第三章 逻辑代数

第四章 组合逻辑电路

一、小规模组合逻辑电路初探（ 4.1 ）

二、 逻辑代数（3）

三、小规模组合逻辑电路分析和设计（ 4.1 ）

四、常用组合逻辑电路芯片（4.2）

第三章 逻辑代数作业

3.1(b)德摩根定律应用

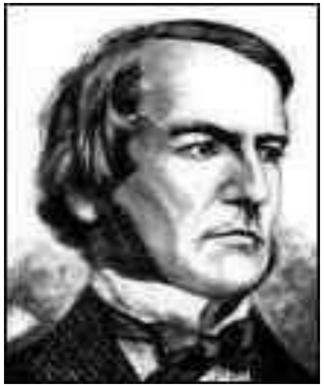
3.4 真值表化简

3.6(b)卡诺图化简，含无关项

（答案不唯一）

二、 逻 辑 代 数

布尔代数



George Boole (1815-1864)

变量取值只有“0”， “1”两种，分别称为逻辑“0”和逻辑“1”

“0”和“1”并不表示数量的大小，而是表示两种相互对立的逻辑状态

逻辑代数所表示的是逻辑关系，不是数量关系！

第三章 逻辑代数

§ 3.1 基本定理和运算法则

3.1.1 基本运算关系

3.1.2 德摩根定律

§ 3.2 逻辑函数化简

3.2.1 用代数法化简

3.2.2 用卡诺图化简

§3.1基本定理和运算法则

基本运算：与、或、非

基本运算关系：

交换律 $A + B = B + A$ $\quad A \cdot B = B \cdot A$

结合律 $A + (B + C) = (A + B) + C$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

分配律 $A(B + C) = AB + AC$

$A + BC = (A + B)(A + C)$

常量与变量的关系

自等律 $A+0=$

0-1律 $A+1=$

重叠律 $A+A=$

还原律 $\overline{\overline{A}}=$

互补律 $A+\overline{A}=$

吸收规则

原变量的吸收　$A + AB = A$

证明：　$A + AB = A（1 + B）= A \cdot 1 = A$

反变量的被吸收　$A + \overline{A}B = A + B$

证明：
$$A + \overline{A}B = A + AB + \overline{A}B$$
$$= A + (A + \overline{A})B = A + B$$

混合变量的吸收

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

混合变量的吸收

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

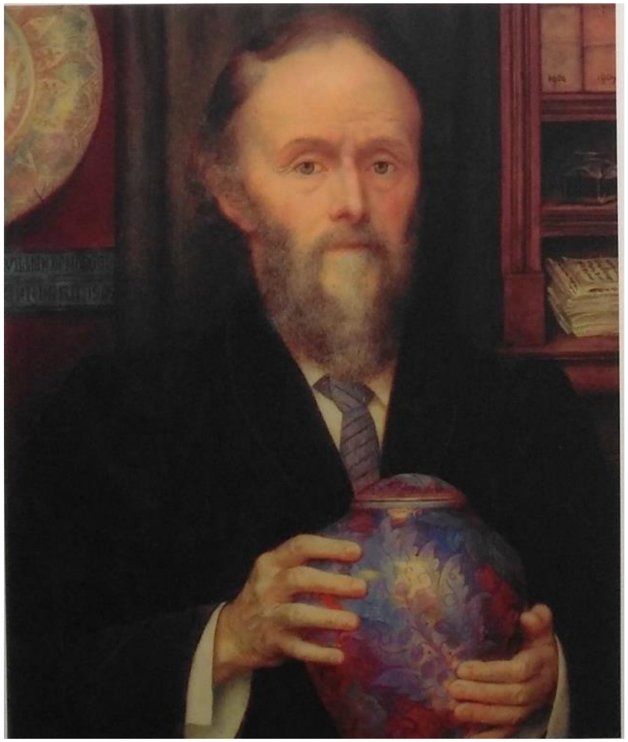
证明：$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$

$$=AB+ABC+\overline{A}C+\overline{A}BC=AB+\overline{A}C$$

例：$A+\overline{A}BC+DC=?$　　$A+BC+DC$

$$AB+\overline{A}C+BCD=?\quad AB+\overline{A}C$$

德摩根定律（反演律）



$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

Break the bar, Change the sign

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

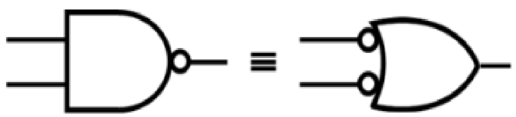
$$\overline{A\cdot B\cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

