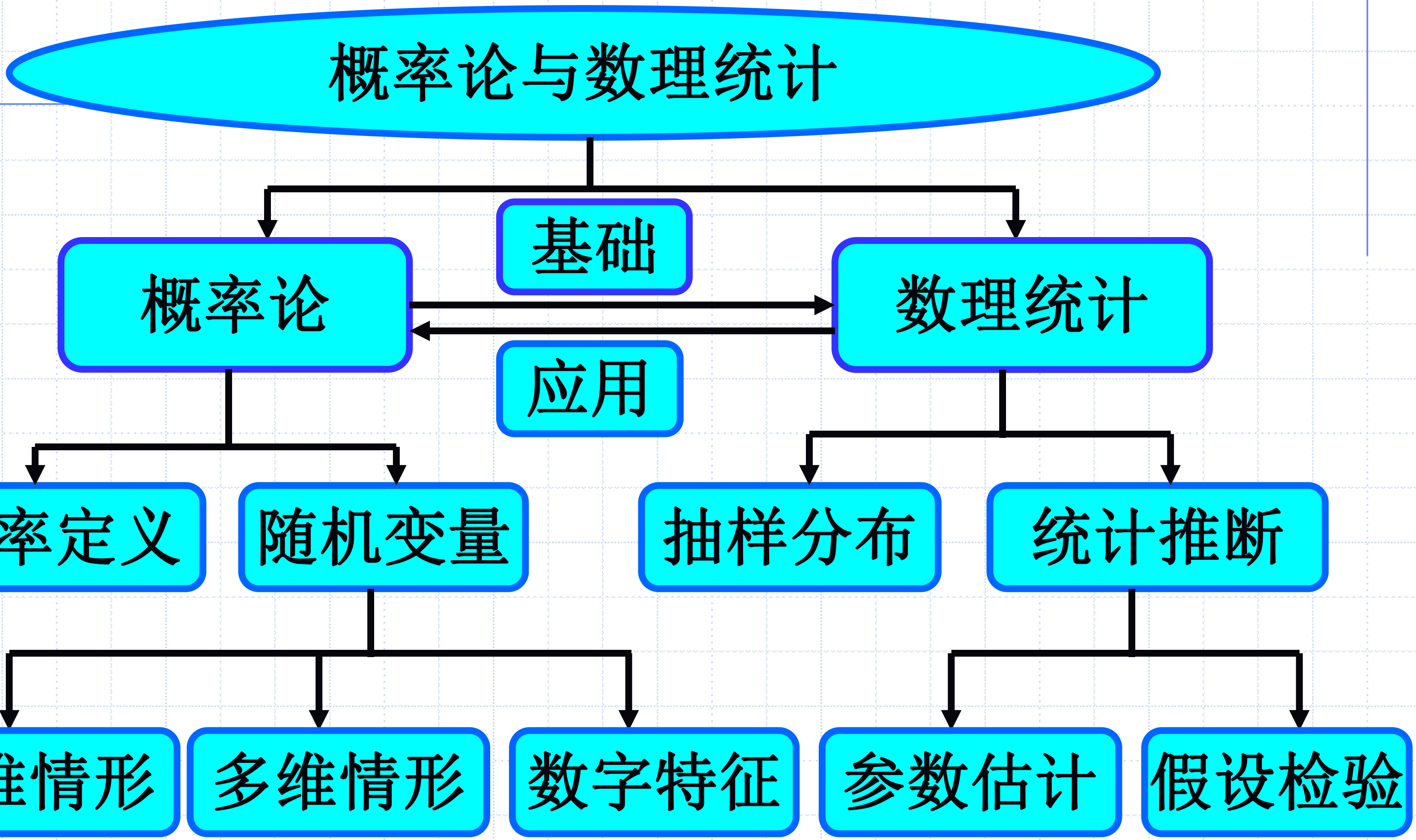
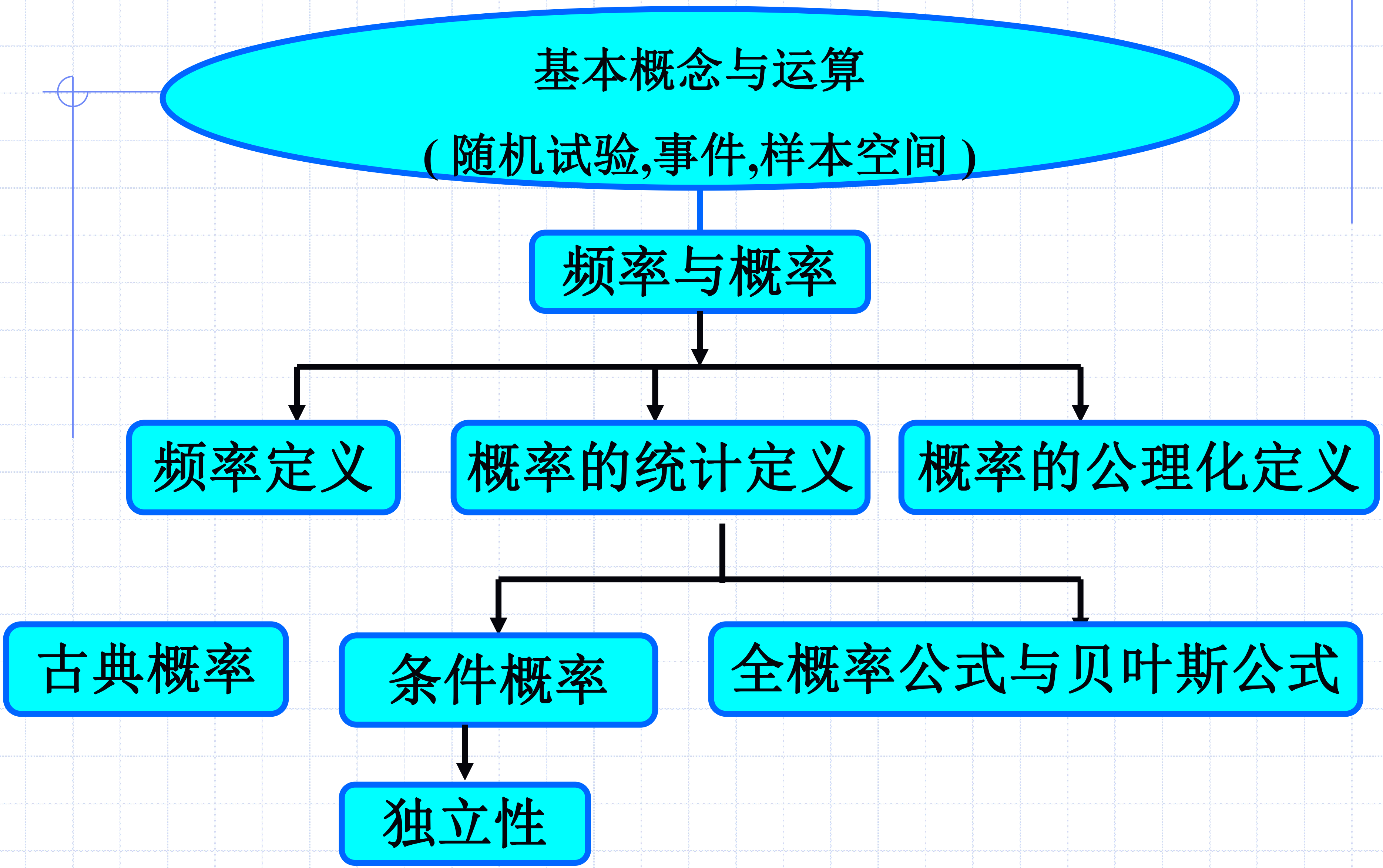
概 率 统 计 课 程 目 录

