第三章 多维随机变量及其分布

张志超

数理学院，信息与计算科学系

Email: zhichao@ustb.edu.cn

上讲主要内容

- 二维连续型随机变量的概率密度和分布函数
- 二维随机变量的边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

- 二维离散型随机变量的边缘分布律

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij} \quad P_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},i=1,2\cdots$$

- 二维连续型随机变量的边缘概率密度

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy]dx$$

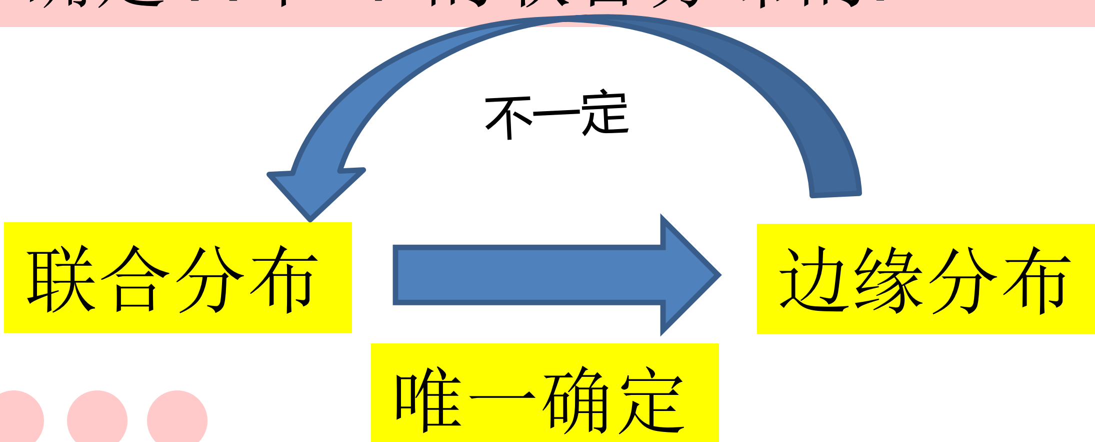
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

边缘分布

结论

二维正态分布的两个边缘分布均是一维正态分布，并且都不依赖于参数 ρ ，亦即对于给定的 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ ，不同的 ρ 对应不同的二维正态分布，但它们的边缘分布却都是一样的

从而可得出：由 X 和 Y 的边缘分布一般是不能确定 X 和 Y 的联合分布的.



本章主要内容

- 二维随机变量及其联合分布函数
- 边缘分布
- 条件分布
- 相互独立的随机变量
- 两个随机变量函数分布

条件分布

问题的提出

在第一章中已经介绍了条件概率的概念，即在事件B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

现设有两个随机变量 X, Y，若问:在给定Y 取某个或某些值的条件下，求随机变量X 的概率分布.

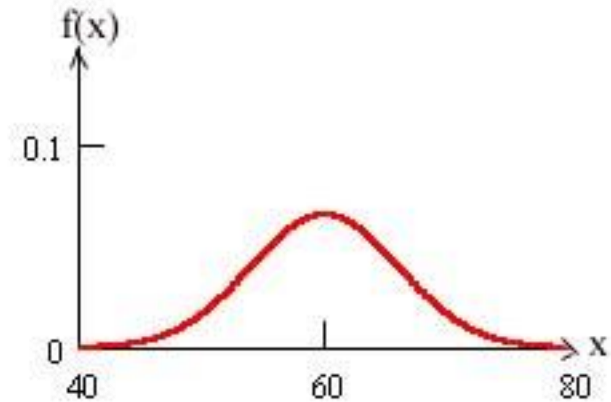
这个分布就是条件分布.