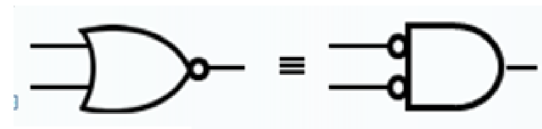
三个以上变量也适用

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

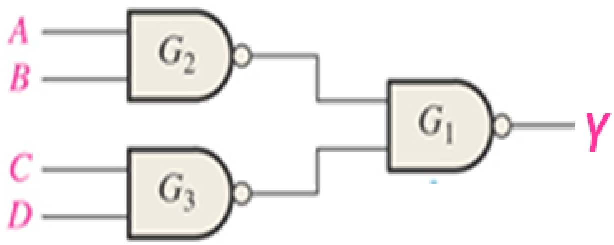
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

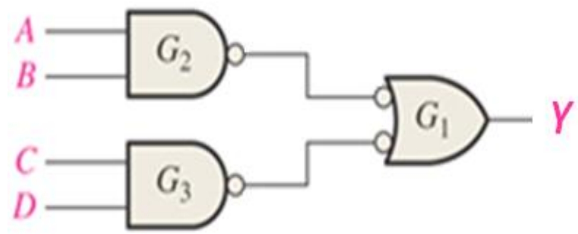


与非　非或



或非　非与





与非形式

$$Y = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

“o”对“o” 抵消，可直接写出与或形式

经化简可得：

与或形式

$$Y = AB + CD$$

单选题 1分

设置

已知某逻辑函数$AB=AC$成立， 是否可以由此推出$B=C$

A 是

B 否

提交

单选题 1分

设置

已知某逻辑函数$A+B=A+C$成立， 是否可以由此推出$B=C$

A 是

B 否

提交

§ 3.2 逻辑函数的化简

利用逻辑代数变换，用较少的逻辑门实现同样的逻辑功能

体积小,重量轻

性能可靠、稳定

成本低

代数法

卡诺图法

在化简逻辑函数时通常默认结果是最简与或式

3.2.1 用代数公式化简逻辑函数

并项法 利用$A+\bar{A}=1$，将两项合并为一项，消去一个变量

$$Y=ABC+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}$$

$$=AC(B+\bar{B})+A\bar{C}(\bar{B}+B)$$

$$=AC+A\bar{C}=A$$

加项法 利用$A+A=A$，在逻辑式中加相同的项，而后合并

$$Y=ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C$$

$$=ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC$$

$$=BC+AC$$

配项法 利用$A+\overline{A}=1$，将乘积项中缺少的某变量添加上

$$Y=AB+\bar{A}\bar{C}+B\bar{C}$$

$$=AB+\bar{A}\bar{C}+B\bar{C}(A+\bar{A})$$

$$=AB+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}$$

$$=AB+\bar{A}\bar{C}$$

吸收法 利用吸收规则，将其中某项吸收

$$Y=\bar{B}C+A\bar{B}C(D+E)$$

$$=BC$$

代数法化简练习

$$F = \overline{\overline{AB + \overline{A}\,\overline{B}} \cdot \overline{BC + \overline{B}\,\overline{C}}}$$

$$= AB + \overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C}$$

$$Y = ABC + ABD + \bar{A}B\bar{C} + CD + B\bar{D}$$

$$= B + CD$$

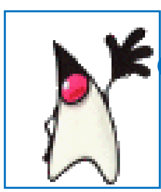
引子——卡诺图巧妙之处？何为系统方法?

$$F = \boxed{A\bar{B}\bar{C}} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + ABC$$

