第五章 作业

1.
$$\begin{cases} f'(x_0) \approx \dfrac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)] \\ f'(x_1) \approx \dfrac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)] \\ f'(x_2) \approx \dfrac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)] \end{cases}$$

f'(1.0)=1/0.2*(-3*0.25+4*0.2268-0.2066)=-0.2470

f'(1.1)=1/0.2*(-0.25++0.2066)=-0.2170

f'(1.2)=1/0.2*(0.25-4*0.2268+3*0.2066)=-0.1870

$$\begin{cases} f'(x_0) - p'_2(x_0) = \dfrac{h^2}{3} f'''(\zeta_0) \\ f'(x_1) - p'_2(x_1) = -\dfrac{h^2}{6} f'''(\zeta_1) \\ f'(x_2) - p'_2(x_2) = \dfrac{h^2}{3} f'''(\zeta_2) \end{cases} \qquad f'''(x) = -24(1+x)^{-5}$$

$|R_2(1.0)| \le 0.01/3*24/32=0.0025$

$|R_2(1.1)| \le 0.01/6*24/32=0.00125$

$|R_2(1.2)| \le 0.01/3*24/32=0.0025$

2.已知等距**3**点，采用辛普森公式

$$I = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

$$A_0 = A_2 = \frac{a-(-a)}{6} = \frac{a}{3} \qquad A_1 = \frac{4[a-(-a)=}{6} = \frac{4a}{3}$$

$$I = \frac{a}{3} f(-a) + \frac{4a}{3} f(0) + \frac{a}{3} f(a)$$

$$R_2[f] = -\frac{2a}{180}\left(\frac{2a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) = -\frac{a^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

f(x)=x³成立， **f(x)=x⁴**不成立，代数精度**m=3.**

5.(1)已知等距**3**点，采用辛普森公式

$$I = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

$$A_0 = A_2 = \frac{1}{3} \quad A_1 = \frac{4}{3} \qquad I = \frac{1}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(1) + \frac{1}{3} f(2)$$

(2) 代入**f(x)=x**^{2}得到

$$\frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{2} - 2ah^3 \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{h}{2}[f(0) + f(\mathrm{h})] + \frac{h^2}{12}[f'(0) - f'(h)]$$

f(x)=x^{3}成立， **f(x)=x**^{4}不成立，代数精度**m=3.**

6.根据辛普森公式

$$\int_0^1 e^{-x}dx \approx \frac{1}{6}[e^0 + 4e^{-0.5} + e^{-1}] \approx 0.63233$$

$$\left|\boldsymbol{R_2[f]}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{180}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{4}} \boldsymbol{f^{(4)}(\xi)} \approx \mathbf{0.00035}$$

$$\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

8.(1)复合梯形公式

$$\boldsymbol{R_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)} \quad |R_n| \approx \frac{h^2}{12} e < 10^{-6} \quad \Rightarrow \begin{cases} h = 0.0021 \\ N = 476 \end{cases}$$

$$R_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \quad |R_n| \approx \frac{h^2}{12}(e-1) < 10^{-6} \quad \Rightarrow \begin{cases} h = 0.0026 \\ N = 379 \end{cases}$$

(2)复合辛普森公式

$$\boldsymbol{R_n = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 [f^{(4)}(\eta_2)]} \quad |R_n| \approx \frac{h^4}{2880} e < 10^{-6} \Rightarrow \begin{cases} h = 0.1804 \\ N = 6 \end{cases}$$

实际计算结果：

(1)N=379, I=1.7182828, R=9.9686*10^{-7}

(2)N=5, I=1.8182828, R=9.5347*10^{-7}

9.复合梯形公式

$$R_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \quad |R_n| \approx \frac{h^2}{12} \cdot 8 < 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} h = 0.0387 \\ N = 25 \end{cases} \quad 32$$

$$R_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \quad |R_n| \approx \frac{h^2}{12}(2-0) < 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} h = 0.0775 \\ N = 13 \end{cases} \quad 16$$

实际计算结果：

N=16, I=3.1409, R=6.510*10^{-4}

10.龙贝格积分

R1=3.141586

$E = 8.3404*10^{-6}$

实际计算结果：

3.000000				
3.100000	**3.133333**			
3.131176	**3.141569**	**3.142118**		
3.138988	**3.141593**	**3.141594**	**3.141586**	
3.140942	**3.141593**	**3.141593**	**3.141593**	**3.141593**

基本要求

- 数值微分，差商近似导数的计算；
- 梯形、Simpson求积公式；
- 梯形、Simpson复合求积法；
- 龙贝格积分法和高斯求积公式的基本思想。