第一章　随机事件间的关系及其运算

名称	记号	含义
包含	$A \subset B$	A发生 → B发生
相等	$A=B$	A发生 ↔ B发生
和(并)事件	$A \cup B$	A,B至少有一个发生
积(交)事件	$A \cap B$	A,B同时发生
差事件	$A-B$	A发生，B不发生
A,B互不相容(互斥)	$A \cap B = \Phi$	A,B不能同时发生
A的逆事件(对立)	$\overline{A}$	A不发生

A与$\overline{A}$必有一个发生且仅有一个发生

概率的性质

1) $P(\Phi)=0$

2) $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两不相容 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

3)减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

特别：$B \subset A \longrightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

单调性：$B \subset A \longrightarrow P(B) \le P(A)$

4)对任一事件A，$P(A)\le 1$

5)对任一事件A，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

6)加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

推广 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

古典概型 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件总数}}{S\text{包含的基本事件总数}}$

条件概率 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0$

乘法定理 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

Bayes公式 $P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},i=1,2\cdots n$

A与B相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(B|A)=P(B)$

- 设事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立, 则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

典型例题：

（1）抽样检验（有放回与不放回）

（2）抽签问题（一次抽一个不放回，第几次“中奖”的概率都是相同的——公平性）

（3）全概率与贝叶斯公式应用

例. 设有两个盒子，第一个盒子中放有2个红球及4个白球，第二个盒子中放有3个红球及3个白球。现在任取一个盒子，再从中任取一个球，问：

（1）取出红球的概率是多少？（全概率公式）

（2）若知取出的是红球，问它来自哪个盒子的可能性大?（贝叶斯公式）

（4）事件的独立性

例. 一射手向同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为80/81，试求：该射手进行一次射击的命中率。

第二章 离散型随机变量

分布律： $P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2 \cdots\cdots$

常见：$X \sim (0,1)$, $X \sim B(n, p)$, $X \sim P(\lambda)$

连续型随机变量

求未知参数

概率密度： $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

常见： $X \sim U(a, b)$, $X \sim Exp(\theta)$, $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

设 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\quad i)\ P\left\{X \leq x\right\} = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$ii)\ P\left\{x_1 < X \leq x_2\right\} = \Phi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

$iii)\ P\left\{\left|X-\mu\right| < x\right\} = 2\Phi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) - 1$

$iv)\ P\left\{X > \mu\right\} = P\left\{X < \mu\right\} = 0.5$

一维随机变量的分布函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

作用： $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$$P\{X > x\} = 1 - F(x)$$

$$P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$$

性质1　$F(x)$是一个单调非减函数。

性质2　$0 \le F(x) \le 1$, $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

性质3　$F(x)$是右连续的函数。

随机变量的函数的分布

离散型——易于计算

连续型——分布函数法（基本方法）

特别，若 $g(x)$在区间 I 上严格单调且可导；

则 $Y=g(X)$的密度为：(α,β)为Y的取值范围

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(h(y)\right)\cdot\left|h'(y)\right|, & y\in(\alpha,\beta), \\ 0, & y\notin(\alpha,\beta). \end{cases}$$

结论

$$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right),\quad Y=aX+b$$

$$\rightarrow Y\sim N\left(a\mu+b,\ a^2\sigma^2\right)$$

典型例题：

（1）离散型：分布律 $\rightleftarrows$ 分布函数

（2）连续型：概率密度 $\rightleftarrows$ 分布函数

未知参数的确定

（3）概率计算：

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$P(X \in L) = \sum_{x_k \in L} P(X = x_k) = \sum_{x_k \in L} p_k$$

（4）分布函数法（一般先判断$Y=g(X)$的值域）

N(0,1)与分位点

$$\Phi(0)=0.5;$$

$$\Phi(x)\begin{cases}\text{查表}, & 0\le x\le 3.9,\\ \approx 1, & x>3.9,\\ =1-\Phi(-x), & x<0;\\ \approx 0, & x<-3.9,\end{cases}$$

上 α 分位点: $P\{X>z_\alpha\}=\alpha$

两个公式: $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha,\quad z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

$z_{0.025}$? $\Phi(z_{0.025})=1-0.025=0.975 \rightarrow z_{0.025}=1.96$

$z_{1-0.025}=-z_{0.025}=-1.96$

二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

性质:

i) $F(x,y)$ 分别关于 x, y 单调非减;

