

第5章 数组和广义表

- 5.1 数组的定义及其操作
- 5.2 数组的存储结构
- 5.3 矩阵的压缩存储
- 5.4 广义表的定义及其操作
- 5.5 广义表的存储结构
- 5.6 小结

5.1 数组的定义及其操作

1. **什么是**数组(Array)?

n(n>=1)维同类型元素组成的序列,且连续存储

二维数组:
$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}[\mathbf{m}][\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0j} & \dots & a_{0,n-1} \\ \\ a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,n-1} \\ \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,j} & \dots & a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}$$

m、n为行列数, a_{ij}为第i行、第j列的元素, 0≤i≤m-1, 0≤j≤n-1; 元素个数为m×n。

5.1 数组的定义及其操作

二维数组的形式化描述:

$$A^{(2)} = (D, R)$$

其中: $D=\{a_{ij}|a_{ij}\in datatype,\ 0\leq i\leq m-1,\ 0\leq j\leq n-1\};$

R={Row, Col}

行关系: Row={<a_{ij}, a_{i j+1}>|a_{ij}, a_{i j+1}∈D, 0≤i≤m-1, 0≤j≤n-2}

列关系: Col={<a_{ii}, a_{i+1 i}>|a_{ii}, a_{i+1 i}∈D, 0≤i≤m-2, 0≤j≤n-1}

二维数组可以看作其元素是一维数组的一维数组

n维数组可以看作其元素是n-1维数组的一维数组

5.1 数组的定义及其操作

2. 数组的抽象数据类型表示

```
ADT Array {
```

数据元素集: $D=\{a_{j1j2...jn}|a_{j1j2...jn}\in datatype, ji=0, ..., b_i-1, i=1, 2, ..., n\}$ n(n>0)为数组维数, b_i 是第i维长度, ji是数组元素第i维下标。

数据关系集: $R=\{R_1, R_2, ..., R_n\}$

其中: $R_i = \{\langle a_{j1\dots ji\dots jn}, a_{j1\dots ji+1\dots jn}\rangle | 0\leq jk\leq b_k-1, 1\leq k\leq n \exists k\neq i, 0\leq ji\leq b_i-2, \}$

 $a_{j1...ji...jn}$, $a_{j1...ji+1...jn} \in D$, i=1, 2, ..., n

基本操作集: P

ArrayInit(&A, n, d_1 , d_2 , ..., d_n)

ArrayDestroy(&A)

ArrayGet(A, i1, ..., in, &e)

ArrayAssign(&A, i_1 , ..., i_n , e)

}ADT Array;

数组的基本操作一般不包括插入和删除



5.2 数组的存储结构

1. 数组的静态存储

存储空间是在程序执行前分配的,且大小固定

2种不同的存储方式,如二维数组:

- ✓ 行主次序(row major): 按行优先,C语言如此
- ✓ 列主次序 (column major): 按列优先

5.2 数组的存储结构

数组元素地址的计算:

以C语言为例

设数组的起始地址为b,每个元素占L个字节,存储空间以字节编址,元素a的地址用Loc(a)表示。

1) 一维数组a[n]

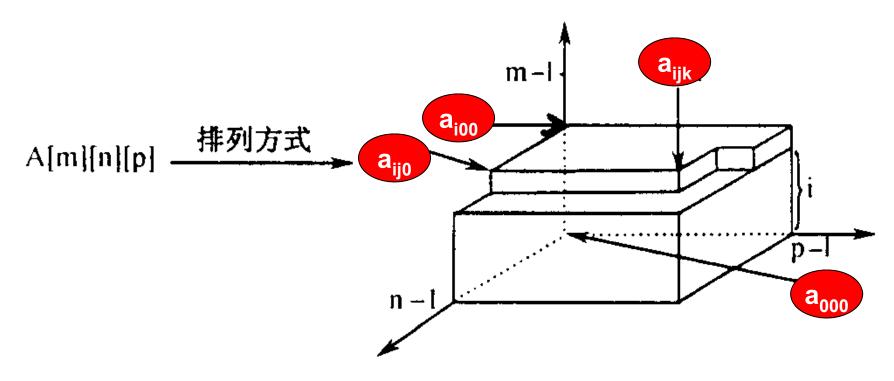
$$Loc(a[i]) = b + i*L;$$

2) 二维数组a[m][n]



5.2 数组的存储结构

3) 三维数组a[m][n][p]



Loc(a[i][j][k]) = b + (i*n*p + j*p + k)*L

5.

