目 次

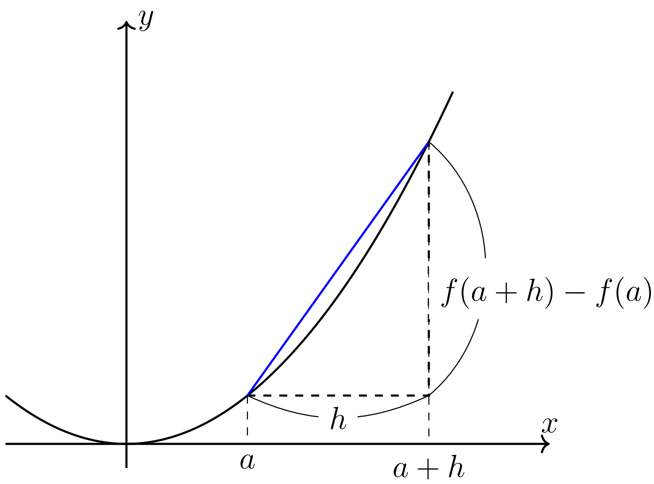
第1章　微分法

1.1　微分の定義

数学 II で学んだように，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分 $f'(a)$ とは，

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

のことである．lim の中身は $y=f(x)$ のグラフの，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均の変化率である．



上の図において $h\to 0$ とすると，$f'(a)$ は $x=a$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きになることがわかる．

数学 II では多項式関数の微分のみを扱ったが，数学 III では三角関数や指数関数，対数関数のほか，これらの合成関数の微分も計算することになる．まずは基本となるこれらの関数の微分を覚えよう．

1.2 微分の計算

まずは関数の積や商を微分する公式を確認しよう．

定理 1.2.1 (積の微分法)**.**
関数 f, g が微分可能であるとき，次が成り立つ：

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

積の微分法を用いると，因数分解された形の多項式関数の微分を簡単に計算できる．

例 1.

$$\begin{aligned}\{(x^2+3x+1)(2x+1)\}' &= (x^2+3x+1)'(2x+1) + (x^2+3x+1)(2x+1)' \\ &= (2x+3)(2x+1) + 2(x^2+3x+1) \\ &= 6x^2+14x+5\end{aligned}$$

問 1. 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ (2) $y = (f(x))^2$

定理 1.2.2 (商の微分法)**.**
関数 f, g が微分可能で，$g(x) \neq 0$ のとき，次が成り立つ：

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

分子の符号に気をつけよう．積の微分法と混同して分子を $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ にするミスが多い．

例 2.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x^2-x+1}\right)' &= \frac{x'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}\end{aligned}$$

問 2. 次の関数を微分せよ．

$$(1)\ y=\frac{1}{x^2+x+3} \qquad (2)\ y=\frac{2x-3}{x^2-x+1} \qquad (3)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1.3　種々の関数の微分法

とりあえず，三角関数などの微分法の公式を確認しておこう．次のセクションの計算を通して覚えればよいので，ここで無理をして覚える必要はない．

1.3.1　三角関数の微分法

定理 1.3.1.

$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (\cos x)'=-\sin x, \qquad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$(\sin x)'=\cos x$ を証明するためには関数の極限で学ぶ有名な公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

が必要になるので，今回は証明なしで使うことにしよう．$\tan x$ の微分は $\sin x, \cos x$ の微分と商の微分法を用いて導くことができる．

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x-(\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)\cos x-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

問 3. 次の関数を微分せよ．

$$(1)\ y=x\sin x \qquad (2)\ y=\sin 2x$$

1.3.2 指数・対数関数の微分法

数学 III 以降では，指数関数と対数関数の底はネイピア数 e とすることが多い．ここで e について復習しておこう．

定義 1.3.2.
次式で定義される数 e をネイピア数，または自然対数の底という．

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

ネイピア数 e を底とする対数を**自然対数**といい，底を省略して

$$\log_e x = \log x$$

と書く．物理や化学の分野では $\log x$ と書くことも多い．

定理 1.3.3. e は自然対数の底とする．このとき，次が成り立つ:

$$(1)\ (e^x)' = e^x \qquad (2)\ (\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (3)\ (\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

特に，e^x は何度微分しても変わらない．これはかなり面白い性質である．

例 3.

$$(x \log x)' = x' \log x + x(\log x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

問 4. 次の関数を微分せよ．ただし，$a > 0, a \neq 1$ とする．

$$(1)\ y = x^2 e^x \qquad (2)\ y = e^x \sin x \qquad (3)\ y = \log_a x$$

1.3.3 合成関数の微分法

数学 III の微分で極めて重要な合成関数の微分を確認しよう．これにより，高校で出てくる微分可能な関数 $y=f(x)$ の微分は全て計算できるようになる．

定理 1.3.4. f,g が微分可能であるとき，次が成り立つ:

$$(g\circ f(x))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

少し記号が見づらいので，計算練習をしながら覚えたほうがはやい．

例 4.

(1) 関数 $y=(2x+1)^2$ は，$g(x)=x^2$ と $f(x)=2x+1$ の合成関数 $g\circ f(x)$ である[1]．$g'(x)=2x$，$f'(x)=2$ なので，

$$\{(2x+1)\}^2 = 2(2x+1)\cdot(2x+1)' = 4(2x+1) = 8x+4$$

(2) 関数 $y=e^{ax}$ は $g(x)=e^x$ と $g(x)=ax$ の合成関数 $g\circ f(x)$ である．$g'(x)=e^x, f'(x)=a$ であるから，

$$(e^{ax})' = e^{ax}\cdot(ax)' = ae^{ax}$$

(3) 関数 $y=\tan 2x$ は $g(x)=\tan x$ と $g(x)=2x$ の合成関数 $g\circ f(x)$ である．$g'(x)=1/\cos^2 x, f'(x)=2$ であるから，

$$(\tan 2x)' = \left(\frac{1}{\cos^2 2x}\right)\cdot(2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

(4) 関数 $y=\sin\log x$ は $g(x)=\sin x$ と $g(x)=\log x$ の合成関数 $g\circ f(x)$ である．$g'(x)=\cos x, f'(x)=1/x$ であるから，

$$(\sin\log x)' = (\cos\log x)\cdot(\log x)' = \frac{\cos\log x}{x}$$

[1] $(2x+1)^2 = g(2x+1)$ と書くと分かりやすいかも．

合成関数の微分をマスターしないと受験では話にならないので，とにかく計算練習を繰り返そう.

