１９　大修

専門科目（午前）

数学

時間　９：００～１１：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 3 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 2 ページからなる.

記号について:

$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

[**1**] $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$，但し，$a_{ii} = a,\, a_{ij} = b\ (i \neq j)$ の rank を求めよ．

[**2**]

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ とおく．$f(x,y)$ は D 内の C^1 級関数で,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv 1, \quad (x,y) \in D$$

かつ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を満たすとする．このとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(2) $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し,

$$f_\alpha(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \log(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$$

とおく.

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \iint_{\{\varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}} f_\alpha(x,y)\, dxdy$$

が存在するような α の下限 α_0 を求めよ.

[**3**] $n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$U_n = \{m \in \mathbf{Z} \,|\, m \leqq n\}$$

とおく.

(1) $\mathbf{Z}$ の部分集合の集まり $\mathcal{O} = \{U_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \cup \{\emptyset, \mathbf{Z}\}$ は開集合系の公理を満たすことを示せ.

以下, $\mathbf{Z}$ には $\mathcal{O}$ により位相を入れる.

(2) $\mathbf{Z}$ の任意の部分集合は連結であることを示せ.

(3) $\mathbf{Z}$ の部分集合がコンパクトであるための条件を求めよ.

(4) 写像 $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ が連続であるための必要十分条件は f が広義単調増加であることを示せ.

１９　大修

専門科目（午後）

数学

時間　１２：３０～１５：００

注意事項:

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち3題を選択して解答せよ. ただし口頭試問を
   代数系で受けることを希望する者は, 問1～問3のうちから少なくとも1題,
   幾何系で受けることを希望する者は, 問4～問6のうちから少なくとも1題,
   解析系で受けることを希望する者は, 問7～問10のうちから少なくとも1題,
   を選択する１題の中に入れること
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で4ページからなる.
6. 口頭試問を代数系, 幾何系, 解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbf{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

[**1**]

(1) 4 次対称群 S_4 の部分集合 $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は S_4 の正規部分群であることを示せ.

(2) 剰余群 S_4/V が S_3 に同型であることを示せ.

[**2**] K を体とし，$f(x), g(x) \in K[x]$ についての次の性質 (a), (b) を考える.

(a) $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in K$ は存在しない.

(b) $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$ となる $a(x), b(x) \in K[x]$ が存在する.

以下の問に答えよ.

(1) $K = \mathbf{C}$ のとき (a) と (b) は同値であることを示せ.

(2) $K = \mathbf{R}$ のとき (a) と (b) は同値ではないことを示せ.

(3) (a) と (b) が同値となる K の条件を求めよ.

[**3**] p を素数とし，$\mathbf{F}_p$ を p 個の元から成る有限体とする．多項式 $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ の $\mathbf{F}_p$ 上の Galois 群を求めよ.

[**4**] n を 3 以上の自然数, p を $1 \leqq p < n$ を満たす自然数とし, 方程式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2, \qquad \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2$$

で定義される $\mathbf{R}^n$ の部分集合を $X(n,p)$ とする.

(1) $X(n,p)$ は $\mathbf{R}^n$ の部分多様体であることを示せ.

(2) $X(n,p)$ が連結かつ単連結になるための条件を求めよ.

(3) $\mathbf{R}^4$ 上の関数 $\sum_{i=1}^{4} x_i$ を $X(4,2)$ 上に制限して得られる関数を f とするとき f の臨界点を全て求め, f の最大値と最小値を求めよ.

[**5**] $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 = 1 \right\}$ をトーラスとする．F 上の自己同相写像 φ で $\varphi \circ \varphi$ が恒等写像になるものに対し, 同値関係 $\underset{\varphi}{\sim}$ を

$$p \underset{\varphi}{\sim} q \Longleftrightarrow p = q \text{ または } p = \varphi(q)$$

で定義する．F を同値関係 $\underset{\varphi}{\sim}$ で割った商空間を F/φ で表す.