课程总知识结构图


概率论与数理统计
基础
概率论
数理统计
应用
概率定义
随机变量
抽样分布
统计推断
一维情形
多维情形
数字特征
参数估计
假设检验

第一章知识结构图



基本概念与运算
(随机试验,事件,样本空间)
频率与概率
频率定义
概率的统计定义
概率的公理化定义
古典概率
条件概率
全概率公式与贝叶斯公式
独立性

概率的定义 ⇨ 概率的性质 ⇨ 古典概率的计算

条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0$

乘法公式 $P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i),\quad B_1,\cdots,B_n$ 是S 的划分。

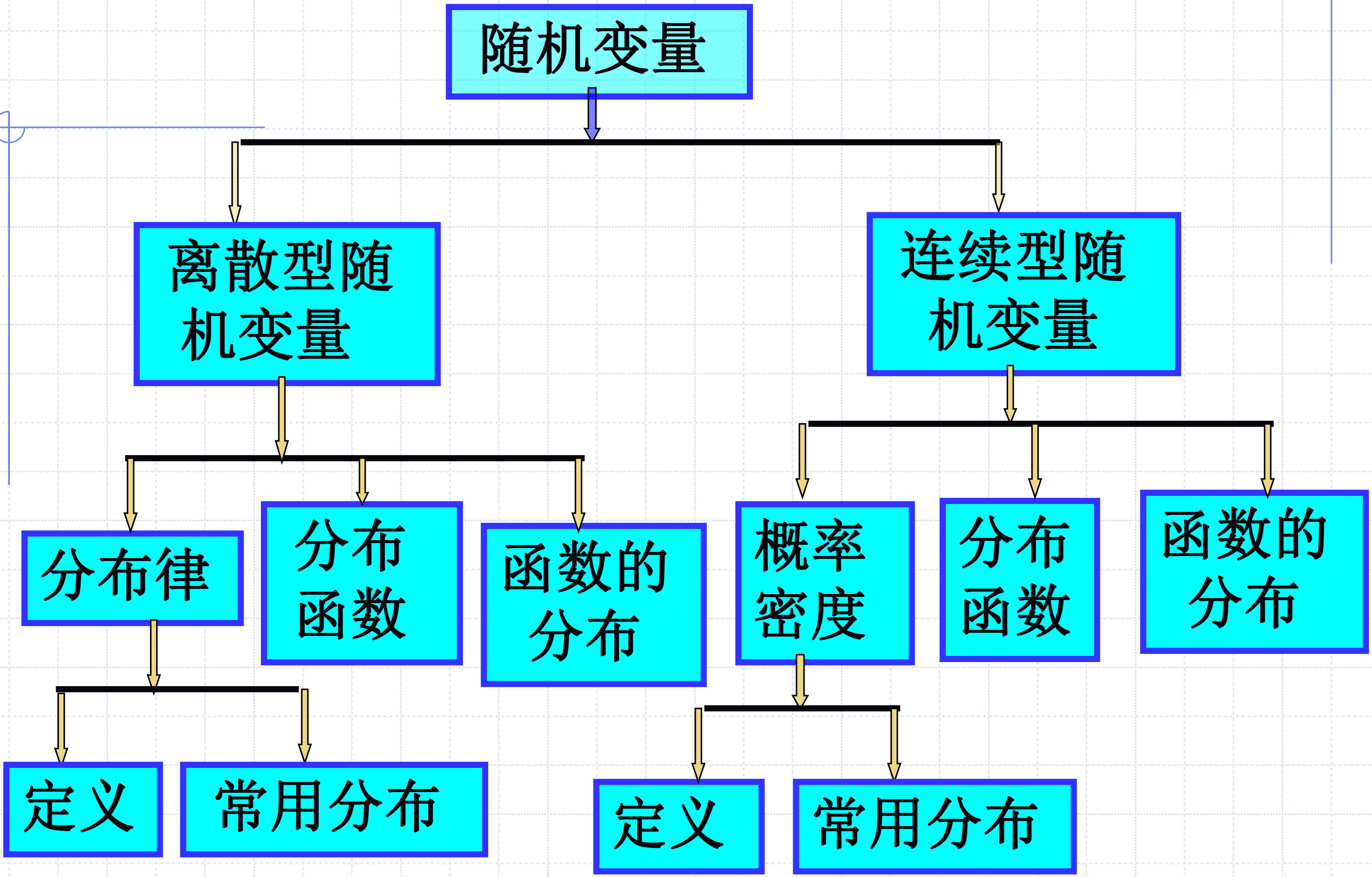
贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$

独立性 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

1. 设 A、B、C 为随机事件，已知事件 A 与 C 互斥，且 $P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$______________。

