北京科技大学 2016---2017 学年第二学期

概率论与数理统计 试卷（A 卷）

注意事项:

（1）本试卷共八道大题，共三页，请认真核对。

（2）答案必须答在答题卡上，答在试题纸上无效。

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 之下接受零假设 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论成立的是 ________。

（A）必须接受 H_0　　（B）可能接受也可能拒绝 H_0

（C）必须拒绝 H_0　　（D）不接受也不拒绝 H_0

2. 设 X_1,X_2 是两个相互独立的随机变量，$F_1(x),F_2(x)$ 是其分布函数，$f_1(x),f_2(x)$ 是其概率密度函数且连续，则下列必为概率密度的是________

(A) $f_1(x)f_2(x)$　**(B)** $2f_1(x)F_2(x)$　**(C)** $F_2(x)f_1(x)$　**(D)** $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，$p=P(X\ge\mu+\sigma^2)$，则________

(A) p 随着 σ 的增大而增大　(B) p 随着 σ 的增大而减小

(C) p 随着 μ 的增大而增大　(D) p 随着 μ 的增大而减小

4. 设随机事件 A 在第 i 次独立试验中发生的概率为 $p_i\ (i=1,2,\ldots,n)$，m 表示事件 A 在 n 次试验中发生的次数，则对于任意的 $\epsilon>0$，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\right|\ge\epsilon)=$ ________

(A) 1　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D)不可确定

5. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$. 则下列给定事件中不相互独立的是

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 $\overline{C}$　(B) $\overline{A\cup B}$ 与 C　(C) $\overline{AC}$ 与 C　(D) $\overline{AB}$ 与 C

6. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 为独立同分布的随机变量序列，且均服从期望为 $\theta(\theta>0)$ 的指数分布，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则________

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\theta\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$　(B) $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\theta\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n\theta}}\le x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\theta^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$　(D) $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\theta}{\sqrt{n\theta}}\le x\right\}=\Phi(x)$

二、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 已知 X, Y, XY 的分布律分别为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

则 $P(X=2Y)=$ ____________

2. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布，且方差存在，记 $M = X_1 + X_2, N = X_2 + X_3 + X_4$，则 M 与 N 的相关系数 $\rho=$ ____________

3. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=-2)=\frac{1}{2}, P(X=1)=a, P(X=3)=b$，若 $EX=0$，则 $DX=$ ____________

4. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则 $E(XY^2)=$ ____________

三.（本题 8 分）

某射击队共有 10 名射手，其中一级射手 2 人，二级射手 4 人，三级射手 4 人。一、二、三级射手能够通过选拔进入比赛的概率分别为 0.9, 0.6, 0.2。

(1) 求任选一名射手能够通过选拔进入比赛的概率；

(2) 对于一名通过选拔进入比赛的射手，试判断这名射手是几级射手的概率最大。

四.（本题 16 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} a, & x^2 \le y < 1, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 确定常数 a 的值；(2) 求 $P(0 \le X \le \frac{1}{2})$；(3) 求边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$；(4) 求条件密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$。

五.（本题 8 分）

设离散型随机变量 X 的分布律为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{3}\theta & \frac{1}{3}\theta & \frac{2}{3}(1-\theta) & \frac{1}{3}(1-\theta) \end{pmatrix}$，其中 $\theta \in [0,1]$ 为未知参数。现有如下 10 个 X 的观测值：3,0,2,1,3,2,1,0,2,1.

(1) 求 θ 的矩估计量和矩估计值；

(2) 判断上述矩估计量的无偏性和一致性(相合性)。

六.（本题 15 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，概率密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ 和 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度；

(2) 求 $Z=X+2Y$ 的分布函数和概率密度；

(3) 求 $Z=X+2Y$ 的期望和方差。

七.（本题 15 分）

某罐头厂生产的水果罐头重量和维生素 C 的含量长期以来分别服从正态分布 $N(\mu_1,0.4),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，根据生产要求每个水果罐头的维生素 C 含量不能小于 4。现从该厂生产的一批产品中抽取 9 个罐头测得重量的样本方差为 0.64；维生素 C 含量平均为 3.4，方差为 0.81。

(1) 这批产品的重量的波动较以往是否有显著变化。(取显著性水平 $\alpha=0.1$)

(2) 是否可以认为这批产品的维生素 C 含量符合生产要求。(取显著性水平 $\alpha=0.1$)

(3) 求这批产品的平均维生素 C 含量的置信度为 0.9 的置信区间。

可能需要用到的数据：$\chi^2_{0.1}(9)=14.684$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.1}(8)=13.362$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$t_{0.1}(9)=1.3830$，$t_{0.1}(8)=1.3968$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.1}=1.28$

八.（本题 8 分）

为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。现记录 n 次测量的绝对误差 $Y_i=|X_i-\mu|\,(i=1,2,\dots,n)$，利用 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 估计 σ.

(1) 求 Y_1 的概率密度；

(2) 求 σ 的极大似然估计量。