UTC501 Exercices - Version de 04/2024

1 Théorie des ensembles. Éléments de logique. Techniques de démonstration

Exercice 1.1
On considère A, B, C parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
2. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$
4. $B \subset C \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases}$
5. $A \cup B \not\subset C \Rightarrow A \not\subset C$ ou $B \not\subset C$
6. $B = C \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases}$
7. $(A - B) \sqcup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (rappelons que cet ensemble s'appelle la différence symétrique de A et B)
8. $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$
9. $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$
10. $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

UTC 501

Exercice 1.1 (1/2)

1. ⇒ est évident par définition

⇐ soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B = B$ donc $x \in B$. Il suit $A \subset B$.

2. ⇒ est évident par définition

⇐ par contraposée si $A \neq B$ alors il existe $x \in A$ et $\notin B$ (ou l'inverse mais alors on échange les rôles de A et B). Alors ce $x \in A \cup B$ mais $\notin A \cap B$ ce qui prouve $A \cap B \subsetneq A \cup B$.

3. ⇒ puisque $A \subset B \subset C$ on a $A \cup B = B$ et $B \cap C = B$. La condition est donc immédiate

⇐ soit $x \in A$. Alors a fortiori $x \in A \cup B = B \cap C \subset B$ donc $x \in B$. On a donc $A \subset B$

soit $x \in B$. Alors a fortiori $x \in A \cup B = B \cap C \subset C$ donc $x \in C$. Et finalement $B \subset C$

ce qui achève la preuve

4. ⇒ Soit $x \in A \cup B$. Alors ou bien $x \in A \subset A \cup C$ ou bien $x \in B \subset C \subset A \cup C$. Dans tous les cas $x \in A \cup C$ et on vient donc de prouver $A \cup B \subset A \cup C$

Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B \subset C$ donc $x \in A \cap C$, et on vient de prouver $A \cap B \subset A \cap C$

⇐ Par l'absurde, supposons $B \not\subset C$, Il existe $x \in B$ et $x \notin C$. Alors

- ou bien $x \in A$: dans ce cas on a $x \in A \cap B$ et $x \notin A \cap C$ ce qui prouve $A \cap B \not\subset A \cap C$
- ou bien $x \notin A$: dans ce cas, on a $x \notin A \cup C$ mais on a quand même $x \in A \cup B$ ce qui prouve $A \cup B \not\subset A \cup C$

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction

5. Par contraposée : si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$ (c'est une conséquence directe de la définition de la réunion) et le tour est joué

6. ⇒ est évident

⇐ puisque $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases}$ on est dans un cas particulier du 4 ⇐ qui conduit $B \subset C$

Mais en échangeant B et C on a également $C \subset B$ et finalement $B = C$

7. Soit $x \in A - B$ alors $x \in A \cup B$ et $\notin A \cap B$, donc $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. De même si $x \in B - A$ en échangeant les rôles de A et B. Ce qui prouve $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$.

Réciproquement si $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$: alors

- ou bien $x \in A$ et alors $x \notin B$ car il n'est pas dans $A \cap B$
- " $\in B$ " $\notin A$ "

Enfin la réunion $(A - B) \cup (B - A)$ est disjointe. Par définition de la différence, on a $(A - B) \cap B = \emptyset$ et comme $B - A \subset B$ a fortiori $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

8. ⇒ Soit $x \in B$. Alors :

- ou bien $x \notin A$. Dans ce cas $x \in A \Delta B$, $= A \Delta C$ donc $x \in C$
- ou bien $x \in A$. Dans ce cas $x \in A \cap B$ et donc $x \notin A \Delta B$, $= A \Delta C$. Dès lors si on avait $x \notin C$ on aurait $x \in A - C \subset A \Delta C$, une contradiction. Donc $x \in C$

Dans les deux cas, on a montré $x \in C$. On conclut $B \subset C$.

Par symétrie sur B et C, on a $C \subset B$ et finalement $B = C$

⇐ Evident

9. $A - B = A$ signifie que $A \cap B = \emptyset$. Par symétrie cela signifie donc aussi $B - A = B$

10. ⇐ est évident

⇒ Par l'absurde on suppose que $A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$ ou $A \neq B$.

UTC 501

Exercice 1.1 (2/2)

1^e cas : $A = B \neq \emptyset$ Alors $A \Delta B = A \Delta A = \emptyset$ et $A \cap B = A \neq \emptyset$ contradiction

2^e cas $A \neq B$ et l'un est inclus dans l'autre (p.ex. $A \subset B$ quitte à permuter). Alors $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = B - A$ et $A \cap B = A$ ce qui donne $B - A = A$. Mais $B - A$ est non vide et $(B-A) \cap A = \emptyset$ par définition ce qui amène une contradiction

3^e cas $A \neq B$ et aucun des deux n'est inclus dans l'autre, en particulier ni A ni B n'est vide. Alors $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \neq \emptyset$, et par définition $(A \Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ ce qui contredit encore l'hypothèse

Au final, on a bien une contradiction dans tous les cas

Exercice 1.2
Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique (ou parfois fonction indicatrice) de A l'application $1_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$1_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On considère deux parties A et B de E. Montrer que

1. $\min(1_A, 1_B) = 1_{A\cap B}$
2. $\max(1_A, 1_B) = 1_{A\cup B}$
3. $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$
4. $1_A 1_B = 1_{A\cap B}$
5. $1_A + 1_B - 1_A 1_B = 1_{A\cup B}$
6. $1_A + 1_B - 2 \times 1_A 1_B = 1_{A\Delta B}$

UTC 501

Exercice 1.2

1. $1_{A\cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A\cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B \Leftrightarrow 1_A(x) = 1_B(x) = 1 \Leftrightarrow \min(1_A, 1_B)(x) = 1$

2 $1_{A\cup B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A\cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow 1_A(x) = 1$ ou $1_B(x) = 1 \Leftrightarrow \max(1_A, 1_B)(x) = 1$

3. $1_{\overline{A}}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow 1_A(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1_A(x) = 1$

4. $1_{A\cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow$ (comme Q1) $1_A(x) = 1_B(x) = 1 \Leftrightarrow 1_A(x)\, 1_B(x) = 1$

5. $1_{A\cup B}(x) = 1 \Leftrightarrow$ (Q2) $1_A(x) = 1$ ou $1_B(x) = 1 \Rightarrow 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A 1_B(x) = 1$

réciproquement $1_{A\cup B}(x) = 0 \Rightarrow x \notin A\cup B \Leftrightarrow 1_A(x) = 1_B(x) = 0 \Rightarrow 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A 1_B(x) = 0$

6. $1_{A\Delta B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A\Delta B \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$ ou $(x \notin A$ et $x \in B)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1_A(x) = 1 \\ 1_B(x) = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 1_A(x) = 0 \\ 1_B(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1_A(x) + 1_B(x) - 2\times 1_A 1_B(x) = 1$$

Réciproquement $1_{A\Delta B}(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A\Delta B \Leftrightarrow x \notin A\cup B$ ou $x \in A\cap B$

$\Leftrightarrow 1_{A\cup B}(x) = 0$ ou $1_{A\cap B}(x) = 1$

$\Leftrightarrow (1_A(x) = 1_B(x) = 0)$ ou $(1_A(x) = 1_B(x) = 1)$

$\Rightarrow 1_A(x) + 1_B(x) - 2\times 1_A 1_B(x) = 0$

Exercice 1.3

On se propose de démontrer par récurrence que le nombre de parties d'un ensemble non vide $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ est égal à 2^n. Autrement dit, $\#\mathcal{P}(E) = 2^n$.

1. Illustrer le résultat pour $n = 1, 2, 3$.

On va montrer l'hérédité à partir de $n_0 = 1$. On suppose donc $n \geq 2$ et on suppose vraie la propriété au rang $n - 1$. On spécialise un élément de E, par exemple x_n.

2. Montrer que parmi les parties de E, il y en autant qui contiennent x_n, que de celles qui ne contiennent pas x_n. Soit N ce nombre. On pourra montrer que chaque partie ne contenant pas x_n s'apparie avec une partie contenant x_n (un petit dessin avec $n = 3$ est conseillé)
3. En utilisant l'hypothèse de récurrence, donner la valeur de N.
4. En déduire la propriété au rang n.

UTC 501

Exercice 1.3

1. Si $E = \{a\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$

Si $E = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Si $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

2. Soit $\mathcal{E}_0$ (resp. $\mathcal{E}_1$) l'ensemble des parties de E qui ne contiennent pas (resp. qui contiennent) x_n. Alors l'application

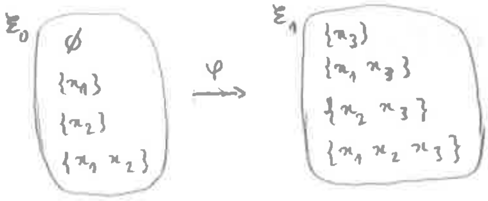
$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E}_0 &\longrightarrow \mathcal{E}_1 \\ A &\longmapsto A \cup \{x_n\} \end{aligned}$$

est bijective de bijection réciproque

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathcal{E}_1 &\longrightarrow \mathcal{E}_0 \\ B &\longmapsto B - \{x_n\} \end{aligned}$$

Ainsi $\# \mathcal{E}_0 = \# \mathcal{E}_1 \; (= N)$

Illustration avec $n = 3$



3. Par hypothèse de récurrence $\# \mathcal{E}_0 = \# \mathcal{P}(E - \{x_n\}) = 2^{n-1}$

4. $\mathcal{P}(E) = \mathcal{E}_0 \sqcup \mathcal{E}_1$ donc $\# \mathcal{P}(E) = \# \mathcal{E}_0 + \# \mathcal{E}_1 = 2 \, \# \mathcal{E}_0 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

ce qui démontre la propriété au rang n et établit l'hérédité pour $n \geq 1$.