問 5. 次の関数を微分せよ.

(1) $y=4^x$　(2) $y=(x^2+3x+1)^7$　(3) $y=\dfrac{1}{2+\sin x}$

(4) $y=\cos^3 x$　(5) $y=(x^3+2x+4)^5$　(6) $y=\dfrac{1}{3+\cos x}$

(7) $y=e^{\sin x}$　(8) $y=e^{x^2+4x+1}$　(9) $y=\log\bigl(3x^2+2x+5\bigr)$

(10) $y=\sqrt{x^2+4x+7}$　(11) $y=(\sin x+\cos x)^5$　(12) $y=\tan^3 x$

(13) $y=(2x+5)^{1/3}$　(14) $y=\sqrt[4]{x^3+2}$　(15) $y=\dfrac{x^2+1}{x+3}$

(16) $y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$　(17) $y=\dfrac{e^{-x}}{\cos x}$　(18) $y=\log|\cos x|$

(19) $y=\sin(e^x)$　(20) $y=\cos(\log x)$　(21) $y=e^{\tan x}$

(22) $y=\log\Bigl(\sqrt{x^2+4}\Bigr)$　(23) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$　(24) $y=(\tan\sin x)^2$

(25) $y=\log\log x$　(26) $y=\dfrac{\log x}{\sqrt{x+2}}$　(27) $y=(e^x+\sin x)^3$

(28) $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}$　(29) $y=\dfrac{\tan x}{x^2+1}$　(30) $y=\sqrt{\sin^2 x+x}$

(31) $y=\dfrac{\log x}{x}$　(32) $y=\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^2}$　(33) $y=(x+\sin x)^3$

(34) $y=(\cos x+x)^2$　(35) $y=\sqrt[5]{x^4+3}$　(36) $y=e^{\sin x+\cos x}$

(37) $y=\log\bigl(x^2+1\bigr)+e^x$　(38) $y=\sin^3(e^x)$　(39) $y=(\tan x+x^2)^4$

1.3.4　対数微分法

$y=\sqrt[4]{\dfrac{x(x-2)}{x+1}}$ のような関数は合成関数の微分法を用いて計算することができるが，式が非常に複雑になってしまう．そこで，両辺の対数をとってから微分ををする裏ワザがある．まず，両辺の絶対値の自然対数をとると，

$$\log|y|=\frac{1}{4}\left(\log|x|+\log|x-2|-\log|x+1|\right)$$

がなりたつ．次に両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=\frac{1}{4}\left(\log|x|+\log|x-2|-\log|x+1|\right)'\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)\\&=\frac{x^2+2x-2}{4x(x-2)(x+1)}\end{aligned}$$

となるので，

$$y'=\frac{x^2+2x-2}{4x(x-2)(x+1)}\cdot\sqrt[4]{\frac{x(x-2)}{x+1}}=\frac{x^2+2x-2}{4\sqrt[4]{x^3(x-2)^3(x+1)^5}}$$

と計算できる．このような計算の方法を**対数微分法**という．掛け算の微分は面倒なので，対数をとって和の微分に持ち込もう，という自然な発想である．

問 6. 対数微分法を用いて，次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sqrt[3]{x^2(x+1)}$　　(2) $y=x^x\ (x>0)$　　(3) $y=x^{\sin x}\ (x>0)$

1.4 高次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $y=f'(x)$ が微分可能であるとき，$y=(f'(x))'$ を $y=f(x)$ の第 2 次導関数といい，

$$y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f''(x), \quad f^{(2)}(x)$$

などと書く．一般に，$y=f(x)$ を n 回微分したものを $y=f(x)$ の第 n 次導関数といい，

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x)$$

などと書く．

例 5.

(1) $y=\sin x$ の第 2 次導関数は $y''=(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x$ である．同様に計算すると，第 3 次導関数は $y'''=(-\sin x)'=-\cos x$，第 4 次導関数は $y''''=(-\cos x)'=\sin x$ である．

(2) $y=e^x$ は微分しても変わらないので，第 n 次導関数は $y^{(n)}=e^x$ である．

問 7.

(1) 関数 $y=x^4+2x^3+5$ の第 4 次までの導関数 y', y'', y''', y'''' を求めよ．

(2) 関数 $y=\sqrt{x}$ の第 3 次までの導関数 y', y'', y''' を求めよ．

問 8. 関数 $y=e^{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ の第 2 次導関数を求めよ．

1.4.1　n 次導関数の求め方

具体的な次数までの導関数は計算で求めればよい．n 次導関数を求めたい場合は数学的帰納法が有効である．

例 6.
$y = \log x$ の第 n 次導関数を求めてみよう．まずは y'''' くらいまで計算をして，$y^{(n)}$ の形を推定する．

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ y'' &= -x^{-2} \\ y''' &= 2x^{-3} \\ y'''' &= -2 \cdot 3x^{-4} \end{aligned}$$

なので，次のことがわかる：

- n 次導関数には x^{-n} が出てくる．
- 奇数回目はプラス，偶数回目はマイナス．よって，$(-1)^{n-1}$ がついている．
- 係数部分は $1,\ 1,\ 1 \times 2,\ 1 \times 2 \times 3,\ \ldots$ となっているので，$(n-1)!$ がついてくる．

よって，$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ と予想できる．これを数学的帰納法で示そう．

(1) $n = 1$ のとき，$y' = x^{-1} = (-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-1}$ なので OK.

(2) $n = k$ で OK と仮定する．つまり，

$$y^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$$

とする．このとき，$y^{(k+1)}$ を計算すると，

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot (-k)x^{-k-1} = (-1)^{(k+1)-1} \cdot \{(k+1)-1\}! \cdot x^{-(k+1)}$$

なので，$n = k+1$ のときも OK.