5.2 数组的存储结构

4) n维数组a[u₁][u₂]...[u_n]

Loc(a[i₁][i₂]...[i_n]) = b + (i₁*u₂*u₃*...*u_n
+ i₂*u₃*u₄*...*u_n
+ ...
+ i_{n-1}*u_n + i_n)*L
=b+(
$$\sum_{j=1}^{n-1} i_j \prod_{k=j+1}^{n} u_k + i_n$$
)*L



5.2 数组的存储结构

2. 数组的动态存储

存储空间是在程序执行时动态分配的

n维数组A[u₁][u₂]...[u_n] 映射



一维数组B[k]

如何实现2维数组 $int a[u_1][u_2]$ 空间的动态分配和元素 $a[i_1][i_2]$ 的访问?

1) 数组空间的分配

total =
$$u_1^*u_2^*u_3^*...^*u_n$$
; //总的元素个数

B = (datatype*)malloc(total * sizeof(datatype)); //一维存储空间

2) A中元素在B中位置的映射

$$A[i_{1}][i_{2}]...[i_{n}] => B[i_{1}*u_{2}*u_{3}*...*u_{n} + i_{2}*u_{3}*u_{4}*...*u_{n} + ... + i_{n-1}*u_{n} + i_{n}]$$

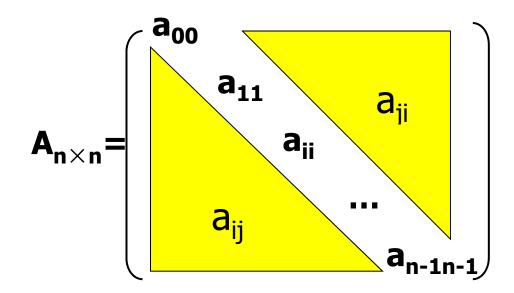
$$= B[i_{1}*C_{1} + i_{2}*C_{2} + ... + i_{n-1}*C_{n-1} + i_{n}*C_{n}]$$

$$C_{1}=u_{2}*C_{2}, C_{i}=u_{i+1}*C_{i+1}, ..., C_{n-1}=u_{n}, C_{n}=1$$

5.3 矩阵的压缩存储

- 1. 特殊矩阵的压缩存储
- (1) 对称矩阵

满足
$$\mathbf{a_{ij}} = \mathbf{a_{ji}}$$
,(0<=i, j



5.3 矩阵的压缩存储

只要存储包括主对角线的下三角元素即可。

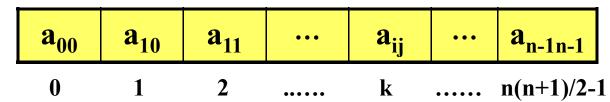
$$\mathbf{A}_{\mathbf{n} \times \mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \ a_{11} \\ \dots \\ a_{i0} \ a_{i1} \ \dots \\ a_{ii} \\ \dots \\ a_{n-1,0} \ a_{n-1,1} \ \dots \\ a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

以一维数组按行主次序存放

 $A_{n\times n}$ 需存储的元素个数:

$$1+2+3+...+n = n(n+1)/2$$

$$S[n(n+1)/2]$$
:



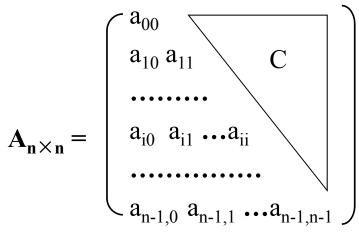
确定元素的位置:设i>=j

$$a[i][j] = a[j][i] = S[1+2+...+(i+1) + j] = S[i(i+1)/2 + j]$$



特殊矩阵的压缩存储

(2) 下三角矩阵



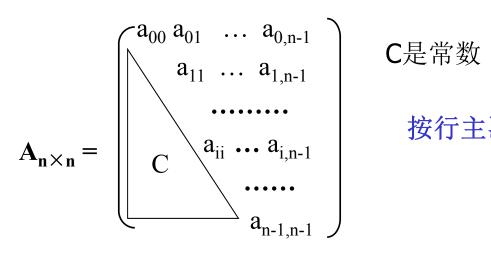
C是常数

压缩存储方法类似于对称矩阵



特殊矩阵的压缩存储

(3) 上三角矩阵



按行主次序存储上三角元素

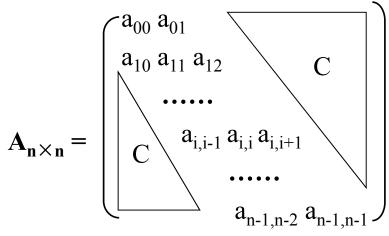
$$a[i][j] = \begin{cases} S[in-i(i+1)/2 + j] & \text{当}i < = j 时 \\ C & \text{当}i > j 时 \end{cases}$$



特殊矩阵的压缩存储

(4) 对角线矩阵

如包括主对角线的三对角线矩阵



C是常数

按行主次序存储于一维数组S

$$\exists i=j+1, S[3i-1]$$
 $\exists i=j, S[3i]$ $\exists i=j-1, S[3i+1]$ C 否则



5.3 矩阵的压缩存储

2. 稀疏矩阵的压缩存储

稀疏矩阵:矩阵中有大量的0元素

压缩存储方法: 只存储非0元素。

(1) 三元组表

存储每个非0元素的行号、列号、值

三元组: (row, col, val), 其中row、col、val分别为非0元素的行号、列号、值。

以行主次序将稀疏矩阵中非**0**元素以三元组形式存入一个数组,即三元组表。

三元组表的存储结构如何表示?

三元组表

三元组表的存储结构描述:

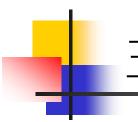
```
#define MAXSIZE 64 //最大非0元素个数
typedef struct { //三元组类型
    int row, col;
    datatype val;
}tritype;
typedef struct { //三元组表
    tritype data[MAXSIZE]; //三元组表存储空间
    int mu, nu, tu; //原矩阵的行数、列数、非0元素个数
}Tsmtype, *Tsmlink; //三元组表说明符
```

三元组表

例 5.3 矩阵的转置。

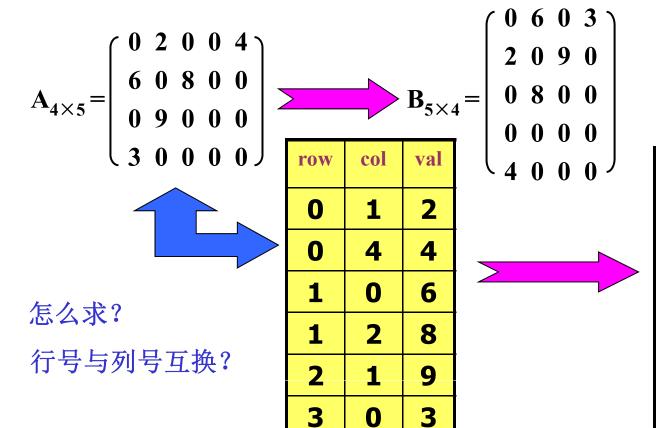
求矩阵A的转置矩阵B,算法很简单:

```
for (col = 0; col < nu; col++)
for (row = 0; row < mu; row++)
B[col][row] = A[row][col];
```



三元组表

三元组表所表示的矩阵的转置:



 0 6 0 3
 现在,要通过A的

 2 0 9 0
 三元组表求其转置

 0 8 0 0
 矩阵B的三元组表。

| row | col | val |
|-----|-----|-----|
| 0 | 1 | 6 |
| 0 | 3 | 3 |
| 1 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 9 |
| 2 | 1 | 8 |
| 4 | 0 | 4 |

方法1: 设矩阵A是m行、n列、t个非0元素

```
从头到尾扫描A,将第0列的元素依次放入B(行号列号互换);
从头到尾扫描A,将第1列的元素依次放入B(行号列号互换);
```