N.B La propriété est aussi vraie pour $n = 0$. En effet $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et donc $\# \mathcal{P}(\emptyset) = 1 = 2^0$

Exercice 1.4

1. Démontrer que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.
2. Démontrer que, pour n un entier, n^2 est pair si et seulement si n est pair
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. Soit x un réel $\neq 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
5. Démontrer que si n est un carré entier non nul, $2n$ n'en est pas un non plus.
6. Démontrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
7. En raisonnant par disjonction de cas, suivant le reste de n dans la division par 3, montrer que 3 divise $n(n+5)(n-5)$

UTC 501

Exercice 1.4

1. Par l'absurde on suppose $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$ irréductible $\in \mathbb{Q}$, p et q entiers. Alors $p^3 = 2q^3$. Ceci $\Rightarrow$ p est pair disons $p = 2p_1$. En remplaçant il vient $(2p_1)^3 = 2q^3$ soit $q^3 = 4p_1^3$ et donc q est pair ; ce qui contredit le fait que p/q est irréductible

2. $\underline{n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}}$: c'est évident.

   $\underline{n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}}$: par contraposée. Supposons n impair, $= 2k+1$ Alors
   $$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k).1 + 1^2 = 2(2k^2+2k)+1 \quad \text{est impair.}$$

3. On procède par récurrence pour $n \geq 1$

   * Initialisation : $1^2 = \frac{1 \times (1+1)(2\times 1+1)}{6}$: c'est vrai !

   * Hérédité . supposé vrai au rang $n \geq 1$. Alors
   $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{par HR}$$
   $$= \frac{n+1}{6}\Big[n(2n+1) + 6(n+1) \Big] = \frac{n+1}{6}\Big[2n^2 + 7n + 6 \Big]$$
   on aimerait montrer que c'est égal à $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Il suffit de vérifier que $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. C'est un calcul immédiat.

4. $\underline{\text{Méthode 1}}$: par récurrence pour $n \geq 0$.

   * Initialisation : $1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}$ OK

   * Hérédité : supposé vrai pour $n \geq 0$:
   $$1 + x + \cdots + x^n + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \quad \text{par HR}$$
   $$= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$$
   et donc vrai au rang $(n+1)$

   $\underline{\text{Methode 2}}$: par simplification téléscopique
   $$(1 + x + \cdots + x^n)(1-x) = 1(1-x) + x(1-x) + \cdots + x^n(1-x)$$
   $$= (1-x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + (x^n - x^{n+1})$$
   $$= 1 + (-x + x) + (-x^2 + x^2) + \cdots + (-x^n + x^n) - x^{n+1}$$
   $$= 1 - x^{n+1}$$
   Il ne reste qu'à diviser par $1-x$ ($\neq 0$ par hypothèse)

5. Par l'absurde si n et $2n$ sont des carrés entiers $\neq 0$, disons p^2 et q^2 on a $q^2 = 2p^2$ donc $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ contradiction

6. Par contraposée . supposons n impair. Alors $n+1$ et $n-1$ sont deux entiers pairs consécutifs L'un des deux est divisible par 4 et l'autre par 2. Leur produit $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ est donc divisible par 8.

7. Si $n = 3k$ $\quad n(n+5)(n-5) = 3k(3k+5)(3k-5)$ est clairement multiple de 3.
   Si $n = 3k+1$ $\quad n(n+5)(n-5) = (3k+1)(3k+6)(3k-4) = 3\big[(3k+1)(k+2)(3k-4)\big]$ "
   Si $n = 3k+2$ $\quad$ " $= (3k+2)(3k+7)(3k-3) = 3\big[(3k+2)(3k+7)(k-1)\big]$ "

Exercice 1.5
Soit $n \leq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer la propriété suivante : il y a deux de ces réels consécutifs dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. En déduire une preuve par l'absurde de la propriété.

UTC 501

Exercice 1.5

1. La formule logique escomptée est

$$\exists\, i \in \{1, \dots, n\} : \quad x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n} \qquad (1)$$

2. La négation s'écrit $\forall\, i \in \{1, \dots, n\} : \quad x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n} \qquad (2)$

3. Supposons par l'absurde que (2) soit vraie . Alors (somme télescopique)

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \\ &> \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire à $0 \leq x_0 \leq x_n \leq 1$.

La démonstration est achevée

2 Relations binaires

Exercice 2.1
Pour chacune des relations proposées, dire si elle est réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, asymétrique, transitive, antitransitive, totale.

1. Sur $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y+1$
2. Sur $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$
3. Sur $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels positifs non nuls, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} \in \mathbb{N}$
4. Sur $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \leq 0$
5. Sur $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2(x)+\sin^2(y)=1$
6. Sur $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^* \ : \ x = y^k)$
7. Sur $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists c, k \in \mathbb{N}^* \ : \ x = c\, y^k)$
8. Dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mathcal{R}\ M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y_1-x_1)(y_2-x_2) \geq 0$
9. Dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mathcal{R}\ M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y_1-x_1)(y_2-x_2) < 0$

UTC 501

Exercice 2.1 (1/2)

1. Reflexive : oui car $\forall x \in \mathbb{Z}$ $x \leq x+1$

Symétrique : non car $0 \mathcal{R} 2$ et $2 \not\mathcal{R} 0$

Antisymétrique non car $0 \mathcal{R} 1$ et $1 \mathcal{R} 0$ et $0 \neq 1$

Asymétrique : non idem

Transitive : non car $1 \mathcal{R} 0$, $2 \mathcal{R} 1$ mais $2 \not\mathcal{R} 0$

Antitransitive : non car $0 \mathcal{R} 1$ $1 \mathcal{R} 2$ et $0 \mathcal{R} 2$

Totale : si $x \not\mathcal{R} y$ alors $x - y > 1$ donc $y - x < -1 \leq 1$ donc $y \mathcal{R} x$. Donc $\mathcal{R}$ est totale

2. Réflexive : oui car $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$

Symétrique oui car $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$

Transitive : oui car $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{z} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{z} \left(= \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} \right) \in \mathbb{Q}$

Totale : non car 1 et $\sqrt{2}$ ne sont pas en relation

3. Reflexive : oui car $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{N}$

Antisymétrique car $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{x}$ sont inverses l'un de l'autre donc s'ils sont tous les deux entiers c'est qu'ils sont égaux à 1 càd $x = y$

Transitive car $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} \in \mathbb{N}$ si $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{z} \in \mathbb{N}$

Totale : non car $2 \not\mathcal{R} 3$ et $3 \not\mathcal{R} 2$.

4. Reflexive / antireflexive : non car $0 \mathcal{R} 0$ et $1 \not\mathcal{R} 1$

Symétrique : oui car $xy = yx$!!

Transitive / antitransitive : non $1 \mathcal{R} 0$, $0 \mathcal{R} 2$ mais $1 \not\mathcal{R} 2$
$0 \mathcal{R} 1$ $1 \mathcal{R} 0$ et $0 \mathcal{R} 0$

Totale : non $1 \not\mathcal{R} 2$ et $2 \not\mathcal{R} 1$

5. Reflexive : oui car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Symétrique : oui car si $\cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$ alors $1 - \sin^2(x) + 1 - \cos^2(y) = 1$

donc $\cos^2(y) + \sin^2(x) = 1$

Transitive : oui si $\begin{cases} \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1 \\ \cos^2(y) + \sin^2(z) = 1 \end{cases}$ alors $\cos^2(x) + \underbrace{\sin^2(y) + \cos^2(y)}_{=1} + \sin^2(z) = 2$

$\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(z) = 1$

Totale : non car 0 et $\frac{\pi}{2}$ ne sont pas en relation

<u>Remarque</u> $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(y) \Leftrightarrow \cos^2(x) = \cos^2(y)$

sous cette forme il est plus évident que $\mathcal{R}$ est R, S, T.

6. Reflexive : oui en prenant $k = 1$

Antisymétrique : si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ on a $\exists k, l \in \mathbb{N}^*$ $x = y^k$ et $y = x^l$, ce qui implique $x = x^{kl}$. Alors :

- ou bien $x = 0$ et alors $y = 0$ donc $x = y$
- ou bien $x \neq 0$ et alors $kl = 1$, d'où $k = l = 1$ et $x = y$ $\rightarrow$ oui

Transitive : oui si $x = y^k$ et $y = z^l$ alors $x = z^{kl}$

Totale : non $2 \not\mathcal{R} 3$ et $3 \not\mathcal{R} 2$

7. Réflexive : oui en prenant $c = k = 1$

Symétrique : non $12 \mathcal{R} 2$ car $12 = 3 \times 2^2$ mais $2 \not\mathcal{R} 12$.

Antisymétrique : si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $\exists k, l, c, d \in \mathbb{N}^*$ $x = cy^k$ $y = dx^l$.

cela implique $x = c d^k x^{kl}$. Alors :

Exercice 2.1 (2/2)

- ou bien $x = 0$ et alors $y = 0$ donc $x = y$
- ou bien $x \neq 0$ et alors $cd^k = 1$ et $kl = 1$ ce qui implique $c = d = k = l = 1$ et là encore $x = y$

$\longrightarrow$ oui

Transitive oui si $x = c y^k$ et $y = d z^l$ alors $x = c d^k z^{kl}$

Totale : non $2 \not\mathcal{R} 3$ et $3 \not\mathcal{R} 2$

8\. Reflexive : oui $M_1 \mathcal{R} M_1$ car $(y_1 - x_1)^2 \geqslant 0$

Symétrique : oui évident par commutativité du produit

Transitive : non $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \not\mathcal{R} \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Antitransitive : non

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Totale non $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas en relation

9\. Antitransitive : car $\forall M \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $(y-x)^2 \geqslant 0$ donc $M \not\mathcal{R} M$

Symétrique : oui par commutativité du produit

Transitive / antitransitive : si $M_1 \mathcal{R} M_2$ et $M_2 \mathcal{R} M_3$ on a $\begin{cases} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) < 0 \\ (y_2 - x_2)(y_3 - x_3) < 0 \end{cases}$

d'où par produit $(y_1 - x_1)(y_3 - x_3) > 0$ (car $(y_2 - x_2)^2 > 0$) et donc $M_1 \not\mathcal{R} M_3$

$\mathcal{R}$ est donc antitransitive

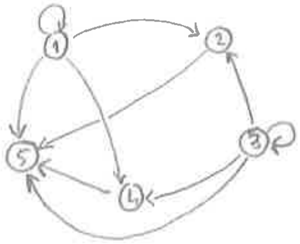
Totale : non car antiréflexive

Exercice 2.2
Les relations sont ici données par leur matrice d'adjacence. Pour chacune d'elles, représenter le graphe associé et donner les propriétés

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

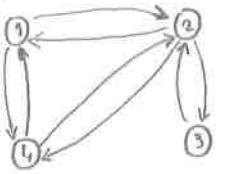
Exercice 2.2

1.