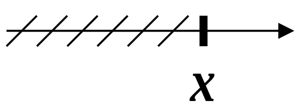
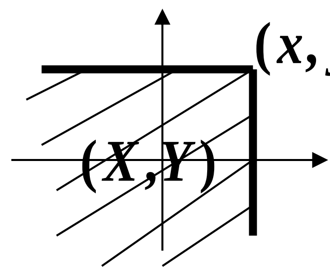
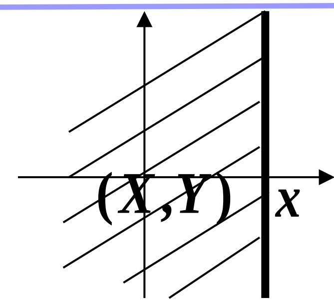
ii) $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0$

$F(+\infty,+\infty)=1$

iii) $F(x,y)$ 分别关于 x, y 右连续;

iv) $\forall x_1<x_2,\ \ y_1<y_2,$

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

	一维 X	二维 (X,Y)	边缘 X	关系
分布函数	$F(x)$ $=P(X\le x)$	$F(x,y)$ $=P(X\le x, Y\le y)$	$F_X(x)=P(X\le x)$ $=P(X\le x, Y<+\infty)$	$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$
				
离散型	$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$	$F(x,y)=\sum\limits_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}}p_{ij}$	$F_X(x)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$	$P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$
连续型	$F(x)$ $=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$	$F(x,y)$ $=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$	$F_X(x)$ $f_X(x)$ $=\int_{-\infty}^{x}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}dx$	$f_X(x)$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

计算 $P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$$

边缘分布： $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$; $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\;;\;f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

（注：求边缘密度时先画出$f(x,y)$的非零区域！积分上下限可能跟另一变量有关！）

条件分布： $P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\dfrac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$， $f_Y(y)\neq 0$ 时才有意义！

概率计算 X,Y连续型

$P(X\in L\,|\,Y=y)=\displaystyle\int_{x\in L}f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$ （视y为参数）

一般，条件概率

$$P(X\in L_1\,|\,Y\in L_2)=\frac{P(X\in L_1,Y\in L_2)}{P(Y\in L_2)}$$

（ L,L_1,L_2 为区间）

1. X,Y 相互独立（定义）

—— $\forall x,y\in R,\quad F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

即 $P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$

2. X,Y 相互独立

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}$

$=P\{x_1<X\le x_2\}P\{y_1<Y\le y_2\}$

3. X,Y(离散型)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $\forall i,j,\quad p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}$

4. X,Y(连续型)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ 几乎处处成立。

二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

D —— 平面区域，σ —— D的面积，$\sigma\neq 0$

二维指数分布（了解）

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^2}e^{-\frac{1}{\theta}(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad(\theta>0)$$

结论

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$$

则 ① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

② X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$

结论 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

$$\sim N\left(c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_n\mu_n,\ c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2\right)$$

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意实数。

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad Y = aX + b$$

$$\Rightarrow Y \sim N\left(a\mu + b,\ a^2\sigma^2\right)$$

一、$Z=X+Y$ 的分布

若X,Y 相互独立，有如下卷积公式：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,dy$$

卷积公式用于求独立随机变量和的概率密度。

由卷积公式可以验证：

正态分布、泊松分布、伽马分布具有可加性！

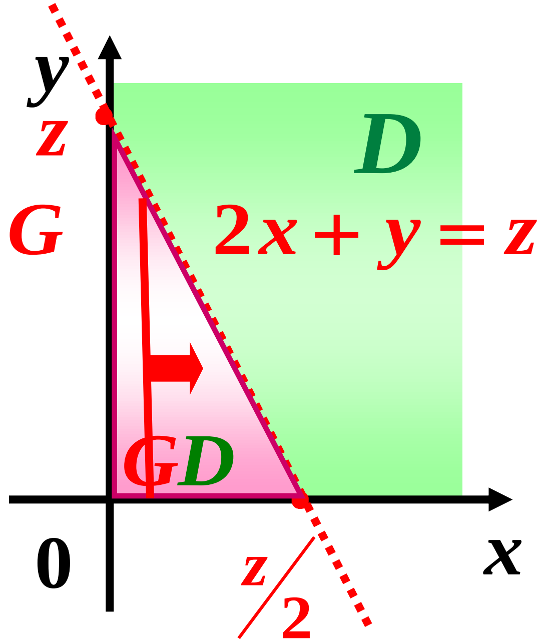
二、分布函数法 —— 基本方法

应用：利用 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$，求它们的函数 $g(X,Y)$ 的分布函数或概率密度函数

—— 见下页例题

例　设 (X, Y) 的密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \longrightarrow f_{2X+Y}(z)$$



解: $\forall z,\ F_{2X+Y}(z)=P\{2X+Y\le z\}$

$$=\iint_{2x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_{\substack{2x+y\le z \\ D}} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$=\begin{cases} \int_0^{z/2} dx\int_0^{z-2x} e^{-(x+y)}dy = e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