条件分布

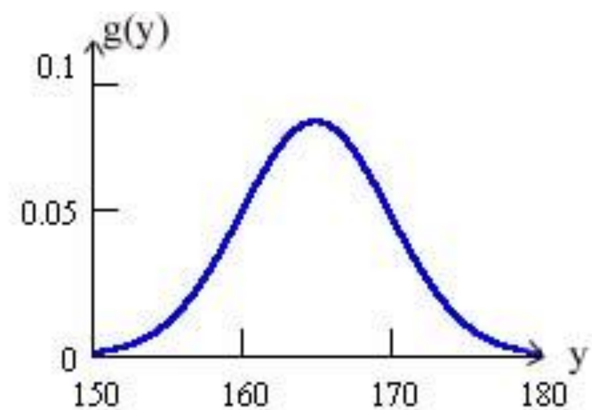
例如: 考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以X和Y表示其体重和身高．则X和Y都是随机变量，它们都有一定的概率分布.

身高Y

体重X



体重X的分布



身高Y的分布

条件分布

现在若限制 $1.7 < Y < 1.8$ (米)，这个条件求：X 的条件分布

这就意味着要从该校的学生中把身高在1.7米 和1.8米之间的那些人都挑出来，然后在挑出的学生中求其体重的分布.

显然：

这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样.

例如：

在条件分布中体重取大值的概率会显著增加 .

条件分布

一. 离散型随机变量的条件分布

1. 定义: 若 (X,Y) 是二维随机变量,其联合分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\,,\quad i,j=1,2,\cdots,\ (X,Y)$$

关于 X 和 Y 的边缘分布律为 $P(X=x_i)=P_{i.}\,,$

$P(Y=y_j)=P_{.j}$,且 $P_{i.}>0,P_{.j}>0$

则在事件$\{Y=y_j\}$ 已发生的条件下事件$\{X=x_i\}$

发生的概率为:

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{P_{.j}}\qquad i=1,2\cdots$$

亦称为X 在 $\{Y=y_j\}$ 下的条件分布律.

条件分布

同理可定义： y 在条件 $X=x_i$ 下的条件分布律为:

$$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{P_{i\cdot}} \quad j=1,2,\cdots$$

2. 性质:

1^0. $P(X=x_i \mid Y=y_j)\geq 0$

2^0. $\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i \mid Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{P_{\cdot j}}=\frac{1}{P_{\cdot j}}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{1}{P_{\cdot j}}\cdot P_{\cdot j}=1$

3^0. $\sum_{j=1}^{\infty}P(Y=y_j \mid X=x_i)=1$

条件分布

例1. 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值；另一随机变量Y 在 1 ~ X 中等可能地取一整数

求：条件分布律 $P(X=x_i \mid Y=y_j)$ 及 $P(Y=y_j \mid X=x_i)$

解: $\because$ X 的取值有 $1,2,3,4$； Y 的取值有 $1,2,3,4$

$\therefore$ 相应的分布律有16个，现分别计算两个:

X \ Y	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/4}{25/48} = \frac{12}{25}$$

$$P(X=2 \mid Y=1) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/8}{25/48} = \frac{6}{25}$$

条件分布

X \ Y	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

注意：对于二维离散型随机变量来说，列表很重要，联合、边缘、条件。

$$P(Y=1 \mid X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1/4}{1/4}=1$$

$$P(Y=2 \mid X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{0}{1/4}=0$$

其它的留作课后同学自己去完成

条件分布

二. 连续型随机变量的条件分布

引言

- 在离散型中，条件分布律是由条件概率引出的，其中对任意的 $P(X=x)>0,\ P(Y=y)>0$
- 注意到：对于连续型随机变量而言P(X=x)=0，P(Y=y)=0。
- 因此，对于连续型随机变量就无法用条件概率去引出条件分布的概念了，所以必须从分布函数着手。

在条件Y=y下, X 的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$$

加以极限的方法引出条件分布的概念.

条件分布

定义1.

给定 y, 设对于任意的正数 $\varepsilon > 0, P(y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon) > 0$

且对任意实数 x, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} P(X \le x \mid y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon)$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon)}$$ 存在.

