第1回

(1) 易

$x^2+y^2=t^2-2xy$ と $x^2+xy+y^2=1$ より

$t^2-xy=1$.　∴ $xy=t^2-1$ // → 2

(2) 難

$x^2+xy+y^2=1$ に $y=t-x$ を代入して、

$x^2+(t-x)x+(t-x)^2=x^2-tx+t^2=1$ より

$$x^2-tx+t^2-1=0 \quad \cdots ☆$$

よって、☆をみたす実数xが存在する範囲がtのとりうる範囲である。☆の判別式をDとすると、

$D=t^2-4(t^2-1)=-3t^2+4\geqq 0$ より

$t^2\leqq\frac{4}{3}$, つまり $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ //

(3) 標準

$2x+xy+2y=2(x+y)+xy=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ においては、

$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ で 最大値 $\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}-1=\frac{1+4\sqrt{3}}{3}$ // となる。

☆より $x=\frac{t\pm\sqrt{4-3t^2}}{2}$ なので、maxをとるx, yは、

$$x=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pm 0}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ //,\quad y=t-x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ //$$

また、$t=-1$ で最小値 -2 をとる。
このときの x, y は、前と同じようにして

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2} = 0, -1$$

$$y = t - x = -1, 0$$

$$\therefore (x, y) = (0, -1), (-1, 0)$$

第2問 易

余事象を調べる。3種類がキロクされないのは、

① 1色のみ $\longrightarrow 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{729}$

② 2色 $\longrightarrow \underbrace{{}_3C_2}_{\text{色のえらび方}} \times \left\{ \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^7}_{\text{2色以内}} - \underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7}_{\text{1色だけ}} \right\}$

$$= \frac{126}{729}$$

の いずれか。よって、求める確率は

$$1 - \frac{127}{729} = \frac{602}{729}$$

難

(2) $\overline{7a5b3} = 7\times10000 + a\times1000 + 5\times100 + b\times10 + 3$

$$\equiv 6a + 3 + 3b + 3$$

$$\equiv -a + 3b - 1 \pmod 7$$

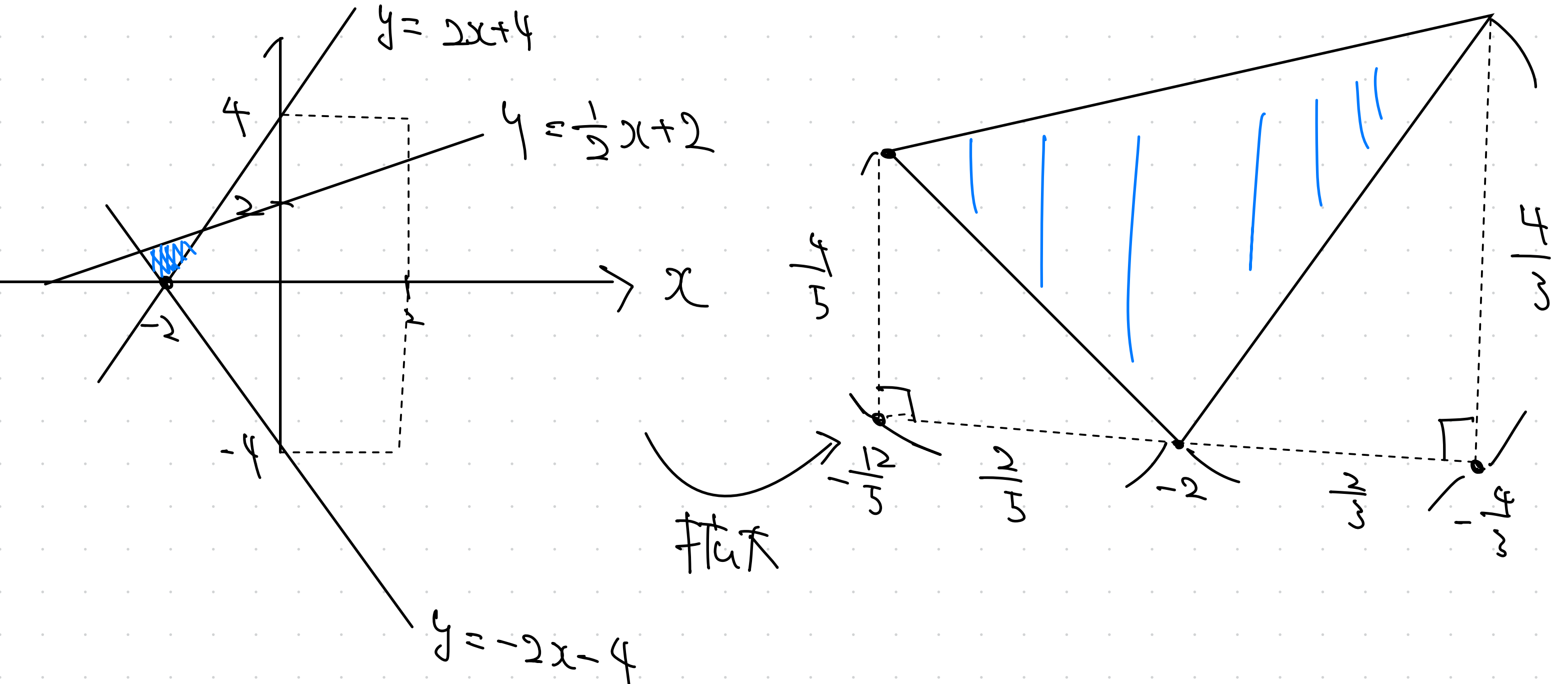
なので、$a - 3b \equiv -1 \pmod 7$ となる a, b をさがす

