# 北京科技大学 2020–2021 学年第一学期

## 微积分AI 试卷（A 卷解析）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________ 考试教室 ________

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 课程考核成绩 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得　分 | | | | | |

**说明：**

1、要求正确地写出主要计算或推导过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上答题，在其他纸张上的解答一律无效.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

| 得分 |
|---|
| |

### 一、填空题（本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\tan x}=$ __1__ .

**解析** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ □

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ __$\dfrac{1}{3}$__ .

**解析** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{3}.$

🎓 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, 两边同时积分可知 $x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$,

又 $\tan x-\sin x=\tan x\,(1-\cos x)\sim x\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)=\dfrac{1}{2}x^3$,

则知 $\tan x-x=(\tan x-\sin x)-(x-\sin x)\sim\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{6}x^3=\dfrac{1}{3}x^6.$ □

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=$ __$\dfrac{3}{2}$__ .

**解析** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,[1+x+o(x)]-[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{3}{2}.$

🎓 由于分母为二次，故分子只需最高次出现二次，所以 $e^x$ 只需展开到一阶. □

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2a\sin x}-1}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ __$-2$__ .

**解析** 连续要求极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(x)$

即 $a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+e^{2a\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}+\dfrac{e^{2a\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2ax}{x}=2+2a$,

即 $2+2a=0$, $a=-2.$ □

5. 若函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\,(x\geqslant 0)$, 则 $f(3)=$ $\underline{\dfrac{9}{2}}$ .

**解析** $f(x)=\max\left\{x,\dfrac{x^2}{2}\right\}$，$f(x)=\begin{cases}x, & x<2\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 2\end{cases}$, 则 $f(3)=\dfrac{9}{2}$.

🎓 教材 1-3 第 15 题结论，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{a_i\}$, 夹逼准则证明可见我（黄腾）第一章总复习课件（高数群群文件-习题课讲义里），也可以根号里提出一个最大值的 $n$ 次方，而后利用 $|x|<1$ 时，$x^\infty=0$. □

6. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f'(x)=\sin^2(\sin(x+1))$, $f(0)=4$, $f(x)$ 的反函数是 $y=\varphi(x)$, 则 $\varphi'(4)=$ $\underline{\dfrac{1}{\sin^2(\sin 1)}}$ .

**解析** 根据反函数与函数的关系可知 $\varphi(4)=0$, 根据反函数与函数导数的关系可知 $\varphi'(4)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\sin^2(\sin 1)}$. □

7. 若 $f(x)=\left(x^{2000}-1\right)\arctan\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{1+2x^2+x^3}$, 则 $f'(1)=$ $\underline{500\pi}$ .

**解析** 在只计算点态（具体某一点）处导数时，用导数的定义计算导数会更简便.

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{2000}-1\right)\arctan\frac{2(x^2+1)}{1+2x^2+x^3}}{x-1}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{2000}-1\right)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\arctan\frac{2\left(x^2+1\right)}{1+2x^2+x^3}
\end{aligned}
$$

根据教材 1-4 第 7 题 (3) 可知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^{2000}-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}2000x=2000$(直接洛必达也可得到), $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{1+2x^2+x^3}=\arctan\dfrac{4}{4}=\dfrac{\pi}{4}$, 则原式 $=2000\times\dfrac{\pi}{4}=500\pi$. □

8. 设 $y=\mathrm{e}^{f(x)}f(\ln x)$, 其中 $f(x)$ 可微, 则 $\mathrm{d}y=$ $\underline{\left(f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}f(\ln x)+\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{f(x)}f'(\ln x)\right)\mathrm{d}x}$ .

**解析** 复合函数求导，无解析. □

9. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=$ $\underline{\dfrac{1}{2}f''(a)}$ .

**解析** 此题考查 Taylor 公式.

将 $f(a+h)$ 在 $f(a)$ 处展开知 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a)$

则原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^2}{2}f''(a)}{h^2}=\dfrac{f''(a)}{2}$. □

10. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^m\end{cases}$ , 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=1}=$ $\underline{m^n\mathrm{e}^m}$ .