逻辑相邻

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B}\bar{C}$$

逻辑相邻项可以合并



卡诺图中逻辑相邻与几何相邻一致,
因而卡诺图中的几何相邻项可以合并化简

3.2.2 用卡诺图化简逻辑函数

卡诺图(Karnaugh Map，简称KMap) 是一种将n变量逻辑函数的全部最小项按一定规则排列的方格图

$A \backslash B$	0	1
0	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
1	$A\overline{B}$	AB

两变量卡诺图

$AB \backslash C$	0	1
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$
01	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
11	$AB\overline{C}$	ABC
10	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$

三变量卡诺图

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

四变量卡诺图

3.2.2 用卡诺图化简逻辑函数

输入变量的名称及取值分列两侧

每个变量的取值可为0或1

$AB \backslash C$	0	1
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
11	$AB\bar{C}$	ABC
10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

三变量卡诺图

当对应变量取值为1时，在最小项中用原变量的形式表示；

对应变量取值为0时，在最小项中用反变量的形式表示。

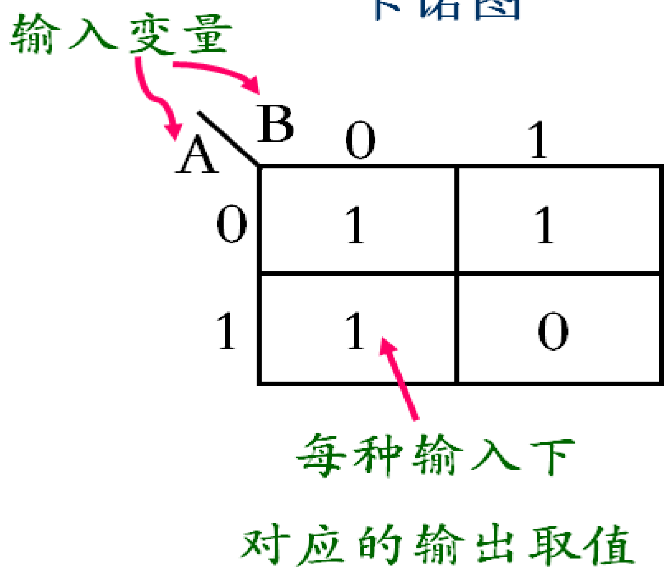
卡诺图通过在方格内内填入对应最小项的取值来表达具体的逻辑函数

卡诺图和真值表的对应

真值表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

卡诺图



该逻辑函数在输入变量*AB*为00、01、10时输出为“1”，仅当输入变量*AB*为11时输出才为“0”

三变量卡诺图

$AB \backslash C$	0	1
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
11	$AB\bar{C}$	ABC
10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