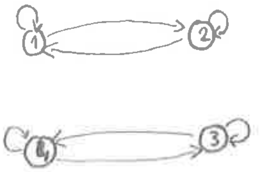
R est antisymétrique et transitive, non totale

2.



R est symétrique

3.



R est réflexive, symétrique, transitive.

C'est une relation d'équivalence dont les classes sont $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$

Exercice 2.3
On considère l'ensemble E des entiers $\{1, \ldots, 20\}$ muni de la relation d'ordre partiel de la divisibilité.

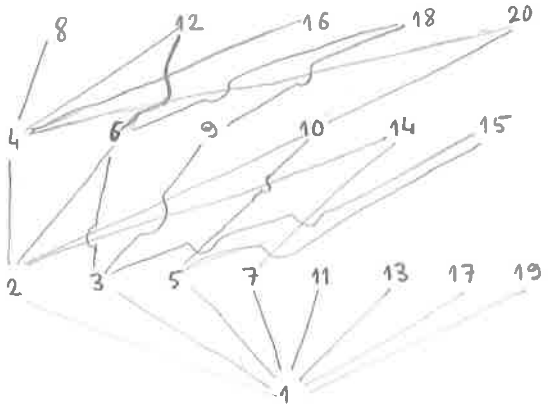
1. Représenter le diagramme de Hasse correspondant
2. pour chacune des notions :

   > majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum, élément maximal, élément minimal

   dire si E en possède. Si oui, en donner une, sinon expliquer pourquoi.

Exercice 2.3

1.



2. Majorants : tous les multiples de PPCM (1, ..., 20)

Borne supérieure : PPCM (1, ..., 20)

Maximum : n'existe pas (aucun entier parmi 1, ..., 20 n'est multiple de tous les autres)

Minorant / borne inférieure / Minimum / Elément minimal : 1

Elément maximal : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

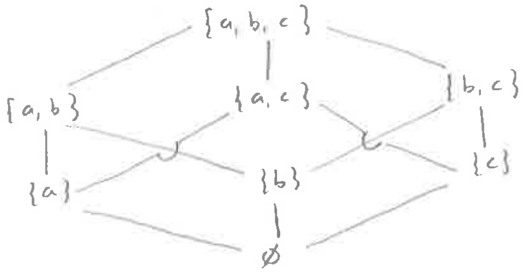
Exercice 2.4
Soit $E = \{a, b, c\}$.

1. Expliciter exhaustivement l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
2. $\mathcal{P}(E)$ étant muni de son ordre partiel pour l'inclusion, représenter son diagramme de Hasse.

Exercice 2.4

1. $\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}\ \{b\}\ \{c\}\ \{a,b\}\ \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

2.

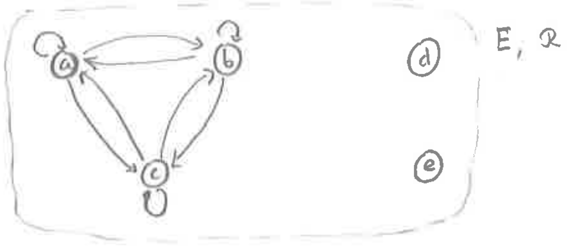


Exercice 2.5

1. Donner un exemple de relation symétrique et transitive mais non réflexive. On pourra représenter ladite relation par son graphe
2. En vous aidant de l'exemple, débusquer l'erreur de raisonnement dans ce qui suit *Toute relation symétrique et transitive est aussi réflexive. En effet,*
   - *comme* $\mathcal{R}$ *est symétrique,* $x\mathcal{R}y \;\Rightarrow y\mathcal{R}x$
   - *comme* $\mathcal{R}$ *est transitive,* $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$
   - *donc* $\mathcal{R}$ *est réflexive*

Exercice 2.5

1.



$\mathcal{R}$ est symétrique et transitive mais n'est pas réflexive puisque $d \not{\mathcal{R}} d$

2. La faille du raisonnement est qu'il fait l'hypothèse que pour tout $x \in E$, il existe un y tel que $x \mathcal{R} y$. Le contre exemple de la Q1 illustre la faille.

<u>Mais</u> il est vrai que si $\mathcal{R}$ est symétrique transitive <u>et</u> connexe (càd exactement la propriété escomptée : $\forall x \in E \;\; \exists y \in E \;\; x \mathcal{R} y$) alors $\mathcal{R}$ est réflexive

3 Arithmétique des entiers

Exercice 3.1

Cet exercice propose deux démonstrations proches mais différentes que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres entiers premiers est infini. La première est due à Euclide.

Méthode 1 (Euclide). On suppose par l'absurde que $\mathcal{P}$ est fini. On note $\{p_1, \dots, p_s\}$ la liste complète des nombres premiers. On considère l'entier $N = p_1 \times \cdots \times p_s + 1$. Le théorème fondamental de l'arithmétique dit en particulier que N contient au moins un facteur premier q.

1. Montrer que q n'est égal à aucun des p_i.
2. Conclure.

Méthode 2. On fixe $n \geq 2$, on choisit p un facteur premier de $(n! + 1)$.

3. Montrer que $p > n$
4. En déduire que l'on peut construire une suite strictement croissante de nombres premiers.
5. Conclure

Exercice 3.1

1. Si q était égal à l'un des p_i il diviserait à la fois $p_1 \times \cdots \times p_s = N-1$ et N donc diviserait 1 ce qui est impossible

2. Par l'absurde si $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, la question 1 montre qu'il existe q premier n'appartenant pas à $\mathcal{P}$, donc une contradiction

3. Si p était $\leq n$ il diviserait $1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$ et $n!+1$ donc diviserait 1 ce qui est impossible

4. Partant de $p_1 = 2$, la Q3 dit qu'il existe p_2 premier $> p_1$; puis en itérant il existe p_3 premier $> p_2$; on peut ainsi itérer à l'infini ce qui signifie qu'il existe une suite (infinie !) strictement croissante de nombres premiers.

5. $\mathcal{P}$ contient un ensemble infini donc est lui-même infini.

Exercice 3.2
On souhaite établir par 3 méthodes différentes que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n(n+2)(7n-5)$ est divisible par 6.

1. Raisonner dans l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ des entiers modulo 6
2. Montrer que a_n est divisible par 2, puis par 3, et conclure.
3. Écrire le squelette d'une preuve par récurrence.

Exercice 3.2

1. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{x}$ la classe de x modulo 6. Nous avons

$$\overline{a_n} = \bar{n}(\bar{n}+\bar{2})(\bar{7}\bar{n}-\bar{5}) = \bar{n}(\bar{n}+\bar{2})(\bar{n}+\bar{1}) = \overline{n(n+1)(n+2)}$$

Dès lors $a_n \equiv n(n+1)(n+2) \mod 6$ et il suffit de montrer que $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 6

Méthode 1 : $n, n+1, n+2$ sont 3 entiers consécutifs donc au moins l'un d'eux est divisible par 2 et l'un (exactement) est divisible par 3. Il suit que le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible à la fois par 2 et par 3, donc par $\mathrm{PPCM}(2,3) = 6$.

Méthode 2 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!\,3!}$ pour $n \geq 1$ qui est un entier (coefficient binomial). Pour $n=0$ c'est clair

2. L'idée est la même que dans la méthode 1 de la Q1 : on va montrer que parmi les 3 facteurs n, $n+2$, $7n-5$, l'un est multiple de 2 et l'un est multiple de 3. Le produit sera alors multiple de 2 et de 3, donc de 6. Mais on va voir que les calculs sont un peu plus lourds, ce qui atteste de l'intérêt de réduire modulo 6 au préalable, et donc de la supériorité de la méthode de la Q1.

- si n est pair $n(n+2)(7n-5)$ est clairement pair
- si n est impair $7n$ est impair, donc $7n-5$ est pair et là encore a_n est pair
- si $n = 3k$ a_n est clairement multiple de 3.
- si $n = 3k+1$ $n+2 = 3(k+1)$ et a_n est encore multiple de 3
- si $n = 3k+2$ $7n-5 = 7(3k+2)-5 = 21k+9 = 3(7k+3)$ et a_n est encore multiple de 3.

3. Initialisation : c'est vrai pour $n=0$ et $n=1$ (au cas où)

Hérédité supposé vrai pour n.

$$a_{n+1} = (n+1)((n+1)+1)(7(n+1)-5) = (n+1)((n+2)+1)((7n-5)+7)$$

$$= \underbrace{n(n+2)(7n-5)}_{a_n} + \underbrace{n(n+2)7 + n.1.(7n-5) + n.1.7 + 1(n+2)(7n-5) + 1(n+2)7 + 1.1(7n-5) + 1.1\times 7}_{b_n}$$

Par HR, a_n est multiple de 6, Il "suffit" donc pour conclure de prouver que b_n est multiple de 6. Mais l'expression de b_n est elle-même pas très simple (on peut montrer que c'est un trinôme du second degré en n), ce qui finalement ne fait que déporter le problème (en fait la méthode permettrait de conclure mais au prix de calculs très lourds)

Exercice 3.3
Soit $n \in \mathbb{Z}$, et $b_n = n^5 - n$

1. Montrer que b_n est divisible par 5
2. Vérifier que $b_n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$
3. En déduire que b_n est divisible par 2 et 3
4. Conclure finalement que b_n est multiple de 30
5. On suppose de plus n impair. Montrer qu'en fait b_n est multiple de 240.

UTC 501

Exercice 3.3

1. Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on a $x^5 = x$ pour tout x. C'est le petit théorème de Fermat. Cela signifie exactement que $\forall n \in \mathbb{Z}$ $n^5 \equiv n \mod 5$ càd $5 \mid n^5 - n$.

2. Factorisation élémentaire :

$$b_n = n(n^4-1) = n(n^2+1)(n^2-1) = n(n^2+1)(n+1)(n-1)$$

3. L'énoncé suggère d'utiliser la Q2, mais il est en fait plus simple de raisonner dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (comme Q1).