b	$3b-1 \pmod 7$	a	個数
0	6	6	1
1	2	2, 9	2
2	5	5	1
3	1	1, 8	2
4	4	4	1
5	0	0, 7	2
6	3	3	1
7	6	6	1
8	2	2, 9	2
9	5	5	1
			14

よって、合計 14個。
$\begin{cases} \max は & 79583 \\ \min は & 70553 \end{cases}$ //

第3回 (1) 標準

$y \geq |2x+4| \iff -y \leq 2x+4 \leq y \iff y \geq -2x-4,\ y \geq 2x+4$



台形から余計分を引いて、

$$\frac{6}{15}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\right)\times\frac{16}{15}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$$

$$=\frac{256}{225}-\frac{4}{25}-\frac{4}{9}$$

$3\times$

$$=\frac{256-36-100}{225}=\frac{120}{225}=\frac{8}{15}$$

(2) やや難

$(\text{原点からのキョリ})^2$ がmaxのところとminのところを探す

minは線分AC上. 原点とACのキョリ^{2}は $\left(\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}\right)^2=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{16}{5}$

よって、minは $\frac{16}{5}$

maxは $x=-\frac{12}{5}$, $y=\frac{4}{5}$ のときで、 $\frac{32}{5}$

$\frac{144}{16}$ 160

第4問 易　　　略

第5問

(1) 標準

C_1 との接点の x 座標を t とおくと、l の方程式は

$$y = 2t(x-t)+t^2 = 2tx - t^2$$

これが C_2 と接するので

$$x^2 - 2(a+t)x + t^2 + a^2 + 2a = 0 \quad \cdots ☆$$

は重解をもつ。よって、

$$(a+t)^2 - (t^2+a^2+2a) = 2a(t-1) = 0$$

より、$t=1$。したがって、l の式は

$$\underline{y = 2x - 1} \;/\!/$$

(2) 易

C_1 との接点の x 座標は、$\underline{x = t = 1} \;/\!/$

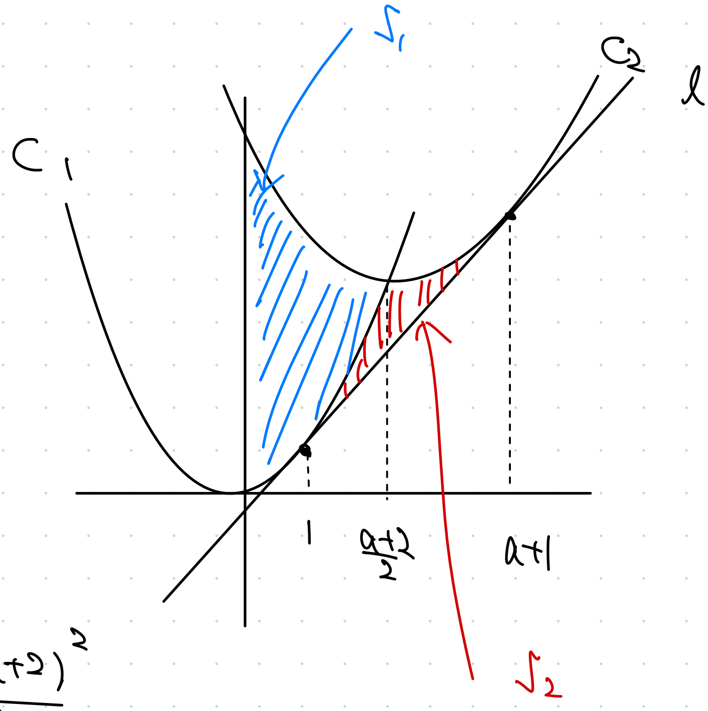
C_2 〃 は、☆の重解であるので

$$x = a+t = \underline{a+1} \;/\!/$$

(3) 標準

C_1 と C_2 の交点の x ざひょうは、

$$x = \frac{a+2}{2}$$



$$S_1 = \int_0^{\frac{a+2}{2}} \{x^2 - 2ax + a(a+2) - x^2\}dx$$

$$= \left[-ax^2 + a(a+2)x\right]_0^{\frac{a+2}{2}}$$