**解析** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=mt^{m-1}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{mt^{m-1}}{\frac{1}{t}}=mt^m$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(mt^m)'\times t=m^2t^m$$

则 $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=m^3t^m,\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=m^nt^m$，当 $x=1$ 时 $t=\mathrm{e}$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=1}=m^n\mathrm{e}^m$. □

| 得分 |
| --- |
| |

**二、单项选择题（本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分）**

11. 设当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, 则在 $(0,+\infty)$ 内 （ B ）

A. $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都无界　　B. $f(x)$ 有界, $f'(x)$ 无界

C. $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都有界　　D. $f(x)$ 无界, $f'(x)$ 有界

**解析** $f(x)$ 可能无界的地方为 $x\to0$ 或 $x\to\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$(无穷小量乘以有界量，极限为零)，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\times\frac{1}{x}=1$(等价无穷小替换) 即 $f(x)$ 有界. $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 无界，见第一章例 3.8(47 页). □

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)\sin\frac{x}{n}=$ （ A ）

A. $\frac{x}{2}$　　B. 0　　C. $-\frac{x}{2}$　　D. $x$

**解析** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}\sin\frac{x}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}\frac{x}{n}=\frac{x}{2}$.

🎓 自变量趋于无穷大时多项式比值的极限，看分子分母多项式的次数，次数相等则为最高次系数表，分子高则为无穷大，分母高则为 0. □

13. 设 $f\left(\frac{1}{n}\right)=2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}-2$, 当 $n\to\infty$ 时，有 （ B ）

A. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 的等价无穷小　　B. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 同阶但非等价无穷小

C. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 高阶的无穷小　　D. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 低阶的无穷小

**解析** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln2}{\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln3}{\frac{1}{n}}=\ln2+\ln3=\ln6\neq1$，所以选 B. □

14. 在区间 $[0,1]$ 上, 函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 的最大值为 $M(n)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ （ A ）

A. $\mathrm{e}^{-1}$　　B. $\mathrm{e}$　　C. $\mathrm{e}^2$　　D. $\mathrm{e}^3$

**解析** 根据均值不等式，当 $nx=(1-x)$ 时取等

$$f(x)=nx(1-x)^n\leqslant\left(\frac{nx+1-x+\cdots+1-x}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊　　装订线内不要答题

也可用求导算极值的方式计算 $x=\dfrac{1}{n+1}$ 时取极大值

$\lim\limits_{n\to\infty} M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^{-1}.$ □

15. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}=1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$

（ D ）

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$　　C. 取得极大值　　D. 取得极小值

**解析** $f(x)$ 在 $x=0$ 时连续，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\times \lim\limits_{x\to 0}2\sin^2\dfrac{x}{2}=1\times 0=0.$

导数存在性: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right]=1\times 0=0$, 则 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=0$,

极值情况: 由函数极限的部分保号性可知,当 $x\in\dot{U}(0,\delta)$ 时,有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{2\sin^2\frac{x}{2}}>0$, 又 $2\sin^2\dfrac{x}{2}\geqslant 0$, 则有 $f(x)-f(0)>0$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值. □

16. 曲线 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 的渐近线为 （ C ）

A. 只有水平渐近线　　B. 只有垂直渐近线

C. 既有水平又有垂直渐近线　　D. 既无垂直又无水平渐近线

**解析** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$, 垂直渐近线为 $x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, 水平渐近线为 $y=0$. □

17. 已知 $f(x)=x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)$, 且 $f'(m)=s$, $m\leqslant n$, $s$ 都是正整数, 则其满足

（ D ）

A. $n!=ms$　　B. $m!=sn$

C. $s!=mn$　　D. $(-1)^m m!(n-m)!=s$

**解析** $m\leqslant n$ 说明 $f(x)$ 中一定有 $(m-x)$ 这个因式，则 $f(m)=0$，且

$$\begin{aligned}
f'(m)&=\lim_{x\to m}\frac{f(x)-f(m)}{x-m}=\lim_{x\to m}\frac{f(x)-0}{x-m}\\
&=\lim_{x\to m}\frac{x(1-x)(2-x)\cdots(m-1-x)(m-x)(m+1-x)\cdots(n-x)}{x-m}\\
&=-\lim_{x\to m}x(1-x)(2-x)\cdots(m-1-x)(m+1-x)\cdots(n-x)\\
&=-m(1-m)(2-m)\cdots(m-1-m)\times(m+1-m)\cdots(n-m)\\
&=-m(-1)^{m-1}(m-1)(m-2)\cdots 1\times 1\times\cdots\times(n-m)=(-1)^m m!(n-m)!
\end{aligned}$$

