1. **Područje okolina, i niz u kompleksnoj ravnini**

**1.1. Područje i okolina kompleksne varijable**

Pomoću norme definiramo metriku

Pa *C* s metrikom *d* nazivamo **prostorom kompleksnih brojeva** i označavamo sa *(C,d)* ili samo sa *C*. U svakom metričkom prostoru, pa tako i u *(C,d)*, možemo uvesti topološku strukturu. Definiramo otvorenu kuglu sa središtem u točki radijusa kao skup:

.

Za skup *S* kažemo da je **okolina** točke ako postoji kugla .

Ukoliko je *S* otvoren skup tada je (i samo tada) *S* okolina svake svoje točke.

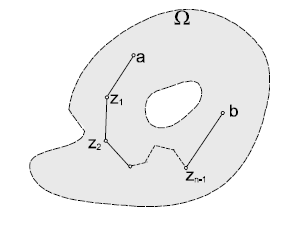
Također uz pojam otvorenog skupa su usko vezani pojmovi **zatvorenog** i **omeđenog** skupa te **područja**.

Za skup kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement otvoren, a takvi primjeri su prazan skup i čitav prostor, jednotočkovni skupovi te svi konačni podskupovi iz prostora.

Za skup *S* kažemo da je omeđen ako je sadržan u nekoj kugli, tj. ako postoje takvi da je .

Očito je da je skup *S* omeđen ako postoji kugla sa središtem u ishodištu koja sadrži *S*.

Za neprazan skup , kažemo da je područje, ako za bilo koje dvije točke postoji konačno točaka takvih da sve spojnice (segmenti) , leže u .

****

*Slika 1.1 : Primjer područja*

**Primjer 1.1**

*Neka je . Da li je otvoreni prsten područje?*

***Rješenje:***

**2. Cauchyeva integralna formula i primjeri**

**2.1. Integral funkcije kompleksne varijable**

Kompleksne funkcije kompleksne varijable integriramo po putevima, odnosno krivuljama.

Definicija krivulje u kompleksnoj ravnini glasi:

*Neka su zadane funkcije*  *i neprekinute na*

*I* =

*Krivulja*  *u kompleksnoj ravnini zadana je parametrizacijom:*

*,*

*gdje je početna točka krivulje , a krajnja točka krivulje z*(*b*) = *B* = (*x*(*b*), *y*(*b*)) C.

*Krivulju koja ima suprotan smjer označit ćemo -*

*Ako je z(a) = z(b) krivulja je zatvorena.*

*Glatka zatvorena krivulja je pozitivno orijentirana ako je smjer ’vektora’ tangente*

*suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu.*



*Slika 2.1 : K(z*0, ρ)

Definicija **integrala funkcije kompleksne varijable**:

*Za zadanu funkciju kompleksne varijable po glatkoj krivulji , integral se definira na način:*

**Primjer 2.1**

*Izračunajte integral : , po kružnici oko polumjera ρ pozitivno orijentiranoj (suprotno kretanju kazaljke na satu).*

***Rješenje:***

*= (*

**2.2. Cauchyjev teorem**

Definicija Cauchyjevog teorema za pozitivno orijentiranu glatku krivulju:

*Neka je zatvorena po dijelovima glatka krivulja u kompleksnoj ravnini koja je pozitivno orijentirana i kojoj je unutarnje područje u D. Neka je f analitička funkcija na D. Tada je integral funkcije po glatkoj krivulji jednak nuli :*

Dokaz se nalazi u definiciji integrala kompleksne funkcije:

Dakle, potrebno je izračunati dva krivuljna integrala druge vrste.

Ako je analitička, onda funkcije zadovoljavaju (C-R) jednadžbe.

Općenito svaku funkciju kojoj je područje definicije otvoren skup i koja u svakoj točki ima derivaciju bilo kojeg reda i može se prikazati Taylorovim redom, nazivamo **analitičkom**.

Analitička funkcija kompleksne varijable ima više derivacija svih redova pa se u okolini svake točke može prikazati konvergentnim redom potencija:

Daljnjom primjenom **Geenovog teorema** koji nam govori da je krivuljni integral druge vrste potencijalnog vektorskog polja po zatvorenoj krivulji jednak nuli dokazujemo da integral možemo izjednačiti s nulom, ako je podintegralna funkcija analitička na C.

