北京科技大学 2020–2021 学年第 一 学期

微 积 分 A I 试卷（A 卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________ 考试教室 ________

题 号	一	二	三	四	课程考核成绩
得 分					

说明：

1、要求正确地写出主要计算或推导过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上答题，在其他纸张上的解答一律无效.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装 订 线 内 不 要 答 题

得分

一、填空题（本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\tan x}=$ ______ .

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ______ .

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln(1+x)}{x^2}=$ ______ .

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2a\sin x}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ ______ .

5. 若函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\,(x\geqslant 0)$, 则 $f(3)=$ ______ .

6. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f'(x)=\sin^2(\sin(x+1))$, $f(0)=4$, $f(x)$ 的反函数是 $y=\varphi(x)$, 则 $\varphi'(4)=$ ______ .

7. 若 $f(x)=\left(x^{2000}-1\right)\arctan\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{1+2x^2+x^3}$, 则 $f'(1)=$ ______ .

8. 设 $y=\mathrm{e}^{f(x)}f(\ln x)$, 其中 $f(x)$ 可微, 则 $\mathrm{d}y=$ ______ .

9. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=$ ______ .

10. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^m\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=1}=$ ______ .

得分

二、单项选择题（本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分）

11. 设当 $x \in (0,+\infty)$ 时, $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, 则在 $(0,+\infty)$ 内 （　　）

A. $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都无界　　B. $f(x)$ 有界, $f'(x)$ 无界

C. $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都有界　　D. $f(x)$ 无界, $f'(x)$ 有界

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)\sin\dfrac{x}{n} =$ （　　）

A. $\dfrac{x}{2}$　　B. 0　　C. $-\dfrac{x}{2}$　　D. x

13. 设 $f\left(\frac{1}{n}\right) = 2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}} - 2$, 当 $n\to\infty$ 时，有 （　　）

A. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 的等价无穷小　　B. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 同阶但非等价无穷小

C. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 高阶的无穷小　　D. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 低阶的无穷小

14. 在区间 $[0,1]$ 上, 函数 $f(x) = nx(1-x)^n$ 的最大值为 $M(n)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} M(n) =$ （　　）

A. e^{-1}　　B. e　　C. e^{2}　　D. e^{3}

15. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2\sin^2\frac{x}{2}} = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ （　　）

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$　　C. 取得极大值　　D. 取得极小值

16. 曲线 $y = \dfrac{1}{|x|}$ 的渐近线为 （　　）

A. 只有水平渐近线　　B. 只有垂直渐近线

C. 既有水平又有垂直渐近线　　D. 既无垂直又无水平渐近线

17. 已知 $f(x) = x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)$, 且 $f'(m) = s$, $m \leqslant n$, s 都是正整数, 则其满足 （　　）

A. $n! = ms$　　B. $m! = sn$

C. $s! = mn$　　D. $(-1)^m m!(n-m)! = s$

18. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导, $x_1 < x_2$ 是区间内的任意两点, 则至少存在一点 ξ, 满足 （　　）

A. $f(x_1) - f(b) = f'(\xi)(x_1 - b), \xi \in (x_1, b)$

B. $f(x_1) - f(a) = f'(\xi)(x_1 - a), \xi \in (a, x_1)$

C. $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2), \xi \in (x_1, x_2)$

D. $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b), \xi \in (a,b)$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

19. 设函数 $f(-t) = f(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 在 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(t) > 0$, $f''(t) < 0$, 则当 $t \in (0, +\infty)$ 时, 有 （　　）

A. $f(t)$ 单调增加且图像是凸的　　B. $f(t)$ 单调增加且图像是凹的

C. $f(t)$ 单调减少且图像是凸的　　D. $f(t)$ 单调减小且图像是凹的

20. 函数 $f(x)$ 在 0 点处某邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ （　　）

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0) = 2$　　C. 取得极大值　　D. 取得极小值

得分

三、计算题（本题共 2 小题，每题 6 分，满分 12 分）

21. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right]$

22. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零, 证明: 存在唯一的一组实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$\lim_{h\to 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

得分

四、证明题（8 分）

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 试证至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)(\ln b-\ln a).$$