第三章 作业

2.
$$\begin{cases} 0.001000x_1 + 2.000x_2 + 3.000x_3 = 1.000 \\ -1.000x_1 + 3.712x_2 + 4.623x_3 = 2.000 \\ -2.000x_1 + 1.072x_2 + 5.643x_3 = 3.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.001000x_1 + 2.000x_2 + 3.000x_3 = 1.000 \\ 2004x_2 + 3005x_3 = 1002 \\ 4001x_2 + 6006x_3 = 2003 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0.0000 \\ x_2 = -0.09980 \\ x_3 = 0.4000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.001000x_1 + 2.000x_2 + 3.000x_3 = 1.000 \\ 2004x_2 + 3005x_3 = 1002 \\ 5x_3 = 2 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x_1 = -0.4904 \\ x_2 = -0.05104 \\ x_3 = 0.3675 \end{cases}}$$

2.列主消元

$$\begin{cases} 0.001000x_1 + 2.000x_2 + 3.000x_3 = 1.000 \\ -1.000x_1 + 3.712x_2 + 4.623x_3 = 2.000 \\ -2.000x_1 + 1.072x_2 + 5.643x_3 = 3.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2.000x_1 + 1.072x_2 + 5.643x_3 = 3.000 \\ 3.176x_2 + 1.801x_3 = 0.500 \\ 2.001x_2 + 3.003x_3 = 1.002 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -0.4899 \\ x_2 = -0.05113 \\ x_3 = 0.3678 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2.000x_1 + 1.072x_2 + 5.643x_3 = 3.000 \\ 3.176x_2 + 1.801x_3 = 0.500 \\ 1.868x_3 = 0.687 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x_1 = -0.4904 \\ x_2 = -0.05104 \\ x_3 = 0.3675 \end{cases}}$$

9. 证明不等式：

$$(1)\|\mathbf{X}\|_\infty = \max|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|\mathbf{X}\|_1 \le n\max|x_i| \le n\|\mathbf{X}\|_\infty$$

(2)根据$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$

当$\|\mathbf{X}\| \ge \|\mathbf{Y}\|$，$\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|+\|\mathbf{Y}\| \ge \|\mathbf{X}-\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{X}\|$

$$\Rightarrow \|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\| \ge \|\mathbf{X}\|-\|\mathbf{Y}\| = \big|\|\mathbf{X}\|-\|\mathbf{Y}\|\big|$$

当$\|\mathbf{Y}\| \ge \|\mathbf{X}\|$, $\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|+\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}-\mathbf{X}\|+\|\mathbf{X}\| \ge \|\mathbf{Y}-\mathbf{X}+\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\|$

$$\Rightarrow \|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\| \ge \|\mathbf{Y}\|-\|\mathbf{X}\| = \big|\|\mathbf{X}\|-\|\mathbf{Y}\|\big|$$

11. (1) $A=\begin{pmatrix}10 & -1 & 0\\ -1 & 10 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$ 严格对角占优，Jacobi和G-S迭代收敛！

$$D=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \quad L=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Jacobi迭代矩阵：

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}0 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\|G\|_1=0.5<1 \quad 或 \quad \|G\|_\infty=0.4<1$$ 收敛

$$\lambda^3-0.08\lambda-0.01=\lambda^3-0.09\lambda=\lambda(\lambda^2-0.09)=\lambda(\lambda-0.3)^2=0$$

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=\lambda_3=0.3 \quad \rho(B)=0.3<1$$ 收敛

Gauss-Seidel迭代矩阵：

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ -1 & 10 & 0\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0.01 & 0.1 & 0\\ 0.004 & 0.04 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0.01 & 0.2\\ 0 & 0.004 & 0.08\end{pmatrix}$$

$\|G\|_1=0.28<1$　或　$\|G\|_\infty=0.21<1$　收敛

或求解谱半径来判断：　$\lambda(\lambda-0.01)(\lambda-0.08)-0.0008\lambda=0$

$\lambda^2(\lambda-0.09)=0$　　$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=0.09$

$\rho(B)=0.09<1$　　收敛

11. (2)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-2&-2&0\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Jacobi迭代矩阵： $\mathbf{B}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

$$\lambda^3+4-4+4\lambda-2\lambda-2\lambda=\lambda^3=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ $\qquad \rho(\mathbf{B})=0<1$ 收敛

Gauss-Seidel迭代矩阵：

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\lambda(\lambda-2)^2=0 \qquad \lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=2$$

$$\rho(B)=2>1$$ 不收敛

13. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1.001\\ 6 & 1.997\end{bmatrix}, \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-133.1333 & 67.67333\\ 400 & 200\end{bmatrix}$

$$\|A\|_\infty = \mathbf{7.997}, \|A^{-1}\|_\infty = \mathbf{600}$$

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \mathbf{4798.2}$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(A^{-1}(A^{-1})^T)}$$

$$\approx \sqrt{49.990} \cdot \sqrt{2.2218 \times 10^5} \approx 3332.7$$

14. (1) $\mathrm{Cond}(\mathbf{A})_r = \|\mathbf{A}\|_r \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_r \geq \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\|_r = 1$

(2) 正交矩阵：$\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}, \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

条件数：$\mathrm{cond}(\mathbf{A})_2 = \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \|\mathbf{A}\|_2$

$$= \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^T)} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{AA}^T)}$$

$$= \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{AA}^T)}$$

$$= \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{I})} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{I})} = 1$$

补充(1)：设n阶矩阵A=$(a_{ij})_{n\times n}$，试证实数 $\|\mathbf{A}\| = n \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ 为矩阵A的一种范数.

证明　对任意n阶方阵A, B和常数λ, 有

非负 $\|A\| = n \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \ge 0$, 且仅当A $=$ 0时$\|A\| = 0$。

正齐次 $\|\lambda A\| = n \max\limits_{1\le i,j\le n} |\lambda a_{ij}| = |\lambda| n \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| = |\lambda| \|A\|$

三角不等式 $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| = n \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}+b_{ij}| \le n \max\limits_{1\le i,j\le n} [|a_{ij}|+|b_{ij}|] = \|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$

相容性 $\|AB\| = n \max\limits_{1\le i,j\le n} \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \le n \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \sum\limits_{k=1}^{n} \max\limits_{1\le i\le n} |b_{ik}|$

$$\le n \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \cdot n \max_{1\le i,k\le n} |b_{ik}| = \|A\| \cdot \|B\|$$

所以, 实数‖A‖是矩阵A的范数.

补充(2) 给出下列矩阵的 Doolittle 分解 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本要求

- 高斯消元法、高斯列主元消元法；
- 矩阵的杜利特尔分解；
- 向量范数和矩阵范数的计算；
- 雅克比、高斯-赛德尔迭代矩阵的计算、收敛性判断；
- 矩阵条件数的计算。