即 $s=(-1)^m m!(n-m)!$. □

18. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导, $x_1 < x_2$ 是区间内的任意两点, 则至少存在一点 $\xi$, 满足 （ C ）

A. $f(x_1) - f(b) = f'(\xi)(x_1 - b), \xi \in (x_1, b)$

B. $f(x_1) - f(a) = f'(\xi)(x_1 - a), \xi \in (a, x_1)$

C. $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2), \xi \in (x_1, x_2)$

D. $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b), \xi \in (a, b)$

**解析** 拉格朗日中值定理，应为开区间内成立. □

19. 设函数 $f(-t) = f(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 在 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(t) > 0$, $f''(t) < 0$, 则当 $t \in (0, +\infty)$ 时, 有 （ C ）

A. $f(t)$ 单调增加且图像是凸的

B. $f(t)$ 单调增加且图像是凹的

C. $f(t)$ 单调减少且图像是凸的

D. $f(t)$ 单调减小且图像是凹的

**解析** $t < 0$ 时，$f'(t) > 0$ 说明 $f(t)$ 单调递增, $f''(t) < 0$ 说明 $f(t)$ 为凹函数，又 $f(-t) = f(t)$ 说明 $f(t)$ 为偶函数，则 $f(t)$ 在 $t > 0$ 时单调递减，且为凸函数. □

20. 函数 $f(x)$ 在 0 点处某邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ （ D ）

A. 不可导　B. 可导且 $f'(0) = 2$　C. 取得极大值　D. 取得极小值

**解析** $f(x)$ 在 $x = 0$ 时连续，$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{1-\cos x}(1-\cos x)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} \times \lim\limits_{x\to 0} 1 - \cos x = 1 \times 0 = 0$.

导数存在性: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x}\right] = 1 \times 0 = 0$, 则 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0$,

极值情况: 由函数极限的部分保号性可知，当 $x \in \dot{U}(0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{1-\cos x} = 2 > 0$, 又 $1 - \cos x \geqslant 0$, 则有 $f(x) - f(0) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值. □

| 得分 |
| --- |
| |

**三、计算题（本题共 2 小题，每题 6 分，满分 12 分）**

21. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right]$

**解** 倒代换，令 $t = \dfrac{1}{n}$，将原式化为

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - \mathrm{e}}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} - \mathrm{e}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1} - 1\right]}{t} \\ &= \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+t) - 1}{t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = -\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

题答要不内线订装

即原式 $=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. □

22. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零, 证明: 存在唯一的一组实数 $k_1, k_2, k_3$, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

**解** 由泰勒公式可得:

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\mathrm{o}\left(h^2\right)$$
$$f(2h)=f(0)+f'(0)2h+2h^2 f''(0)+o\left(h^2\right)$$
$$f(3h)=f(0)+f'(0)3h+\frac{9h^2}{2}f''(0)+\mathrm{o}\left(h^2\right)$$

则可得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(k_1+k_2+k_3-1\right)f(0)+\left(k_1+2k_2+3k_3\right)hf'(0)+h^2\frac{\left(k_1+4k_2+9k_3\right)}{2}f''(0)}{h^2}\end{aligned}$$

可得:

$$k_1+k_2+k_3=1,\quad k_1+2k_2+3k_3=0,\quad k_1+4k_2+9k_3=0$$

则可以得到唯一的一组解 $k_1=3,\ k_2=-3,\ k_3=1$. □

| 得分 |
| --- |
| |

**四、证明题（8 分）**

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 试证至少存在一点 $\xi$, 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)(\ln b-\ln a).$$

**证明** 由柯西中值定理可知, 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导,

有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}\ \Rightarrow\ f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)(\ln b-\ln a)$$

证毕. □