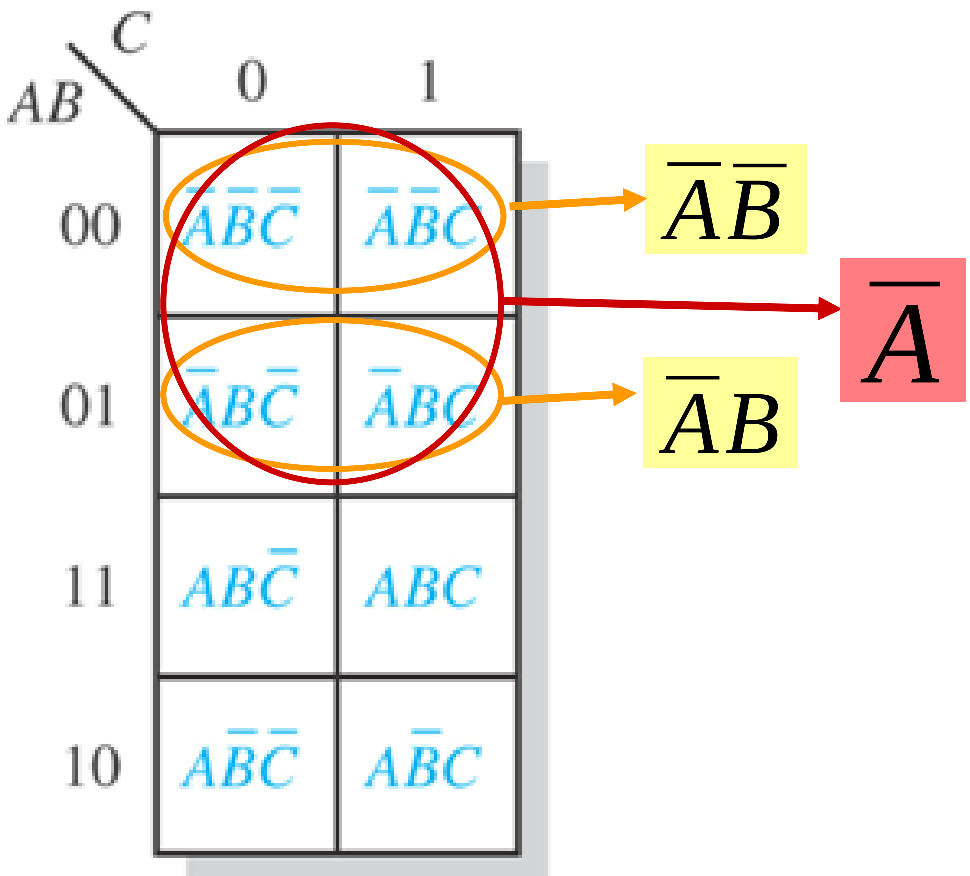
四变量卡诺图

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

注意排列顺序

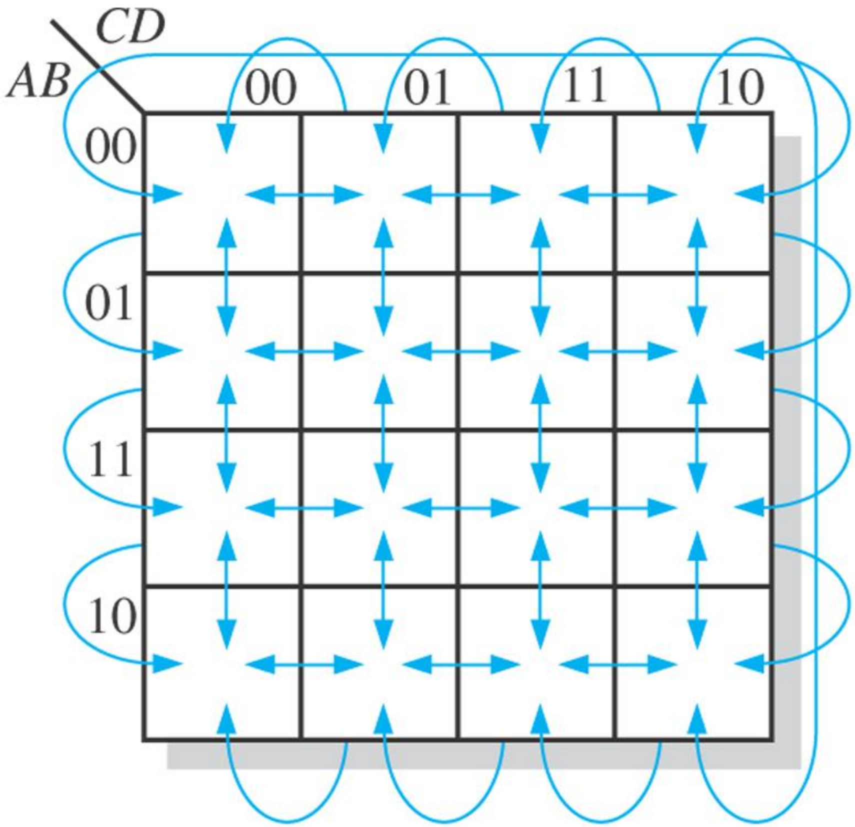
卡诺图中逻辑相邻与几何相邻一致！

三变量卡诺图



卡诺图中逻辑相邻与几何相邻一致，
因而卡诺图中的几何相邻项可以合并！

环绕相邻

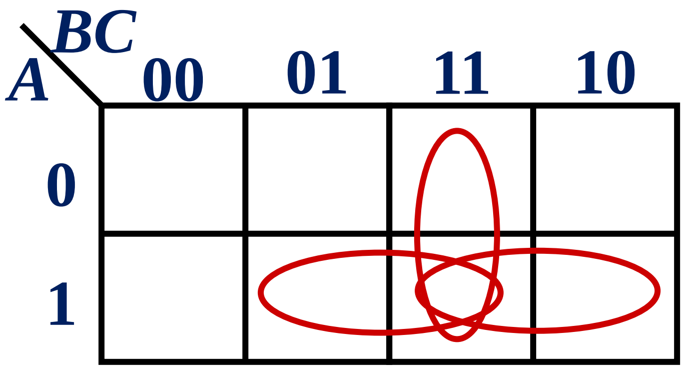


AB \ CD	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

应用卡诺图化简逻辑函数

化简 $Y = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