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ or $\bar{0}^5 - \bar{0} = \bar{0}$ et $\bar{1}^5 - \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

  càd $\forall n \in \mathbb{Z}$ $2 \mid n^5 - n$

* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ or $\bar{0}^5 - \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{1}^5 - \bar{1} = \bar{0}$, $\bar{2}^5 - \bar{2} =$ (p.ex.) $\overline{32} - \bar{2} = \overline{30} = \bar{0}$

  càd $\forall n \in \mathbb{Z}$ $3 \mid n^5 - n$

Si on veut utiliser la Q2, les arguments sont :

(1) * parmi $n-1, n, n+1$ qui sont entiers consécutifs, l'un au moins est pair et l'un (exactement) est multiple de 3. Donc leur produit et a fortiori b_n est multiple de 2 et de 3, (donc de 6)

4. b_n étant multiple de 2, 3 et 5 est multiple de $PPCM(2,3,5) = 2 \times 3 \times 5 = 30$

5. On va pousser jusqu'au bout l'argument (1) de la Q3 en s'appuyant sur la factorisation de la Q2.

* b_n est multiple de 3 : même raison que précédemment
* b_n est " 5 : "
* b_n est multiple de 16 : en effet puisque n est impair, n^2+1 est pair (NB : on peut d'ailleurs démontrer qu'il n'est jamais multiple de 4). Par ailleurs $n-1$ et $n+1$ sont deux entiers pairs consécutifs donc l'un des deux est multiple de 4 et l'autre de 2 (le même raisonnement est utilisé dans Ex 1.4 Q 4). Ainsi le produit $(n-1)(n+1)(n^2+1)$, et a fortiori b_n, est multiple de $4 \times 2 \times 2 = 16$

Pour conclure b_n est multiple de 3, 5 et 16 donc de $PPCM(3,5,16) = 240$

Exercice 3.4
On définit $\sigma(n)$ la somme des chiffres décimaux d'un entier $n > 0$.

1. Montrer que $\sigma(n) < n$ pour $n \geq 10$. Qu'en est-il pour $n < 10$?
2. Montrer que $\sigma(n)$ est congru à n modulo 9.
3. À partir de l'entier n, on forme la suite $n, \sigma(n), \sigma(\sigma(n)), \ldots$. Montrer que cette suite est stationnaire et préciser la valeur limite.

Exercice 3.4

1. Soit k le nombre de chiffres décimaux de n, de sorte que $10^{k-1} \leq n \leq 10^{k} - 1$ et $k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1 \leq \log_{10}(n) + 1$. Alors :

$\sigma(n) \leq 9k \leq 9\left(\log_{10}(n) + 1\right)$ et $\frac{\sigma(n)}{n} \leq 9\,\frac{\log_{10}(n) + 1}{n}$.

Une étude de la fonction $x \mapsto 9\,\frac{\log_{10}(x) + 1}{x}$ montre qu'elle est < 1 pour $x \geq 21$.

Par ailleurs, on vérifie aisément que pour $10 \leq n \leq 20$, $\sigma(n) < n$.

Pour $1 \leq n \leq 9$ on a $\sigma(n) = n$

2. Soit $\underline{n_{k-1} \cdots n_1 n_0}_{10} = n$ l'écriture en base 10 de n. Cela signifie que

$$n = 10^{k-1} n_{k-1} + \cdots + 10 n_1 + n_0 \qquad (1)$$

Or $10 \equiv 1 \mod 9$, donc $\forall i \in \mathbb{N}$ $10^{i} \equiv 1^{i} = 1 \mod 9$. En injectant dans (1), il vient

$$n \equiv \underbrace{n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0}_{\sigma(n)} \mod 9$$

ce que nous voulions démontrer.

3. La suite est, plus formellement, définie par $\begin{cases} u_0 = n \\ u_{k+1} = \sigma(u_k) \end{cases}$ pour $k \in \mathbb{N}$

D'après la Q1 (u_k) est strictement décroissante tant que $u_k \geq 10$; il existe un rang k_0 tel que $u_{k_0+1} < 10 \leq u_{k_0}$ et alors la suite stationne pour $k \geq k_0 + 1$.

D'après la Q2 $u_{k+1} \equiv u_k \mod 9$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_k \equiv n \mod 9$.

On en déduit que (u_k) stationne à la valeur $n \mod 9$ avec convention (inhabituelle) d'écrire $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{1, 2, \ldots, 9\}$ càd $9 \mod 9 = 9$ (et non 0 comme on a l'habitude)

Exercice 3.5

1. Calculer
   (a) $3412 \bmod 5$
   (b) $34122365765 \bmod 9$
   (c) $(-4124) \bmod 3$
   (d) $5^{18} \bmod 11$
2. Quel sont les deux chiffres de droite de 2019^{2019} ?
3. Calculer $4^n \bmod 9$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $6 \cdot 4^n = 6 \bmod 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $7^{546} \bmod 17$. On pourra utiliser $7^m = 1 \bmod 17$ pour un entier m que l'on précisera.

UTC501

Exercice 3.5

1\. (a) $3412 = 3410 + 2 = 5 \times (2 \times 341) + 2 \equiv 2 \mod 5$

(b) $34122365765 \equiv 3+4+1+2+2+3+6+5+7+6+5 \mod 9$

$= 44$

$\equiv 8 \mod 9$

(c) $4124 = 4122 + 2 = 3 \times 1374 + 2 \equiv 2 \mod 3$. Il vient $(-4124) \equiv -2 \equiv 1 \mod 3$

(d) $5^2 \equiv 25 \equiv 3 \mod 11$, $5^4 \equiv 3^2 \equiv 9 \mod 11$, $5^8 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 4 \mod 11$, $5^{16} \equiv 4^2 = 16 \equiv 5 \mod 11$

et finalement $5^{18} = 5^{16} \times 5^2 \equiv 5 \times 3 = 15 \equiv 4 \mod 11$.

↳ Une autre possibilité, plus subtile, permet de "jongler" avec les théorèmes arithmétiques, donc est un moyen de s'en imprégner :

* $5^{10} \equiv 1 \mod 11$ petit théorème de Fermat

* donc $(5^5)^2 \equiv 1$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, càd $(5^5+1)(5^5-1) = 0$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ n'a pas de diviseur de 0 on a $5^5 = \pm 1$. Un calcul montre $5^5 = 1$,

* $5^{18} = 5^{15} \times 5^3 = (5^5)^3 . 5^3 \equiv 5^3 = 125 \equiv 4 \mod 11$

↳ Une autre possibilité, utilisant les inverses modulaires : $5^{18} = 5^{20} \times 5^{-2} \equiv (5^{10})^2 5^{-2} \equiv (1)^2 5^{-2} \equiv 5^{-2} \equiv (5^2)^{-1} \equiv 3^{-1} \mod 11$. Une recherche exhaustive est ici possible car 11 est "petit" $3 \times 4 \equiv 1 \mod 11$ montre $3^{-1} \equiv 4 \mod 11$ ce qui redonne le résultat

2\. La réponse (avant calcul) est $2019^{2019} \mod 100$. Or dans $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$:

$2019 \equiv 19$ et $x^{\phi(100)} = 1 \mod 100$ pour tout x tel que $PGCD(x, 100) = 1$.

Comme $100 = 2^2 5^2$, $\phi(100) = 100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 40$. De plus $PGCD(19, 100) = 1$ (évident car 19 est premier et ne divise pas 100), donc $19^{40} \equiv 1 \mod 100$. Maintenant

$$2019^{2019} \equiv 19^{2019} = 19^{40 \times 50 + 19} = (19^{40})^{50} \times 19^{19} \equiv 1^{50} \times 19^{19} = 19^{19} \mod 100$$

$19^2 = 361 \equiv 61 \mod 100$. $19^3 \equiv 19 \times 61 \equiv 1159 \equiv 59 \mod 100$ ...

$19^9 \equiv 79 \mod 100$ $19^{10} \equiv 79 \times 19 = 1501 \equiv 1 \mod 100$.

On peut donc écourter le calcul : $19^{19} = 19^{10} \times 19^9 \equiv 1 \times 79 = 79 \mod 100$.

Au final $2019^{2019} \mod 100 = 79$

3\. On se place dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ dans toute la question :

$4^0 = 1$, $4^1 = 4$, $4^2 = 16 = 7$ $4^3 = 28 = 1$. Dès lors, on "boucle" avec période 3 :

$4^0 = 4^3 = 4^6 = \dots = 1$

$4^1 = 4^4 = 4^7 = \dots = 4$ ainsi $4^n \in \{1, 4, 7\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$4^2 = 4^5 = 4^8 = \dots = 7$

Comme $6 \times 1 = 6$, $6 \times 4 = 24 = 6$ et $6 \times 7 = 42 = 6$ (on est toujours modulo 9), il suit que $6 \times 4^n = 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4\. Le petit thm de Fermat donne $7^{16} \equiv 1 \mod 17$ puisque 17 est premier et $PGCD(7, 17) = 1$.

Comme $546 = 34 \times 16 + 2$, on a $7^{546} = (7^{16})^{34} \times 7^2 \equiv 1^{34} \times 7^2 \equiv 49 \equiv 15 \mod 17$

Exercice 3.6
Étant donnés des entiers a, b, c, calculer x, y tels que $ax + by = c$ si c'est possible, ou justifier que ça ne l'est pas

1. $a = 121, b = 77, c = 22$
2. $a = 121, b = 77, c = 7$
3. $a = 121, b = 123, c = 22$

UTC 501

Exercice 3.6

On va utiliser ici un résultat important, conséquence du théorème de Bézout :

(1) L'équation $ax + by = c$ admet des solutions en x, y $\Leftrightarrow$ c est un multiple de $\text{PGCD}(a,b)$.