例．从以往的资料分析得知，在出口罐头导致索赔的事件中，有50%是质量问题；有30%是数量短缺问题；有20%是产品包装问题．又知在质量问题的争议中，经过协商解决的占40%；在数量短缺问题的争议中，经过协商解决的占60%；在产品包装问题的争议中，经过协商解决的占75%．如果在发生的索赔事件中，经过协商解决了，问这一事件不属于质量问题的概率是多少？

第二章知识结构图


随机变量
离散型随机变量
连续型随机变量
分布律
分布函数
函数的分布
概率密度
分布函数
函数的分布
定义
常用分布
定义
常用分布

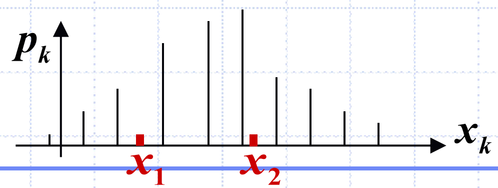
	离散型随机变量	连续型随机变量
分布函数 $F(x)=P(X\le x)$	$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x} p_k$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
概率的累加	右连续	连续

概率分布

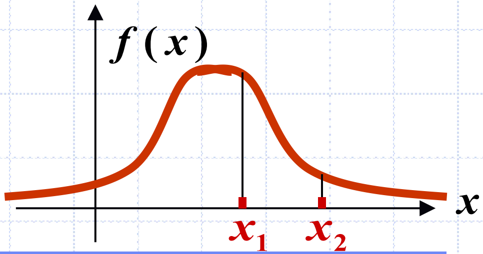
概率1的分布

离散型随机变量——分布律： $\sum p_k = 1$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k



连续型随机变量——概率密度： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$



概率计算

离散型：

$$P(x_1 < X \le x_2) = \sum_{x_1 < x_k \le x_2} p_k = F(x_2) - F(x_1)$$

连续型：

$$P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = F(x_2) - F(x_1)$$

常见分布	离散型随机变量	连续型随机变量
	1） 0-1分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$	1）$U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$
	2）$B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	2）指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$
	3）$P(\lambda)$或$\pi(\lambda)$ $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	3）$N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$Y=g(X)$

X的分布律 ➡ Y的分布律

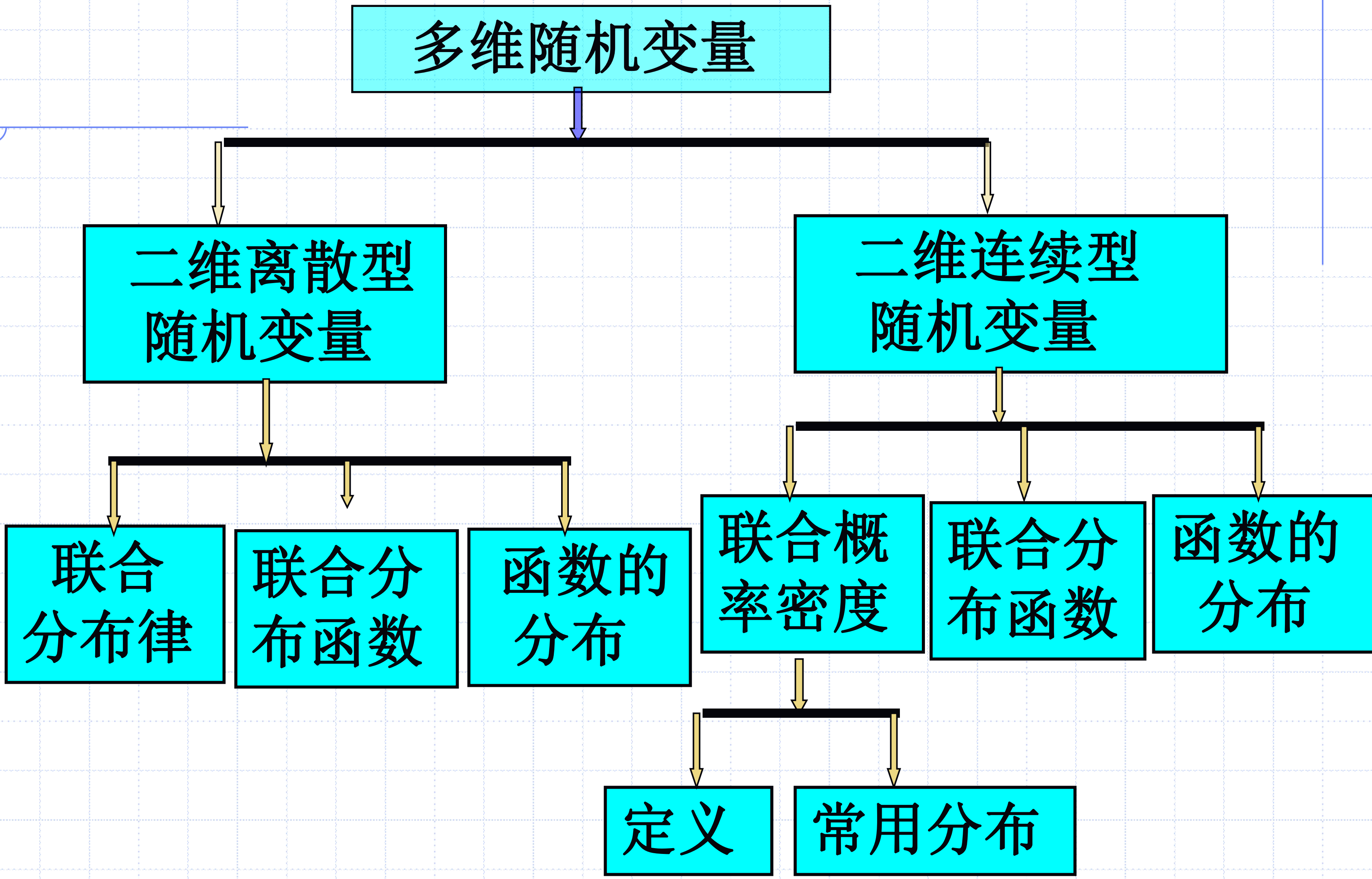
$f_X(x)\rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$

2. 设随机变量 X 的概率密度函数是 $f_X(x)=\dfrac{a}{4+x^2},-\infty<x<+\infty$，则 $a=$ ________。

3. 若 $X\sim N\left(1,\sigma^2\right)$，且 $P\left(0<X<2\right)=0.9544$，则 $P\left(X<0\right)=$ ________。

五.（本题 10 分）设随机变量 $X\sim N\left(0,2^2\right)$。问题：（1）写出 X 的概率密度函数；（2）随机变量 $Y=X^2+2$ 的密度函数.