1）画出卡诺图



2）合并最小项

将取值为“1”的相邻小方格圈成圈

保留一个圈内最小项的相同变量，而消去相反变量

化简原则：

圈的个数应最少

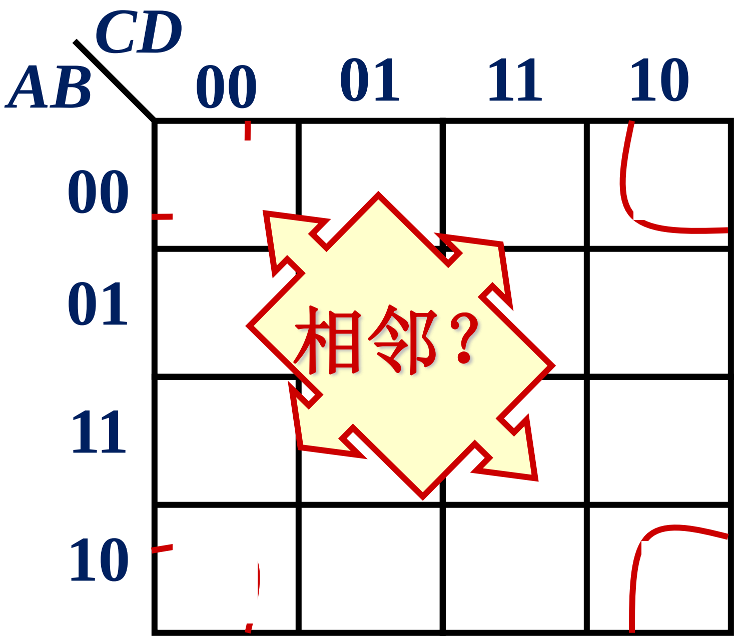
每个“圈”至少要包含一个未被圈过的最小项

3）写出简化后的与或逻辑式

$$Y = BC + AC + AB$$

例 $$Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}$$

解：



化简原则：

通常圈越大越好

所圈取值为“1”的相邻小方格的个数为2^n，(n=0, 1, 2…)

消去n个变量

写出简化逻辑式

$$Y=\bar{B}\bar{D}$$

注意：将相邻的最小项圈成矩形(个数应2^n)