(2) Pour résoudre en pratique

- exécuter l'algorithme d'Euclide étendu à (a,b) pour trouver d, u, v
  $$d = \text{PGCD}(a,b) = au + bv$$
- si c est multiple de d, retourner $(x,y) = \frac{c}{d}(u,v)$
- sinon retourner "pas de solution"

EEA

121 77	1 0	0 1
44 = 121 − 1 × 77	1 − 1 × 0 = 1	0 − 1 × 1 = −1
33 = 77 − 1 × 44	0 − 1 × 1 = −1	1 − 1 × (−1) = 2
11 = 44 − 1 × 33	1 − 1 × (−1) = 2	−1 − 1 × 2 = −3
0 = 33 − 3 × 11	−	−

on déduit $\text{PGCD}(121, 77) = 11$ et $11 = 2 \times 121 - 3 \times 77$

1 - Il y a une solution car $22 = 2 \times 11$ et donnée par $\underbrace{4}_{x} \times 121 - \underbrace{6}_{y} \times 77 = 22$

2 - Pas de solution car 11 ne divise pas 7

3 - EEA

123	1	0
121	0	1
2 = 123 − 1 × 121	1 − 1 × 0 = 1	0 − 1 × 1 = −1
1 = 121 − 2 × 60	0 − 1 × 60 = −60	1 − (−1) × 60 = 61

on déduit $\text{PGCD}(123, 121) = 1$ et $123 \times (-60) + 121 \times 61 = 1$

L'équation a des solutions, l'une d'entre elle donnée par

$$121 \times \underbrace{(61 \times 22)}_{\substack{x \\ (= 1342)}} + 123 \times \underbrace{((-60) \times 22)}_{\substack{y \\ (= -1320)}} = 22$$

Exercice 3.7
Soit g la fonction booléenne de 3 variables définie par

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$$

1. Écrire la table de valeurs de la fonction g.

Dans la suite de l'exercice on montre comment retrouver la forme algébrique à partir de la table de valeurs, sur l'exemple de f à 4 variables :

```
[x1,x2,x3,x4]      | f(x)
-------------------|-----
[ 0, 0, 0, 0 ]     |  0
[ 1, 0, 0, 0 ]     |  0
[ 0, 1, 0, 0 ]     |  0
[ 1, 1, 0, 0 ]     |  1
[ 0, 0, 1, 0 ]     |  0
[ 1, 0, 1, 0 ]     |  1
[ 0, 1, 1, 0 ]     |  0
[ 1, 1, 1, 0 ]     |  1
[ 0, 0, 0, 1 ]     |  0
[ 1, 0, 0, 1 ]     |  1
[ 0, 1, 0, 1 ]     |  1
[ 1, 1, 0, 1 ]     |  1
[ 0, 0, 1, 1 ]     |  0
[ 1, 0, 1, 1 ]     |  1
[ 0, 1, 1, 1 ]     |  0
[ 1, 1, 1, 1 ]     |  1
```

2. Soit (a_1, a_2, a_3, a_4) un 4-uplet fixé de bits. Montrer que la fonction

$$L_{a_1,a_2,a_3,a_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + a_1 + 1)(x_2 + a_2 + 1)(x_3 + a_3 + 1)(x_4 + a_4 + 1)$$

   vaut 1 si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et 0 sinon.

3. En déduire que la fonction

$$\sum_{t_1,t_2,t_3,t_4} f(t_1, t_2, t_3, t_4) L_{t_1,t_2,t_3,t_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

   coïncide avec f en tous les points de $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{F}_2^4$.

4. En explicitant la formule de la Q3 (16 termes dans la somme), montrer que la forme algébrique de f s'écrit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4.$$

1. Il suffit de substituer les variables x_1, x_2, x_3 dans l'expression algébrique de g par tous les triplets de bits. Un simple calcul donne

$$\begin{array}{lclcl}
g(0,0,0) & = & 0+0+0\cdot 0+0\cdot 0\cdot 0 & = & 0 \\
g(1,0,0) & = & 1+0+0\cdot 0+1\cdot 0\cdot 0 & = & 1 \\
g(0,1,0) & = & 0+1+1\cdot 0+0\cdot 1\cdot 0 & = & 1 \\
g(1,1,0) & = & 1+1+1\cdot 0+1\cdot 1\cdot 0 & = & 0 \\
g(0,0,1) & = & 0+0+0\cdot 1+0\cdot 0\cdot 1 & = & 0 \\
g(1,0,1) & = & 1+0+0\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1 & = & 1 \\
g(0,1,1) & = & 0+1+1\cdot 1+0\cdot 1\cdot 1 & = & 0 \\
g(1,1,1) & = & 1+1+1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1 & = & 0
\end{array}$$

2. Le produit $(x_1+a_1+1)(x_2+a_2+1)(x_3+a_3+1)(x_4+a_4+1)$ est composé de facteurs valant 0 ou 1. Ainsi, il est nul sauf lorsque TOUS les facteurs sont égaux à 1. Cela se produit si et seulement si $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, x_4 = a_4$.

3. Fixons (a_1, a_2, a_3, a_4). En substituant a_i à x_i dans la somme, la valeur obtenue est

$$\sum_{t_1,t_2,t_3,t_4} f(t_1,t_2,t_3,t_4) L_{t_1,t_2,t_3,t_4}(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

D'après la question précédente, $L_{t_1,t_2,t_3,t_4}(a_1,a_2,a_3,a_4)$ vaut 1 si et seulement si $t_1 = a_1, t_2 = a_2, t_3 = a_3, t_4 = a_4$. La somme se réduit à un seul terme non nul, qui vaut $f(a_1,a_2,a_3,a_4)$, ce que nous voulions démontrer.

4. D'après la question 3, nous avons

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4} f(t_1,t_2,t_3,t_4) L_{t_1,t_2,t_3,t_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

On développe la somme en ne conservant que les termes lesquels $f(t_1,t_2,t_3,t_4) = 1$. Il vient

$$\begin{array}{lcl}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & L_{1,1,0,0} + L_{1,0,1,0} + L_{1,1,1,0} + L_{1,0,0,1} \\
 & & + L_{0,1,0,1} + L_{1,1,0,1} + L_{1,0,1,1} + L_{1,1,1,1} \\
 & = & x_1x_2(1+x_3)(1+x_4) + x_1(1+x_2)x_3(1+x_4) + x_1x_2x_3(1+x_4) + x_1(1+x_2)(1+x_3)x_4 \\
 & & +(1+x_1)x_2(1+x_3)x_4 + x_1x_2(1+x_3)x_4 + x_1(1+x_2)x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4
\end{array}$$

Un calcul élémentaire (mais nécessitant soin et concentration) fournit le résultat demandé.

Exercice 3.8

Le chiffrement RSA.

On considère les nombres premiers $p = 47$, $q = 59$, leur produit $n = pq = 2773$ et $e = 17$.

1. Calculer $\phi(n)$
2. Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu pour vérifier que $\gcd(e, \phi(n)) = 1$, et trouver deux entiers x et y tels que $ex + \phi(n)y = 1$
3. En déduire l'entier $d \in \{0, \ldots, \phi(n) - 1\}$ tel que $ed = 1 \bmod \phi(n)$.

On considère la fonction $f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, x \mapsto x^e \bmod n$

4. Montrer que la fonction f est bijective. On montrera que sa réciproque est $g : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, y \mapsto y^d \bmod n$
5. calculer $f(5)$
6. Appliquer g au résultat de la question précédente et vérifier que l'on retombe bien sur ce qui est attendu (quoi ?)

UTC 501

Exercice 3.8

1. $\phi(n) = n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q}) = (p-1)(q-1) = 46 \times 58 = 2668$

2.

2668	1	0
17	0	1
$16 = 2668 - 156 \times 17$	$1 - 156 \times 0 = 1$	$0 - 156 \times 1 = -156$
$1 = 17 - 1 \times 16$	$0 - 1 \times 1 = -1$	$1 - 1 \times (-156) = 157$

donc $PGCD(2668, 17) = 1$ et $2668 \times (-1) + 17 \times 157 = 1$ (1)

3. En prenant la relation de Bézout (1) modulo 2668 il vient $17 \times 157 \equiv 1 \mod 2668$, de sorte que $17^{-1} = 157 \mod 2668$

4. Soit $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On a

$g \circ f(x) = (x^e)^d \mod n = x^{ed} \mod n$

Comme $ed \equiv 1 \mod \phi(n)$ $\exists \lambda \in \mathbb{Z}$ $ed = 1 + \lambda \phi(n)$ et donc

$x^{ed} = x \times (x^{\phi(n)})^\lambda = x \cdot 1^\lambda \mod n$ puisque $x^{\phi(n)} = 1 \mod n$ en vertu du théorème d'Euler et de ce que $PGCD(x, n) = 1$ ($\Leftrightarrow x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$).

Au final $g \circ f(x) = x$. En échangeant les rôles de e et d, on montre de manière similaire que $f \circ g(x) = x$. Ainsi, f est bien bijective et $f^{-1} = g$.

5. $f(5) = 5^{17} \mod 2773 = 508$

6. $g(508) = 508^{157} \mod 2773 = 5$. On vérifie sur un exemple de calcul que $g \circ f(5) = 5$

4 Calcul matriciel. Systèmes linéaires

Exercice 4.1
On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Effectuer, quand c'est possible, les produits matriciels 2 à 2.

Exercice 4.1 (1/2)

Le produit matriciel $M_1 M_2$ est possible si et seulement si

$$\text{nb colonnes}(M_1) = \text{nb lignes}(M_2)$$

Ainsi, les produits possibles sont

- AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2\times1-3\times2+3\times1 & 1\times1+0\times2+2\times3 \end{bmatrix}} \rightarrow = \begin{bmatrix} -1 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

- AE

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1\times(-1)+2\times(-1)+3\times0 & 1\times1+2\times(-4)+3\times2 & 1\times3+2\times0+3\times5 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

- BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}} \end{array}$$

- CB

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2\times1+1\times(-2) \\ (-3)\times1+0\times(-2) \\ 1\times1+2\times(-2) \end{bmatrix}} \rightarrow = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- CD

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2\times(-2)+1\times5 & 2\times5+1\times0 \\ (-3)\times(-2)+0\times5 & (-3)\times5+0\times0 \\ 1\times(-2)+2\times5 & 1\times5+2\times0 \end{bmatrix}} \rightarrow = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -15 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

- DB

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} (-2)\times1+5\times(-2) \\ 5\times1+0\times(-2) \end{bmatrix}} \rightarrow = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

- D^2

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} (-2)\times(-2)+5\times5 & (-2)\times5+5\times0 \\ (-2)\times5+0\times5 & 5\times5+0\times0 \end{bmatrix}} \rightarrow = \begin{bmatrix} 29 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice 4.1 (2/2)

* EC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} (-1)\times 2 + 1\times(-3) + 3\times 1 & (-1)\times 1 + 1\times 0 + 3\times 2 \\ (-1)\times 2 + (-4)\times(-3) + 0\times 1 & (-1)\times 1 + (-4)\times 0 + 0\times 2 \\ 0\times 2 + 2\times(-3) + 5\times 1 & 0\times 1 + 2\times 0 + 5\times 2 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}} \end{array}$$

* E^2

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} (-1)\times(-1) + 1\times(-1) + 3\times 0 & (-1)\times 1 + 1\times(-4) + 3\times 2 & (-1)\times 3 + 1\times 0 + 3\times 5 \\ (-1)\times(-1) + (-4)\times(-1) + 0\times 0 & (-1)\times 1 + (-4)\times(-4) + 0\times 2 & (-1)\times 3 + (-4)\times 0 + 0\times 5 \\ 0\times(-1) + 2\times(-1) + 5\times 0 & 0\times 1 + 2\times(-4) + 5\times 2 & 0\times 3 + 2\times 0 + 5\times 5 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 12 \\ 5 & 15 & -3 \\ -2 & 2 & 25 \end{bmatrix}} \end{array}$$

Exercice 4.2

On considère deux matrices diagonales

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

1. Calculer AB. Que remarque-t-on ?
2. Sans calcul matriciel supplémentaire, montrer que $AB = BA$
3. Exprimer A^2, A^3 et plus généralement A^n en fonction de n.

