Maths

Généralités

Polynomes :

Un polynôme est une expression de la forme :

$$a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

Si il est à coefficients complexe c'est qu'il peut contenir le nombre i
Une racine du polynôme est une valeur a pour laquelle P(a) = 0

Techniques de démonstrations

Par déduction directe :

De l'hypothèse à la conclusion par le biais d'une suite d'étapes, étapes s'appuyant sur un théorème, un axiome, ou d'un résultat démontré plus haut. Attention à la pétition de principe.

Par contraposée :

Si P ⇒ Q (P implique Q) alors ¬Q ⇒ ¬P
! Attention la réciproque (Q ⇒ P) n'est pas valide par principe
« Si *n* est impair alors *n* n'est pas multiple de 10 » équivaut à « Si *n* est multiple de 10 alors *n* est pair »

Par l'absurde :

Nier une propriété pour démontrer que cette négation est contradictoire. Si cette propriété ne peut pas être niée elle est vraie.
P ∧ ¬Q ⇒ contradiction
la suite des nombres premiers est infinie
Si c'est fini {p1, p2, p3, p5, p7}
Soit un nombre p1 x p2 x p3 x p5 x p7 + 1 = 211
211 ne peut être divisé sans reste par 1, 2, 3, 5 ou 7. Donc il est premier. Mais il apparaît pas dans la liste. On peut toujours ajouter plus un à la multiplication des chiffres premiers, on ne pourra donc jamais déterminer de dernier nombre premier

Par récurrence :

D'abord traiter l'hérédité, ensuite l'initialisation (les dominos)
P (n) : $2^n > n$
Fixons n ∈ N et n > 1 et supposons P (n) vraie
On doit prouver que $2^{n+1} > n + 1$
$2^n > n$
Je multiplie les deux côtés par 2
$2 \times 2^n > 2n$
2×2^n vaut 2^{n+1}
$2^{n+1} > 2n$
Si 2n est plus grand que n + 1, nécessairement $2^{n+1} > n + 1$
Il faut donc démontrer que 2n > n + 1
2n > n + 1
n > 1

C’est ok pour n > 1

Initialisation
$2^1 > 1$
$2 > 1$

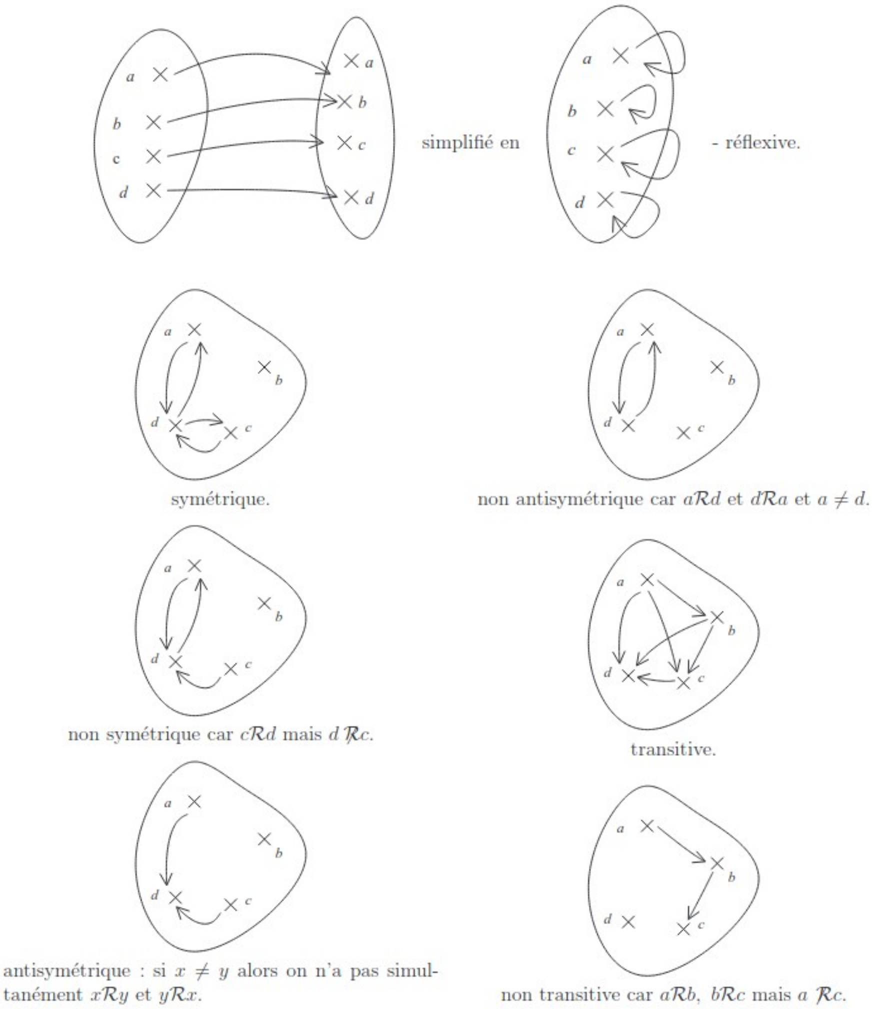
Relations binaires

Réflexivité :
Une relation binaire est réflexive si xRx

Symétrie :
Une relation est symétrique si pour xRy, yRx

Transivité :
Une relation est transitive si pour xRy et yRz, xRz

“antiréflexive” n’est pas synonyme de “non réflexive”, etc.



symétrique.

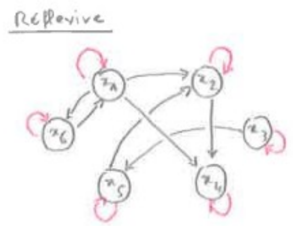
non antisymétrique car $a\mathcal{R}d$ et $d\mathcal{R}a$ et $a \neq d$.

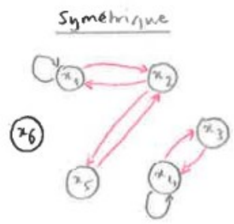
non symétrique car $c\mathcal{R}d$ mais $d \not\mathcal{R} c$.