从头到尾扫描A,将第n-1列的元素依次放入B(行号列号互换);

扫描A几趟? 矩阵A的列数n

三元组表的转置

```
算法描述:
void Transm(Tsmtype *A, Tsmtype *B)
{
  int p, q, col;
  B->mu = A->nu; B->nu = A->mu; B->tu = A->tu;
  if (A->tu == 0) return; //无非0元素
  q =0; //目标表的序号
  for (col = 0; col < A->nu; col++) //扫描A的所有列
    for (p = 0; p < A->tu; p++) //扫描所有非0元素
       if (A->data[p].col == col) {
         B->data[q].row = A->data[p].col; //行列号互换
         B->data[q].col = A->data[p].row;
         B->data[q].val = A->data[p].val;
         q++;
```



$$\mathbf{A}_{4\times5} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{col} \end{array}$$

| row col val 1 0 1 2 1 0 4 4 2 1 0 6 3 1 2 8 4 2 1 9 5 3 0 3 | | | | |
|---|-----------------------|-----|-----|-----|
| 1 0 4 4 2 1 0 6 3 1 2 8 4 2 1 9 | | row | col | val |
| 2 1 0 6 3 1 2 8 4 2 1 9 | $p \longrightarrow 0$ | 0 | 1 | 2 |
| 3 1 2 8 4 2 1 9 | 1 | 0 | 4 | 4 |
| 4 2 1 9 | 2 | 1 | 0 | 6 |
| | 3 | 1 | 2 | 8 |
| 5 3 0 3 | 4 | 2 | 1 | 9 |
| | 5 | 3 | 0 | 3 |

(矩阵A的三元组表)

算法的时间复杂度:

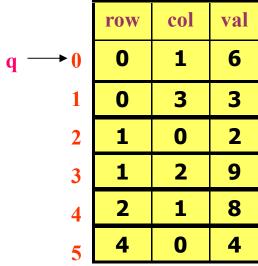
O(t*n)

n=列数, t=非0元素个数

效率低!

原因: 反复扫描A

如何改进?



(转置后的三元组表)

$$\mathbf{B}_{5\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



最理想的算法:从头开始扫描A的三元组1趟,在扫描过程中,将A的每个三元组放入B的正确位置。

(矩阵A的三元组表)

(转置后B的三元组表)

| | row | col | val |
|-----------------------|-----|-----|-----|
| $p \longrightarrow 0$ | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 4 | 4 |
| 2 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | 8 |
| 4 | 2 | 1 | 9 |
| 5 | 3 | 0 | 3 |

第1列放到B中的什么位置? q — 依赖于A中第0列非0元素个数 第i列在B中的位置依赖于A中第0~i-1列非0元素的个数

第0列放到B中的什么位置? 可以确定!

需要一些预处理工作。

只要预先计算出A中每列的非0元素个数就容易解决了。

处理方法: 设原矩阵A为m行、n列、t个非0元素。

(1)扫描1趟A,得到每列非0元素个数。

引入S[n],存放原矩阵每列非0元素个数,即

S[i]: A第i列非0元素个数

如: S: 2, 2, 1, 0, 1

时间复杂度为O(t)。

(2) 计算原矩阵A每列在B中的起始位置。

引入T[n],存放原矩阵每列首个非0元素在B中的位置,即

$$T[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ T[i-1] + S[i-1] & i > 0 \end{cases}$$

如: T: 0, 2, 4, 5, 5

时间复杂度: O(n)。

(3) 扫描1趟A, 把每个三元组行号列号交换后放入B中正确位置。

时间复杂度: O(t)。

整个算法的时间复杂度: O(n+t)

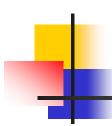
三元组表的转置

```
改进的算法描述:
void Transm1(Tsmtype *A, Tsmtype *B)
{
  int j, j, k;
  int S[MAXSIZE], T[MAXSIZE];
  B->mu = A->nu; B->nu = A->mu; B->tu = A->tu;
  if (A->tu == 0) return;
  for (i = 0; i < A->nu; i++) //初始化S,O(n)
     S[i] = 0;
  for (i = 0; i < A->tu; i++) //求S,O(t)
     S[A->data[i].col] += 1;
  T[0] = 0;
  for (i = 1; i < A->nu; i++) //求T,O(n)
     T[i] = T[i - 1] + S[i - 1];
```