On suppose $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \neq 0$.

4. Justifier que la matrice A est inversible.
5. Calculer A^{-1}

Exercice 4.2

1.

$$\begin{array}{cc} & \left.\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}\right\} B \\ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{bmatrix}}_{AB} \end{array}$$

AB est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les produits position à position des éléments diagonaux de A et de B.

2. Il suffit d'échanger les rôles de A et B et d'utiliser la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$:

$$a_{ii}\, b_{ii} = b_{ii}\, a_{ii}$$

3. En prenant $B = A$ on a $A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix}$ et plus généralement, une récurrence facile donne $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^n & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^n \end{bmatrix}$

4. $\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \neq 0$ par hypothèse, donc A est inversible

5.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{bmatrix}$$

Exercice 4.3
Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Laquelle des trois matrices suivantes est-elle l'inverse de P ?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer A^{-1} en fonction des matrices P et D.
5. En déduire que la formule $A^n = PD^nP^{-1}$ est valable aussi pour n entier négatif.
6. Donner l'expression explicite de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4.3

1. Il suffit d'effectuer les 3 produits PB, PC, PD. Si l'un des 3 vaut I_3, ce sera le seul (car l'inverse est unique quand il existe) et on aura trouvé P^{-1}.

* PB

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&0\\-3&4&1\\-3&3&1\end{bmatrix}}_{P}\ \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\2&0&-2\end{bmatrix}}_{B} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\-1&\times&\\&&\end{bmatrix}}_{\neq I_3}$$

* PC

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&0\\-3&4&1\\-3&3&1\end{bmatrix}}_{P}\ \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\3&3&-2\end{bmatrix}}_{C} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{=I_3}$$

donc l'inverse de P est C.

2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\3&3&-2\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\ \overbrace{\begin{bmatrix}1&4&-4\\-6&-13&12\\-6&-12&11\end{bmatrix}}^{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-1&1\\-3&-3&2\end{bmatrix}}_{P^{-1}A}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-1&1\\-3&-3&2\end{bmatrix}}_{P^{-1}A}\ \overbrace{\begin{bmatrix}1&-2&0\\-3&4&1\\-3&3&1\end{bmatrix}}^{P} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}}_{P^{-1}AP}$$

3. Par convention $A^0 = I_3$ et $D^0 = I_3$. Donc on a bien $A^0 = PD^0P^{-1}$ $(n=0)$

Pour $n=1$: c'est la définition de D : $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = A$

Pour $n=2$ on écrit

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_3}DP = PDDP = PD^2P$$

Plus généralement

$$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \quad (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \quad (n \text{ facteurs égaux à } PDP^{-1})$$

$$= PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_3}D\underbrace{(P^{-1}}_{I_3}\ldots\underbrace{P)}_{I_3}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_3}DP^{-1} \quad \text{simplification télescopique}$$

$$= P\underbrace{D\times\cdots\times D}_{n \text{ facteurs}}P^{-1} = PD^nP^{-1} \quad \text{ce que nous voulions démontrer}$$

4. $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

5. En changeant A en A^{-1} et D en D^{-1} on déduit de Q3 que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(A^{-1})^n = P(D^{-1})^nP^{-1}$ càd $A^{-n} \doteq PD^{-n}P$

ce qui revient à dire $\forall n \in \mathbb{Z}_-$ $A^n = PD^nP^{-1}$ ce que nous voulions démontrer.

6. D'après les propriétés des matrices diagonales on a $D^n = \begin{bmatrix}1^n&&(0)\\&(-1)^n&\\(0)&&(-1)^n\end{bmatrix}$, et donc

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&0\\-3&4&1\\-3&3&1\end{bmatrix}}_{P}\ \left.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix}\right\}D^n = \underbrace{\begin{bmatrix}1&(-2)(-1)^n&0\\-3&4(-1)^n&(-1)^n\\-3&3(-1)^n&(-1)^n\end{bmatrix}}_{PD^n}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&(-2)(-1)^n&0\\-3&4(-1)^n&(-1)^n\\-3&3(-1)^n&(-1)^n\end{bmatrix}}_{PD^n}\ \left.\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\3&3&-2\end{bmatrix}\right\}P^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&2-2(-1)^n&-2+2(-1)^n\\-3+3(-1)^n&-6+7(-1)^n&6-6(-1)^n\\-3+3(-1)^n&-6+6(-1)^n&6-5(-1)^n\end{bmatrix}}_{PD^nP^{-1}}$$

Exercice 4.4
Pour chacune des matrices suivantes : calculer le rang, dire si elle est inversible et si oui, calculer la matrice inverse.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4.4 (1/2)

* A : pour une matrice 2×2, la méthode de la comatrice est plus rapide que le pivot de Gauss.

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-2)\times3 - 1\times5 = -11$ donc A est inversible et $rg(A) = 2$.

$Com(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ donc $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t Com(A) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

* B : en taille 3×3, le pivot de Gauss ou la méthode déterminant / comatrice se valent en efficacité. On privilégie la 2^{me} quand il y a quelques "0" dispersés. Ce sera plutôt le cas de la matrice C. Ici on va faire un pivot de Gauss, et vu les questions posées on va échelonner la matrice $[B \mid I_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow -4L_3}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{4}L_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

On déduit que $rg(B) = 3$, B est inversible, $B^{-1} =$

* C : comme expliqué plus haut, on utilise la méthode déterminant / comatrice

$\det(C) = \det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ développement 1^{re} colonne

$$= +(-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times[2\times0 - 1\times(-5)] - 0[\cdots] - 2\times[0\times1 - 2\times2] = -5 + 8 = 3$$

$$Com(C) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -10 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

C est inversible, donc $rg(C) = 3$ et $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -10 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

* D : en taille ≥ 4, le pivot de Gauss est plus rapide en général. Comme pour la matrice B, on va échelonner $[D \mid I_4]$.

$$\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exercice 4.4 (2/2)

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & -3/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow \frac{2}{3} L_4 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} & & '' & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4} L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_4 \end{array} \left[\; I_4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 0 & -1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1 & 1 & -2/3 & -1/3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{matrix}}_{D^{-1}} \right]$$

D est inversible, $rg(D) = 4$.

* E et F n'étant pas carrées, la question de l'inversibilité n'a pas de sens. Pour le calcul du rang, on peut procéder par pivot de Gauss ou par mineurs croissants (définition du rang).

* E : $\rightarrow$ $E \neq 0$ donc $rg(E) \geqslant 1$

$\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3(-3) \neq 0$. E contient un mineur 2×2 inversible donc $rg(E) \geqslant 2$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=2} - (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=-6} + 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{2} - (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{-4} + 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{-11} - 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{11} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{-6} - 3 \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{-4} + 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = 0$$

il n'y a pas de mineur 3×3 inversible donc $rg(E) < 3$. Au final $rg(E) = 2$

* F : on utilise la définition par la dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonnes. En notant $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ ces colonnes, on a $v_2 = 2v_1$ et $v_4 = -2v_3$. Ainsi $Vect(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = Vect(v_1\ v_3)$ dont la dimension est forcément $\leqslant 2$, ce qui prouve déjà $rg(F) \leqslant 2$. Comme $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ F contient un mineur 2×2 inversible et au final $rg(F) = 2$

Pivot de Gauss sur la matrice F

```
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 1  2 -1  2]
[ 2  4  4 -8]
[ 3  6  1 -2]
Pivot in column 1 exists, at row 3, equal to 3
Normalizing pivot to 1 at row 3
Row[3] <-- (1/3)*Row[3]
[   1    2   -1    2]
[   2    4    4   -8]
[   1    2  1/3 -2/3]
Swapping rows 1 and 3
[   1    2  1/3 -2/3]
[   2    4    4   -8]
[   1    2   -1    2]
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-1)*Row[1]
[    1     2   1/3  -2/3]
[    0     0  10/3 -20/3]
[    0     0  -4/3   8/3]
There is no pivot in column 2: all entries [i,2] are zero for i=2,...,3
Pivot in column 3 exists, at row 2, equal to 10/3
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (3/10)*Row[2]
[   1    2  1/3 -2/3]
[   0    0    1   -2]
[   0    0 -4/3  8/3]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 3 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-1/3)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (4/3)*Row[2]
[ 1  2  0  0]
[ 0  0  1 -2]
[ 0  0  0  0]
```

Il y a deux pivots en colonnes 1 et 3 donc $\text{rg}(F) = 2$.