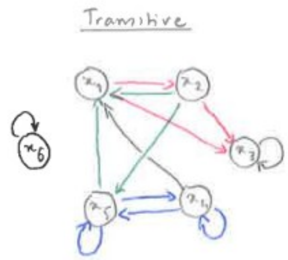
transitive.

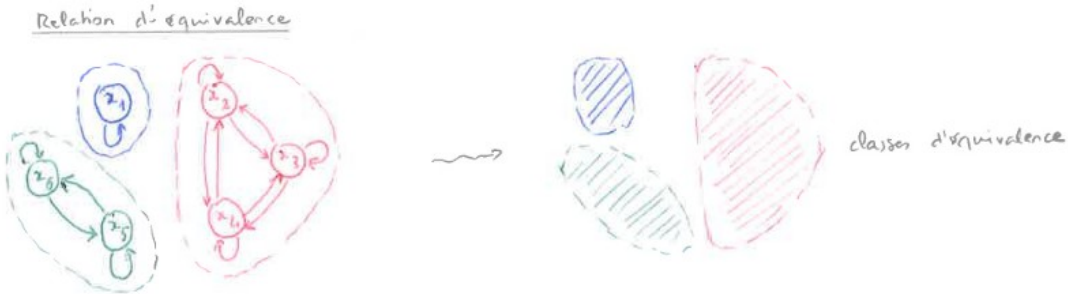
antisymétrique : si $x \neq y$ alors on n'a pas simultanément $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

non transitive car $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$ mais $a \not\mathcal{R} c$.









2.2.2 Matrice d'adjacence

Il s'agit d'un tableau à deux dimensions où :

- les lignes correspondent aux éléments de E
- les colonnes correspondent aux éléments de F
- une croix apparait dans le tableau à la ligne x et colonne y lorsque $x\mathcal{R}y$.

Pour notre exemple, la matrice d'adjacence s'écrit

	rouge	jaune	vert	bleu	violet
Alice	x			x	
Bob		x			
Charlie		x	x	x	
Didier					

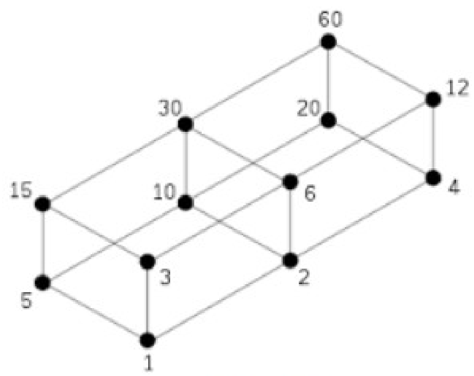
Théorème-Définitions

1. un *majorant* de E est un élément plus grand que tous les éléments de E.
   — il n'existe pas forcément
   — s'il existe, il n'est pas forcément dans E (ce qui sous-entend que E est alors inclus dans un ensemble plus vaste)
   — s'il existe il n'est pas forcément unique
2. la *borne supérieure*, ou *supremum* de E est le plus petit des majorants
   — il n'existe pas forcément même s'il existe un/des majorant(s)
   — s'il existe, il n'est pas forcément dans E
   — s'il existe, il est unique
3. le *maximum* de E est le plus grand élément de E
   — il n'existe pas forcément, même s'il existe un supremum ou un/des majorant(s)
   — s'il existe, il est dans E par définition
   — s'il existe, il est unique et il est aussi le supremum
4. un *élément maximal* de E est un élément qui n'est plus petit qu'aucun autre élément de E
   — il n'existe pas forcément
   — s'il existe, il est forcément dans E par définition
   — si E admet un maximum, celui-ci est l'unique élément maximal
   — si l'ordre est total, la notion d'élément maximal coïncide avec celle de maximum.
   — si l'ordre est partiel, un éventuel élément maximal n'est pas forcément le maximum de E et il n'est pas forcément unique.

On définit de manière analogue le notions de *minorant*, *borne inférieure* (ou *infimum*), *minimum*, *élément minimal*

Exemple

L'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ des diviseurs de 60 est partiellement ordonné par la relation de divisibilité. Voici son diagramme de Hasse.

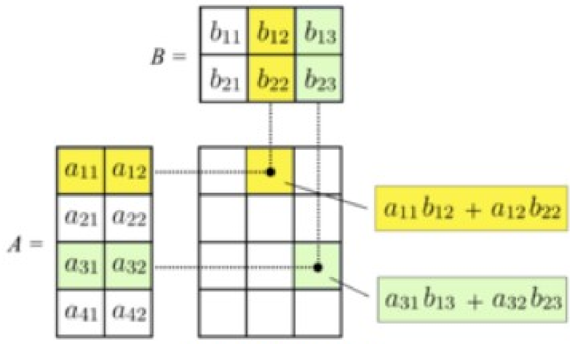


Source :Wikipedia

Matrices

Multiplication :

La figure suivante illustre tant les conditions de gabarit que le calcul des composantes du produit



Source :Wikipedia

Le produit matriciel n'est pas commutatif. Plus précisément,

- le produit AB (resp. BA) existe si $p_A = n_B$ (resp. si $p_B = n_A$). Ainsi l'un des deux produits peut exister sans que l'autre n'existe.
- Si $p_A = n_B \neq p_B = n_A$ les deux produits AB et BA existent, sont carrées mais de tailles différentes, donc ne peuvent être égaux.
- Si $p_A = n_B = p_B = n_A$ (A et B sont carrées de même taille, disons n), alors les deux produits AB et BA existent et sont aussi de taille n. Mais même dans ce cas, on a en général $AB \neq BA$.

Calcul du déterminant :

Théorème Définition récursive du déterminant

Soit A une matrice $n \times n$.