三方

三元组表的转置

```
for (k = 0; k < A->tu; k++) { // O(t)
    j = A->data[k].col); //列号
    i = T[j]; //当前元素在B中的序号
    B->data[i].row = j;
    B->data[i].col = A->data[k].row;
    B->data[i].val = A->data[k].val;
    T[j]++; //指向第j列下一个非0元素在B中的序号
}
```



稀疏矩阵的压缩存储

(2)十字链表

- ✔ 将同一行的非0元素构成一个单循环链表;
- ✓ 将同一列的非0元素构成一个单循环链表;
- ✔ 每个非0元素同时出现在所在行和列的链表中。



3种节点:

| row | col | | val | |
|------|-----|-------|-----|--|
| down | | right | | |

row: 行号

col: 列号

val: 取值

down: 指向同一列 下一个非0元素节点

right: 指向同一行下

一个非0元素节点

1)非0元素节点

0 0 next
down right

next: 指向下一个表

头节点

down: 指向对应列

的首个非0元素节点

right: 指向对应行的

首个非0元素节点

第i行与第i列共用1

个表头节点

2) 行(列)的表头节点

m n next t 不用

m: 矩阵行数

n: 矩阵列数

next: 指向第0行

(列)的表头节点

t: 非0元素个数,或

不用

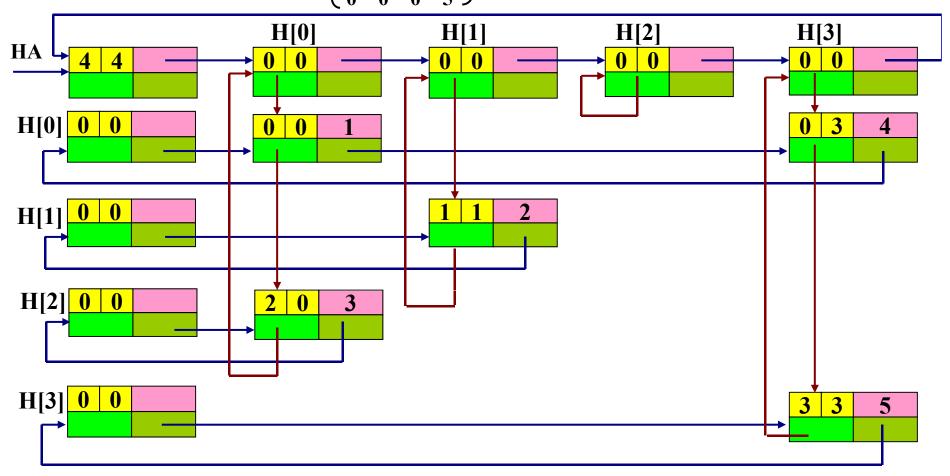
3) 总表头节点

节点类型描述:

```
typedef struct node {
   int row, col;
   union {
      struct node *next;
      datatype val;
   } vdata;
   struct node *down,*right;
} nodetype, *tlink;
```

例 **5.4** 稀疏矩阵: $A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

A的十字链表如下图:



说明:

- ✓ 第i行与第i列共用1个表头节点,表头节点个数为 max(m, n), 其中, m, n分别为矩阵的行数、列数;
- ✓ 所有表头节点构成1个单循环链表,节点间以next链接;
- ✓ 同一行的非0元素节点(与相应表头节点一起)构成1个单循环链表, 节点间以right域链接;
- ✓ 同一列的非0元素节点(与相应表头节点一起)构成1个单循环链表, 节点间以down域链接;
- ✓ 总表头节点的next域指向第0行(列)的表头节点。



5.4 广义表的定义及其操作

1. 广义表的定义

广义表的非形式化定义:

广义表或为空表,或者其元素为:

- 1)原子。或称单元素。
- 2) 广义表。

线性表是同类型元素组成的序列

广义表(multilist)可以表中套表,元素之间的关系体现次序关系和层次关系 线性表是广义表的特例。

5.4 广义表的定义及其操作

广义表的形式化定义:

广义表LS = $(d_0, d_1, ..., d_i, ..., d_{n-1})$ 的形式化描述为 LS=(D, R) D={ $d_i \mid d_i \in \text{datatype or } d_i \in \text{LS (递归定义)}, i=0,1,...,n-1,n \geq 0$ } R={ $<d_i, d_{i+1} > \mid d_i, d_{i+1} \in D, 0 \leq i \leq n-2$ }

n为表长(n=0 时为空表),若 d_i 为原子,则称 d_i 为LS的单元素,否则 d_i 称为LS的子表。

当广义表非空时, 定义两个函数

head(LS) =
$$d_0$$

tail(LS) = $(d_1, ..., d_{n-1})$

5.4 广义表的定义及其操作

2. 广义表的抽象数据类型

ADT Lists {

数据元素集: $D=\{d_i|d_i\in datatype \text{ or }d_i\in Lists,\ i=0,1,2,\ldots,n-1,\ n\geq 0\}$

数据关系集: R={<d_i, d_{i+1}>|d_i, d_{i+1}∈D,0≤i≤n-2}

基本操作集: P

GetHead(L)

初始条件:广义表L存在。

操作结果:取广义表L的头元素 d_0 。

GetTail(L)

初始条件:广义表L存在。

操作结果:取广义表L的表尾 $(d_1,...,d_{n-1})$ 。

ListsDepth(L)

初始条件:广义表L存在。

操作结果:返回广义表L的深度(最大层数)。

ADT Lists;

5.4 广义表的定义及其操作

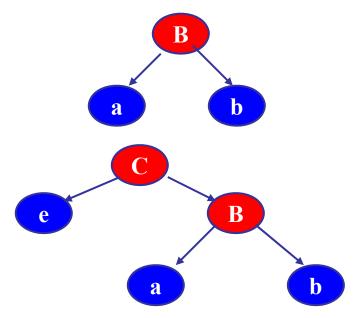
约定:大写字母A~Z为表名,小写字母 a~z为单元素。



5.4 广义表的定义及其操作

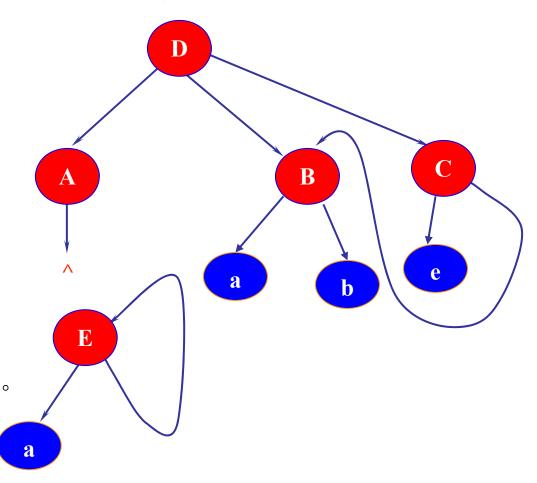
广义表的特点:

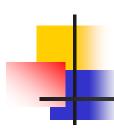
1) 嵌套: 表中套表。



3) 递归:表元素可以是表自己。

2) 共享:表可以是其它表的子表,或表的元素取自其他的表。





5.4 广义表的定义及其操作

表中任一单元素可由Gethead(Ls)和Gettail(Ls)函数导出

如:取表A=(a,(b,d,e))中单元素d的运算为:

Gethead(Gettail(Gethead(Gettail(A))))

ļ

5.5 广义表的存储结构

一般采用链表, 称为广义链表

1. 单链表示法

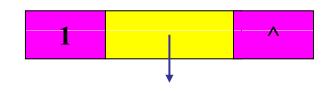
atom=1;