$$= \frac{a(a+2)^2}{2} - \frac{a(a+2)^2}{4} = \frac{a(a+2)^2}{4}$$

$$S_2 = \int_1^{\frac{a+2}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{a+2}{2}}^{a+1} (x-(a+1))^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{12}.$$

$S_1 = 5S_2$ より、$\dfrac{a^3+4a^2+4a}{4} = \dfrac{5a^3}{12}$

$$3a^3 + 12a^2 + 12a = 5a^3$$

$a \neq 0$ より、$2a$ で割って、

$$a^2 - 6a - 6 = 0$$

$a > 0$ より、 $\underline{a = 3+\sqrt{15}}$ //

第6問

(1) 易

漸化式の両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4}{a_n} + 5 \quad , \quad \frac{1}{a_1} = 1.$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{5}{3} = 4\left(\frac{1}{a_n} + \frac{5}{3}\right)$$ と変形できるので

$$\frac{1}{a_n} = \frac{8}{3}\cdot 4^{n-1} - \frac{5}{3} = \underline{\frac{2}{3}\left(4^n - \frac{5}{2}\right)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}4^k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}5$$

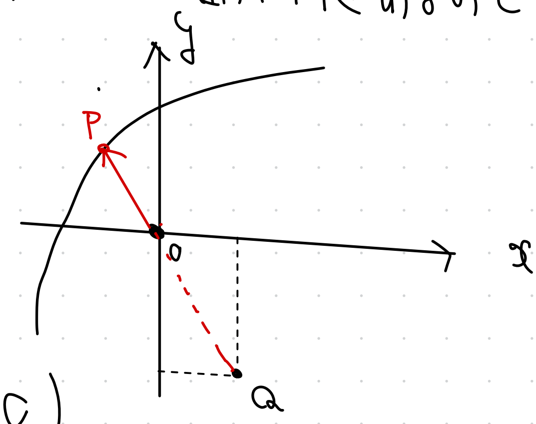
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{4(4^n-1)}{4-1} - \frac{5}{3}n = \underline{\frac{8}{9}(4^n-1) - \frac{5}{3}n} \quad /\!/$$

(2) 易

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-1 = (x-1)^2+(y+2)^2+z^2-6=0$ より

中心は$(1,-2,0)$ 半径$\sqrt{6}$. よって、原点は球面内にあるので

OPがminなのは、



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \sqrt{6}\cdot\frac{\overrightarrow{QO}}{|\overrightarrow{QO}|}$$

$$= (1,-2,0) + \sqrt{6}\cdot\frac{(-1,+2,0)}{\sqrt{5}}$$

$$= \underline{\left(1 - \frac{\sqrt{30}}{5}, -2 + \frac{2\sqrt{30}}{5}, 0\right)} \quad /\!/$$ のとき.