- si $n = 1$ $\det(A) = a_{1,1}$, l'unique coefficient de la matrice.
- si $n = 2$, $\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
- pour $n \geq 3$ quelconque, on a :
  1. (*développement selon une colonne*) : pour tout indice de colonne j_0 fixé,
  $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} \times (-1)^{i+j_0} \times \det(A_{\neq i, \neq j_0})$$
  2. (*développement selon une ligne*) : pour tout indice de ligne i_0 fixé,
  $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \times (-1)^{i_0+j} \times \det(A_{\neq i_0, \neq j})$$

Illustrations

1. Développement selon la 2me colonne

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -2\big(1\times 10 - 3\times(-2)\big) + 2\big(-1\times 10 - 5\times(-2)\big) - 8\big(-1\times 3 - 5\times 1\big)$$
$$= -2(16) + 0 - 8(-8) = -32 + 64 = 32$$

2. Développement selon la 2me ligne

$$\begin{vmatrix} 2^+ & -1^- & 2^+ \\ 6^- & 3^+ & 1^- \\ 4^+ & 5^- & 3^+ \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -6 \times (-13) + 3 \times (-2) - 1 \times 14 = 58.$$

Remarques

1. La formule est valable quel que soit l'indice de colonne j_0 (resp. l'indice de ligne i_0) choisi.
2. Les termes de la somme sont de la forme a_{i,j_0} (resp. $a_{i_0,j}$)$\times$ un mineur d'ordre $(n-1)\times(n-1)$. Il va donc être rentable de choisir une colonne (resp. une ligne) contenant beaucoup de 0 : en effet, pour chaque a_{i,j_0} (resp. $a_{i_0,j}$) nul, on s'épargne le calcul du mineur $\det(A_{\neq i,\neq j_0})$ (resp. $\det(A_{\neq i_0,\neq j})$)
3. Dans le cas $n = 3$, on dispose de la règle de Sarrus,

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$$

dont il est plus aisé de retenir le schéma mnémotechnique :