(1) $f : F \longrightarrow F$ を $f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ と定めるとき, F/f のホモロジー群およびオイラー標数を求めよ.

(2) $g : F \longrightarrow F$ を $g(x,y,z) = (-x,-y,z)$ と定めるとき, F/g のホモロジー群およびオイラー標数を求めよ.

(3) φ が $\{p \in F \,|\, \varphi(p) = p\} = \emptyset$ を満たすとき, F/φ は (1), (2) で定義された F/f あるいは F/g と同相であることを示せ.

[**6**] $\mathbf{R}^3 - \{(1,0,0),(-1,0,0)\}$ 上の 2 次微分形式 ω を

$$\begin{aligned}\omega = &\left((x-1)^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}((x-1)dy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\ &+ \left((x+1)^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}((x+1)dy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)\end{aligned}$$

により定める.

(1) $d\omega = 0$ を示せ.

(2) $S = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 = 5\}$ に対し, $D = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqq 5\}$ の境界としての自然な向きを与えるとき, $\int_S \omega$ を計算せよ.

[**7**] $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$ とする．実数値関数 $u(x,y,z) \in C^2(\overline{B})$ が

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = \lambda u(x,y,z), & (x,y,z) \in B \quad (\lambda : \text{実定数}), \\ u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in \partial B \quad (\partial B : B \text{ の境界}), \\ u(x,y,z) \not\equiv 0, & (x,y,z) \in B \end{cases}$$

を満たすとき，$\lambda > 0$ を示せ．ただし，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

[8] $f(x)$ は $[0,\infty)$ で定義された非負値可測関数で $f(0)=0$，かつ $x=0$ で右微分係数 $f'_+(0)$ があるとする．

(1) $y>0$ に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} t\,f\left(\frac{y}{t}\right)$ を求めよ．

(2) 次の等式を示せ．

$$\lim_{t\to\infty} t\int_0^\infty e^{-t(f(x)+x)}dx = \frac{1}{1+f'_+(0)}$$

[9] 複素数値関数 $f(z)$ は上半平面 $\mathbf{H}=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ で正則で $\overline{\mathbf{H}}=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ で連続とする．このとき，次の命題が正しければ証明を，誤りならば反例を与えよ．

(1) $f(x)=1$ $(0<x<1)$ ならば，$f(z)=1$ $(z\in\mathbf{H})$ である．

(2) $-1\leq f(x)\leq 1$ $(x\in\mathbf{R})$ ならば，$f(z)$ は $\mathbf{H}$ で定数に等しい．

(3) $\displaystyle\lim_{\overline{\mathbf{H}}\ni z\to\infty} f(z)=0$ ならば，$f(z)=0$ $(z\in\mathbf{H})$ である．

(4) f は $\mathbf{H}$ から $\mathbf{H}$ への全単射で逆関数 f^{-1} も $\mathbf{H}$ で正則であり，$f(i)=i$ ならば，$f(z)=z$ $(z\in\mathbf{H})$ である．

[10] $X=L^2([0,1))$ を区間 $[0,1)$ 上の複素数値 2 乗可積分関数全体からなる空間とする．$f,g\in X$ に対して，X 上の内積 (f,g) とノルム $\|f\|$ を

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,\quad \|f\|=\sqrt{(f,f)}$$

により定義する．$f\in X$ に対して関数 Uf を

$$(Uf)(x)=f(2x-[2x])\quad (x\in[0,1))$$

により定義する．ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数をあらわす．X の完全正規直交系 $\mathcal{O}=\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ （ただし，$e_k(x)=e^{2\pi ikx}$ とする）を用いて以下の問いに答えよ．

(1) $k\in\mathbf{Z}$ に対し，Ue_k を求めよ．

(2) $\|Uf\|=\|f\|$ $(f\in X)$ を示せ．

(3) $f\in X$ が $Uf=f$ を満たすならば，f は定数関数であることを示せ．