第三章知识结构图


多维随机变量
二维离散型随机变量
二维连续型随机变量
联合分布律
联合分布函数
函数的分布
联合概率密度
联合分布函数
函数的分布
定义
常用分布

		(X,Y)离散型	(X,Y)连续型
(X,Y) 整体	联合分布函数 $F(x,y)$	联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$	联合概率密度 $f(x,y)$
(X,Y) 个体	边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to\infty}F(x,y)$ $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x,y)$	边缘分布律 $P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$ $P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$	边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$
X与Y独立	对$\forall x,y$ $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$	$P(X=x_i,Y=y_j)$ $=P(X=x_i)P(Y=y_j)$	$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
概率计算		$P\{(X,Y)\in G\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$	$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$

和的分布

$Z = X + Y$

离散型 $P\{Z = z_k\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = z_k - x_i\} = \sum_j P\{X = z_k - y_j, Y = y_j\}$

连续型 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)dy$

X, Y独立　卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y)dy$$

$M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

设X，Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$

求: $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布函数

1) $M = \max(X, Y)$ 的分布函数

$$F_M(z) = P(M \le z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$$

2) $N = \min(X, Y)$ 分布函数

$$F_N(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$$

七.（本题 12 分）设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & 0<y<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}，$$

其中k为常数。问题：（1）求常数k的值；（2）求X与Y的边缘概率密度函数；（3）求条件概率密度函数；（4）X与Y是否相互独立？

分布函数法练习

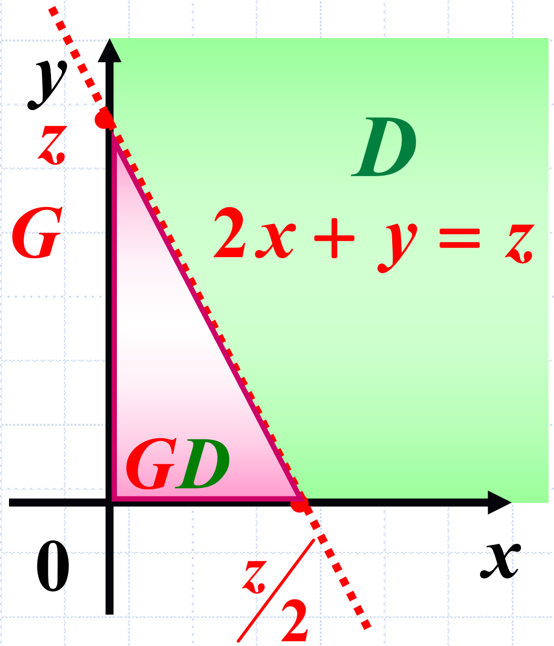
设 (X, Y) 的密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度

解：$F_Z(z)=P\{2X+Y\le z\}$

$$=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)\,dxdy \qquad \boxed{G: 2x+y\le z}$$



$$=\iint\limits_{GD} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$=\begin{cases} \int_0^{z/2} dx \int_0^{z-2x} e^{-(x+y)}\,dy = e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}\int_0^{z/2}dx\int_0^{z-2x}e^{-(x+y)}dy=e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_Z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

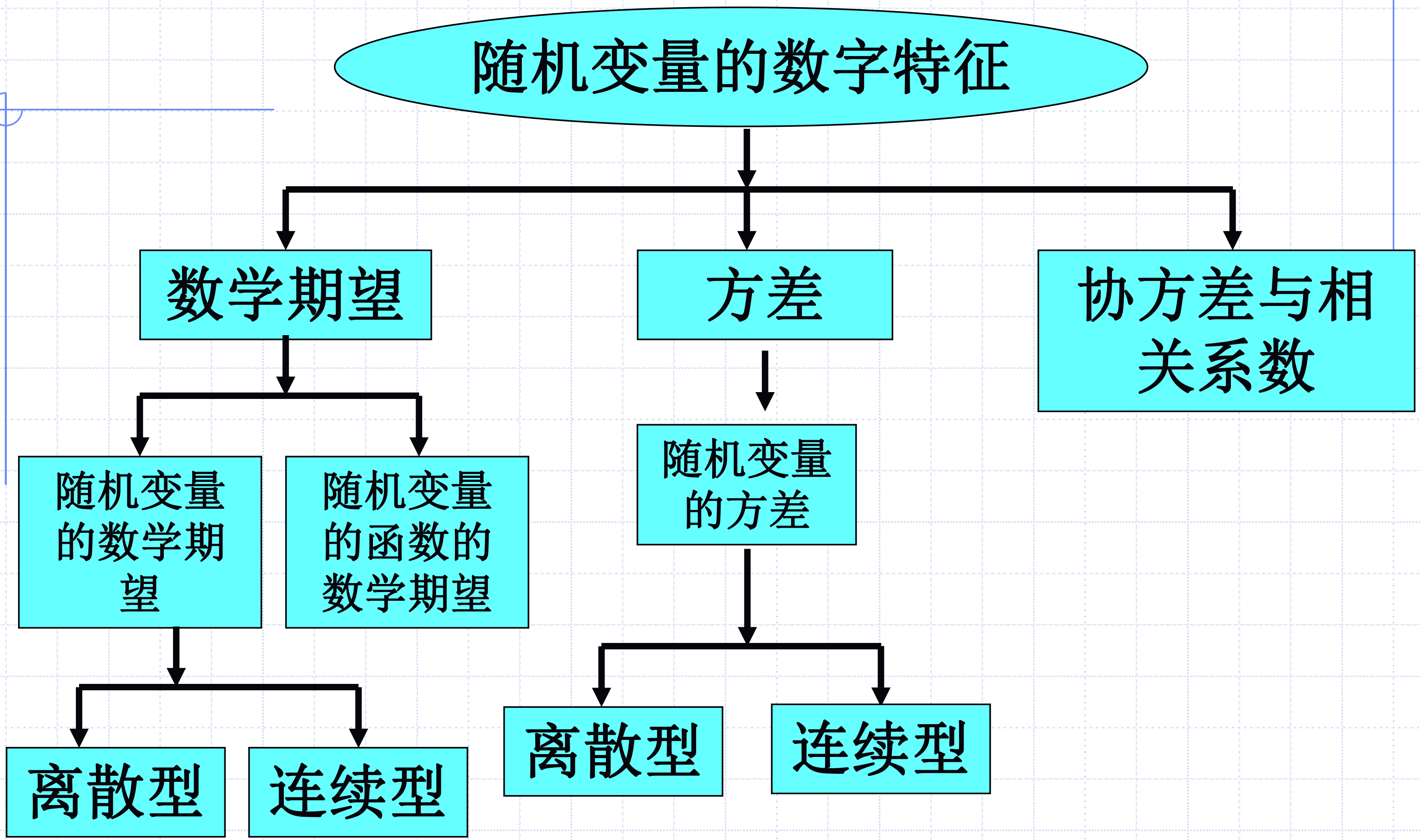
六.（本题 7 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases} \quad 和 \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。