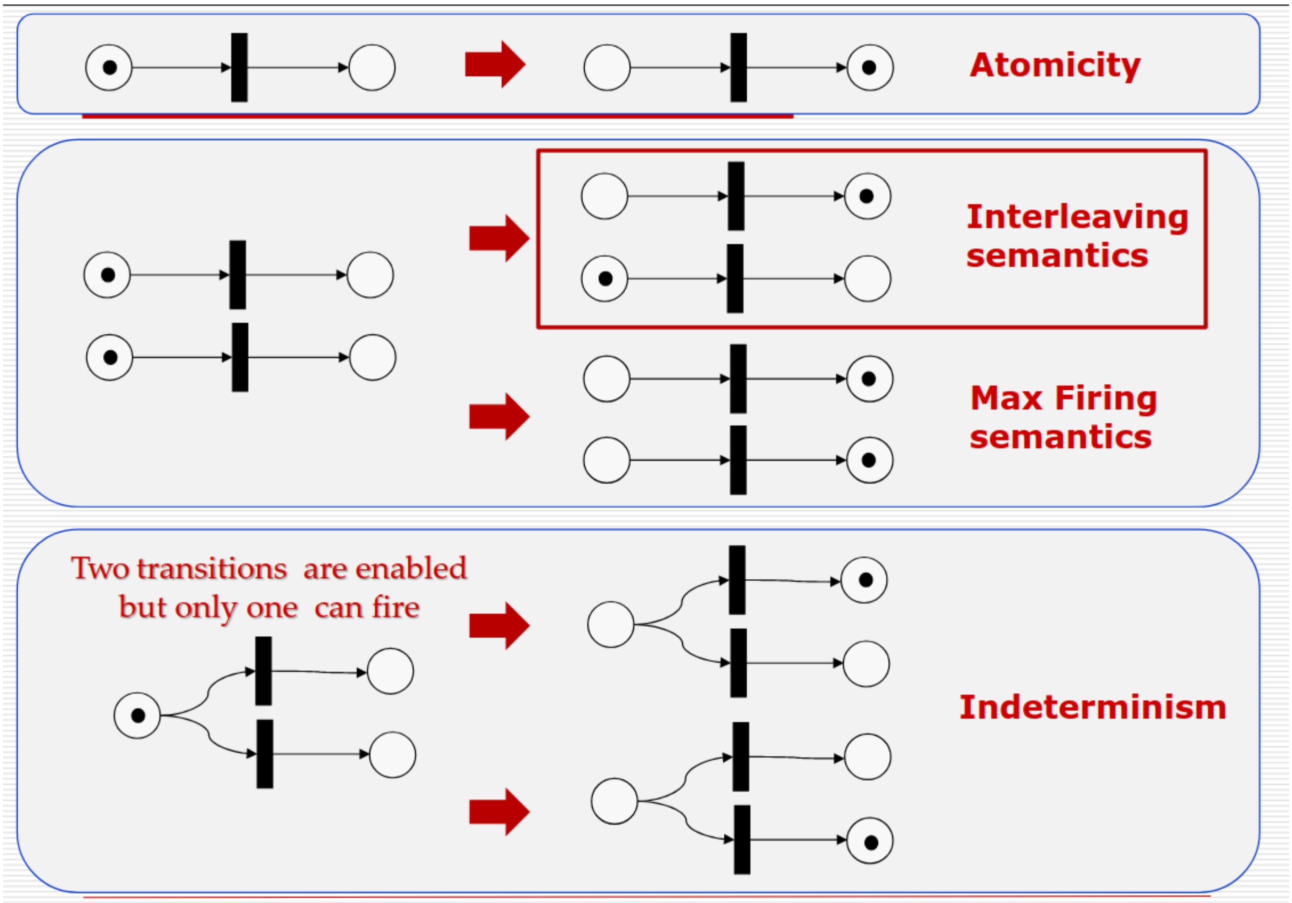
5. Pivot de Gauss

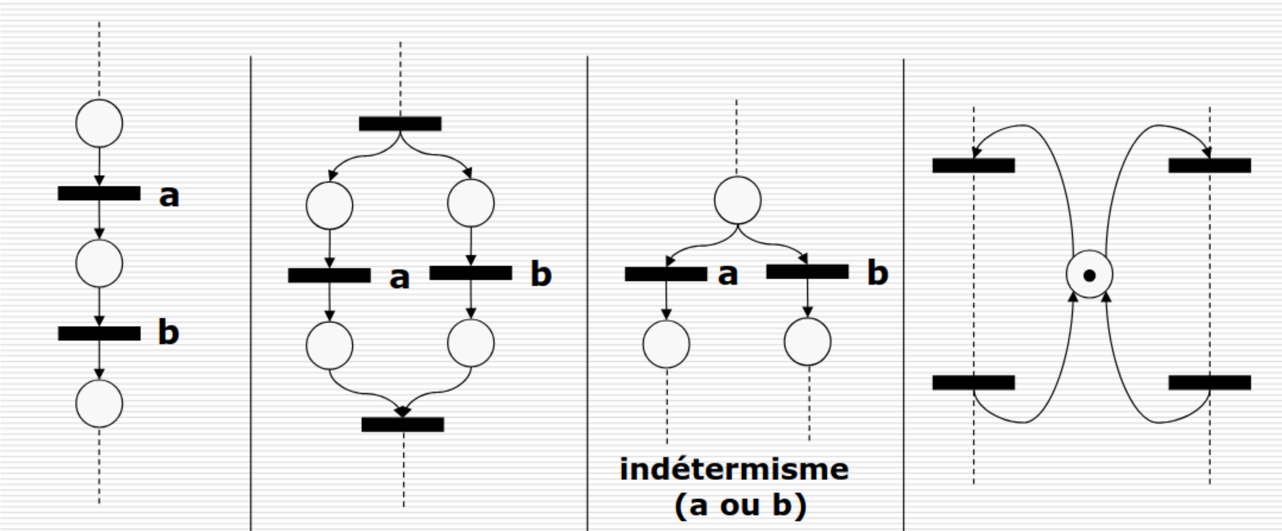
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \cdots\cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$ infinité de solutions, x et y inconnues principales, z et t non principales

$$\begin{cases} x = -2 + 4z - 4t \\ y = 3 - 6z + 7t \end{cases} \qquad Sol = \{(-2+4z-4t,\ 3-6z+7t,\ z,\ t) \ ;\ z,t \in \mathbb{R}\}$$

Réseaux de Pétri

Modélisation:



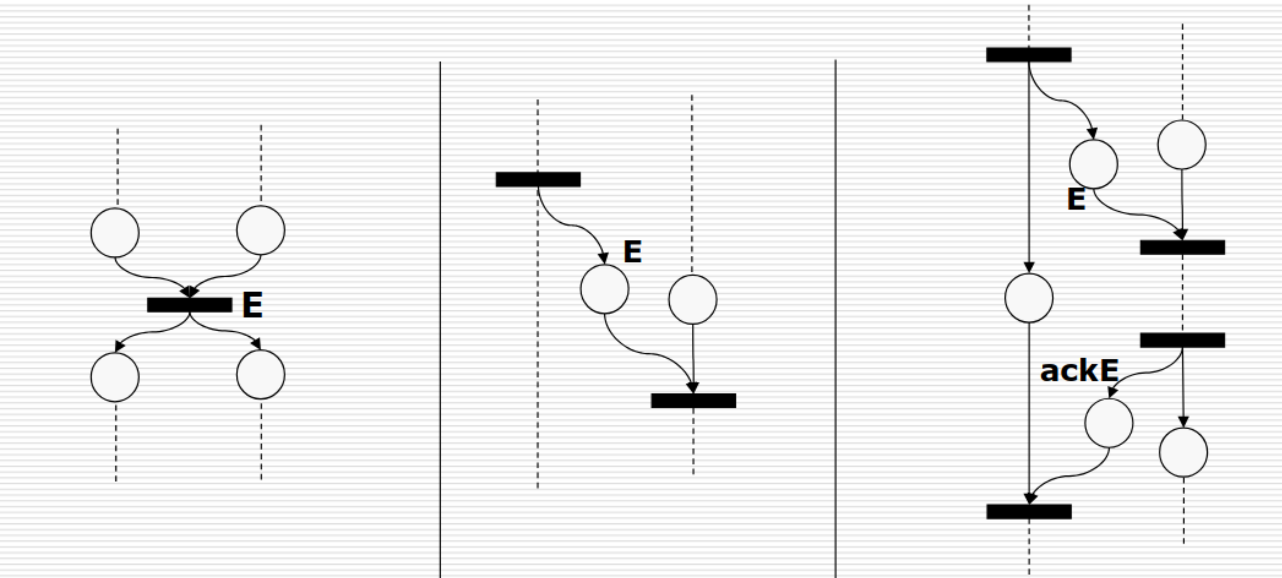


séquence
(a;b)

indépendance
(a||b)

indétermisme
(a ou b)

partage de ressource
(exclusion, conflit…)



synchonisation
(a=b, envoi synchrone
d'un message E)

sémaphore,
envoi asynchrone
d'un message E

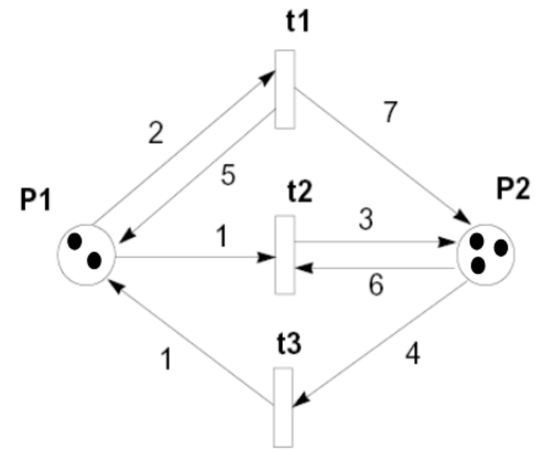
envoi asynchrone
d'un message E
avec acquittement

