2018

第4問　(選択問題)　(配点　20)

aを$0 < a < 1$を満たす定数とする。三角形ABCを考え，辺ABを$1:3$に内分する点をD，辺BCを$a:(1-a)$に内分する点をE，直線AEと直線CDの交点をFとする。$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}} = \vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = \vec{r}$とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boxed{\text{ア}}$であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{p}|^2 - \boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\vec{p}+\vec{q}$　　① $\vec{p}-\vec{q}$　　② $\vec{q}-\vec{p}$　　③ $-\vec{p}-\vec{q}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$を$\vec{p}$と$\vec{q}$を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{p} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q} \qquad \cdots\cdots ②$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

(3) s, t をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{FD}} = s\vec{r}$, $\overrightarrow{\mathrm{FE}} = t\vec{p}$ となる実数とする。s と t を a を用いて表そう。

$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = s\vec{r}$ であるから，② により

$$\vec{q} = \boxed{\text{キク}}\,\vec{p} + \boxed{\text{ケ}}\,s\vec{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。また，$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = t\vec{p}$ であるから

$$\vec{q} = \frac{t}{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}}\vec{p} - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}}\vec{r} \quad \cdots\cdots ④$$

である。③ と ④ により

$$s = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}\left(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}\right)}, \quad t = \boxed{\text{タチ}}\left(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ とする。$|\vec{p}| = 1$ のとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積を a を用いて表そう。

① により

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 1 - \boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

である。また

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2 = \boxed{\text{ツ}}\left(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}\right)^2 + \boxed{\text{テ}}\left(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}\right)\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

である。したがって

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \frac{\boxed{\text{トナ}} - \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

2019

第4問　（選択問題）（配点　20）

四角形ABCDを底面とする四角錐(すい)OABCDを考える。四角形ABCDは，辺ADと辺BCが平行で，AB＝CD，∠ABC＝∠BCDを満たすとする。さらに，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{3},\quad |\vec{c}|=\sqrt{5}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

であるとする。

(1)　$\angle\mathrm{AOC}=\boxed{アイ}^\circ$により，三角形OACの面積は$\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$である。

(2)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\boxed{オカ}$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{\boxed{キ}}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\boxed{ク}}$であるから，$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{ケコサ}^\circ$である。さらに，辺ADと辺BCが平行であるから，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ADC}=\boxed{シス}^\circ$である。よって，$\overrightarrow{AD}=\boxed{セ}\,\overrightarrow{BC}$であり

$$\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\boxed{ソ}\,\vec{b}+\boxed{タ}\,\vec{c}$$

と表される。また，四角形ABCDの面積は$\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) 三角形 OAC を底面とする三角錐 BOAC の体積 V を求めよう。

3 点 O，A，C の定める平面 α 上に，点 H を $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \vec{c}$ が成り立つようにとる。$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|$ は三角錐 BOAC の高さである。H は α 上の点であるから，実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{c}$ の形に表される。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \vec{a} = \boxed{\text{ト}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ト}}$ により，$s = \boxed{\text{ナ}}$，$t = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$

である。よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ が得られる。したがって，(1)により，

$V = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であることがわかる。

(4) (3)の V を用いると，四角錐 OABCD の体積は $\boxed{\text{フ}}$ V と表せる。さらに，

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

2019

数学Ⅱ・数学B　（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問　（必答問題）（配点　30）

〔１〕 関数$f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$を考える。

(1) $f(0) = \boxed{アイ}$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{ウ} + \sqrt{\boxed{エ}}$ である。

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると，$\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + \boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ となる。さらに，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて$f(\theta)$を表すと

$$f(\theta) = \boxed{キ}\sin 2\theta - \boxed{ク}\cos 2\theta + \boxed{ケ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

(3) θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，① は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって，$m = \boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，$f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)