単元別演習　数列②

漸化式 (応用①)

連立漸化式

例題 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 4b_n \end{cases}$$

Point.

連立漸化式は $\boldsymbol{a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)}$ を満たす α, β を求めて等比数列の形にする．

解答

$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n) \cdots (*)$ に与えられた漸化式を代入して a_{n+1}, b_{n+1} を消去すると，

$$(3a_n + b_n) + \alpha(2a_n + 4b_n) = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

であるから，これを整理すると

$$(2\alpha + 3)a_n + (4\alpha + 1)b_n = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

である．両辺の係数を比較することにより，

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 &= \beta \\ 4\alpha + 1 &= \alpha\beta \end{cases}$$

これを解くと，$(\alpha, \beta) = \left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$，$(1,\ 5)$ である．

(1) $(\alpha, \beta) = \left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$ を $(*)$ に代入すると，

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$$

なので，$\left\{a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $a_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = -\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列である．したがって，

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$

(2) $(\alpha, \beta) = (1,\ 5)$ を $(*)$ に代入すると，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5\,(a_n + b_n)$$

なので，$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 4$，公比 5 の等比数列である．したがって，

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

以上より，

$$\boldsymbol{a_n = \frac{4}{3}\cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1},\ b_n = \frac{8}{3}\cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}}$$

問 1

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \end{cases}$　　(2) $a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n - b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n \end{cases}$

分数型の漸化式

$a_{n+1} = \dfrac{\gamma a_n + \delta}{\alpha a_n + \beta}$ の形の漸化式を，分数型の漸化式という．$\delta = 0$ の場合は簡単だが，そうでない場合は入試応用レベルに難しくなる．

例題 2

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a+n+4}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

Point.

$\boldsymbol{a_n \neq 0}$ を適当にチェックしてから両辺の逆数をとり，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとうまくいく．

解答

初項と漸化式の形から，任意の n に対して $a_n \neq 0$ は明らか[*1]．そこで，両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 4}{2a_n} = \frac{2}{a_n} + \frac{1}{2}$$

となるから，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_1 = 2,\ b_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{2}$$

で定まる数列である．これを解くと $b_n = 3\cdot 2^{n-2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\cdot 2^{n-1} - 1}{2}$ であるから，

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3\cdot 2^{n-1} - 1}}$$

[*1] 厳密には数学的帰納法で示すべきだが，面倒だしそこまで求められてないと思うので適当でいい．

問 2

$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{1-5a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

例題 3

$a_1=7,\ a_{n+1}=\dfrac{7a_n+3}{a_n+5}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

Point.

特性方程式 $\boldsymbol{x=\dfrac{7x+3}{x+5}}$ の解 α を 1 つ選び，$b_n=a_n-\alpha$ とおく．

解答

特性方程式 $x=\dfrac{7x+3}{x+5}$ を解くと，$x=-1,3$ である．今回は $\alpha=3$ とする．a_n-3 を作るために，与えられた漸化式の両辺から 3 を引くと，

$$a_{n+1}-3=\frac{7a_n+3}{a_n+5}-3=\frac{4a_n-12}{a_n+5}=\frac{4(a_n-3)}{(a_n-3)+8}$$

と変形できる．$b_n=a_n-3$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_1=4, b_{n+1}=\frac{4b_n}{b_n+8}$$

で定まる数列である．例題 2 と同じようにして解くと，$b_n=\dfrac{4}{2^{n+1}-1}$ なので，

$$\boldsymbol{a_n=b_n+3=\frac{3\cdot 2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}}$$

問 3

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}$

(2) $a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$

復習用問題

問 4

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 2,\ b_1 = -1,\ \begin{cases} a_{n+1} & = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} & = 2a_n + 2b_n \end{cases}$ (2) $a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ \begin{cases} a_{n+1} & = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} & = 2a_n + 3b_n \end{cases}$

問 5

$a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n - 3}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

問 6

$a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - 2a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.