Također definicija **primitivne funkcije** ( „neodređenog integrala“ ) glasi:

*Neka su F i f analitičke funkcije na području D takve da je tada funkciju F nazivamo primitivnom funkcijom funkcije f i označavamo kao:*

**Primjer 2.2**

*Odredite primitivnu funkciju funkcije .*

***Rješenje:***

Kako smo imali definiciju neodređenog integrala, tako sljedeća definicija opisuje **određeni integral**:

*Neka su f i F njena primitivna funkcija analitičke funkcije na C (cijele funkcije).*

*Tada za sve krivulje u D koje povezuju dvije točke iz D vrijedi:*

**Primjer 2.3**

*Izračunajte integral: .*

***Rješenje:***

Također, često je moguće susresti se sa problemom gdje je D zapravo **višestruko povezano područje** (s rupom).

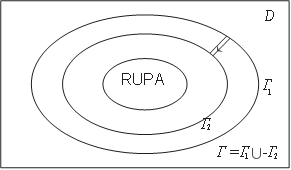
Definicija Cauchyjevog teorema s „rupom“ glasi:

*Neka je pozitivno orijentirana, zatvorena, po dijelovima glatka krivulja kojoj je unutarnje područje u D. Neka je pozitivno orijentirana, zatvorena, po dijelovima glatka krivulja koja se nalazi u unutrašnjem području od tako da obuhvaća rupu. Neka je spojnica tih krivulja i f analitička funkcija na D. Tada je integral funkcije f po dijelovima glatkoj krivulji pozitivno orijentiranoj*

*, jednak nuli:*

*I vrijedi:*

***Napomena:*** *Često imamo funkciju f koja je analitička na cijelom području D osim u točki . Tada po navedenim pretpostavkama možemo za drugu krivulju izabrati kružnicu koja obuhvaća rupu oko te točke.*



*Slika 2.2: Područje s „rupom“*

**2.3. Cauchyjeva integralna formula**

Prethodna dva poglavlja su nam bila potrebna za potpuno shvaćanje **Cauchyeve integralne formule**, ponajviše pojam integrala kompleksne varijable i analitičkih funkcija.

Također u nastavku pretpostavljamo da je po dijelovima jednostavna glatka zatvorena krivulja koja je pozitivno orijentirana i da je njeno unutarnje područje unutar *D* (ostaje s lijeve strane pri obilasku).

Stoga definicija Cauchyeve integralne formule glasi:

*Neka je f analitička funkcija na D. Tada za iz unutarnjeg područja vrijedi:*

*Rezultat vrijedi i u slučaju višestruko povezanog područja.*

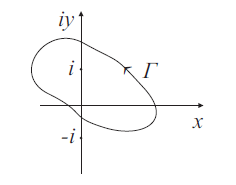
Moguće je i računanje n-te derivacije funkcije *f* u bilo kojoj točki iz unutarnjeg područja od :

**Primjer 2.4**

*Izračunajte integral:*

*Gdje je glatka zatvorena krivulja u čijem se unutarnjem području nalazi točka z = i, a ne nalazi točka z = -i.*

***Rješenje:***

******

*Slika 2.3: Skica krivulje*

*Za primjenu Cauchyevog teorema provjeravamo je li podintegralna funkcija analitička na D. Označimo je sa g(z):*

*Vidljivo je da je analitička osim u , što nam govori da integral ima različitu vrijednost od nule (prema gore navedenom teoremu).*

*Neka je , koja je cijela analitička na D.*

*Prema Cauchyjevoj formuli za točku vrijedi:*

*Budući da je , možemo izračunati vrijednost integrala:*

**Primjer 2.5**

*Izračunajte integral:*

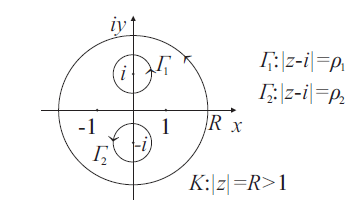
*Gdje je kružnica polumjer R > 1.*

***Rješenje:***

*Označimo podintegralnu funkciju sa . Vidljivo je da je analitička osim u*

*i . Dakle vrijednost integrala je različita od nule.*

*Označimo krivulje i , te primjenimo posljedicu, tj. Cauchyjev teorem za višestruko povezano područje.*

**

*Slika 2.4: Skica krivulja*

*Uvodimo supstituciju:*

*Te dolazimo do tražene vrijednosti integrala koristeći Cauchyjevu integralnu formulu:*