単元別演習　数と式④

証明問題 (解答)

問 1

a, b, c を整数とするとき，次の問に答えよ．

(1) a^2 を 4 で割ると余りは 0 または 1 であることを示せ．

(2) a^2+b^2 が 4 の倍数ならば，a, b はともに偶数であることを示せ．

解答

(1) 4 で割った余りを考えるので，a を 4 で割った余りで分類する．

① $a=4k$ のとき (k は整数)

$a^2=(4k)^2=16k^2=4(4k^2)$ より，4 で割った余りは 0.

② $a=4k+1$ のとき (k は整数)

$a^2=(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1$ より，4 で割った余りは 1.

③ $a=4k+2$ のとき (k は整数)

$a^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4=4(4k^2+4k+1)$ より，4 で割った余りは 0.

④ $a=4k+3$ のとき (k は整数)

$a^2=(4k+3)^2=16k^2+24k+9=4(4k^2+6k+2)+1$ より，4 で割った余りは 1.

以上より，a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である．

(2) 与えられた命題の対偶

「a, bのうち少なくとも一方が奇数 $\Rightarrow$ a^2+b^2 は4の倍数ではない」

を示す．

a が奇数であると仮定しても一般性は失われない．このとき，(1) より a^2 を 4 で割った余りは 1 である．

① b が偶数のとき，b^2 を 4 で割った余りは 0．a^2+b^2 の余りは $1+0=1$.

② b が奇数のとき，b^2 を 4 で割った余りは 1．a^2+b^2 の余りは $1+1=2$.

いずれの場合も a^2+b^2 を 4 で割った余りは 0 にならない．よって，a^2+b^2 は 4 の倍数ではない．対偶命題が示されたので，元の命題も示された． (証明終)

問 2

n を奇数とするとき，次の問に答えよ．

(1) n^2-1 は 8 の倍数であることを示せ．

(2) n^5-n は 3 の倍数であることを示せ．

[千葉大]

解答

(1) n は奇数なので，$n=2k+1$ (k は整数) と表せる．この式を n^2-1 に代入すると，

$$n^2-1=(2k+1)^2-1=(4k^2+4k+1)-1=4k^2+4k=4k(k+1)$$

ここで，k と $k+1$ は連続する 2 つの整数なので，$k(k+1)$ は 偶数．よって，$k(k+1)=2m$ (m は整数) と表せる．したがって，

$$n^2-1=4k(k+1)=4\cdot 2m=8m$$

m は整数なので，$8m$ は 8 の倍数である．よって，n が奇数のとき n^2-1 は 8 の倍数．

(2) まず，n^5-n を因数分解すると，

$$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$$

$(n-1)n(n+1)$ 連続する 3 つの数の積なので，3 の倍数である (実際は 6 の倍数まで言える)．よって，n^5-n は 3 の倍数．

! (2) は n が偶数でも成り立つ (n が奇数であることは使っていない)．