则称此极限为在条件 $Y = y$ 下, X 的条件分布函数。

记为: $F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x | Y = y)$

同理:

$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \le y | X = x)$为条件 $X = x$ 下 Y 的

条件分布函数

条件分布

进一步推导条件概率密度:

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}P(X\le x|y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)$$

由条件概率定义

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P(X\le x,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)}$$

由分布函数性质

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$$

分子分母同乘 $\frac{1}{2\varepsilon}$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{[F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)]/2\varepsilon}{[F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)]/2\varepsilon}$$

条件分布

分子是由二元偏导数定义;分母是由一元导数定义

$$= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \bigg/ \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

分子是由分布函数定义;分母是由分布函数与概率密度关系.

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy]}{f_Y(y)}$$

对 y求偏导后只含 x 的积分

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

条件分布

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x | Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

又因为由定义：$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx$

所以得：$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

同理得：$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

条件分布

定义2:

若 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$ ，概率密度为 $f(x,y)$ 。若在点 (x,y) 处 $f(x,y)$ 连续，边缘概率密度 $f_Y(y)$ 连续，且 $f_Y(y)>0$

则：$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件密度函数

同理 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为在条件 $X=x$ 下 Y 的条件密度函数

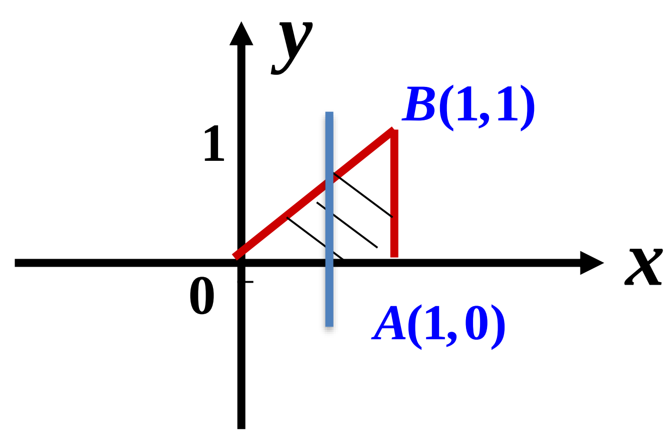
条件分布

例2. 设随机变量 (X,Y) 的分布密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0 & (x,y)\text{ 在其它域}\end{cases}$$

求: (1) X,Y 的边缘分布密度.

(2) X,Y 的条件分布密度.



解: (1) 由已知的 $f(x,y)$ 可知:

当 $0<x<1$ 时

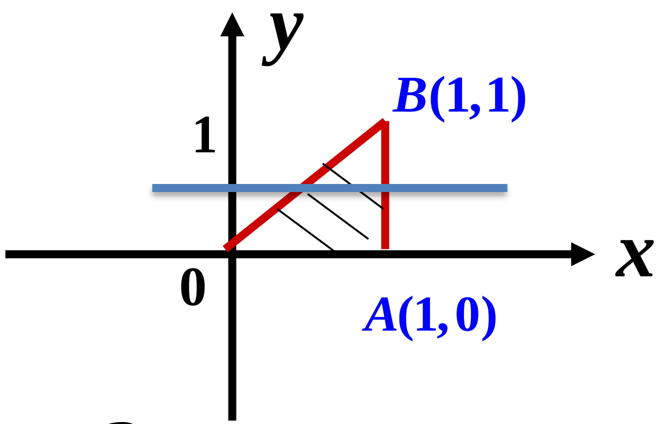
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^x 3x\,dy=3x^2$$

条件分布

当 $x \le 0$ 或 $x \ge 1$ 时 $\quad f_X(x) = 0$

$\therefore$ X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



同理, 当 $0 < y < 1$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_y^1 3x dx = \frac{3}{2}(1 - y^2)$$

当 $y \le 0$ 或 $y \ge 1$ 时 $\quad f_Y(y) = 0$

$\therefore$ Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - y^2) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

条件分布

(2). 依条件概率密度的定义可知:

对于使 $f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ 为非零值的区域有:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3x}{3x^2}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2} & y<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & x\le y \text{ 或 } x\ge 1\end{cases}$$

$$\therefore\ f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & 0<y<x,\ 0<x<1\\ 0 & y\le 0 \text{ 或 } y\ge x\end{cases}$$

条件分布

例3. 设 (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

(即均服从正态分布)

求： $f_{X|Y}(x|y)$

条件分布

解: 因为: $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}]^2}$$

显然它也是服从正态分布:

$$N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ (1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

结论:

正态分布的边缘分布及条件分布仍服从正态分布.

