専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　１５　大修

数学　　　　　　　　　　　　　　　　時間　9:00 - 11:00

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題３題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で２ページからなる.

記号について：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] $\mathbb{C}$ に成分をもつ (l, m) 型行列 A および (m, n) 型行列 B を考える（l, m, n は自然数）．$T_A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$, $T_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を A, B から定まる線形写像とする．

(1) $\operatorname{rank} AB \leq \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$ を示せ．

(2) $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A$ となる必要十分条件は

$$\operatorname{Ker}(T_A) + \operatorname{Im}(T_B) = \mathbb{C}^m$$

であることを示せ．

(3) $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B$ となる必要十分条件は

$$\operatorname{Ker}(T_A) \cap \operatorname{Im}(T_B) = \{\mathbf{0}\}$$

であることを示せ．

(4) $l = m = n = 3$ のとき，次の (i), (ii) が成り立つような A, B の例をそれぞれあげよ．

(i) $0 < \operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B$,

(ii) $0 < \operatorname{rank} AB < \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$.

[2] 連続関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+2) - f(x)) = 3$$

をみたすとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ が存在することを示せ．さらにその値を求めよ．

[3] 実数の集合 $\mathbb{R}$ に通常の位相をいれ，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に相対位相を入れる．このとき，次を証明せよ．

(1) 部分集合 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合でも開集合でもない．

(2) A は $\mathbb{Q}$ の閉集合であり開集合でもある．

(3) 部分空間 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{R}$ と同相ではない．

(4) 部分空間 $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{Q}$ と同相である．

専門科目（午後）　　　　　　　　　　　１５　大修
数学　　　　　　　　　　　　　　　　時間　12:30 - 15:00

注意事項：

1.　試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.

2. 以下の問題のうち３題を選択して解答せよ．ただし、口頭試問を
　代数班で受けることを希望する人は，問１〜問４のうちから少なくとも１題,
　幾何班で受けることを希望する人は，問５〜問７のうちから少なくとも１題,
　解析班で受けることを希望する人は，問８〜問１０のうちから少なくとも１題
を選択する３題の中に入れること.

3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.

4. 各解答用紙毎に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ.

5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で４ページからなる.

6. 口頭試問を代数、幾何、解析のどの班で受けることを希望するか解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：

$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1]　有限次元複素線形空間 V と，その上の線形変換からなるある集合 G とが与えられているとき，(G,V) が既約であるとは $\{\mathbf{o}\}$，V 以外に G-不変部分空間が存在しない場合を言う．ここで G-不変部分空間 $W \subset V$ とは，すべての $g \in G$ に対して，$\mathbf{v} \in W$ ならば $g(\mathbf{v}) \in W$ が成り立つ部分空間 $W \subset V$ のことである．いま，(G,V) が既約であり，さらに線形変換 $A : V \to V$ が G の任意の元と可換であるとする：$A \circ g = g \circ A \quad (\forall g \in G)$．このとき次を示せ．

(1)　核 $\operatorname{Ker} A$ および像 $\operatorname{Im} A$ は G-不変である．
(2)　A は零写像でなければ，同型写像である．
(3)　A は同型写像であれば，ある複素数 λ が存在して $A = \lambda\, \mathrm{id}_V$ である．ただし，id_V は V の恒等変換である．

[2]　素数 p に対して $\mathbb{F}_p$ を p 元体とし

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F}_p \backslash \{0\},\ c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

とおく．G は行列の積で群となる．このとき

(1)　G の位数を求めよ．
(2)　G のシロー p 部分群をすべて求めよ．
(3)　G の元の位数の最大値を求めよ．

[3]　可換環 R の既約な元 x で Rx が素イデアルでないような例をあげ，その理由を述べよ．

[4]　複素数 α, β が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上超越的であるとする．このとき 複素数体 $\mathbb{C}$ の自己同型 σ で $\sigma(\alpha) = \beta$ をみたすものが存在することを示せ．

[5]

$$M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$
$$T = \{(z_1, z_2) \in M \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1/2\}$$

とおき，$\mathbb{C}P^1$ を 1 次元複素射影空間とする．このとき次を示せ．

(1) T は M の C^∞ 級部分多様体である．
(2) $M \setminus T$ は 2 つの連結成分からなり，互いに微分同相である．
(3) $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ を $f(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$ で定める．
$f\Big|_T$ の像，および $\mathbb{C}P^1$ の各点の逆像は $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同相である．

[6] $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおき，$f_n\colon S^1 \to S^1$ を $f_n(z) = z^n$ で定義する（$n \in \mathbb{Z}$）．各点 $(x, 0) \in S^1 \times \{0\}$ は $(f_n(x), 1) \in S^1 \times \{1\}$ に同値であると定義して得られる $S^1 \times [0, 1]$ の商空間を T_n とする．すなわち

$$T_n = S^1 \times [0, 1] \Big/ (x, 0) \sim (f_n(x), 1)$$

である．

(1) T_1 の整係数ホモロジー群を求めよ．
(2) T_{-1} の整係数ホモロジー群を求めよ．
(3) T_0 の整係数ホモロジー群を求めよ．
(4) $n \neq 0,\ \pm 1$ のとき，T_n の整係数ホモロジー群を求めよ．

[7] (1) n 次実正則行列全体 $GL(n, \mathbb{R}) = \{X = (x_{ij}) \mid \det X \neq 0\}$ はリー群であることを示せ．

(2) n 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ を固定する．(x_{ij}) を $GL(n, \mathbb{R})$ の座標とするとき

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

は左不変ベクトル場であることを示せ．

[8] $\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域とする．

$$\mathcal{H} = \{f \mid f \text{ は } \Omega \text{ 上の正則関数}, \|f\|^2 = \int_\Omega |f(z)|^2 dxdy < \infty\}$$

とおく．ただし $z = x + iy$ である．

(1)　Ω の任意の点 z に対し

$$K(z) = \sup\{|f(z)|^2 \mid f \in \mathcal{H},\ \|f\| \le 1\}$$

は有限であることを示せ.

(2)　Ω の各点 z で

$$K(z) = |f(z)|^2 \quad \text{かつ} \quad \|f\| = 1$$

となる $f \in \mathcal{H}$ が存在することを示せ.

[9] (1)　$f(x)$, $x^2 f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数ならば

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} (\cos xy) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

は C^2-関数であることを示せ.

(2)　$f(x)$, $|x|^\alpha f(x)$　$(2 < \alpha < 4)$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分ならば

$$\lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} (\cos xy - 1 + \frac{x^2 y^2}{2}) f(y) dy \right) = 0$$

を示せ.

[10] (1)　f を区間 $[0,1]$ 上の連続関数とする．次の境界値問題を解け.

$$\frac{d}{dx} u(x) - 2xu(x) = f(x) \quad (0 < x < 1),$$
$$u(0) = u(1).$$

(2)　X を $[0,1]$ 上の連続関数全体のなすバナッハ空間とする．ただし，そのノルムは $f \in X$ に対し $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ と定める．(1) の境界値問題の解を Gf とあらわすとき，G は X 上の線形有界作用素であることを示せ.

(3)　X の任意の有界列 $\{f_1, f_2, \ldots\}$ に対し，$\{Gf_1, Gf_2, \ldots\}$ の中に X で収束する部分列が存在することを示せ.