Franchissement d'une transition : Exemple

- **t1** est franchissable car

$$M_0 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \mathbf{Pre(., t1)}$$

$$\longrightarrow \quad M_0 \xrightarrow{t_1}$$



- après le franchissement de **t1**

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$$

$$M_1 = M_0 - Pre(., t1) + Post(., t1)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$

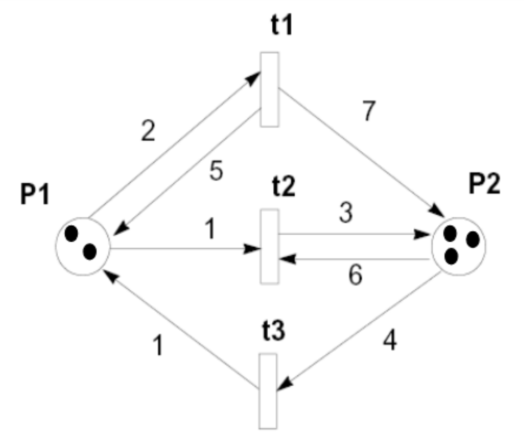
Franchissement d'une transition : Exemple

- **calcul matriciel**

$$M_1 = M_0 - Pre(., t1) + Post(., t1)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\7 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$



- **calcul direct avec la matrice d'incidence**

$$M_1 = M_0 + C(., t1)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\7 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$

multiplication la matrice C avec ce vecteur pour extraire la première colonne C(.,t1)

Equation d'état - Exemple

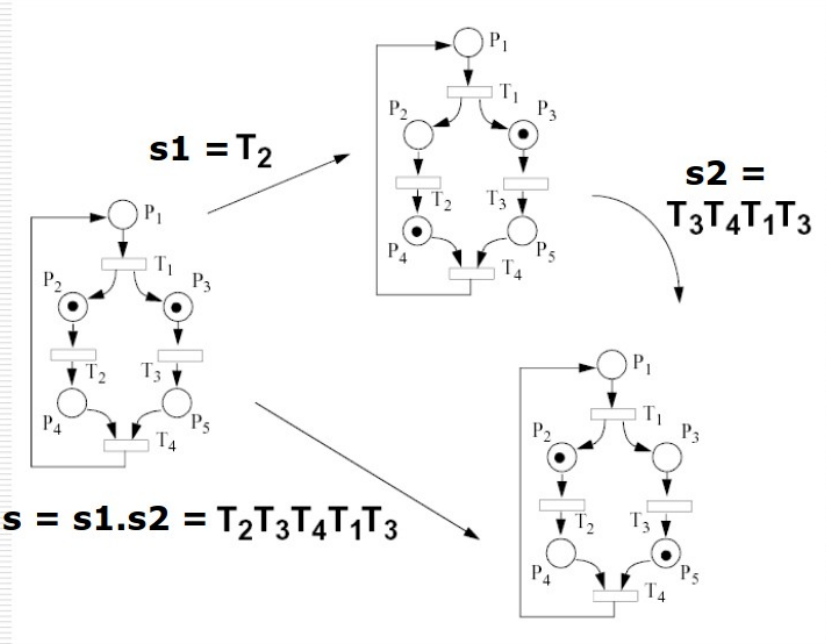
$P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

$T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$

$$Pre = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Post = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

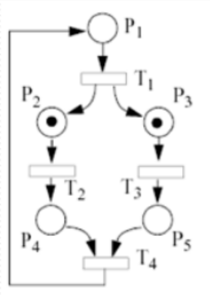


Equation d'état exemple

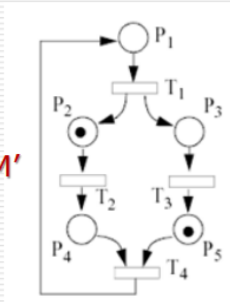
$P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

$T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$s = T_2\ T_3\ T_4\ T_1\ T_3 \longrightarrow M'$

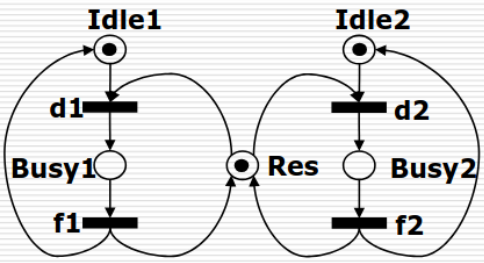


$$V_{T_2T_3T_4T_1T_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M' = M + C \,.\, V_{T_2T_3T_4T_1T_3}$$

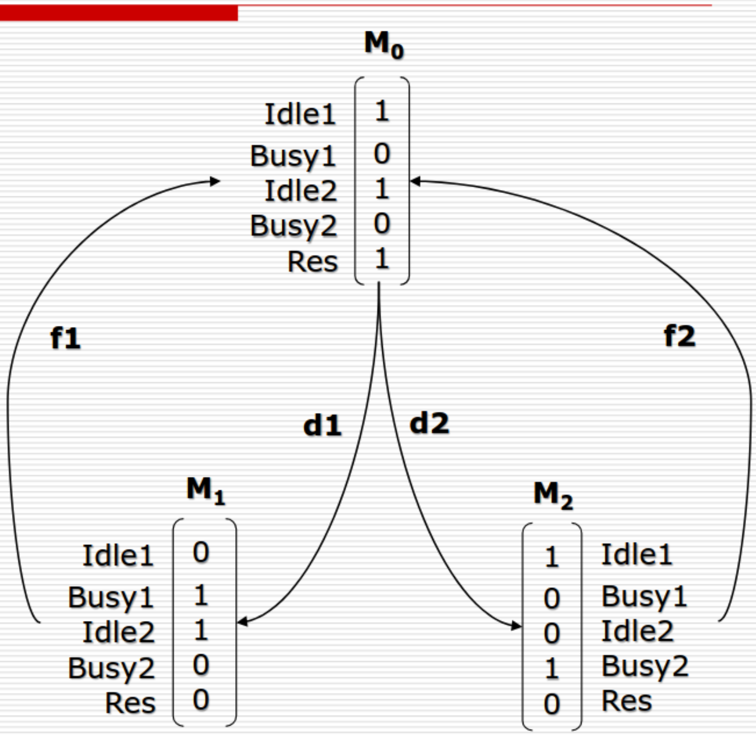
$$M' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Graphe de marquage accessible - Exemple