元素di的节点形式: atom data/link next

$$\mathsf{atom} = \begin{cases} 0 & \exists d_i \mathsf{为原子时} \\ 1 & \exists d_i \mathsf{为子表时} \end{cases} \qquad \mathsf{data/link} = \begin{cases} \mathsf{data} & \exists \mathsf{atom} = \mathsf{0} \mathsf{D} \mathsf{F} \\ \mathsf{link} & \exists \mathsf{atom} = \mathsf{1} \mathsf{D} \mathsf{F} \end{cases}$$

next指向下一个元素节点d_{i+1}

为便于处理,引入广义表的头节点:



data/link取link,指向首个元素节点d₀; next=NULL

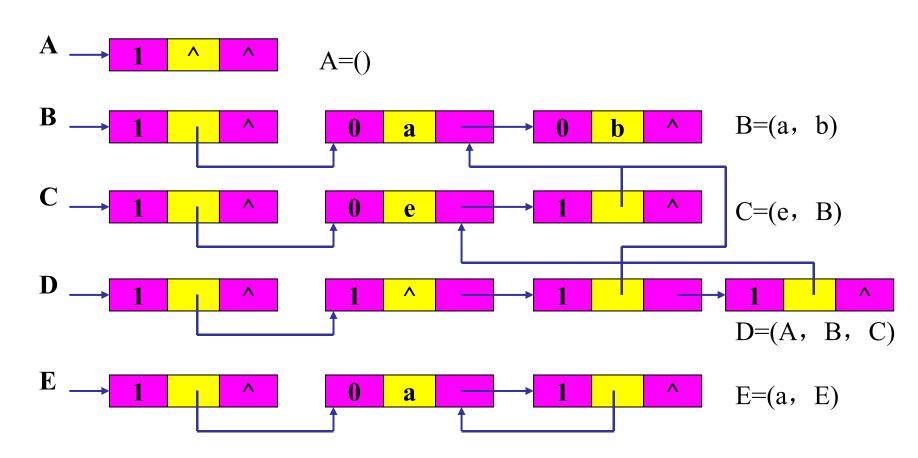
5.5 广义表的存储结构

节点描述:

```
typedef struct node {
   int atom;
   union {
      datatype data;
      struct node *link;
   } dtype;
   struct node *next;
}Lsnode, *Lslink;
```

5.5 广义表的存储结构

例:



5.5 广义表的存储结构

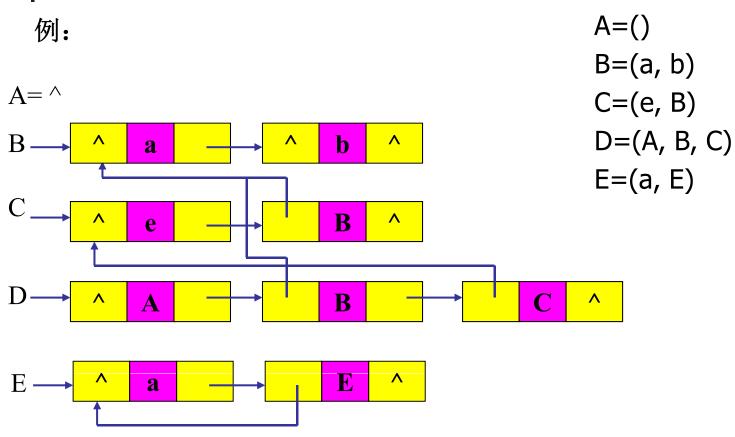
2. 双链表示法

元素d_i的节点形式: link1 data link2

link2指向下一个元素节点d_{i+1}



5.5 广义表的存储结构

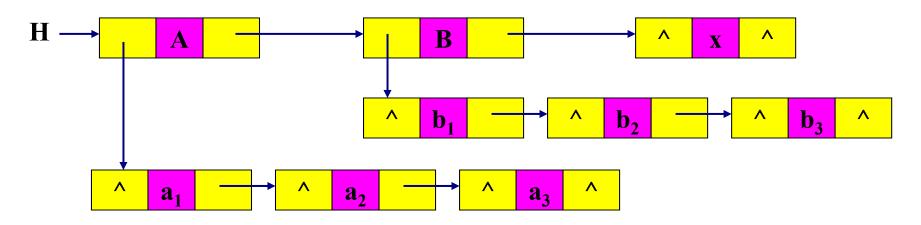


5.5 广义表的存储结构

例 5.6 设职工工资的表头H:

| 工资收入A | | 扣除B | | | | |
|----------------|-----------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|
| 基本工资 | 岗位津贴 | 福利 | 房租 | 水电 | 其他 | 实发x |
| a ₁ | a ₂ | a ₃ | b ₁ | b ₂ | b ₃ | |

