対称式と相反方程式 (解答)

問 1

$x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$,　$y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x+y$, xy　　(2) x^2+y^2　　(3) x^3+y^3　　(4) x^4+y^4

解答

(1) まずは基本対称式 $x+y, xy$ の値を求める問題である．

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$
$$y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

よって，

$$\boldsymbol{x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,\quad xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1}$$

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 1=16-2=\mathbf{14}$

(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot 1\cdot 4=64-12=\mathbf{52}$

(4) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=14^2-2\cdot 1^2=196-2=\mathbf{194}$

問 2

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(2) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$　　(3) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

解答

例題 2 の結果 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{7})^2-2=5$ を用いる．

(1) $\boldsymbol{x^3+\dfrac{1}{x^3}}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{7})^3-3\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}=\boldsymbol{4\sqrt{7}}$

(2) $\boldsymbol{x^4+\dfrac{1}{x^4}}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=5^2-2=\mathbf{23}$

(3) $x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=5\cdot 4\sqrt{7}-\sqrt{7}=\boldsymbol{19\sqrt{7}}$

問 3

4 次方程式 $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$ を解け.

解答

$x=0$ は解ではないので，両辺を x^2 で割ると，

$$x^2+5x+2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$X=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2-2$ なので，

$$(X^2-2)+5X+2=X^2+5X=X(X+5)=0$$

これより $X=0$ または $X=-5$ を得る.

- $X=x+\dfrac{1}{x}=0$ のとき，$x^2+1=0$ より $x=\pm i$
- $X=x+\dfrac{1}{x}=-5$ のとき，$x^2+5x+1=0$ より $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

以上より，求める解は $\boldsymbol{x=\pm i,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}}$

問 4

$x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) x^2+y^2　　　(2) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

解答

まずは基本対称式 $x+y, xy$ の値を求めよう.

$$x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

なので，基本対称式の値は

$$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,\quad xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$$

(1) $\boldsymbol{x^2+y^2}=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 1=\mathbf{14}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{14}{1}=\mathbf{14}$

問 5

$\sqrt{3}$ の整数部分を a，少数部分を b とするとき，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ．

解答

$1^2=1, 2^2=4$ なので $1<\sqrt{3}<2$ である．よって，$a=1$，$b=\sqrt{3}-1$ である．基本対称式 $a+b, ab$ の値を計算すると，

$$a+b=\sqrt{3},\ ab=\sqrt{3}-1$$

である．よって，

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}-1}{2}}$$

問 6

$a^2+3b=b^2+3a=8$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$a\neq b$ とする．

(1) $a+b$　(2) ab　(3) a^2+b^2　(4) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

解答

$a^2+3b=8\cdots$ ①, $b^2+3a=8\cdots$ ② をうまく使うのがポイント．

(1) ① − ②より，$a^2-b^2+3b-3a=0 \implies (a-b)(a+b)-3(a-b)=0$.
$a\neq b$ より $a-b\neq 0$ なので，両辺を $a-b$ で割って，$a+b-3=0$．よって $\boldsymbol{a+b=3}$.

(2) ① + ②より，$a^2+b^2+3(a+b)=16$．(1) の結果を代入して $a^2+b^2+3\cdot 3=16$.
よって，$a^2+b^2=7$．一方，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ なので，$7=3^2-2ab$ より $\boldsymbol{ab=1}$.

(3) (2) の計算過程で求まっている．$\boldsymbol{a^2+b^2=7}$.

(4) $\boldsymbol{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{7}{1}=\mathbf{7}$.

問 7

4 次方程式 $x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0$ を解け．

解答

$x=0$ は解ではないので，両辺を x^2 で割ると，

$$x^2-8x+17-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$X=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2-2$ なので，

$$(X^2-2)-8X+17=X^2-8X+15=(X-3)(X-5)=0$$

これより $X=3$ または $X=5$ である．

- $X = x + \dfrac{1}{x} = 3$ のとき，$x^2 - 3x + 1 = 0$ より $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- $X = x + \dfrac{1}{x} = 5$ のとき，$x^2 - 5x + 1 = 0$ より $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

以上より，求める解は $\boldsymbol{x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$