第四章知识结构图


随机变量的数字特征
数学期望
方差
协方差与相关系数
随机变量的数学期望
随机变量的函数的数学期望
随机变量的方差
离散型
连续型
离散型
连续型

综合练习 **1**、设随机向量（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=3x,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$$

求：**1**）（X,Y）的边缘密度函数，并判断X与Y是否相互独立

2) $P\{X+2Y>1\}$

3) $Z=X+Y$ 的概率密度

4）求 $D(X)$

综合练习 **1**、设随机向量（*X,Y*）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=3x,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$$

求：**1**）（*X,Y*）的边缘密度函数，并判断*X*与*Y*是否相互独立

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$，$0\le x\le 1$（2 分）。

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2)$，$0\le y\le 1$（1 分）。

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 与 Y 不独立（1 分）。

综合练习 **1**、设随机向量（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=3x,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$$

求： **1**）（X,Y）的边缘密度函数，并判断X与Y是否相互独立

解： （1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$，$0\le x\le 1$（**2** 分）。

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}\left(1-y^2\right)$，$0\le y\le 1$（**1** 分）。

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 与 Y 不独立（1 分）。

综合练习 **1**、设随机向量（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=3x,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$$

求： **1**）（X,Y）的边缘密度函数，并判断X与Y是否相互独立

2) $P\{X+2Y>1\}$

（2） $$P\{X+2Y>1\}=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\\ x+2y>1}} 3x\,dxdy=\int_{\frac{1}{3}}^{1}dx\int_{\frac{1-x}{2}}^{x}3x\,dy=\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3x^2-x\right)dx=\frac{7}{9}$$

综合练习 **1**、设随机向量（*X,Y*）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=3x,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$$

3) $Z=X+Y$ 的概率密度

（3）当$0\le z\le 1$时，$f_z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}3xdx=\frac{9}{8}z^2$

当$1<z\le 2$时，$f_z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}3xdx=\frac{3}{2}\left(1-\frac{z^2}{4}\right)$

综合练习 **1**、设随机向量（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=3x,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$$

3) $Z=X+Y$ 的概率密度

4）求 $D(X)$

（4）$EX=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le x}} x\cdot 3x\,dxdy=\int_0^1 3x^2dx\int_0^x dy=\int_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}$

$$EX^2=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le x}} x^2\cdot 3x\,dxdy=\int_0^1 3x^3dx\int_0^x dy=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}$$

因此，$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{3}{80}$

练习2、设$X_1, X_2, \ldots X_5$ 独立同分布，且其方差存在，记$M = X_1+X_2+X_3$， $N = X_3+X_4+X_5$则 M与N的相关系数为（ ）.

（A）4/5 （B）1/25 （C）1/3 （D）1/15

2、（本题10分）在一次集会上，*n*个人把他们的帽子放到房间的中央混合在一起,而后每人随机地选取一顶。拿到自己帽子的人数是一个随机变量，记作*X*, 计算*X*的数学期望和方差

解：记 $X_i=1$，如果第 i 个人拿到自己的帽子；$X_i=0$，如果第 i 个人没有拿到自己的帽子。

则有 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$。

显然 $P(X_i=1)=\dfrac{1}{n}$，因此 $EX_i=\dfrac{1}{n}$，这样就有 $EX=1$。

另外，$DX_i=\dfrac{n-1}{n^2}$。

又 $EX_iX_j=P(X_i=1,X_j=1)=P(X_j=1)P(X_i=1|X_j=1)=\dfrac{1}{n(n-1)}$，

因此 $\mathrm{cov}(X_i,X_j)=EX_iX_j-EX_iEX_j=\dfrac{1}{n^2(n-1)}$。

$$DX=\frac{n-1}{n}+2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)}=1。$$

第五章知识结构图

- 概率论的理论结果
  - 大数定律
    - 切比雪夫大数定理
    - 贝努利大数定理
    - 辛钦(大数)定理
  - 中心极限定理
    - 独立同分布的中心极限定理
    - 李雅普诺夫中心极限定理
    - 棣莫弗--拉普拉斯中心极限定理

定理1（切比晓夫大数定律)(Chebyshev 大数定律)

设随机变量 $X_1,\cdots X_n\cdots$ 相互独立,且具有相同的数学期望及方差，$EX_k=\mu, DX_k=\sigma^2, k=1,2,\cdots,$

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu$ 即对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|<\varepsilon\}=1,$$