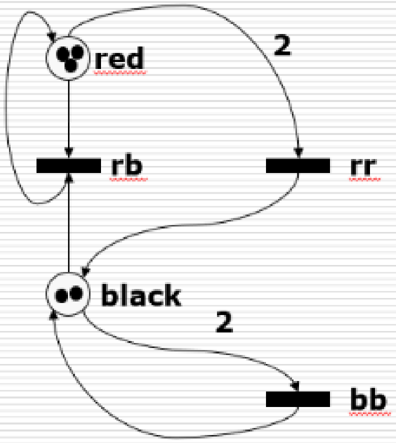
T= (d1, f1, d2, f2)

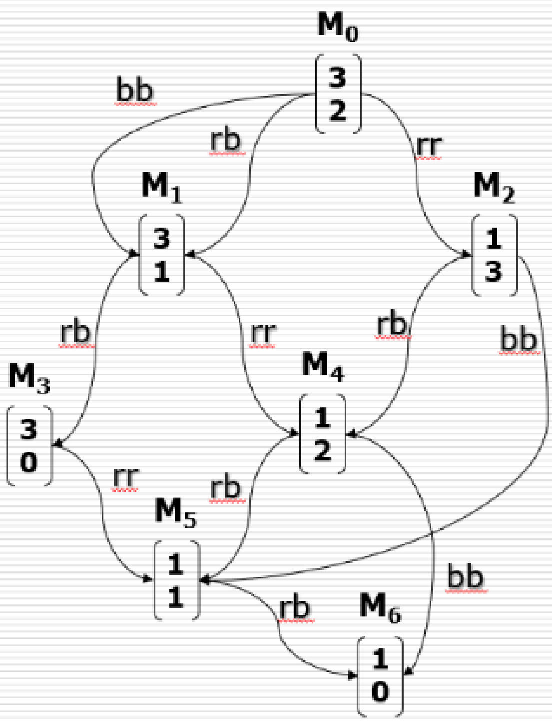
$$P = \begin{pmatrix} \text{Idle1} \\ \text{Busy1} \\ \text{Idle2} \\ \text{Busy2} \\ \text{Res} \end{pmatrix}$$



Graphe de couverture : exemple

3. Construire le graphe de marquages accessibles de ce RdP depuis le marquage initial *M0*





4. Depuis le marquage M0, peut-on avoir la séquence de franchissement *rb bb bb* ? Justifier

Non, la séquence *rb bb bb* n'est pas franchissable depuis M0.

Pour justifier la réponse, utiliser le graphe de marquage accessible : il n'existe pas le chemin *rb bb bb* depuis M0

Propriétés comportementales typiques

Accessibilité : Capacité du réseau à atteindre un marquage donné à partir du marquage initial, en exécutant une séquence de transitions.
Bornitude : Propriété selon laquelle le nombre de jetons dans chaque place reste limité, quel que soit l'ordre des transitions exécutées.
Sûreté : Forme particulière de bornitude où une place ne peut jamais contenir plus d'un jeton, quel que soit le marquage.
Vivacité : Capacité d'une transition à rester franchissable, directement ou indirectement, quel que soit le marquage accessible.
Blocage : Situation dans laquelle le réseau atteint un état où aucune transition n'est franchissable.
Réversibilité : Propriété garantissant qu'il est toujours possible de revenir au marquage initial à partir de tout marquage accessible.

Propriétés structurelles typiques

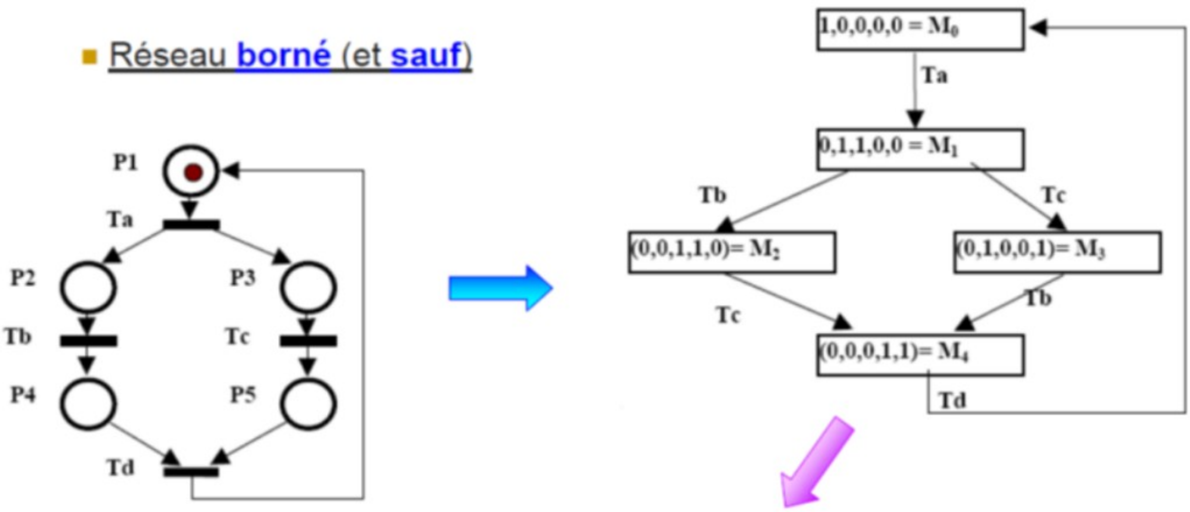
Bornitude structurelle : Propriété indiquant que le nombre de jetons dans chaque place est limité, quel que soit le marquage initial, en fonction uniquement de la structure du réseau.
Conservabilité : Propriété selon laquelle le nombre total de jetons dans certaines combinaisons de places reste constant, quelle que soit la dynamique du réseau.
Vivacité structurelle : Capacité de chaque transition à rester franchissable, directement ou indirectement, quel que soit le marquage initial admissible, en fonction uniquement de la structure du réseau.
Répétitivité : Capacité d'un réseau à permettre l'exécution infinie de certaines transitions, garantissant leur réactivation continue dans les marquages accessibles.

