問題 1

関数 $f(x)=(x+1)e^{-ax^2}\ (0<x<\pi)$ が極値を持つような実数 a の範囲を求めよ.

問題 2.

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_4^{16}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx$

問題 3.

次の定積分を求めよ．ただし，$a>0$ は定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^a \log(a^2+x^2)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

問題 4.

次の定積分を求めよ．ただし，m,n は自然数とする.

$$\int_0^\pi \sin mx\cos nx dx$$

問題 5.

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}x\leqq\sin x\leqq x$ であることを利用して次の不等式を示せ.

$$\frac{\pi}{2}(e-1)<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}dx<e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

問題 6.

n を 2 以上の自然数とする.

(1) k を 2 以上の自然数とするとき，$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}<\int_{k-1}^k\frac{1}{x}dx$ を示せ.

(2) $\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ.

問題 7.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\log k}{k}$ を求めよ.

問題 8.

n を自然数とし，$\displaystyle I_n=\int_0^1 x^ne^xdx$ とおく.

(1) I_{n+1} を I_n を用いて表せ.

(2) すべての n に対して，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{e}{n+2}<I_n<\frac{e}{n+1}$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(nI_n-e)$ を求めよ.

問題 9.

袋の中に 1 から n までの番号がついた合計 n 個の玉が入っている．この袋から玉を 1 個取り出し，番号を調べてもとに戻す操作を r 回行うとき，取り出された玉の番号の最大値を X とし，X の期待値を E_n とおく．

(1) $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$X = k$ をとなる確率を求めよ．

(2) $r = 2$ のとき，E_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{n}$ を求めよ．

ヒント：区分求積法を用いる．

問題 10.

正の整数 k に対して，a_k を $\sqrt{k}$ に最も近い整数とする．例えば，$a_5 = 2$, $a_8 = 3$ である．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} a_k$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2020} a_k$ を求めよ．