

整式の除法 (解答)

問 1

整式 $f(x)$ を $x+1$ で割った余りが 1, $x-2$ で割った余りが 4 のとき, $f(x)$ を x^2-x-2 で割った余りを求めよ.

✓ 解答

求める余りは 1 次以下の整式なので, $ax+b$ とおく. 商を $q(x)$ とすると,

$$f(x) = (x^2 - x - 2)q(x) + ax + b = (x-2)(x+1)q(x) + ax + b$$

と書ける. 因数定理より $f(-1) = 1, f(2) = 4$ であるから,

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b = 1 \\ f(2) = 2a + b = 4 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと, $a = 1, b = 2$ を得る. よって求める余りは $x+2$.

問 2

a を定数, n を正の整数とする. x の整式 $f(x) = x^n + 2x^{n-1} - a$ が $x+1$ で割り切れるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) $f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ.

[00 佐賀大]

✓ 解答

- (1) $f(x)$ が $x+1$ で割り切れるので, 因数定理より $f(-1) = 0$ である.

$$f(-1) = (-1)^n + 2(-1)^{n-1} - a = (-1)^{n-1}(-1+2) - a = (-1)^{n-1} - a = 0$$

よって, $a = (-1)^{n-1}$.

- (2) $f(x)$ を $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ で割った余りを $rx+s$ とおく.

$$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + rx + s$$

$f(-1) = 0$ より, $-r+s=0 \cdots \textcircled{1}$ である. また, $f(1) = 1^n + 2 \cdot 1^{n-1} - a = 3-a$ より, $r+s=3-a \cdots \textcircled{2}$. よって, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ より

$$r = s = \frac{3-a}{2}$$

である. (1) より $a = (-1)^{n-1}$ であったから, $r = s = \frac{3 - (-1)^{n-1}}{2}$.

したがって, 求める余りは $\frac{3 - (-1)^{n-1}}{2}x + \frac{3 - (-1)^{n-1}}{2}$.

問 3

x^{10} を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ.

✓ 解答

x^{10} を $(x-1)^2$ で割った商を $q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと,

$$x^{10} = (x-1)^2 q(x) + ax + b \cdots (A)$$

(A) に $x=1$ を代入すると, $1 = a + b \cdots ①$. 次に, (A) の両辺を x で微分すると,

$$10x^9 = 2(x-1)q(x) + (x-1)^2 q'(x) + a$$

この式に $x=1$ を代入すると, $10 = a \cdots ②$. これを①に代入して $b = -9$.

よって, 求める余りは $10x - 9$.

問 4

x^n を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ.

✓ 解答

x^n を $(x-1)^2$ で割った商を $q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと,

$$x^n = (x-1)^2 q(x) + ax + b \cdots (A)$$

(A) に $x=1$ を代入すると, $1 = a + b \cdots ①$. 次に, (A) の両辺を x で微分すると,

$$nx^{n-1} = 2(x-1)q(x) + (x-1)^2 q'(x) + a$$

この式に $x=1$ を代入すると, $a = n \cdots ②$. これを①に代入して $b = 1 - n$.

よって, 求める余りは $nx + 1 - n$.

問 5

因数定理の主張を述べ, それを証明せよ.

✓ 解答

主張: 整式 $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ である.

証明: $f(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $q(x)$, 余りを r とすると, $f(x) = (x-a)q(x) + r$ と書ける. これより, $r = f(a)$ がしたがう. (証明終)

問 6

$(x+1)^{12}$ を x^2-1 で割った余りを求めよ.

[08 日本歯科大]

解答

$f(x) = (x+1)^{12}$ を $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおく.

$$(x+1)^{12} = (x-1)(x+1)q(x) + ax + b$$

因数定理より $2^{12} = f(1) = a+b, 0 = f(-1) = -a+b$ なので $a=b=2^{11}=2048$. よって, 求める余りは $2048x + 2048$.

問 7

n は 3 以上の奇数として, 多項式 $P(x) = x^n - ax^2 - bx + 2$ を考える. $P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a = \boxed{\text{あ}}$, $b = \boxed{\text{い}}$ であり, $(x+1)^2$ で割り切れるときは $a = \boxed{\text{う}}$, $b = \boxed{\text{え}}$ である.

[11 慶應義塾大]

解答

- $P(x)$ が $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ で割り切れるとき
因数定理より $P(2) = 0, P(-2) = 0$ なので,

$$\begin{cases} P(2) = 2^n - 4a - 2b + 2 = 0 \\ P(-2) = (-2)^n - 4a + 2b + 2 = 0 \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2^n + 2 \\ 4a - 2b = 2 - 2^n \end{cases}$$

連立方程式を解くと, $a = \frac{1}{2} \cdots (\text{あ}), b = 2^{n-1} \cdots (\text{い})$

- $P(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れるとき
 $P(x) = (x+1)^2 q(x)$ と書けるので, $P(-1) = 0$. また, この両辺を x で微分すると $P'(x) = 2(x+1)q(x) + (x+1)^2 q'(x)$ なので $P'(-1) = 0$.
 $P(-1) = 0$ より, $-a + b + 1 = 0 \cdots \text{①}$, $P'(-1) = 0$ より, $n + 2a - b = 0 \cdots \text{②}$ である.
①と②より, $a = -n - 1 \cdots (\text{う}), b = -n - 2 \cdots (\text{え})$

問 8

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で、 $x+2$ で割ったときの余りが -4 である。

- (1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。
- (3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

[山形大]

解答

$P(x) = (x-1)^2 q_1(x) + 4x-5 \cdots \textcircled{1}$, $P(x) = (x+2)q_2(x) - 4 \cdots \textcircled{2}$ とおく。

- (1) 因数定理より $x-1$ で割った余りは $P(1)$ である。よって、求める余りは①より $P(1) = 4 \cdot 1 - 5 = -1$ 。
- (2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおく。 $P(1) = -1, P(-2) = -4$ なので、

$$\begin{cases} a+b = -1 \\ -2a+b = -4 \end{cases}$$

これを解いて $a=1, b=-2$ 。よって余りは $x-2$ 。

- (3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割った余りは 2 次以下の式なので、 $r(x)$ とおく。

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)q(x) + r(x)$$

この式より、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは、 $r(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りと等しい。①よりこの余りは $4x-5$ なので、 $r(x)$ は定数 a を用いて

$$r(x) = a(x-1)^2 + 4x-5$$

と書ける。よって、

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)q(x) + a(x-1)^2 + 4x-5$$

ここに $x=-2$ を代入すると、②より $P(-2) = -4$ なので、

$$-4 = P(-2) = 9a - 13$$

これより $a=1$ なので、求める余りは $1 \cdot (x-1)^2 + 4x-5 = x^2 + 2x - 4$ 。