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

AD

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	0

不是矩形

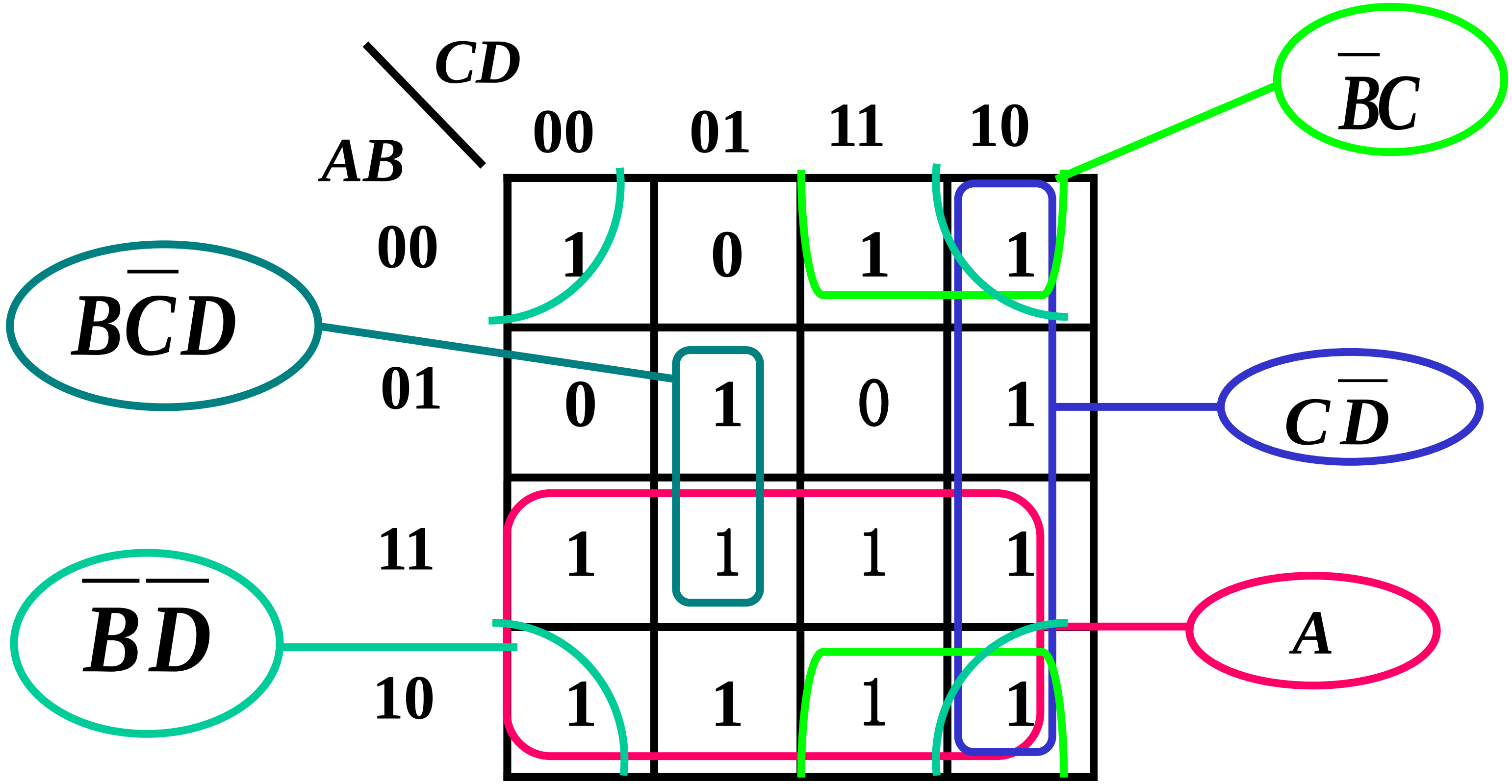
为了书写方便，可用与各单元二进制数对应的十进制来对各单元进行编号

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

$$F(A, B, C) = \Sigma(m_1, m_2, m_4, m_7)$$

例 $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$



$$F = A + C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D} + B\overline{C}D$$

例： 已知逻辑函数真值表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态未给出，是无关项（Don’t Care）

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	X	1	1

A

认为是1

$Y=A$

化简时可以将无关项当作1或 0，目的是得到最简结果

Other tips

例

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	1
11	1	1	1	
10			1	

圈完后要检查一下有没有冗余!

例

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = A\overline{B} + \overline{A}C + B\overline{C}$$

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$Y = \overline{B}C + \overline{A}B + A\overline{C}$$

化简结果不唯一！

例

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

$$Y = \overline{ABD}$$

ABD

有时可通过合并卡诺图中的0，先得到 $\overline{Y}$，求反得 Y，可能更快

练习:

$$Y = ABC + AB\,D + \overline{A}B\overline{C} + CD + B\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

$$Y = B + CD$$

第三章 逻辑代数作业

3.1(b)德摩根定律应用

3.4 真值表化简

3.6(b)卡诺图化简，含无关项

（答案不唯一）