部分多様体であることを示せ.

(2) $\pi: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$\pi([X : Y : Z], (x, y, z)) = (x, y, z)$$

と定めるとき, 各点 $p \in \mathbf{R}^3$ の π による逆像を求めよ.

[5] 種数 3 の向き付け可能な閉曲面を Σ_3 とする.

(1) Σ_3 の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) Σ_3 から 1 点 p を除いた空間 $X = \Sigma_3 - \{p\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(3) Σ_3 から異なる 2 点 p, q を除いた空間 $Y = \Sigma_3 - \{p, q\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

[6] \mathbb{C} と \mathbb{R}^2 の同一視を $x+iy$ と (x, y) を同一視することにより定め, \mathbb{C}^2 と \mathbb{R}^4 の同一視を $(x+iy, u+iv)$ と (x, y, u, v) の同一視により定める.

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $f(t) = (pt + q\bar{t}, rt + s\bar{t})$ により定義する. ただし, $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ とする.

$t = t_1 + it_2$ とするとき

$$f^*(dx \otimes dx + dy \otimes dy + du \otimes du + dv \otimes dv) = dt_1 \otimes dt_1 + dt_2 \otimes dt_2,$$

$$f^*(dx \wedge dy + du \wedge dv) = dt_1 \wedge dt_2$$

の 2 つが同時にみたされるための条件を求めよ.

[7] \mathbb{R} 上の C^1 級実数値連続関数の全体を $C^1(\mathbb{R})$ と表す. 関数列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C^1(\mathbb{R})$ に関する次の問に答えよ.

(1) u_j およびその導関数 u'_j がそれぞれ u と v に \mathbb{R} 上で広義一様収束すれば, $u \in C^1(\mathbb{R})$ であることを示せ.

(2) $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ および $\{u'_j\}_{j=1}^\infty$ が \mathbb{R} 上一様有界とする. このとき, $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ の適当な部分列で \mathbb{R} 上広義一様収束するものが存在することを示せ. さらに, そのいかなる部分列をとっても \mathbb{R} 上で一様収束はしない $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ の例をあげよ.

$$[8] \quad f_n(x, y) = \frac{n}{r \cos \pi r + n^2 r^3} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$I_n = \int \int_{r \leq 1} f_n(x, y) dx dy \quad (n \geq 2)$$

とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ.

[9] $\operatorname{Re} z > 0$ に対して

$$f(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t^2} dt$$

とおく. このとき, 以下を示せ.

(1) $f(z)$ を定義する積分は $\operatorname{Re} z > 0$ で存在する.

(2) $f(z)$ は $\operatorname{Re} z > 0$ で正則である.

(3) $\operatorname{Re} z > 0$ で等式

$$f(z+2) = \frac{z}{2} f(z)$$

が成立する.

[10] $C(I)$ を区間 $I = [0, 1]$ 上の実数値連続関数全体とし, $(C(I), \|\cdot\|)$ を $C(I)$ に最大値ノルム $\|\cdot\|$ を入れた線形ノルム空間とする. ここで, 最大値ノルム $\|\cdot\|$ は $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in I\}$ ($f \in C(I)$) と定義する.

(1) $x \in I$ に対して $\delta_x(f) \equiv f(x)$ ($f \in C(I)$) と定義するとき, δ_x は $(C(I), \|\cdot\|)$ 上の有界線形汎関数であることを示せ. さらに, δ_x ($x \in I$) 達の線形結合とは異なる有界線形汎関数の例をあげよ.

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(I)$ が $f \in C(I)$ に弱収束するならば各点収束することを示せ. さらに, 各点収束はするが, 弱収束しない例を与えよ.

(3) I 上のルベーグ測度を λ とおく. 一様有界かつ同程度連続な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(I)$ が, λ に関して L^p 収束 ($p \geq 1$) するとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束することを示せ.