Analyse par énumération

Principe : explorer tous les états possibles du réseau de Pétri (marquages accessibles du RdP) à partir du marquage initial
- *Outil principal* :
  Le graphe des marquages accessibles ou
  Le graphe de couverture
- *Propriétés vérifiables* :
  Bornitude
  Accessibilité
  Réversibilité
  Vivacité comportementale
  Blocage

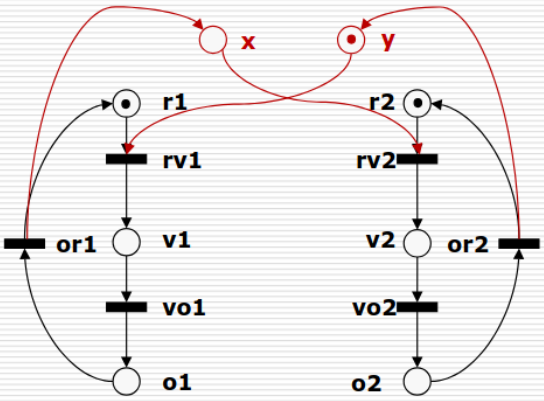
Exemple Réseau borné, sauf

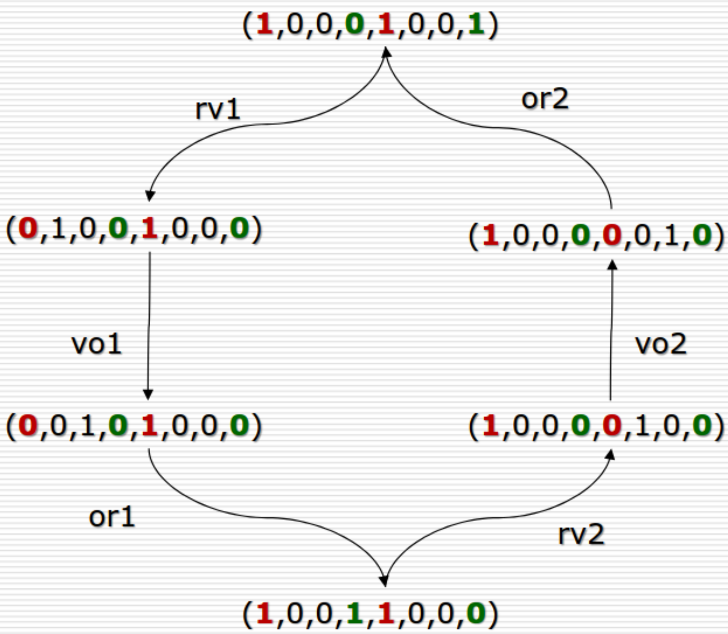
- Réseau **borné** (et **sauf**)



M(Pi), \Mi	M0	M1	M2	M3	M4	Borne B(Pi)
M(P1)	1	0	0	0	0	1
M(P2)	0	1	0	1	0	1
M(P3)	0	1	1	0	0	1
M(P4)	0	0	1	0	1	1
M(P5)	0	0	0	1	1	1

Exemple Accessibilité – 2 *Feux de circulation*

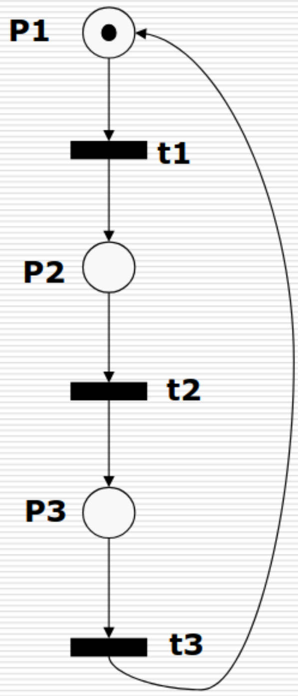


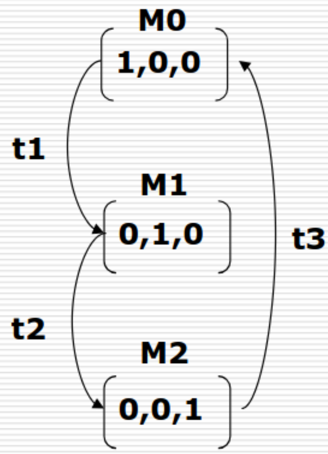


$$
\begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \begin{array}{c} r1 \\ v1 \\ o1 \\ x \\ r2 \\ v2 \\ o2 \\ y \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \notin A(R,M_0)
$$

- rv1 et rv2 ne sont pas franchissables en même temps

Exemple réseau réversible



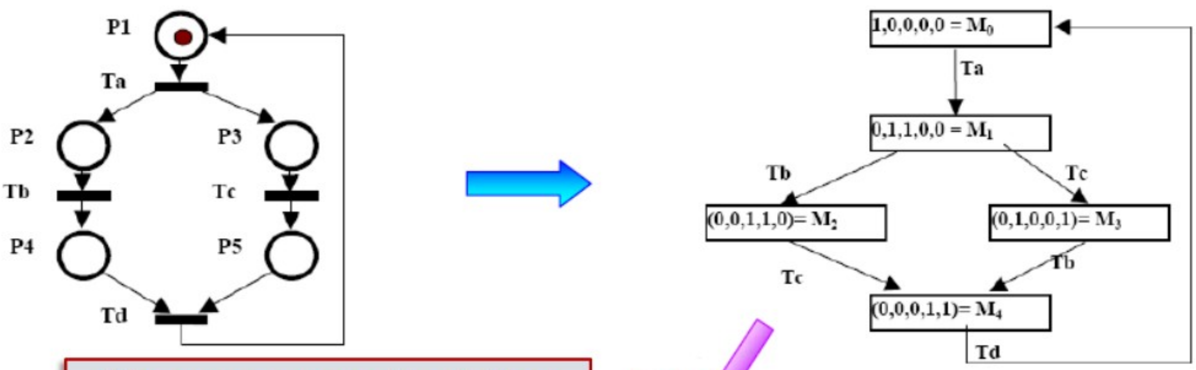


Chemins de retour vers M0 :