以上より，任意の自然数 n に対して，

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

であることがわかった．

問 9. 関数 $y = xe^x$ を考える.

(1) y', y'', y''' を計算せよ.

(2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ.

1.4.2 微分方程式の解であることの証明

例題.
$y = e^{-x}\sin x$ のとき,
$$y'' + 2y' + 2y = 0$$
を示せ.

解答.
直接計算して確かめればよい. 順に y', y'' を計算すると

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ y'' &= -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) \qquad = -2e^{-x}\cos x \end{aligned}$$

なので,

$$y'' + 2y' + 2y = -2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x = 0$$

がわかる.

問 10.

(1) $y = e^{-2x} + e^x$ のとき,
$$y'' + y' - 2y = 0$$
が成り立つことを示せ.

(2) $y = x + \sqrt{1+x^2}$ のとき,
$$(1+x^2)y'' + xy - y = 0$$
が成り立つことを示せ.

問 11. $f(x)=\log\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=0$ が成り立つことを示せ．

(2) 任意の自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x)+(2n-1)xf^{(n)}(x)+(n-1)^2f^{(n-1)}(x)=0$$

ただし，自然数 k に対して $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数を表すものとし，$f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．

第2章　微分法の応用

　ここまでで微分の計算技能は (おおむね) 学んだので，ここからは接線やグラフ，最大値・最小値問題への応用を考える．やること自体は数学II と同じなので，例題を通して復習＆練習をしよう．

2.1　接線の方程式

例.
関数 $y = 2\sin 2x$ のグラフの $(\pi/6, \sqrt{3})$ における接線の方程式を求める．
$y' = 4\cos 2x$ より $y'(\pi/6) = 4\cos\pi/3 = 2$ なので，接戦の傾きは2である．
よって，接線の方程式は

$$y = 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 2x - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

問 12.
次の曲線上の点における接線の方程式を求めよ．

(1) $y = \dfrac{x}{2x+1}$,　$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$　　(2) $y = \log(2x+1)$,　$(3, \log 7)$

問 13.

(1) 曲線 $y = e^x$ の原点における接線の方程式を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対し，次の不等式[1]が成り立つことを示せ：

$$e^x \geqq 1 + x$$

[1] $x > 0$ のときはより一般に次が成り立つ：

$$e^x \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{n!}$$

例題．

(1) 原点を通り，$y=\log 3x$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=\sqrt{x}$ の接線で，傾きが $1/4$ であるものの方程式を求めよ．

解答．
接線の問題は，接点を $(t, f(t))$ と設定してスタートするのが鉄則である．間違っても接線を $y=ax+b$ と置いてはいけない．$f(x)-ax-b=0$ が重解を持つ条件を求めることになり，問題の難易度が跳ね上がる．

(1) 求める直線と $y=\log 3x$ の接点を $(t, \log 3t)$ とおく．$y'=\dfrac{1}{3x}\cdot 3=\dfrac{1}{x}$ なので，$(t, \log 3t)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\log 3t=\frac{1}{t}x+\log 3t-1$$

である．これが原点を通るための条件は

$$\log 3t-1=0 \iff \log 3t=1 \iff t=\frac{e}{3}$$

なので，$(e/3, 1)$ における接線が求める直線である．よって，

$$y=\frac{e}{3}x.$$

(2) 接点を $(t, \sqrt{t})$ とおく．$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ なので，接線の方程式は

$$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)+\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}$$

である．傾きが $\dfrac{1}{4}$ なので，

$$\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{4} \iff \sqrt{t}=2$$

より $t=4$ を得る．よって，求める方程式は

$$y=\frac{1}{4}x+1.$$

問 14.

(1) 原点を通り，曲線 $y = \dfrac{x-1}{x}$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2) 点 (0,1) を通り，曲線 $y = 1 - (\log x)^2$ に接する直線の方程式を求めよ．

問 15.

(1) $y = e^x$ の (t, e^t) における接線の方程式を求めよ．

(2) $y = \log x + 2$ の $(t, \log t + 2)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) $y = e^x$，$y = \log x + 2$ の両方に接する直線の方程式を求めよ．このような直線を，**共通接線**という．

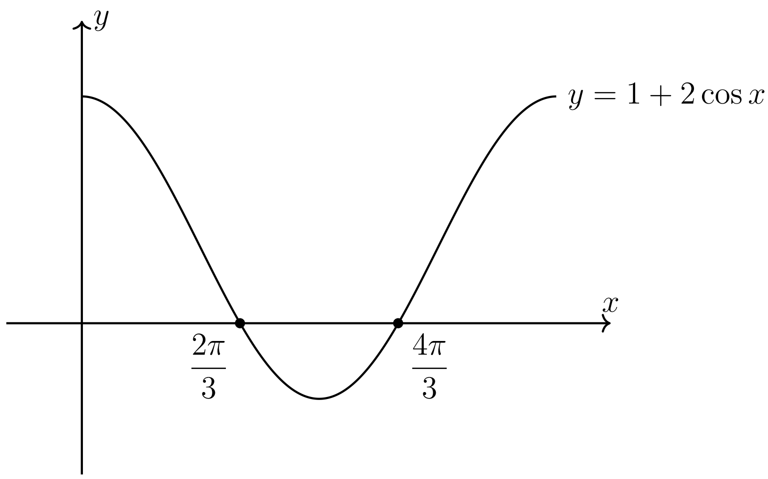
2.2　関数の増減

微分法の代表的な応用例は，関数の増減から最大値・最大値を調べることである．基本事項は数学 II で学んだことと同じであるので，軽い復習をした後，問題演習を重ねよう．

問 16.
関数 $y = x^4 + 2x^3 - 2x$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

例題.
関数 $y = x + 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

解答.
$y' = 1 + 2\cos x$ なので，$y' = 0$ となるのは $\cos x = -1/2$ のとき，つまり $x = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ のときである．適当に $y = 1 + 2\cos x$ のグラフを描くと，



　となるので，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\searrow$	$\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	2π