或 $$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|\geq\varepsilon\}=0.$$

二、中心极限定理

定理1 （独立同分布的中心极限定理）（林德贝格-莱维）

设$X_1,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布的随机变量 序列，且

$$EX_k=\mu,\ \ DX_k=\sigma^2\neq 0,(k=1,2,\cdots)$$ 则

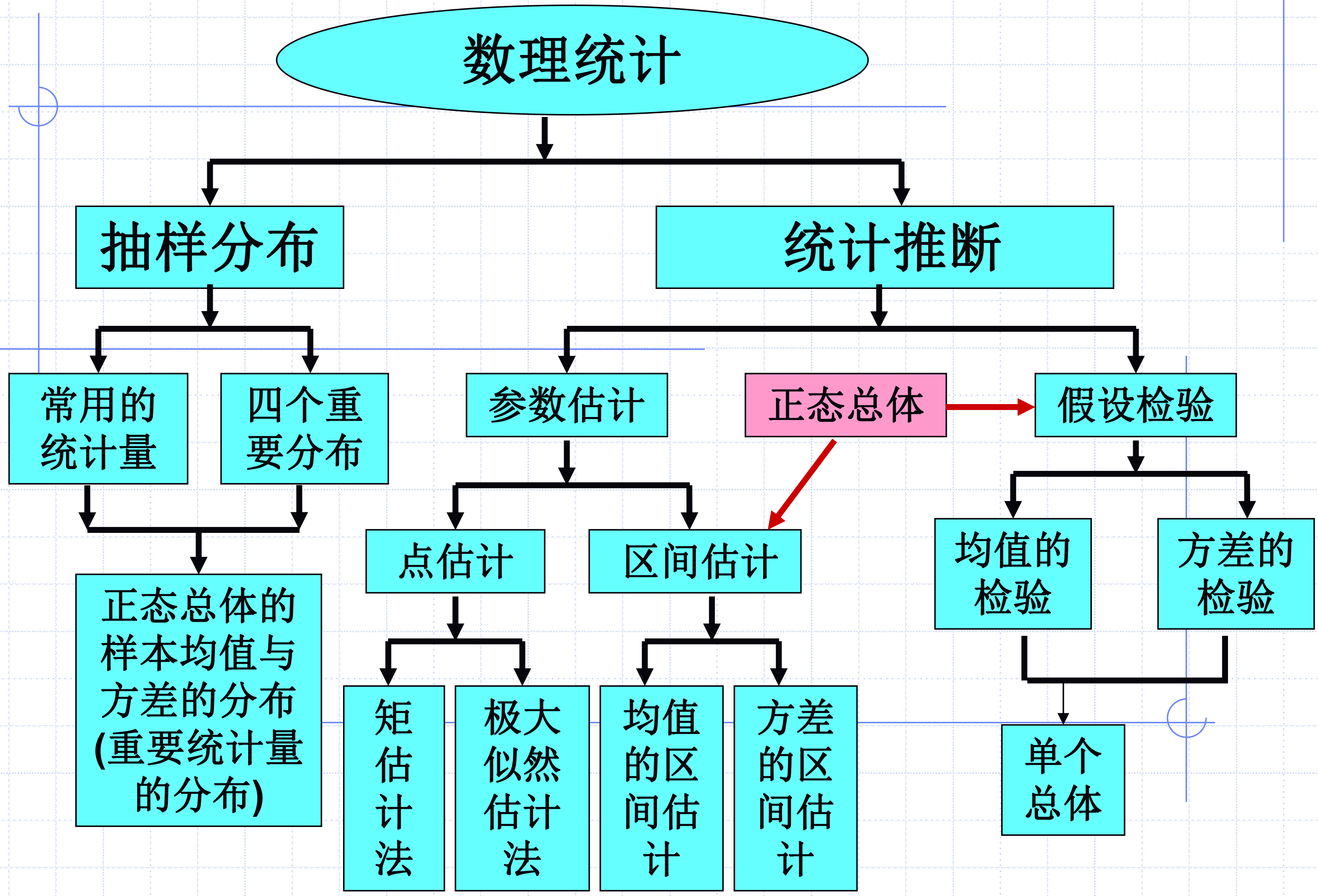
$$\sum_{k=1}^{n}X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(n\mu,n\sigma^2\right) \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

$\dfrac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数$Fn(x)$的极限是 $\Phi(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

2．设每发炮弹命中目标的概率为 0.1，现发射 100 发炮弹，试用中心极限定理作出估计，命中炮弹不少于 5 发的概率________________________（无需计算，由标准正态分布的分布函数 Φ 给出结果）。

第六章----第八章知识结构图



一 常用的统计量

名称	统计量	观察值
样本均值	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
样本方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
样本标准差	$S=\sqrt{S^2}$	$s=\sqrt{s^2}$
样本 k 阶原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$
样本 k 阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$	$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k$

二、 常用统计量的分布

1) χ^2 - 分 布

设$(X_1,\cdots X_n)$为来自于正态总体$N(0,1)$的样本，

则称统计量： $\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$

记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

2) $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X,Y$独立，则称随机变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \qquad t \sim t(n).$$

3) F - 分 布 若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$， X,Y 独立，

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \qquad F \sim F(n_1,n_2).$$

4） 正态总体的样本均值与样本方差的分布：

设$X_1,\cdots,X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X},S^2$分别是样本均值与样本方差，则有：

(1) $\bar{X} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$; $\quad \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;

(3) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

- 统计推断
  - 估计问题
    - 参数估计问题
      - 点估计问题
        - 矩估计法
        - 极大似然估计
      - 区间估计问题
    - 非参数估计问题
  - 假设检验问题
    - 参数假设检验问题
      - 一个正态总体的假设检验
    - 非参数假设检验问题

矩估计法

$$A_k = \mu_k, \quad k = 1, \cdots, l, \cdots$$

$$= f_k(\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_l),$$

得到包含l个未知参数 $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_l$ 的方程组

$$\begin{cases} A_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) \\ A_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ A_k = f_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) \end{cases}$$

从中解出 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \cdots \hat{\theta}_l$

极大似然法求估计量的步骤：（一般情况下）

1) 构造似然函数 $L(\theta)$：

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i)$ (离散型)，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ (连续型)；

2) 取对数：$\ln L(\theta)$；

3) 令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$；

4) 解似然方程得 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$.

