単元別演習　2 次関数①

最大・最小 (解答)

問 1

a を負の定数とする．2 次関数 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ の $-2 \leq x \leq 2$ における最大値が 12, 最小値が -6 のとき、a, b の値を求めよ．　(04 同志社女子大)

解答

与えられた関数を平方完成すると

$$f(x) = a(x^2 - 2x) + b = a(x-1)^2 - a + b$$

であるから，$a < 0$ よりグラフは $(1, -a+b)$ を頂点とする上に凸の放物線である．軸 $x = 1$ は定義域 $-2 \leq x \leq 2$ に含まれるので，$f(x)$ は $x = 1$ で最大値 $f(1) = -a + b$, $x = -2$ で最小値 $f(-2) = 8a + b$ をとる．最大値が 12, 最小値が -6 であるから,

$$\begin{aligned} -a + b &= 12 \quad \cdots ① \\ 8a + b &= -6 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

を得る．これを解いて，$\boldsymbol{a = -2, b = 10}$.

問 2

関数 $y = (x^2 - 3x)^2 - 9(x^2 - 3x)$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値と最小値を求めよ．　(05 慶應義塾大)

解答

$t = x^2 - 3x$ とおくと，$y = t^2 - 9t$ と表せる．まず, t の値の範囲を求めよう．

$$t = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

であるから，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，$-\dfrac{9}{4} \leqq t \leqq 4$ である．よって，$y = t^2 - 9t$ $\left(-\dfrac{9}{4} \leqq t \leqq 4\right)$ の最大値と最小値を考えればよい．平方完成すると

$$y = \left(t - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$$

であるから，$t = -\dfrac{9}{4}$ $\left(x = \dfrac{3}{2}\right)$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{405}{16}}$, $t = 4(x = 4)$ で最小値は $\boldsymbol{-20}$ をとる．

問 3

関数 $y = -2\sin^2 x + 5\sin x + 3$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最小値を求めよ.

解答

$t = \sin x$ とおくと，$y = -2t^2 + 5t + 3$ である．$0 \leq x \leq 2\pi$ より，$-1 \leq t \leq 1$ に注意する．平方完成すると

$$y = -2t^2 + 5t + 3 = -2\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$$

であるから，グラフは $\left(\frac{5}{4}, \frac{49}{8}\right)$ を頂点とする上に凸の放物線である．よって，$t = -1$ で最小値 -4 をとる．$t = -1$ のとき $x = \frac{3}{2}\pi$ であるから，結局，$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}\pi}$ で最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる．

問 4

$0 \leq x \leq 3$ のとき、関数 $f(x) = 2x^2 - 4ax + a + a^2$ の最小値 m が 0 となるような定数 a の値をすべて求めよ.　　(86 東京大)

解答

関数 $f(x)$ を平方完成すると，

$$f(x) = 2(x^2 - 2ax) + a + a^2 = 2(x-a)^2 - 2a^2 + a + a^2 = 2(x-a)^2 - a^2 + a$$

より，グラフは $(a, -a^2 + a)$ を頂点とする下に凸の放物線である.

(1) $a < 0$ のとき
グラフは定義域内で単調増加となるので，$m = f(0) = a^2 + a$．$m = 0$ なら $a^2 + a = a(a+1) = 0$ なので，$a < 0$ より $\boldsymbol{a = -1}$.

(2) $0 \leq a \leq 3$ のとき頂点が定義域に含まれるので，$m = f(a) = -a^2 + a$．$m = 0$ なら $-a^2 + a = -a(a-1) = 0$ なので，$0 \leq a \leq 3$ より $\boldsymbol{a = 0, 1}$.

(3) $a > 3$ のときグラフは定義域内で単調減少となるので，$m = f(3) = a^2 - 11a + 18$．$m = 0$ なら $a^2 - 11a + 18(a-2)(a-9) = 0$ なので，$a > 3$ より $\boldsymbol{a = 9}$.

以上より, 求める a の値は $\boldsymbol{a = -1, 0, 1, 9}$.

問 5

2 次関数 $f(x) = ax^2 - 6ax + b$ は，区間 $1 \leqq x \leqq 4$ において最大値 11，最小値 8 をとる．このとき，$a > 0$ ならば，$b = \boxed{\quad ア \quad}$ であり，$a < 0$ ならば，$b = \boxed{\quad イ \quad}$ である. (06 愛知工業大)

解答

$f(x)$ を平方完成すると

$$f(x) = ax^2 - 6ax + b = a(x-3)^2 - 9a + b$$

より，グラフは $(3, -9a+b)$ を頂点とする放物線である.

(1) $a > 0$ のとき
グラフは下に凸なので，$x = 3$ で最小値 $-9a + b = 8$，$x = 1$ で最大値 $-5a + b = 11$ をとる．これより，$a = \dfrac{3}{4}, \boldsymbol{b = \dfrac{59}{4}} \cdots \boxed{\quad ア \quad}$．これは $a > 0$ を満たしているので OK.

(2) $a < 0$ のときグラフは上に凸なので，$x = 1$ で最小値 $-5a + b = 8$，$x = 3$ で最大値 $-9a + b = 11$ をとる．これより，$a = -\dfrac{3}{4}, \boldsymbol{b = \dfrac{17}{4}} \cdots \boxed{\quad イ \quad}$．これは $a < 0$ を満たしているので OK.