Pivot de Gauss sur la matrice G

```
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 1  2 -1  2]
[ 2  4  4  8]
[ 3  6  1 -2]
Pivot in column 1 exists, at row 3, equal to 3
Normalizing pivot to 1 at row 3
Row[3] <-- (1/3)*Row[3]
[   1    2   -1    2]
[   2    4    4    8]
[   1    2  1/3 -2/3]
Swapping rows 1 and 3
[   1    2  1/3 -2/3]
[   2    4    4    8]
[   1    2   -1    2]
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-1)*Row[1]
[   1    2  1/3 -2/3]
[   0    0 10/3 28/3]
[   0    0 -4/3  8/3]
There is no pivot in column 2: all entries [i,2] are zero for i=2,...,3
Pivot in column 3 exists, at row 2, equal to 10/3
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (3/10)*Row[2]
```

```
[   1    2  1/3 -2/3]
[   0    0    1 14/5]
[   0    0 -4/3  8/3]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 3 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-1/3)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (4/3)*Row[2]
[   1    2    0 -8/5]
[   0    0    1 14/5]
[   0    0    0 32/5]
Pivot in column 4 exists, at row 3, equal to 32/5
Normalizing pivot to 1 at row 3
Row[3] <-- (5/32)*Row[3]
[   1    2    0 -8/5]
[   0    0    1 14/5]
[   0    0    0    1]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 4 thanks to the pivot at row 3
Row[1] <-- Row[1] + (8/5)*Row[3]
Row[2] <-- Row[2] + (-14/5)*Row[3]
[1 2 0 0]
[0 0 1 0]
[0 0 0 1]
```

Il y a trois pivots en colonnes 1, 3 et 5 donc $\mathrm{rg}(G) = 3$.

Exercice 4.5

Résoudre les systèmes linéaires suivants

1. $\mathcal{S}_1$: 2 équations 2 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 6y & = & -3 \\ -2x & + & y & = & 12 \end{array}\right.$$

2. $\mathcal{S}_2$: 3 équations 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & 7z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & 8z & = & -12 \\ 6x & + & 3y & + & 9z & = & 3 \end{array}\right.$$

3. $\mathcal{S}_3$: 3 équations 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

4. $\mathcal{S}_4$: 3 équations 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

5. $\mathcal{S}_5$: 2 équations 4 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 3t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

6. $\mathcal{S}_6$: 4 équations 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = & 13 \\ x & + & 4y & + & z & = & 18 \end{array}\right.$$

7. $\mathcal{S}_7$: 3 équations 4 inconnues un paramètre ($a \in \mathbb{R}$)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 7 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 13 + a \end{array}\right.$$

UTC 501

Exercice 4.5

1. Par pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad Sol = \{(-5, 2)\}$$

Par formules de Cramer

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 6 = 15 \neq 0 \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}}{15} = \frac{(-3) \cdot 1 - 12 \cdot 6}{15} = -5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 12 \end{vmatrix}}{15} = \frac{3 \times 12 - (-2)(-3)}{15} = 2$$

2. Pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & -12 \\ 6 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & -3 & 22 & -16 \\ 0 & -21 & 51 & -9 \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$Sol = \{(3, -2, 1)\}$$

3. Pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10/7 \\ 0 & 1 & -1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$ dernière ligne $\Rightarrow$ système incompatible

$$Sol = \emptyset$$

4. Pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 1/5 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$ infinité de solutions

on prend x et y comme inconnues principales, z non principale :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}z \\ y = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}z \end{cases} \qquad Sol = \left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}z, \frac{1}{5} + \frac{4}{5}z, z \right) ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

5. Pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$ infinité de solutions, x et y inconnues principales, z et t non principales

$$\begin{cases} x = -2 + 4z - 4t \\ y = 3 - 6z + 7t \end{cases} \qquad Sol = \{(-2 + 4z - 4t, 3 - 6z + 7t, z, t) ; z, t \in \mathbb{R}\}$$

6. Pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 13 \\ 1 & 4 & 1 & 18 \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad Sol = \{(4, 3, 2)\}$$

7. Pivot de Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 + a \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right] \rightsquigarrow$$ Si $a \neq 0$ incompatibilité $Sol = \emptyset$

Si $a = 0$ compatibilité, x et t inconnues principales, y et z non principales

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z \\ t = 1 \end{cases} \qquad Sol = \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z, y, z, 1 \right) ; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

```
System S1
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 3  6 -3]
[-2  1 12]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 3
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1/3)*Row[1]
[ 1  2 -1]
[-2  1 12]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (2)*Row[1]
[ 1  2 -1]
[ 0  5 10]
Pivot in column 2 exists, at row 2, equal to 5
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (1/5)*Row[2]
[ 1  2 -1]
[ 0  1  2]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 2 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-2)*Row[2]
[ 1  0 -5]
[ 0  1  2]

System S2
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[  1   4  -7   2]
[  2   5   8 -12]
[  6   3   9   3]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1)*Row[1]
[  1   4  -7   2]
[  2   5   8 -12]
[  6   3   9   3]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-6)*Row[1]
[  1   4  -7   2]
[  0  -3  22 -16]
[  0 -21  51  -9]
Pivot in column 2 exists, at row 2, equal to -3
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (-1/3)*Row[2]
[    1     4    -7     2]
[    0     1 -22/3  16/3]
[    0   -21    51    -9]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 2 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-4)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (21)*Row[2]
[    1     0  67/3 -58/3]
[    0     1 -22/3  16/3]
[    0     0  -103   103]
Pivot in column 3 exists, at row 3, equal to -103
Normalizing pivot to 1 at row 3
Row[3] <-- (-1/103)*Row[3]
[    1     0  67/3 -58/3]
[    0     1 -22/3  16/3]
[    0     0     1    -1]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 3 thanks to the pivot at row 3
```

```
Row[1] <-- Row[1] + (-67/3)*Row[3]
Row[2] <-- Row[2] + (22/3)*Row[3]
[ 1  0  0  3]
[ 0  1  0 -2]
[ 0  0  1 -1]

System S3
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 1  3 -2  1]
[ 2 -1  3  3]
[ 3  2  1  2]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1)*Row[1]
[ 1  3 -2  1]
[ 2 -1  3  3]
[ 3  2  1  2]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-3)*Row[1]
[ 1  3 -2  1]
[ 0 -7  7  1]
[ 0 -7  7 -1]
Pivot in column 2 exists, at row 2, equal to -7
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (-1/7)*Row[2]
[    1    3   -2    1]
[    0    1   -1 -1/7]
[    0   -7    7   -1]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 2 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-3)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (7)*Row[2]
[    1    0    1 10/7]
[    0    1   -1 -1/7]
[    0    0    0   -2]

System S4
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 1  2 -1  1]
[ 2 -1  2  1]
[ 3  1  1  2]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1)*Row[1]
[ 1  2 -1  1]
[ 2 -1  2  1]
[ 3  1  1  2]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-3)*Row[1]
[ 1  2 -1  1]
[ 0 -5  4 -1]
[ 0 -5  4 -1]
Pivot in column 2 exists, at row 2, equal to -5
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (-1/5)*Row[2]
[    1    2   -1    1]
[    0    1 -4/5  1/5]
[    0   -5    4   -1]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 2 thanks to the pivot at row 2
```

```
Row[1] <-- Row[1] + (-2)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (5)*Row[2]
[   1    0  3/5  3/5]
[   0    1 -4/5  1/5]
[   0    0    0    0]

System S5
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 1  1  2 -3  1]
[ 2  1 -2  1 -1]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1)*Row[1]
[ 1  1  2 -3  1]
[ 2  1 -2  1 -1]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[1]
[ 1  1  2 -3  1]
[ 0 -1 -6  7 -3]
Pivot in column 2 exists, at row 2, equal to -1
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (-1)*Row[2]
[ 1  1  2 -3  1]
[ 0  1  6 -7  3]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 2 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-1)*Row[2]
[ 1  0 -4  4 -2]
[ 0  1  6 -7  3]

System S6
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[ 1  2 -3  4]
[ 1  3 -1 11]
[ 2  5 -5 13]
[ 1  4  1 18]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1)*Row[1]
[ 1  2 -3  4]
[ 1  3 -1 11]
[ 2  5 -5 13]
[ 1  4  1 18]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-1)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-2)*Row[1]
Row[4] <-- Row[4] + (-1)*Row[1]
[ 1  2 -3  4]
[ 0  1  2  7]
[ 0  1  1  5]
[ 0  2  4 14]
Pivot in column 2 exists, at row 2, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (1)*Row[2]
[ 1  2 -3  4]
[ 0  1  2  7]
[ 0  1  1  5]
[ 0  2  4 14]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 2 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-2)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (-1)*Row[2]
```

```
Row[4] <-- Row[4] + (-2)*Row[2]
[  1   0  -7 -10]
[  0   1   2   7]
[  0   0  -1  -2]
[  0   0   0   0]
Pivot in column 3 exists, at row 3, equal to -1
Normalizing pivot to 1 at row 3
Row[3] <-- (-1)*Row[3]
[  1   0  -7 -10]
[  0   1   2   7]
[  0   0   1   2]
[  0   0   0   0]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 3 thanks to the pivot at row 3
Row[1] <-- Row[1] + (7)*Row[3]
Row[2] <-- Row[2] + (-2)*Row[3]
Row[4] <-- Row[4] + (0)*Row[3]
[1 0 0 4]
[0 1 0 3]
[0 0 1 2]
[0 0 0 0]

System S7
This is Gauss-Jordan elimination on matrix
[   3    4    1    2    3]
[   6    8    2    5    7]
[   9   12    3   10 13+a]
Pivot in column 1 exists, at row 1, equal to 3
Normalizing pivot to 1 at row 1
Row[1] <-- (1/3)*Row[1]
[   1  4/3  1/3  2/3    1]
[   6    8    2    5    7]
[   9   12    3   10 13+a]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 1 thanks to the pivot at row 1
Row[2] <-- Row[2] + (-6)*Row[1]
Row[3] <-- Row[3] + (-9)*Row[1]
[   1  4/3  1/3  2/3    1]
[   0    0    0    1    1]
[   0    0    0    4  4+a]
There is no pivot in column 2: all entries [i,2] are zero for i=2,...,3
There is no pivot in column 3: all entries [i,3] are zero for i=2,...,3
Pivot in column 4 exists, at row 2, equal to 1
Normalizing pivot to 1 at row 2
Row[2] <-- (1)*Row[2]
[   1  4/3  1/3  2/3    1]
[   0    0    0    1    1]
[   0    0    0    4  4+a]
No row swapping is necessary
Setting 0's in column 4 thanks to the pivot at row 2
Row[1] <-- Row[1] + (-2/3)*Row[2]
Row[3] <-- Row[3] + (-4)*Row[2]
[   1  4/3  1/3    0  1/3]
[   0    0    0    1    1]
[   0    0    0    0    a]
```

5 Processus stochastiques

5.1 Processus de Markov à temps discret

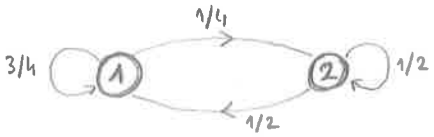
Exercice 5.1
Soit la matrice stochastique

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Représenter la chaine de Markov dont A est la matrice.
2. Justifier que A admet une unique vecteur ligne stochastique stationnaire.
3. Le calculer.
4. Justifier que A^t admet une limite quand $t \to +\infty$, et donner la valeur de cette limite.