区间估计 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 对 μ,σ^2 进行区间估计

未知参数	统计量	置信区间
μ (σ^2已知)	$\dfrac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar X\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
μ (σ^2未知)	$\dfrac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar X\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ^2	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
σ	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$

假设检验

$X_1 X_2, \cdots, X_n$

$x_1 x_2, \cdots, x_n$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 对 μ, σ^2进行假设检验

显著性水平α,

	原假设 H_0	备择假设H_1	检验统计量	★ 拒绝域
1) μ的检验 σ^2为已知	$\mu = \mu_0$ $\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert > z_{\alpha/2}$ $U > z_\alpha$ $U < -z_\alpha$
2) μ的检验 σ^2为未知	$\mu = \mu_0$ $\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\lvert t \rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$ $t > t_\alpha(n-1)$ $t < -t_\alpha(n-1)$
3) σ^2的检验	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ $\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

2、设总体X的概率密度函数为$f(x)=(\theta+1)x^{\theta}$，$0<x<1$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自这个总体的一组观测值。求：

（1）求未知参数 θ 的矩估计值

（2）求未知参数 θ 的极大似然估计值

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令

$$\bar{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}.$$

设总体X密度 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$\theta>-1$ 未知， 求 θ 的极大似然估计。

解:

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值。

$$L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}, & 0<x_i<1,\ i=1,2,\cdots,n.\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$0<x_i<1,\ i=1,2,\cdots,n$ 时，

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

设总体X密度 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$\theta>-1$ 未知， 求 θ 的极大似然估计。

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$ 极大似然估计值；

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$$ 极大似然估计量；

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体的一个样本，在如下四个统计量

$$X_1+X_2,\quad X_1-X_2+X_3,\quad \frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{3}+\frac{X_3}{6},\quad \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

中，可以作为均值的无偏估计量的统计量的个数是__________。

（A）1　　　　（B）3

（C）2　　　　（D）4

4. 若$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$X\sim N(0,1)$的一个样本，$\overline{X}$与S^2分别表示样本均值与样本方差，则有__________。

（A）$n\overline{X}\sim N(0,1)$　　　　（B）$\overline{X}\sim N(0,1)$

（C）$\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　　　（D）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

5. 设对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 之下接受零假设 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论成立的是__________。

（A）必须接受 H_0

（B）可能接受也可能拒绝 H_0

（C）必须拒绝 H_0

（D）不接受也不拒绝 H_0

四.（本题 12 分）运动员在一段时期内的运动呈正态分布。一个跳远运动员在一周的运动测试中取得如下成绩（单位：米）

6.5　6.4　6.8　6.3　6.3　6.6　6.7　6.2　6.7。

均值和方差分别记作 μ 和 σ^2。

问题：（1）求均值 μ 的置信区间，置信度为 0.95；

（2）是否可以认为这名运动员的平均成绩达到 $\mu_0 = 6.1$？显著性水平 $\alpha = 0.05$；

（3）是否可以认为这名运动员的平均成绩 $\mu \le 6.1$？显著性水平 $\alpha = 0.05$。

1. 设某人打靶，脱靶的概率为0.4. 现独立地进行了 6 次射击，以 X 表示击中的次数，则 $E(X), D(X)$ 分别为 ________

A 3.6和1.44　　B 2.4和1.44　　C 0.6和1.44　　D 0.4和1.44

2. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，

令 $X = a(X_1 - X_2)^2 + b(X_2 - 2X_3)^2 + c(X_3 - 3X_4)^2$，则 a, b, c 的取值为________时，X 服从 χ^2 分布.

A $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{10}$　　B $a = 0$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{10}$

C $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{10}$　　D $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = 0$

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,1)$，已知 $z_{0.025}=1.96$，则常数 $P\{X\leq 2.96\}=$ ________

A　0.95　　B　0.975　　C　0.025　　D　0.005

4. 设总体 $X\sim B(2,p)$，待估参数 $0<p<1$，样本值为2，2，0，0，1，1，则参数 p 的极大似然估计中，似然函数 $L(p)=$ ________

A　$2p^3(1-p)^3$　　B　$p^3(1-p)^3$　　C　$4p^6(1-p)^6$　　D　$p^6(1-p)^6$

5. 设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

则 $X-Y+1$ 服从的分布为________

A　$N(\mu_1-\mu_2+1,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$　　B　$N(\mu_1-\mu_2+1,\sigma_1^2-\sigma_2^2)$

C　$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$　　D　$N(\mu_1-\mu_2+1,\sigma_1^2-\sigma_2^2+1)$

6. 设随机变量 X,Y 独立同分布，则 $U=X-Y$, $V=X+Y$ 一定满足__________

A 协方差不为零　　B 相互独立　　C 相关系数不为零　　D 相关系数为零

7. 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度函数是 $f(x)$. 则下列能成为 X 的概率密度函数的是__________

A $g_1(x)=\begin{cases} f(x), & x>0 \\ f(-|x|), & x\le 0 \end{cases}$　　B $g_2(x)=\begin{cases} f(x), & x>0 \\ f(-x), & x\le 0 \end{cases}$

C $g_3(x)=\begin{cases} 0.5f(x), & x>0 \\ 0.5f(-|x|), & x\le 0 \end{cases}$　　D $g_4(x)=\begin{cases} 0.5f(x), & x>0 \\ 0.5f(-x), & x\le 0 \end{cases}$

8. 设对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 之下接受零假设 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论成立的是 __________。

A 必须接受 H_0　　B 可能接受也可能拒绝 H_0

C 必须拒绝 H_0　　D 不接受也不拒绝 H_0

1. 设 A，B 为两个随机事件，$P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________

2. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{c}{n}\cdot k$, $k=1,2,\cdots,n$，则常数 $c=$________

3. 设随机变量 X 的方差存在，且 $D(X)\neq 0$，若 $P\{Y=-0.6X-0.7\}=1$，则 $\rho_{XY}=$________

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2>0$，要使 $Y=k_1(X_1-\mu)^2+k_2(X_2-\mu)^2+\cdots+k_n(X_n-\mu)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 满足________

1. 随机抽取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差 $s=11(m/s)$，设炮口速度服从正态分布，求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。解题过程中请回答以下问题：
（参考数据：$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.64$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$）

（1）写出统计量及分布________________________

（2）σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间公式为______________________________

（3）σ 的置信度为 0.95 的置信区间是（代入数据，不用具体计算）__________________

2. 设总体 $X\sim U(0,\theta)$，未知参数 $\theta>0$，样本值为 2, 2.5, 2, 1.5, 2.1, 1.9，求参数 θ 的矩估计值和极大似然估计值。解题过程中请回答以下问题：

（1） 参数 θ 的矩估计量为__________________

（2） 参数 θ 的矩估计值为__________________

（3） 样本的似然函数为____________________

（4） 参数 θ 的极大似然估计值为______________

四.（13 分）设二维随机变量(X, Y)在以$(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 为顶点的三角形区域D 上服从均匀分布，试求：

（1）$Z = X + Y$ 的概率密度函数；

（2）$D(X + Y)$.