よって，

$$\begin{cases} \text{極大値}\dfrac{2\pi}{2} + \sqrt{3} & ; x = \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{極小値}\dfrac{4\pi}{2} - \sqrt{3} & ; x = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

問 17.
次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1) $y = x^2 + \log\bigl(25 - x^2\bigr)$　　　　(2) $y = xe^{-x}$

問 18.
関数 $f(x) = a\sin x + b\cos 2x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ が $x = \dfrac{\pi}{3}$ で極大値 $\dfrac{5}{4}$ をもつ．
このとき，定数 a, b の値を求めよ．

例題.
関数 $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \ \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3\right)$ の最大値と最小値を求めよ．

解答.
最大値・最小値を求めるには関数の増減を調べればよい．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

であるから，増減表は次の通り．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$

よって，

$$\begin{cases} \text{最大値}\dfrac{10}{3} & ; x = 3 \\ \text{最小値}\,2 & ; x = 1 \end{cases}$$

を得る．

問 19.
次の関数の最大値・最小値を求めよ．

(1) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$

(2) $f(x) = e^{-x} + x - 1$

(3) $f(x) = xe^{-x^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

例題．
$x>0$ のとき，$\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$ を示せ．
解答．
不等式の証明にも微分法は有効である．$f(x)=\dfrac{1}{x}-\log(x+1)+\log x$ とおき，$x>0$ における増減を調べることで $f(x)\geqq 0$ であることを確認すればよい．

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{-(x+1)-x^2+x(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{-1}{x^2(x+1)}$$

であるから，$x>0$ では $f'(x)<0$ より $f(x)$ は単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\log\frac{x}{1+x}\right)=0$$

なので，$x>0$ においては $f(x)>0$．したがって，

$$\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

問 20．
任意の実数 x に対し，$e^x\geqq 1+x$ であることを示せ．

問 21．

(1) $x>0$ において，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

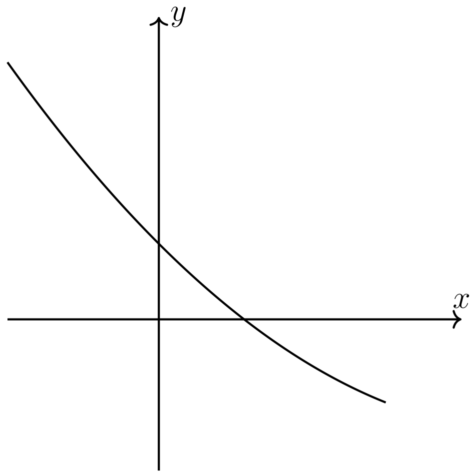
(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を示せ．

2.3　関数のグラフと凹凸

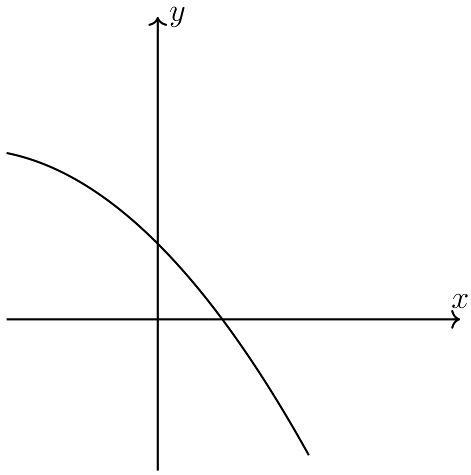
2.3.1　グラフの凹凸

与えられた関数のグラフを描くためには，関数を微分してその増減を調べればよい．ただし，数学 III では関数のグラフをより正確に描くことが求められる．関数の凹凸がその例である．

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が負であったとすると，グラフは単調減少である．しかし，減少の仕方には次の 2 種類がある．



パターン 1



パターン 2

- パターン 1 は，x が大きくなるにつれて接線の傾きが増加している (マイナスからプラスに近づいている)．よって，この場合は $f''(x) > 0$ である．このとき，グラフは**下に凸**であるという．

- 一方で，パターン 2 では接線の傾きが減少している (どんどんマイナスになっている)．よって，この場合は $f''(x) < 0$ である．このとき，グラフは**上に凸**であるという．

このように，関数の増加・減少の仕方を詳細に調べるには，$f(x)$ 第 2 次導関数 $f''(x)$ の符号を調べればよいことがわかる．単に「グラフを描け.」という問題に対しては，基本的に関数の凹凸まで調べる必要がある．