例 设 (X, Y) 的密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \longrightarrow f_{2X+Y}(z)$$

解:

$$F_{2X+Y}(z)=\begin{cases} e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}+1, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_{2X+Y}(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

三、最大项与最小项的分布

要点

$$\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le z\}=\{X_1\le z,X_2\le z,\cdots,X_n\le z\}$$

$$\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)> z\}=\{X_1> z,X_2> z,\cdots,X_n> z\}$$

公式　　独立！　且同分布！

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)=(F(z))^n$$

$$F_{\min}(z)=1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z))$$

$$=1-(1-F(z))^n$$

第四章

数学期望的计算

$$\boxed{\begin{aligned}E(X)&=\sum_k x_k p_k\\ E\left(g(X)\right)&=\sum_k g\left(x_k\right)p_k\end{aligned}}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx$$

$$\boxed{E\left(g(X,Y)\right)=\sum_{i\,j}g\left(x_i,y_j\right)p_{i\,j}}$$

$$E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)f\left(x\right)dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,y\right)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X\left(x\right)dx\\ E\left(g(X)\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)f\left(x,y\right)dxdy\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X\left(x\right)dx\\ E\left(g(X,Y)\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)dxdy\end{aligned}}$$

方差的计算 $DX=E\left(X^2\right)-\left(EX\right)^2$

X	$(0-1)$	$B(n,p)$	$\pi(\lambda)$	$U(a,b)$	$Exp(\theta)$	$N\left(\mu,\sigma^2\right)$
EX	p	np	λ	$\frac{a+b}{2}$	θ	μ
DX	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{(a-b)^2}{12}$	θ^2	σ^2

$$D\left(X+Y\right)=DX+DY+2\operatorname{cov}\left(X,Y\right)$$

切比雪夫不等式：设$E(X), D(X)$ 存在, 则 $\forall\varepsilon>0$

$$P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}D(X)$$

等价于 $P\left\{\left|X-EX\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\frac{1}{\varepsilon^2}DX$ 可用于估计

协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$,

若 $\rho_{X,Y}=0$，则 X, Y 不相关。

X,Y 不相关 $\Longleftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0 \Longleftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$

$\Longleftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$

结论1 X,Y 相互独立 $\Longrightarrow$ X, Y 不相关。反之不然！

结论2 当(X,Y)服从二维正态分布时，

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ X, Y 不相关。

第五章

贝努利大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同 $(0-1)$ 分布，

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} p \quad (n \to \infty)$

切比雪夫大数定律特例

设 1) $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列；

2) $\forall k$, $E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2$

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$

辛钦大数定律

设 1) $\{X_n\}$ 独立同分布；

2) $\forall k$, $E(X_k) = \mu$

则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$

林德伯格—勒维中心极限定理

条件：1) $\{X_n\}$独立同分布；

2) $\forall k,\ E(X_k)=\mu,\ D(X_k)=\sigma^2, 0<\sigma^2<\infty$

应用 $$\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$ 或 $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

条件：$X \sim B(n,p)$,

应用 $$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

或：$$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$$

n 较大时

第六章

总体是个随机变量X，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本。

统计量

不含未知参数

样本 ——独立同分布；

与总体X 同分布；

常用统计量

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$

样本标准差 $S = \sqrt{S^2}$

样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^k$

性质 设总体 X 的期望、方差、k 阶矩均存在，

记 $EX=\mu,\quad DX=\sigma^2,\quad E\left(X^k\right)=\mu_k$

则 1) $A_1=\bar{X},\quad E\left(\bar{X}\right)=\mu,\quad D\bar{X}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

2) $E\left(A_k\right)=\mu_k,$

3) $E\left(S^2\right)=\sigma^2,$

了解 → 4) $\left(n-1\right)S^2=nB_2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2$$

四大分布： $N(\mu,\sigma^2)$ χ^2分布 t 分布 F 分布

构成！分位点！

定理 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体X 的一个样本，

$\bar{X}, S^2$是样本均值与样本方差，

则 1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 即 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

2) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

3) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

4) $\bar{X}$ 与 S^2相互独立。

第七章

（一）点估计　　1、矩估计法

总体X 的分布中含 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$

设 总体前k阶矩均存在, $E\left(X^l\right)=\mu_l\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$

$l=1,2,\cdots,k$

样本前 k 阶矩为: $A_1,A_2,\cdots,A_k$ （视为已知）

令总体矩=样本矩

列k个方程:

$$\begin{cases} E(X)=A_1 \\ E(X^2)=A_2 \\ \vdots \\ E(X^k)=A_k \end{cases}$$

矩估计量为

$\hat{\theta}_i\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$

矩估计值为

$\hat{\theta}_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$

$i=1,2,\cdots,k$

2、极大似然估计法

(1) **离散型** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体X的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值。