五.（14 分） 设二维随机变量的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, \quad \text{其 它} \end{cases}$$

试求：

（1）边缘概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并判断X和Y的独立性；

（2）条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|1)$；

（3）概率$P\{X+Y>1\}$.

六.（6 分） 设总体 X 服从（0-1）分布，分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，证明：$T=\left(\overline{X}\right)^2-\frac{1}{n-1}S_n^2$ 为 p^2 的无偏估计.

七.（5 分） 设 A 为随机事件，证明：$P(A)P\left(\overline{A}\right)\le\frac{1}{4}$.

1. 从一副扑克牌四个花色的 52 张牌中随机抽取两张牌，则取到的两张恰是不同花色且最大点数为 7 的概率是__________。

4. 设随机变量 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $E|X-\mu|^4 =$ __________。

（A）0　　　　（B）σ^4

（C）$2\sigma^4$　　　　（D）$3\sigma^4$

2、$X_1,\cdots X_n$ 为总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}\left|X_{i+1}-X_i\right|$$ 为总体参数 σ 的无偏估计量

求 k

4. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-2}{3})$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，则有 $E(X)=$____________________。

已知 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}$，用中心极限定理，结合泊松分布，计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

从数字1-9中依次随机抽取5个数字组成一个五位数，以X记这个五位数的各位数字之和.

（1）若抽取是有放回的，计算X的数学期望与方差;

（2）若抽取是无放回的，计算X的数学期望与方差.

1．设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则以下表达式中正确的是____________。

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$ (B) $P\{Y=2X-1\}=1$ (C) $P\{Y=-2X+1\}=1$ (D) $P\{Y=2X+1\}=1$

2．设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知。若样本容量与置信度 $1-\alpha$ 保持不变，则对于不同的样本观察值，该总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间长度____________。

（A）不变 （B）变长

（C）变短 （D）以上三者均有可能

3. 设 X_1, X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度函数分别是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则有_______________。

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度函数

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

4. 设随机变量 X 与 Y 不相关，则以下说法错误的是_________。

（A） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（B） $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

（C） $D(XY)=D(X)D(Y)$

（D） $E(XY)=E(X)E(Y)$

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$E(X)=\mu$ 与 $D(X)=\sigma^2$ 均未知，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是样本均值，则下列说法正确的是 ________。

(A) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$ 是统计量

(B) $\frac{X_1+X_2}{2}$ 是 μ 的无偏估计

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计

(D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$ 是 σ 的无偏估计

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布，则 $P(X^2+Y^2\leq 1)=$ ________。

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{\pi}{16}$ (D) $\frac{1}{4}$

7. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$ ________。

(A) $\frac{1}{4}e^{-1}$ (B) $\frac{1}{2}e^{-1}$ (C) e^{-1} (D) $1-e^{-1}$

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，已知 $E(X^k)=\mu_k$，则根据大数定律，

________依概率收敛于 μ_k。

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ (B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ (C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu$ (D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^k-\mu_k$

1. 设 A、B、C 为随机事件，已知事件 A 与 C 互斥，且 $P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则

$P(AB\mid\overline{C})=$ ________________。

2. 设每发炮弹命中目标的概率为 0.1，现发射 100 发炮弹，试用中心极限定理作出估计，命中炮弹不少于 5 发的概率______________________（无需计算，由标准正态分布的分布函数 Φ 给出结果）。

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，已知 $P(X>a)=P(X<a)$，则常数

$a=$______________________。

4. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-2}{3})$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，则有 $E(X)=$______________________。

三．（本题 8

某超市里成套出售某品牌玻璃杯，每套 6 个杯子装在一个盒子里。已知每套杯子中有 0 个、1 个、2 个残次品的概率分别是 0.7，0.2，0.1。假设顾客挑选时会随机拿 1 套玻璃杯，打开盒子后任意取出其中 3 个杯子来查验。若发现被查验的杯子中有残次品，则放弃购买；若没发现残次品，则会购买整套玻璃杯。试求：

(1) 顾客挑选后会购买整套玻璃杯的概率；

(2) 已知顾客挑选后购买了整套玻璃杯，那么他回家后发现该套杯子中有 2 个残次品的概率有多大？

四．（本题 15 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4xe^{-2y}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$； (2) 判断 X 与 Y 是否相互独立，并说明原因；

(3) 计算 $D(3X-2Y)$； (4) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$。

五.（本题 12 分）

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma > 0$，已知 X 与 Y 相互独立，且 $Z = X - Y$，试求：

(1) Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$；

(2) 设 $Z_1,\cdots,Z_n$ 是来自总体 Z 的样本，$z_1,\cdots,z_n$ 是样本值，试根据这一样本，求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_{\mathrm{M}}^2$ 和极大似然估计量 $\hat{\sigma}_L^2$；

(3) 请验证：极大似然估计量 $\hat{\sigma}_L^2$ 是不是 σ^2 的无偏估计量？

六. （本题 7 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \quad \text{和} \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。

七.（本题 10 分）

已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机抽取 16 个由该种材料制成的样品进行抗压试验，测得样本均值为 475，样本标准差为 32。

(1) 求这种材料平均抗压强度 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

(2) 若抗压强度不小于 500（即 $\mu \geq 500$）为合格，是否可以认为这种材料合格？(显著性水平 $\alpha = 0.05$)

可能用到的数据：$t_{0.1}(15) = 1.3406$，$t_{0.1}(16) = 1.3368$，$t_{0.05}(15) = 1.7531$，$t_{0.05}(16) = 1.7459$，

$t_{0.025}(15) = 2.1315$，$t_{0.025}(16) = 2.1199$