問 22.
次の図 1，2 において，$f''(x)$ の符号はどうなっているか．

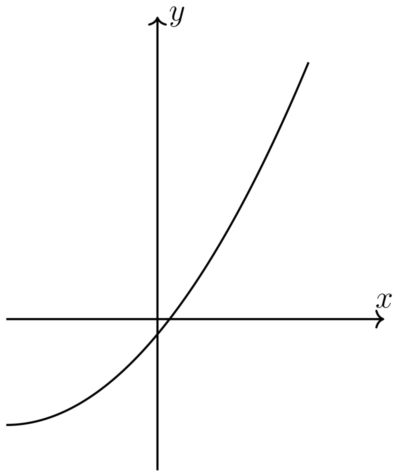


図 1

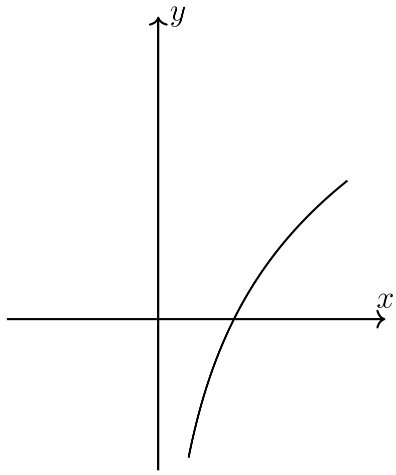


図 2

$f''(x)$ の符号が変わる点を**変曲点**という．要するに，$f'(x)$ の極値のことである．

問題に取り組む前に，ここまでの事項をまとめておこう．

(1) $y = f(x)$ が上に凸であるとは，$f''(x) < 0$ であることをいう．

(2) $y = f(x)$ が下に凸であるとは，$f''(x) > 0$ であることをいう．

(3) $f''(x)$ の符号が入れ替わる点を変曲点という．

例題． 関数 $y = xe^x$ のグラフを描け．

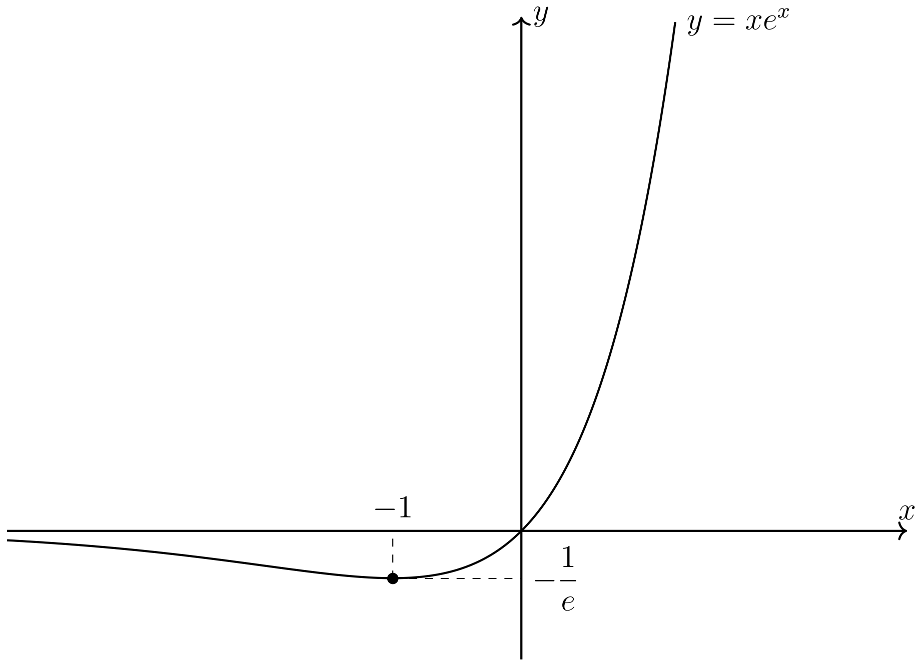
解答．
凹凸も調べたいので，とりあえず y', y'' を計算しよう．積の微分法を用いて，

$$y' = (x+1)e^x$$
$$y'' = (x+2)e^x$$

と計算できる．$y' = 0$ となる点は $x = -1$，$y'' = 0$ となる点は $x = -2$ であるので，増減表は次の通り．

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	∞
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	0	↘	$-2/e^2$	↘	$-1/e$	↗	∞

よって，グラフは次のようになる．



問 23.
次の関数の増減と凹凸を調べ，そのグラフを描け．

(1) $y = \dfrac{x^3+1}{x}$　(2) $y = (\log x)^2$　(3) $y = e^{-x^2}$　(4) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

2.4 応用問題

問 24.
方程式 $x - 3\log x = 0$ の実数解の個数を求めよ.

問 25.
a を定数とするとき，方程式

$$ae^{-\frac{1}{4}x^2} = x - 3$$

の異なる実数解の個数を求めよ.

問 26.

(1) 方程式 $x^2 \tan x = 1$ は $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ でただ 1 つの実数解 α を持つことを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \cos x$ を求めよ.

(3) c を実数とする．方程式 $e^{-\frac{1}{x}} \cos x = c$ が $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において異なる 2 つの実数解を持つような c の範囲を (1) の α を用いて表せ.

問 27.
関数 $f(x) = xe^{-x}$ を考える．曲線 $y = f(x)$ の接線であって，点 $(0, a)$ を通るものが 3 本引けるような実数 a の範囲を求めよ．ただし,

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$$

は用いてよい.

問 28.
$x > 0$ に対し，$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ とする.

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) π^e と e^π の大小関係を比較せよ.

第3章　積分法

まずは簡単な関数の不定積分を勉強しよう．面倒くさいので，練習問題以外では積分定数を省略する．

3.1　不定積分の計算

(1) **多項式関数の不定積分**

x の指数が正のときは数学 II で学んだ通り．それ以外は $1/x^n = x^{-n}$ などと書き直して考えればよい．ただし，$n = -1$ のときだけは注意が必要である．

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & ;\ n \neq 1 \\ \log x & ;\ n = -1 \end{cases}$$

(2) **三角関数の不定積分**

$\sin x, \cos x, 1/\cos^2 x$ の積分は三角関数の微分公式から簡単にわかる．

$$\int \sin x dx = -\cos x, \qquad \int \cos x dx = \sin x, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

一方で，$\tan x$ の不定積分は

$$\int \tan x dx = \log|\cos x|$$

である．これを導くには後で学ぶ置換積分法が必要である．

(3) **指数関数の不定積分**

$a > 0$ に対して a^x の不定積分は

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^x \log a = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$$

であることに注意すると，

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$$

とわかる．特に，$a = e$ とすると $\log e = 1$ なので

$$\int e^x dx = e^x$$

である．

(4) **対数関数の不定積分**
自力で求めるには後で学ぶ部分積分法が必要になるが，結論だけ書いておく．右辺を微分すれば $\log x$ になることはすぐに分かる．

$$\int \log x dx = x \log x - x$$

問 29.
次の不定積分を求めよ．

(1) $\int \frac{1}{x^8} dx$	(2) $\int (1 - \sin x) dx$	(3) $\int \frac{1}{x} dx$
(4) $\int (2x+1)^{2025} dx$	(2) $\int \sin 3x dx$	(3) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$

3.2 部分積分法

微分法の章では関数の積を微分するために**積の微分法**を学んだ：

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

次は，関数の積を微分する方法，すなわち

$$\int f(x)g(x)dx$$

を計算する方法を考える．$g(x)$ の不定積分の 1 つを $G(x)$ としよう．

$$G(x) = \int g(x)dx$$

$G'(x) = g(x)$ に注意して $f(x)G(x)$ に積の微分法を用いると

$$(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$$

この両辺を x で積分してやると,

$$f(x)G(x) = \int f'(x)G(x) + \int f(x)g(x)dx$$

を得る．したがって,

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)$$

なる公式を得る.