条件分布

例 4. 设 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0<x<\infty,0<y<\infty\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

求: $P(X>1 \mid Y=y)$

解: $P(X>1|Y=y)=\int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$

为此，需求出 $f_{X|Y}(x|y)$

条件分布

由于

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} dx = \frac{e^{-y}}{y}[-ye^{-x/y}]\Big|_0^\infty = e^{-y},$$

$$0 < y < \infty$$

于是对 $y > 0$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x/y}}{y}, \qquad x > 0$$

故对 $y > 0$

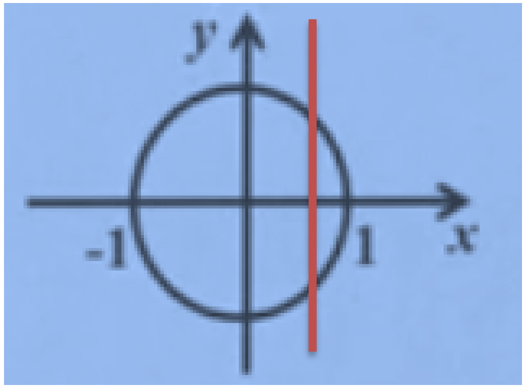
$$P(X>1 \mid Y=y) = \int_1^\infty \frac{e^{-x/y}}{y} dx = -e^{-x/y}\Big|_1^\infty = e^{-1/y}$$

条件分布

例5. 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求: $f_{Y|X}(y|x)$



解: X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

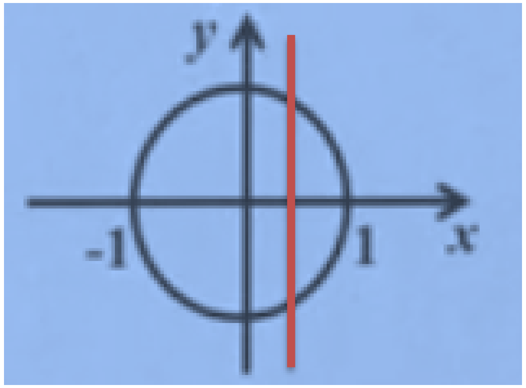
$$=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

条件分布

当 $|x|<1$ 时,有:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$$



即当 $|x|<1$ 时，有:

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0 & y\text{ 取其它值}\end{cases}$$

本章主要内容

- 二维随机变量及其联合分布函数
- 边缘分布
- 条件分布
- 相互独立的随机变量
- 两个随机变量函数分布

相互独立的随机变量

回顾事件的独立性

两事件A, B 相互独立：若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A, B 相互独立

直观上是X与Y各在什么范围内取值是毫无关系的

X与Y相互独立

⇕

事件$(X \le x)$与事件$(Y \le y)$相互独立$(\forall x, y \in R)$

⇕

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \le \mathbf{x}, \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \le \mathbf{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y})$$

⇕

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

相互独立的随机变量

一. 随机变量相互独立的定义

设 (X,Y) 的 联合分布函数及边缘分布函数为F(x,y)及$F_X(x), F_Y(y)$. 若对任意的 x, y都有:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$$

即 $$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y是相互独立的.