即H=(A, B, x), A=(a1, a2, a3), B=(b1, b2, b3)。H的双链结构:



5.5 广义表的存储结构

3. 求广义表深度的算法

深度:广义表括号的层数

例如:

() — 空表, 深度=1

(a, b, c) —— 深度=1

(a, (b, c)) —— 深度=2

递归定义:

原子深度=0;

空表深度=1;

广义表深度 = max(各元素深度) + 1

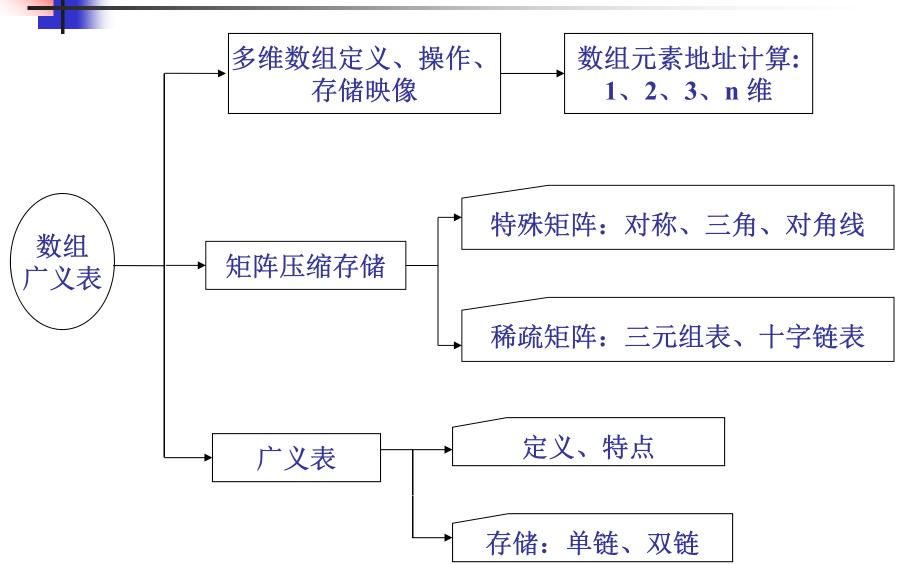
-

5.5 广义表的存储结构

求广义表深度的递归算法:

```
//广义表采用单链结构,返回LS指向的广义表深度
int ListsDepth(Lslink LS)
  int d, maxd;
  if (LS->atom == 0) return 0; //原子深度=0
  Lslink p = LS->dtype.link;
  if (p == NULL) return 1; //空表深度=1, 该行代码可去掉
  maxd = 0;
  while (p) { //求每个元素的深度
    d = ListsDepth(p);
    if (d > maxd) maxd = d;
    p = p - next;
  return (maxd + 1)
```

5.6 小结





第5章作业

1. 设矩阵:
$$A_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
 (行列下标i、j满足: 1≤i, j≤5)

- 1) 若将A视为一个上三角矩阵时,请画出A的"按行优先存储"的压缩存储表S,并写出A中元素之下标[i,j]与S中元素之下标k之间的关系;
- 2) 若将A视为一个稀疏矩阵时,请画出A的三元组表和十字链表结构。



第5章 作业

2. 设银行一天营业业务表头H:

| 存 | 款A | 取 | 款B | | |
|----------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----|
| 活期 a ₁ | 定期D 1年 2年 3年 d ₁ d ₂ d | 支取 b ₁ | 利息 b ₂ | 总支付 b ₃ | 进款X |

- 1) 试用广义表形式表示H,并用head(H)和tail(H)函数提取d2;
- 2) 画出H 的单链及双链结构。