定理 3.2.1 (部分積分法).
$g(x)$ の不定積分を $G(x)$ とするとき,

$$\int f(x)g(x)dx = \overset{\text{そのまま}}{f(x)}\ \overset{\text{積分}}{G(x)} - \int \overset{\text{微分}}{f'(x)}\overset{\text{積分}}{G(x)}dx$$

例 7.
三角関数や指数関数を積分側に回すとうまくいくことが多い．例えば，xe^x なら e^x を積分側にして

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$$

と計算できる．ためしに x を積分に回すと

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2e^x}{2}dx$$

となり，より複雑な積分が生ずる.

例 8.

$$\begin{aligned}\int x(x+1)^3 dx &= \frac{x(x+1)^4}{4} - \frac{1}{4}\int (x+1)^4 dx \\ &= \frac{x(x+1)^4}{4} - \frac{(x+1)^5}{20} + C\end{aligned}$$

問 30.
次の不定積分を求めよ.

$$(1)\ \int (3x+1)\sin x dx \qquad (2)\ \int xe^{-2x}dx \qquad (3)\ \int x^3 \log x dx$$

問 31.
部分積分法を用いることにより，不定積分 $\displaystyle\int \log x dx$ を求めよ.

例題. $\displaystyle\int e^x \cos 2x dx$ を求めよ.

何回か部分積分をしても簡単な形にならないときは，もとの積分と同じ形が出てくるように工夫するとよい．被積分関数に三角関数が含まれているときはこの考え方が使いやすい.

解答.

求める不定積分を I とおく．繰り返し部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x \cos 2x \\
&= e^x \cos 2x - \int e^x(-2\sin 2x)dx \\
&= e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx \\
&= e^x \cos 2x + 2\left(e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx\right) \\
&= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx \\
&= e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) - 4I
\end{aligned}$$

であるから，適当に積分定数をくっつけて

$$I = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C$$

を得る.

問 32.
次の不定積分を求めよ.

$$(1)\ \int e^x \cos x dx \qquad (2)\ \int e^{-x}\sin 2x dx$$

3.3 置換積分法

次は，合成関数を積分する方法を考える．先に計算公式だけ述べておく．

定理 3.3.1 (置換積分法).

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

例によってよくわからないので，具体例で計算手順を覚えよう．

例 9.
不定積分 $\int x(2x-1)^5$ を求めよう．これは部分積分法でも計算できるが，置換積分法を用いるとずっと楽になる．

手順 1： <u>置換の方法を決める．</u>

今回は $t = 2x - 1$ とおく．置換の方法は色々あるが，どう決めるかは経験次第なところ．複雑な箇所を t と置換することが多い気がする．

手順 2： <u>dx と dt の対応を調べる．</u>

x の積分を t の積分に書き換えたいので，dx と dt の対応を調べる．$t = 2x - 1$ の両辺を x で微分して

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(2x-1) = 2$$

なので，形式的に dx を両辺にかけるなどして

$$dx = \frac{1}{2}dt$$

を得る．

手順 3： <u>被積分関数を t の式で表す．</u>

$x = \dfrac{t+1}{2}$ なので，

$$x(2x-1)^5 = \frac{t+1}{2}\cdot t^5 = \frac{t^6+t^5}{2}$$

手順 4： 被積分関数と dx を置き換えて積分を計算する.

$$\begin{aligned}\int x(2x-1)^5dx &= \int \frac{t^6+t^5}{2}\cdot\frac{1}{2}dt \\ &= \frac{1}{4}\int(t^6+t^5)dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{6}t^6\right)+C \\ &= \frac{1}{168}t^6(6t+7)+C\end{aligned}$$

手順 5： x の式に戻す.

$t=2x-1$ であったから,

$$\int x(2x-1)^5dx = \frac{1}{168}(2x-1)^6(12x+1)+C$$

で求まる.

上の計算では置換積分法の公式

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

を右から左に向かって使用しているが，面倒なので特に気にしないでよい．とりあえずは計算方法だけ確実に覚えよう.

問 33.

括弧内で指定された置換を用いて，次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx \quad (t=\sqrt{x}-1)$ (2) $\displaystyle\int x(x-5)^4dx \quad (t=x-5)$

(3) $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{1-x}dx \quad (t=\sqrt{1-x})$

問 34.

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}dx$ (2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}dx$ (3) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x dx$

問 35.
次の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \int \frac{\log x}{x}dx \qquad (2)\ \int e^x\sqrt{e^x+1}dx \qquad (3)\ \int x(x^2-1)^3dx$$

問 36.
次の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \int \tan x dx \qquad (2)\ \int \frac{3x^2}{x^3+1}dx \qquad (3)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

問 37.
次の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}dx \qquad (2)\ \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx \qquad (3)\ \int \frac{dx}{\tan x}$$

問 38.
$x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ．

3.3.1　三角関数の積分

三角関数の積分にはいくつの重要なテクニックがある．順に 2 つ確認しよう．

例 10.
不定積分 $\displaystyle\int \cos^3 xdx$ を求めよう．三角関数を含む積分では，

$$\int f(\sin x)\cos xdx, \qquad \int f(\cos x)\sin xdx$$

に変形してやるとうまくいく．今回は $\cos x$ を 1 つ独立させて，

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x\cdot\cos xdx$$

と変形する．$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos xdx$，$\cos^2 x = 1-t^2$ なので

$$\int \cos^3 xdx = \int (1-t^2)dt = t-\frac{t^3}{3}+C = \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

問 39.
次の不定積分を求めよ.

$$(1)\ \int \sin^3 x dx \qquad (2)\ \int \sin^2 x dx \qquad (3)\ \int \frac{1}{\cos x} dx$$

三角関数を含む積分は，$t = \tan \dfrac{x}{2}$ と置換すれば大体解ける．しかし，計算が煩雑になることもあるので，必ずしも最適な手段ではないことに注意しよう.

問 40.

(1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ のとき，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ を t で表せ.