注意: 在独立的条件下，二维随机变量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$可由边缘分布$F_X(x)$和$F_Y(y)$唯一确定。

X 和 Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ 任意的$x_1 < x_2$,$y_1 < y_2$,

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = P\{x_1 < X \le x_2\} P\{y_1 < Y \le y_2\}$$

相互独立的随机变量

问题： 用分布函数来判断离散型随机变量和连续型随机变量的独立性，方便吗？

离散型随机变量可否用分布律，连续型用概率密度？

二. 当 (X,Y) 为离散型随机变量

X和Y相互独立 $\longleftrightarrow$ $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

$$\longleftrightarrow \sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij}=\sum_{x_i\le x} P_{i.}\sum_{y_j\le y} P_{.j}(\forall x,y\in R)$$

依次取$x=x_1,x_2\dots,y=y_1,y_2\dots,$

$$\longleftrightarrow \quad p_{ij}=\mathrm{P}_{i.}P_{.j} \qquad (\forall i,j\text{成立})$$

$$\longleftrightarrow \quad P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

相互独立的随机变量

定义:

设(X,Y)为二维离散型随机变量，如果对于(X,Y)的所有取值x_i, y_i，有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

则，称随机变量X和Y是相互独立的。

例1. 设 X,Y 相互独立，它们的分布律分别为:

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

求: (X,Y) 的联合分布律.

相互独立的随机变量

解: $\because \quad X,Y$ 相互独立

$$\therefore \quad p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

从而: $p_{01}=P(X=0,Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$$

$$p_{11}=P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$p_{02}=\frac{4}{12},\quad p_{12}=\frac{2}{12},\quad p_{03}=\frac{2}{12},\quad p_{13}=\frac{1}{12}$$

相互独立的随机变量

可得 (X,Y) 的联合分布律为:

X \ Y	1	2	3
0	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

对离散型随机变量而言，已知联合分布律可求出其相应的边缘分布律，但很多时候，反之则不然。

但从此例可得出：一旦知道 X,Y 相互独立条件后，则可由边缘分布律直接求得其联合分布律。

连续型随机变量及其分布

例2：设随机变量X与Y的分布律如下，问X与Y是否独立？

X \ Y	2	5	$P(X=x_i)$
0	1/3	1/3	2/3
3	1/6	1/6	1/3
$P(Y=y_i)$	1/2	1/2	1

解：逐点验证

$$P(X=x_i,Y=y_j)$$
$$=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

$$P(X=0,Y=2)=1/3=P(X=0)\cdot P(Y=2)$$

$$P(X=0,Y=5)=1/3=P(X=0)\cdot P(Y=5)$$

$$P(X=3,Y=2)=1/6=P(X=3)\cdot P(Y=2)$$

$$P(X=3,Y=5)=1/6=P(X=3)\cdot P(Y=5)$$

连续型随机变量及其分布

例3：设随机变量X与Y独立，下面是X与Y的联合分布律和边缘分布律，请补上所缺数值。

X \ Y	3	4	5	$P(X=x_i)$
1	1/24	1/8	1/12	1/4
2	1/8	3/8	1/4	3/4
$P(Y=y_i)$	1/6	1/2	1/3	1

连续型随机变量及其分布

考研真题

(2013年)设随机变量X与Y相互独立，且X与Y的概率分布分别如下，则P(X+Y=2)=（）

A. 1/12

B. 1/8

C. 1/6

D. 1/2

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

相互独立的随机变量

三. 当 (X,Y) 为连续型随机变量

设(X,Y)是二维连续型随机变量，$f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ 分别为(X,Y)的联合概率密度和边缘概率密度，

若X和Y相互独立，$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

则在函数$f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$的连续点有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 F_X(x)\cdot F_Y(y)}{\partial x \partial y}$$ 即 $$f(x,y)= f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

则X和Y是相互独立的随机变量。

注：X，Y相互独立，要求上式几乎处处成立即可。同事件的独立性，类似有：

$$f_{X|Y}(x|y)= f_X(x),\quad f_{Y|X}(y|x)= f_Y(y)$$

相互独立的随机变量

例2. 设 (X,Y) 服从正态分布，其边缘分布密度为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$-\infty<x<+\infty \qquad -\infty<y<+\infty$$

问：X 和 Y 相互独立的充分必要条件是什么?

解：

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$f(x,y)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

相互独立的随机变量

当$\rho=0$时 有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

则X 和 Y 相互独立

反过来，若X 和 Y 相互独立，则 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

令 $x=\mu_1$ y= μ_2

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

得到$\rho=0$

谢 谢 ！