总体X的分布律：$P\{X = x\} = p(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ 未知，

则 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$ 为样本的似然函数。

(2) **连续型** 总体X的概率密度：$f(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ 未知，

似然函数为 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

令 $\boxed{\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = 0}$ $\theta \in \Theta$

解得 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 极大似然估计值；

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 极大似然估计量；

若令导数等于0不能得到 $L(\theta)$ 最大值，则根据 $L(\theta)$ 单调性找最大值点——(教材P194例2)

（二）统计量的评选标准（优良性）

1、无偏性

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$ 是 θ 的估计量，$E\left(\hat{\theta}\right)$存在，

$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量——$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

2、有效性

设 $\hat{\theta}_1$和 $\hat{\theta}_2$ 均为θ 的无偏估计量，

$\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$更有效——$D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$

3、相合性

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$是$\theta$ 的估计量，

$\hat{\theta}$ 为θ 的相合估计量 —— $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta\left(n\to\infty\right)$

结论 无论总体X服从何种分布，总有

1) $\bar{X}$ 是 $\mu(EX)$ 的无偏估计量；

2) A_k 是 $\mu_k(EX^k)$ 的无偏估计量；

3) A_k 是 $\mu_k(EX^k)$ 的相合估计量；

4) S^2 是 $\sigma^2(DX)$ 的无偏估计量；

5) B_2 是 $\sigma^2(DX)$ 的有偏估计量；

（三）一个正态总体的区间估计

求置信区间的步骤

$1-\alpha$ —— 置信度；

1) 找一个样本的函数 $W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$

满足：含 θ

除 θ 以外不含其它未知参数

W 分布确定

2) 由给定的 α 及分位点定义，确定 a,b 使

$$P\{a<W<b\}=1-\alpha$$

3) $a<W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b \longrightarrow \underline{\theta}<\theta<\bar{\theta} \longrightarrow (\underline{\theta},\bar{\theta})$

未知参数	模型	置信区间
$\mu\ (\sigma^2$已知)	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
$\mu\ (\sigma^2$未知)	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ^2	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
σ	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$

第八章

假设检验解题步骤

1) 对总体提出假设；

H_0 原假设

H_1 备择假设

2) 寻找适合当前问题的检验统计量；

满足：它的观察值可量化数据与H_0的差异；

H_0为真时，有确定分布；

3) 由给定的α及分位点定义确定 H_0 的拒绝域 C

4) 取样判断： 若观察值$\in C$，则拒绝H_0

否则接受H_0

一个正态总体的参数假设检验

① σ^2 已知时，对 μ 的检验——U 检验法

检验统计量 $\boxed{U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}}$　　H_0 真时，$U \sim N(0,1)$

H_0	H_1	C
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ (双)	$\left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ (右)	$\left(z_{\alpha}, +\infty\right)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$ (左)	$\left(-\infty, -z_{\alpha}\right)$

2 σ^2 未知时，对 μ 的检验 —— t 检验法

检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ $\quad H_0$ 真时，$t\sim t(n-1)$

H_0	H_1	C
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ (双)	$\left(-\infty,-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right)$
$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$ (右)	$\left(t_\alpha(n-1),+\infty\right)$
$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$ (左)	$\left(-\infty,-t_\alpha(n-1)\right)$

说明

① $H_0: \mu \geq \mu_0 \qquad H_1: \mu < \mu_0$ 单边假设检验

② $H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu < \mu_0$

两者的拒绝域相同。

③ $H_0: \mu \leq \mu_0 \qquad H_1: \mu > \mu_0$ 单边假设检验

④ $H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu > \mu_0$

两者的拒绝域相同。

注：对 σ^2 的单边检验类似。

③ 对 σ^2 的检验 —— χ^2 检验法

检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\quad H_0$ 真时, $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$

H_0	H_1	C
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (双)	$\left(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ (右)	$\left(\chi^2_{\alpha}(n-1), +\infty\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ (左)	$\left(0, \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right)$

考试安排与要求

考试：2016年1月13日周三上午8:30－10:30

答疑：2016年1月12日周二上午9:00－11:00（理化楼308，6+9）

2016年1月12日周二下午2:00－4:00（理化楼308，7+10）

题型：填空，选择，计算，证明

两个正态总体的区间估计和假设检验不考！

没讲的不考！

考试安排与要求

1、考试时请关闭手机，
考试期间打开手机视为作弊！

2、发卷后首先检验试卷质量、页数、题数；
不得拆散装订好的试卷！

3、正确填写学院、班级、姓名等个人信息，
空填、错填或涂改个人信息视为无效试卷！

4、不能带计算器！

5、草稿纸不收。

谢谢大家！

希望每个同学都能取得满意的成绩!