(2) 次の不定積分を求めよ.

$$(1)\ \int \frac{1}{4 + 5\sin x} dx, \qquad (2)\ \int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x} dx$$

第4章　定積分

ここでは定積分の部分積分法と置換積分法を扱う．原始関数がすぐに求まるような簡単な関数の定積分は扱わない．

4.1　置換積分法

計算手順は不定積分のときと変わらないが，積分変数を変換することで積分区間が変わることに注意する必要がある．細かな式は書かずに，とりあえず具体例を見て計算方法を身につけよう．

例 11.
定積分 $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\log(\log x)}{x\log x}dx$ を求めよう．$t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ である．また，x が e から e^e まで動くとき，$t=\log x$ は 1 から e まで動く．よって，積分区間は $1 \leqq t \leqq e$ に変わる．以上に注意して定積分を書き換えると，

$$\int_e^{e^e} \frac{\log(\log x)}{x\log x}dx = \int_1^e \frac{\log t}{t}dt = \left[\frac{(\log t)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

と求まる．

問 41.
次の定積分を求めよ．

$$(1)\ \int_{-1}^0 (x+2)\sqrt{3x+4}dx \quad (2)\ \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx \quad (3)\ \int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$$

問 42.
次の定積分を求めよ．

$$(1)\ \int_0^1 \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}dx \qquad (2)\ \int_e^{e^3} \frac{1}{x\log x}dx \qquad (3)\ \int_0^{\pi/3} \tan x dx$$

問 43.
次の定積分を求めよ.

$$(1)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{a+\sin x}dx \quad (a>0) \qquad (2)\ \int_0^5 \frac{1}{1+e^{-x}}dx$$

問 44.
次の定積分を求めよ.

$$(1)\ \int_0^2 \sqrt{16-x^2}dx \qquad (2)\ \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{36-x^2}}dx \qquad (3)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

4.2　部分積分法

不定積分の部分積分法の公式は

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

であった．これより,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

である．ここも，細かいことは考えずに計算方法を身につければ十分である.

例 12.

$$\int_0^\pi x\sin x dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$$

問 45.
次の定積分を求めよ.

$$(1)\ \int_0^{\pi/4} x\sin 2x dx \qquad (2)\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2 dx$$

$$(3)\ \int_0^2 xe^2x dx \qquad (4)\ \int_1^2 \frac{\log x}{x^2}dx$$

問 46.
次の定積分を求めよ.

$$(1)\ \int_1^e x(\log x)^2 dx \qquad (2)\ \int_4^{16} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx \qquad (3)\ \int_1^e (\log x)^2 dx$$

4.3　置換積分の応用問題

問 47.

(1) $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数であるとき,

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

を示せ.（Hint : $t = \pi - x$ と置換する.）

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ を求めよ.

問 48.

(1) $t = \pi/2 - x$ とおくことにより，次の等式を示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$$

を示せ.（Hint : $t = \pi - x$ と置換する.）

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$ を求めよ.

問 49.

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ と定める.
ただし，$\sin^0 x = \cos^0 x = 1$ とする.

(1) $I_n = J_n$ を示せ.

(2) I_0, I_1 を求めよ.

(3) $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}(n \leqq 2)$ を示せ.

(4) 次を示せ：

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{: 偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi}{1} & (n\text{: 奇数}) \end{cases}$$

これを Wallis の積分公式という.

問 50.

定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ を求めよ.

問 51 (やや難)**.**

自然数 n に対し, $\displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ とおく.

(1) I_{n+1} と I_n の間に成り立つ関係式を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{e}{n+2} \leqq I_n \leqq \frac{e}{n+1}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(nI_n - e)$ を求めよ.

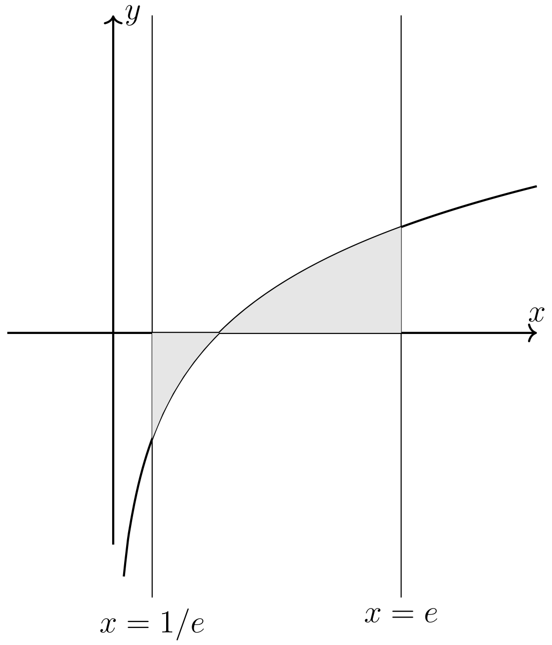
第5章　積分法の応用

5.1　面積

　定積分を用いることで曲線で囲まれた図形の面積が求められるというのは数学 II でやっている話なので，細かいところは省略する．基本的なところは数学 II のときと同じなので，まずは実際の問題を解いてみよう．

例題．
曲線 $y = \log x$ と直線 $x = 1/e, x = e$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答．
まずは簡単なグラフ描き，面積を求める図形の様子を確認することが大事である．



図より，$x=1$ の前後でグラフと x 軸の位置関係が入れ替わっているので，積分区間は $1/e \leqq x \leqq 1$ と $1 \leqq x \leqq e$ に分けて計算する必要があることがわかる．したがって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{1/e}^{1} -\log x dx + \int_{1}^{e} \log x dx &= -[x\log x - x]_{1/e}^{1} + [x\log x - x]_{1}^{e} \\ &= 1 - \frac{2}{e} + 1 \\ &= 2 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

である．

問 52.
次の曲線や直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $y=\sin x(1+\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

