选择题答案：

1. D　　2. A　　3. D　　4. C　　5. B　　6. C　　7. B　　8. B

填空题答案：

1. $\frac{3}{4}$　　**2.** $\Phi(\frac{5}{3})$ **或** $1-\Phi(-\frac{5}{3})$　　**3.** $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ **或** $2^{-\frac{1}{4}}$　　**4.** 1.4

三.（本题 8 分）

【解】

设事件 A：顾客购买整套玻璃杯；B_i：该套杯子中有 i 件残次品，i=0，1，2。

(1) 由题意知

$P(B_0)=0.7$，$P(B_1)=0.2$，$P(B_2)=0.1$，

$P(A|B_0)$=1，$P(A|B_1)$=$\frac{C_5^3}{C_6^3}=\frac{1}{2}$，$P(A|B_2)$=$\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$　　……　2 分

由全概率公式，顾客挑选后会购买整套玻璃杯的概率为

$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.82$　　……　3 分

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{0.02}{0.82}=\frac{1}{41}\approx 0.024$$

因此，顾客挑选并购买整套玻璃杯后，回家发现该套杯子中有 2 件残次品的概率为 1/41。

…………　3 分

四.（本题 15 分）

【解】

(1) $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$；

$0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}4xe^{-2y}dy=2x$

因此，$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　　3 分

$y\le 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$；

$y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 4xe^{-2y}dx=2e^{-2y}$

因此，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　3 分

(2) 由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故而 X 与 Y 相互独立。 2 分

(3) 由（1）可得，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\dfrac{2}{3}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\dfrac{1}{2}$，故而，$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\dfrac{1}{18}$

由于 Y 服从参数为 1/2 的指数分布，故有 $D(Y)=\dfrac{1}{4}$

又知 X 与 Y 独立，可得 $D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=\dfrac{3}{2}$ 5 分

(4) $y>0$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 2 分

五.（本题 12 分）

【解】

(1) 易知 $Z\sim N(0,2\boldsymbol{\sigma}^2)$，故而 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}},$$ 2 分

(2) 矩估计：可知 $E(Z^2)=2\boldsymbol{\sigma}^2+0=2\boldsymbol{\sigma}^2$，令 $2\boldsymbol{\sigma}^2=A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i^2$，

解得矩估计量为 $\hat{\sigma}_{\mathrm{M}}^2=\dfrac{A_2}{2}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^n Z_i^2$ 3 分

矩估计另一方法：也可由于 $D(Z)=2\boldsymbol{\sigma}^2$，令 $2\boldsymbol{\sigma}^2=S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(Z_i-\overline{Z})^2$，

解得矩估计量为 $\hat{\sigma}_{\mathrm{M}}^2=\dfrac{S^2}{2}=\dfrac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^n(Z_i-\overline{Z})^2$ （这样求矩估计也是给 3 分）

极大似然估计：似然函数为 $L(\boldsymbol{\sigma}^2)=\prod_{i=1}^n\dfrac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}}e^{-\frac{z_i^2}{4\sigma^2}}$，

$\ln L(\boldsymbol{\sigma}^2)=-n\ln(2\sqrt{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma})-\dfrac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{4\boldsymbol{\sigma}^2}$， 令 $\dfrac{\partial\ln L(\boldsymbol{\sigma}^2)}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2}=-\dfrac{n}{2\boldsymbol{\sigma}^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{4(\boldsymbol{\sigma}^2)^2}=0$，得

$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$，从而极大似然估计量为. $\hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ 5 分

(3) $E(\hat{\sigma}_L^2) = E(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} E(Z_i^2) = \sigma^2$

因此，$\hat{\sigma}_L^2$ 是 σ^2 的无偏估计。 2 分

六.（本题 7 分）

【解】

$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(2X + Y \le z)$

当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z) = 0$；

当 $0 < z < 4$ 时，$F_Z(z) = P(2X + Y \le z) = \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^{z-2x} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{4}z - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-z}$

当 $z \ge 4$ 时，$F_Z(z) = P(2X + Y \le z) = \int_0^{2} dx \int_0^{z-2x} \frac{1}{2} e^{-y} dy = 1 - \frac{1}{4}e^{4-z} + \frac{1}{4}e^{-z}$

于是 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \frac{1}{4}z - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-z}, & 0 < z < 4 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{4-z} + \frac{1}{4}e^{-z}, & z \ge 4 \end{cases}$ 5 分

因此，$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-z}, & 0 < z < 4 \\ \frac{1}{4}e^{4-z} - \frac{1}{4}e^{-z}, & z \ge 4 \end{cases}$ 2 分

【另解】令 U=2X，可知 U 与 Y 独立，利用卷积公式

$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < u < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，　$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \ge 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$， 1 分

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u) f_Y(z-u) du$ 1 分

$$=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ \int_0^z \frac{1}{4}e^{-(z-u)}du=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-z}, & 0<z<4 \\ \int_0^4 \frac{1}{4}e^{-(z-u)}du=\frac{1}{4}e^{4-z}-\frac{1}{4}e^{-z}, & z\ge 4 \end{cases}$$ 5 分

七.（本题 10 分）

【解】

(1) $\alpha=0.05$，$n=16,\ \bar{x}=475,\ s=32$

所求置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=(475-\frac{32}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15),475+\frac{32}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15))$$

$=(457.948，\ 492.052)\approx(457.95，\ 492.05)$ 5 分

(2) $H_0:\mu\ge\mu_0=500,\quad H_1:\mu<\mu_0$

选择检验统计量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$，

拒绝域为 $C=(-\infty,-t_{0.05}(15))=(-\infty,-1.7531)$

计算得 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\dfrac{475-500}{\frac{32}{\sqrt{16}}}=-3.125\in C$

因此不能认为这种材料合格。 5 分