Exercice 5.1

1. La chaîne de Markov a 2 états :



2. La matrice A est >0, donc primitive. D'après le cours, il existe un unique vecteur ligne stochastique stationnaire !

3. On cherche $V(x,y)$ tel que $VA = V$ soit $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$

$\iff x = 2y$ Comme en outre $x + y = 1$, il vient $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{3}$

L'unique vecteur stochastique stationnaire est $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

4. Toujours d'après le cours, on a

$$A^t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Exercice 5.2

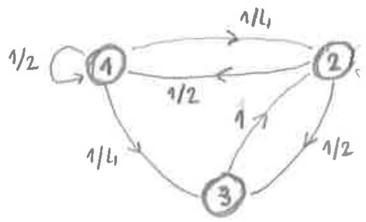
Soit la matrice stochastique

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Représenter la chaine de Markov dont P est la matrice.
2. Justifier que P admet une unique vecteur ligne stochastique stationnaire.
3. Le calculer.
4. Justifier que P^t admet une limite quand $t \to +\infty$, et donner la valeur de cette limite.

Exercice 5.2

1 - La chaine de Markov a 3 états



2 - La chaine est irréductible. Par ailleurs pour tous i et $j \in \{1, 2, 3\}$ il existe un 3-chemin allant de i à j :

$1 \to 1 \to 1 \to 1$
$1 \to 1 \to 1 \to 2$
$1 \to 1 \to 1 \to 3$

$2 \to 1 \to 1 \to 1$
$2 \to 1 \to 1 \to 2$
$2 \to 1 \to 2 \to 3$

$3 \to 2 \to 1 \to 1$
$3 \to 2 \to 1 \to 2$
$3 \to 2 \to 1 \to 3$

propriété que l'on retrouve car $P^3 > 0$. En effet $P^3 = \begin{bmatrix} 3/8 & 11/32 & 9/32 \\ 7/16 & 3/16 & 3/8 \\ 1/4 & 5/8 & 1/8 \end{bmatrix}$ (calcul)

Ainsi P est primitive. D'après le cours, elle admet un unique vecteur ligne stochastique stationnaire.

3 - On cherche $V(x, y, z)$ tel que $VP = V$, soit
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{4}x + z = y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = z \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{4}x - y + z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Pivot de Gauss $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\rightsquigarrow$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x = \frac{4}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases}$ Comme en outre $x + y + z = 1$, il vient $\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 1\right) z = 1$ et finalement

$z = \frac{3}{11}$ $\quad x = y = \frac{4}{11}$.

L'unique vecteur stochastique stationnaire de P est $\left(\frac{4}{11} \; \frac{4}{11} \; \frac{3}{11}\right)$

4 - Toujours d'après le cours on a

$$P^t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{bmatrix} 4/11 & 4/11 & 3/11 \\ 4/11 & 4/11 & 3/11 \\ 4/11 & 4/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$

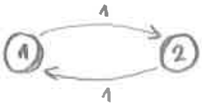
Exercice 5.3
Soit la matrice stochastique

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Représenter la chaine de Markov dont B est la matrice.
2. Vérifier que B admet un unique vecteur stochastique stationnaire
3. Calculer B^t, pour $t \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que B^t n'a pas de limite quand $t \to +\infty$.
5. Quelle propriété fait défaut à B qui empêche la convergence de B^t ?

Exercice 5.3

1. La chaîne a 2 états



2. On cherche $V(x,y)$ tel que $VB = V$, soit $\begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \iff x = y$. Comme en outre $x + y = 1$ la solution est $V = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Big\} B \\ \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}}_{B} & \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{B^2}\end{array}$$

On constate que $B^2 = I_2$ de sorte que :

$$B^t = \begin{cases} I_2 & \text{si } t \text{ est pair} \\ B & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

4. La suite $(B^t)_{t \in \mathbb{N}}$ admet 2 sous-suites convergentes : $(B^{2t}) \longrightarrow I_2$ et $(B^{2t+1}) \longrightarrow B$ et $B \neq I_2$, donc (B^t) n'est pas convergente.

5. D'après le cours, comme B est irréductible (c'est immédiat), la non-convergence doit provenir de la non-apériodicité. Et, en effet, il est lisible sur le graphe de la chaîne de Markov que les chemins de 1 à 1 et de 2 à 2 sont tous de longueur paire, de sorte que les états 1 et 2 sont 2-périodiques.

On peut aussi invoquer que P n'est pas primitive puisqu'aucune de ses puissances n'est > 0.

5.2 Processus de Markov à temps continu

Exercice 5.4
Un grand magasin souhaite étudier la performance d'une caisse de paiement. Il faut en moyenne 2 minutes pour traiter le paiement d'un consommateur. Ce temps est supposé suivre une loi exponentielle. Les consommateurs arrivent à la caisse suivant un processus de Poisson de moyenne 25 clients par heure.

1. Vérifier que le système admet un régime stationnaire.
2. Donnez la distribution du nombre de clients dans le système en régime stationnaire.
3. Quel est le nombre moyen de clients dans la file d'attente ?
4. Pendant combien de temps la caissière est-elle inoccupée en moyenne ?
5. Quelle est la probabilité que strictement plus de deux personnes fassent la queue ?

1. Le processus d'arrivée des clients est de Poisson, le temps de service est exponentiel. Il y a une caisse. On se trouve dans un modèle de système d'attente de type M/M/1. Le système admet un régime stationnaire si le flux d'arrivées et inférieur au flux de sortie. On prend l'heure comme unité de temps de référence. Les consommateurs arrivent à la caisse suivant un processus de Poisson de moyenne 25 clients par heure. Il s'agit donc d'un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 25$. Il faut en moyenne 2 minutes pour traiter un consommateur. Il s'agit donc d'une loi exponentielle de paramètre $\mu = 30$ clients traités à l'heure. On a $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1$. L'intensité du système est inférieure à 1 : le système d'attente admet un régime stationnaire.
2. En régime stationnaire, la distribution du nombre de personnes dans le système est donnée par :
$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^k, \quad \text{pour } k \geq 0$$
3. Le nombre moyen de clients dans la file d'attente est donné par le paramètre
$$L = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \approx 4.16$$
4. La caissière est inoccupée quand il n'y a personne dans le système, il s'agit donc de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0) = 1/6$.

   La caissière est donc inoccupée en moyenne pendant un sixième de son temps, ou encore 10 mn par heure.
5. En termes d'événements, {strictement plus de deux personnes font la queue} = {il y a strictement plus de 3 personnes dans le système }. La probabilité cherchée est
$$\mathbb{P}(X > 3) = \sum_{k \geq 4} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^k = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.48$$

On rappelle à ce propos qu'une somme géométrique est égale à
- (1er terme)$\dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$ si elle est finie ;
- (1er terme)$\dfrac{1}{1 - \text{raison}}$ si elle est infinie et que $|\text{raison}| < 1$.

Exercice 5.5
Un serveur internet reçoit des requêtes suivant une loi de Poisson, de moyenne 45 requêtes par heure. Il répond avec une loi exponentielle, la moyenne étant d'une minute par traitement. Il effectue un traitement à la fois.

1. Expliquer pourquoi le système peut être modélisé par une file d'attente M/M/1. Donner les paramètres du processus (on prendra l'heure comme unité de temps). Montrer qu'il admet un régime stationnaire.
2. Quelle est la loi de probabilité du nombre de clients connectés ?
3. Quelle est la probabilité que le serveur soit inoccupé ?
4. Quel est le nombre moyen de clients connectés au serveur ?
5. Quel est le nombre moyen de clients en attente ?

On suppose que le serveur est limité à 10 connexions simultanées. Le temps traitement suit toujours une loi exponentielle, mais de moyenne 3 minutes. Le système devient une file M/M/1/K.

6. Donner les nouveaux paramètres du processus.
7. Quelle est la loi de probabilité du nombre de clients connectés ?
8. En déduire la probabilité qu'un client ne puisse pas se connecter.

1. La file est M/M/1 pour une raison analogue aux exercices précédents. Les paramètres sont $\lambda = 45$ pour les arrivées et $\mu = 60$ pour le nombre de services, l'unité de temps étant l'heure. Le processus admet un régime stationnaire puisque l'intensité vaut $45/60 = 0,75 < 1$.
2. En régime stationnaire, la distribution du nombre de personnes dans le système est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad \text{pour } k \geq 0$$

3. C'est $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$.
4. Le nombre moyen de clients connectés au serveur est

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{45}{60 - 45} = 3$$

5. Le nombre moyen de clients en attente est

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{45^2}{60(60 - 45)} = 2,25$$

6. Le paramètre de la loi d'arrivée est toujours $\lambda = 60$ par heure, mais le paramètre du service est désormais de $\mu' = 20$ traitements en moyenne par heure (1 toutes les 3 minutes).
7. On reconnait la file d'attente M/M/1/10, car il n'y a que 10 places dans le système. La loi du nombre de personnes dans le système est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{(1 - \lambda/\mu')(\lambda/\mu')^k}{1 - (\lambda/\mu')^{11}} \text{ pour } k \leq 10 \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = 0 \text{ pour } k \geq 11$$

   avec $\lambda/\mu' = 45/20 = 2,25$. On rappelle que $\lambda/\mu' > 1$ n'est pas incompatible avec la stationnarité dans le cas où la file d'attente est finie.
8. La probabilité qu'une personne ne puisse pas se connecter est celle que le système soit plein (on dirait "saturé" ici), soit $\mathbb{P}(X = 10) = \dfrac{(1 - 2,25) \times 2,25^{10}}{1 - 2,25^{11}} \approx 0,56$.