(2) $y=xe^{x},\ x=-1,\ x=1$

(1) $y=\sin^{2} x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

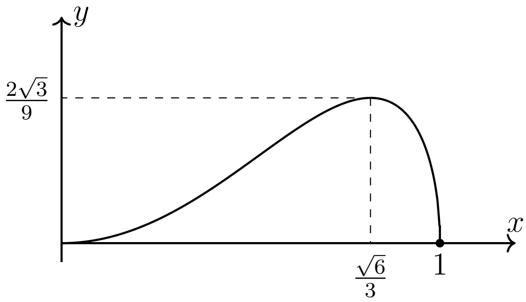
2 つの曲線で囲まれた部分の面積の求め方は数学 II で学んだ通りであるから，特に解説はしない．

問 53.
次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y=\sin x,\ y=\cos 2x$ $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi\right)$ (2) $y=\dfrac{x}{1+x^{2}}, y=\dfrac{1}{2}x$

(3) $y=\sin x,\ y=\sqrt{3}\cos x,\ x=0,\ x=2\pi$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

問 54.
関数 $y=f(x):=x^{2}\sqrt{1-x^{2}}$ $(x \geqq 0)$ のグラフは右の図のようになる．これを踏まえて，次の問の答えよ．



(1) $a>0$ のとき，直線 $y=ax$ と $y=f(x)$ のグラフが接するとき，a の値を求めよ．

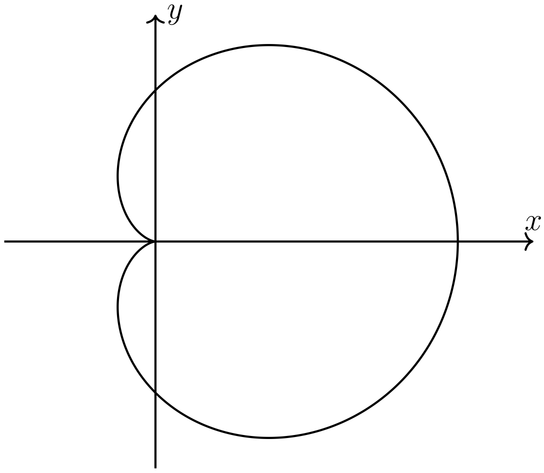
(2) (1) で求めた a に対し，$y=ax$ と $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

5.2　媒介変数表示された曲線

媒介変数表示を用いると，より複雑な曲線を式で表現できる．例えば，

$$(x, y) = ((1 + \cos\theta)\cos\theta, (1 + \cos\theta)\sin\theta)\ ;\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

で表される曲線は次のようになる：



ここでは，微分法を用いて媒介変数表示された曲線の概形を調べる方法を紹介する．x, y が媒介変数表示されていても，それぞれの微分を用いて dy/dx を計算することができる．

媒介変数表示された関数の微分法：

$x = f(t), y = g(t)$ と媒介変数表示されているとき，$f'(t) \neq 0$ となる t に対して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

が成り立つ．

例 13.
$x = t - 1/t,\ y = 1 + 1/t$ のとき,

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

と計算できる．常に $f'(t) \neq 0$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

である．

問 55.
y は x の関数で，x, y が次のように媒介変数表示されているとする．このとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ．

$$(1)\ \begin{cases} x &= 3\cos\theta \\ y &= 2\sin\theta \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x &= \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

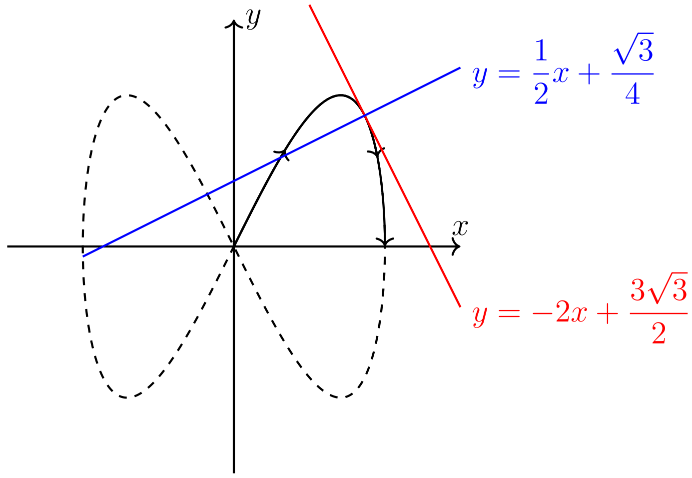
$\dfrac{dy}{dx}$ が計算できるということは，媒介変数表示された曲線の接線の方程式が求められるということである．

問 56.
曲線

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

上の $t = 3$ に対応する点における接線と法線の方程式を求めよ．

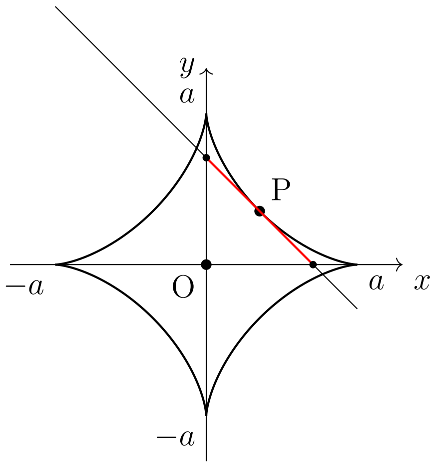
実際に曲線と接線，法線を図示すると次のようになる．数学Cでも扱ったと思うが，この問題の曲線をリサージュ曲線という．



問 57.
$a>0$ を定数とする．媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = a\sin^3\theta \\ y = a\cos^3\theta \end{cases}$$

で表される曲線上の点 $\mathrm{P}(\theta)$ における接線のうち，x 軸と y 軸で切り取られる部分の長さは，点 $\mathrm{P}(\theta)$ の位置によらず常に一定であることを示せ．ただし，$\mathrm{P}(\theta)$ は座標軸上にはないとする．



問 58.

曲線 $\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の概形を描け.

問 59.

曲線 $\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の概形を描け.

問 60.

上面の半径が 5cm，高さが 15cm の直円錐形の容器がある．これに毎秒 8cm^3 の割合で静かに水を注ぐとき，水面の高さが 9cm 担った瞬間における水面の上昇する速度 [cm/s] を求めよ.