

確率漸化式 (解答)

問 1

正三角形 ABC の頂点を点 P が次のルールに従って移動する：

- 時刻 0 に P は A にいる.
- 1 秒ごとに P は $\frac{1}{5}$ の確率で今いる頂点にとどまり, それぞれ $\frac{2}{5}$ の確率で他の 2 頂点のいずれかに移動する.

このとき, n 秒後に P が A にいる確率を p_n を求めよ.

解答

n 秒後に P が B にいる確率を q_n , C にいる確率を r_n とおく. $n+1$ 秒後に A にいるのは,

- n 秒後に A にいて, その場にとどまる.
- n 秒後に B にいて, $n+1$ 秒後に A に移る.
- n 秒後に C にいて, $n+1$ 秒後に A に移る.

のいずれかである. これらの確率は順に $\frac{p_n}{5}$, $\frac{2}{5}q_n$, $\frac{2}{5}r_n$ であるから,

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}(q_n + r_n)$$

ここで, $p_n + q_n + r_n = 1$ であるから,

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}(1 - p_n) = -\frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}$$

$p_1 = \frac{1}{5}$ に注意してこの漸化式を解くと,

$$p_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{3}$$

問 2

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は 1 秒ごとに隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1 - a$ でとどまる．はじめ頂点 A にいた点 P が， n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし， $0 < a < 1$ とし， n は自然数とする．

- (1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．
- (2) 確率 p_n を求めよ．

(北海道大)

✓ 解答

- (1) 図形の対称性から， n 秒後に P が B,C,D にいる確率はそれぞれ等しいので，これを q_n とおく．このとき， $p_n + 3q_n = 1$ に注意しておく． $n + 1$ 秒後に P が A にいるのは，
 - － n 秒後に A にいて，その場にとどまる．
 - － n 秒後に B,C,D のいずれかにいて， $n + 1$ 秒後に A に移る．のいずれかである．確率は順に $p_n(1 - a_n)$ ， $3q_n \cdot \frac{a}{3} = aq_n$ であるから，求める漸化式は

$$p_{n+1} = p_n(1 - a_n) + aq_n = \left(1 - \frac{4a}{3}\right)p_n + \frac{a}{3}.$$

- (2) 上で導いた漸化式を解けば，

$$p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{4a}{3}\right)^n$$