

整式の除法

例題 1

整式 $f(x)$ を $x+2$ で割った余りが 3, $x-3$ で割った余りが -1 のとき, $f(x)$ を x^2-x-6 で割った余りを求めよ. [05 立教大]

Point.

商を $q(x)$, 余りを $r(x)$ として $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ の形で表す.

解答

$f(x)$ を $x+2$ で割った余りが 3 であるから, 商を $q_1(x)$ とすると

$$f(x) = (x+2)q_1(x) + 3 \cdots \textcircled{1}$$

また, $f(x)$ を $x-3$ で割った余りは -1 であるから, 商を $q_2(x)$ とすると

$$f(x) = (x-3)q_2(x) - 1 \cdots \textcircled{2}$$

と書ける. $f(x)$ を x^2-x-6 で割った余りは一次式であるから, これを $ax+b$ とおく. 商を $q(x)$ とすると

$$f(x) = (x^2-x-6)q(x) + ax+b = (x-3)(x+2)q(x) + ax+b \cdots \textcircled{3}$$

と表せる. ①より $f(-2) = 3$, ②より $f(3) = -1$ なので, ③より連立方程式

$$\begin{cases} -2a+b = 3 \\ 3a+b = -1 \end{cases}$$

を得る. これを解いて, $a = -\frac{4}{5}$, $b = \frac{7}{5}$ となるので, 求める余りは $-\frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$ である.

補足.

①, ②を書かずに**因数定理**を用いてもよい. 問題文より直ちに $f(-2) = 3$, $f(3) = -1$ がわかる.

【因数定理】

整式 $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ である.

証明.

$f(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $q(x)$, 余りを r とすると, $f(x) = (x-a)q(x) + r$ と書ける. これより, $r = f(a)$ がしたがう. (証明終)

問 1

整式 $f(x)$ を $x+1$ で割ったあまりが 1, $x-2$ で割った余りが 4 のとき, $f(x)$ を x^2-x-2 で割った余りを求めよ.

問 2

a を定数, n を正の整数とする. x の整式 $f(x) = x^n + 2x^{n-1} - a$ が $x+1$ で割り切れるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) $f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ.

[00 佐賀大]

例題 2

$ax^3 + bx^2 - 2$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき, a, b の値を求めよ. [06 早稲田大 改]

Point.

$(x-a)^n$ で割る問題の多くは, 例題 1 と同じようにやると条件が足りずに手詰まりとなる. この系統の問題は, **微分を使って条件式を増やす**と簡単に解ける.

解答

$ax^3 + bx^2 - 2$ が $(x-1)^2$ で割り切れるから, 商を $q(x)$ とすると

$$ax^3 + bx^2 - 2 = (x-1)^2 q(x) \cdots (A)$$

と書ける. ひとまず (A) に $x=1$ を代入すると, $a+b-2=0 \cdots ①$ がわかる.

① だけだと a, b が求まらないので, 式がもう 1 本必要である. そこで, (A) の両辺を x で微分すると,

$$3ax^2 + 2bx = 2(x-1)q(x) + (x-1)^2 q'(x) \cdots (B)$$

である. (B) に $x=1$ を代入すれば, $3a+2b=0 \cdots ②$ がわかる. ①と②より, $a=-4, b=6$.

問 3

x^{10} を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ.

問 4

x^n を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ.

復習問題

問 5

因数定理の主張を述べ、それを証明せよ。

問 6

$(x+1)^{12}$ を x^2-1 で割った余りを求めよ。

[08 日本歯科大]

問 7

n は 3 以上の奇数として、多項式 $P(x) = x^n - ax^2 - bx + 2$ を考える。 $P(x)$ が $x^2 - 4$ で割り切れるときは $a = \boxed{\text{あ}}$, $b = \boxed{\text{い}}$ であり、 $(x+1)^2$ で割り切れるときは $a = \boxed{\text{う}}$, $b = \boxed{\text{え}}$ である。

[11 慶應義塾大]

問 8

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で、 $x+2$ で割ったときの余りが -4 である。

- (1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。
- (3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

[山形大]