- Depuis M1=(0,1,0) : t2t3
- Depuis M2=(0,0,1): t3

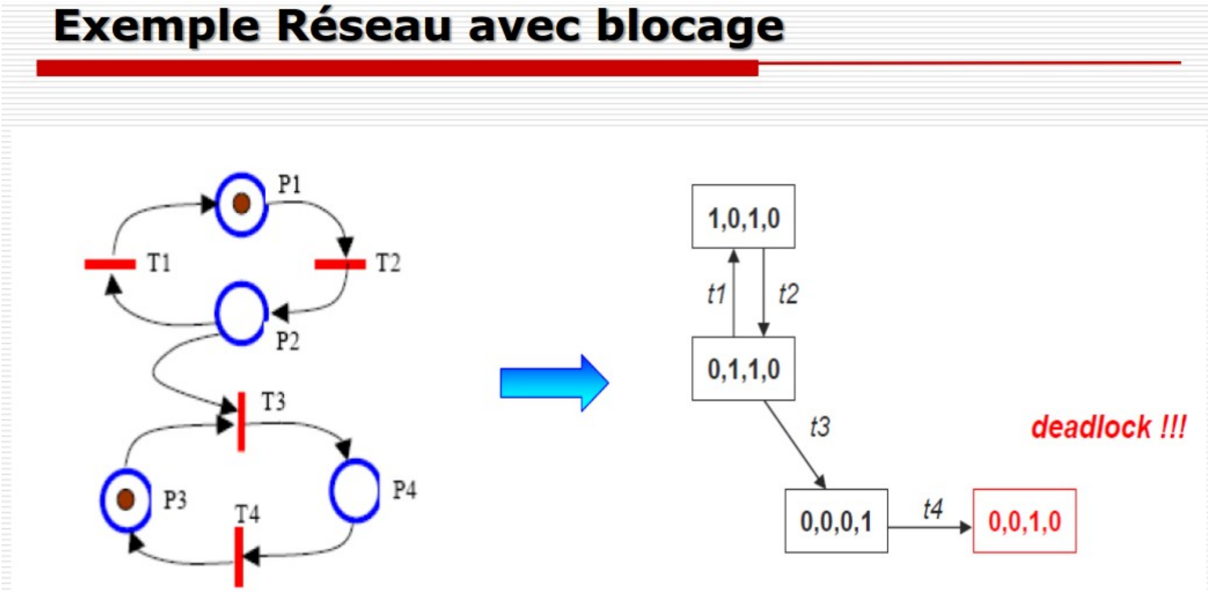
➔ Le réseau est réversible, car depuis tout marquage accessibles (M1,M2), il est possible de revenir au marquage initial M0.

Exemple Réseau vivant



Séquence permettant tirer Ta dans M3

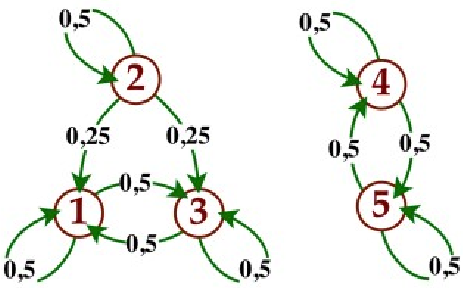
Tj, \Mi	M0	M1	M2	M3	M4	Vivant
Ta	Ta	TbTcTdTa	TcTdTa	TbTdTa	TdTa	Oui
Tb	TaTb	Tb	TcTdTaTb	Tb	TdTaTb	Oui
Tc	TaTbTc	Tc	Tc	TbTdTaTc	TdTaTc	Oui
Td	TaTbTcTd	TbTcTd	TcTd	TbTd	Td	Oui



Processus stochastiques

Représentation:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Source :Wikipedia

3 classes de communication vu que 2 est transient/transitoire, 1-3 est récurrent, comme 4 et 5

	Primitif	Irréductible non primitif	Non irréductible
Vecteur stationnaire			
Existence	oui > 0	oui > 0	oui ≥ 0
Unicité	oui	oui	non
Convergence			
de $\mathbf{P}^t$	oui	non	?
de $\mathbf{p}^{(t)}$	oui	?	?

<u>UTC 501</u>

<u>Exercice 5.3</u>

1. La chaîne a 2 états

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "1"] & 2 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

2. On cherche $V(x, y)$ tel que $VB = V$, soit $\begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$. Comme en outre $x + y = 1$ la solution est $V = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

3.

$$\begin{array}{cc} & \left.\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\} B \\ \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{B} & \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{B^2} \end{array}$$

On constate que $B^2 = I_2$ de sorte que :

$$B^t = \begin{cases} I_2 & \text{si } t \text{ est pair} \\ B & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

4. La suite $(B^t)_{t \in \mathbb{N}}$ admet 2 sous-suites convergentes : $(B^{2t}) \longrightarrow I_2$ et $(B^{2t+1}) \longrightarrow B$ et $B \neq I_2$, donc (B^t) n'est pas convergente.

5. D'après le cours, comme B est irréductible (c'est immédiat), la non-convergence doit provenir de la non-apériodicité. Et, en effet, il est lisible sur le graphe de la chaîne de Markov que les chemins de 1 à 1 et de 2 à 2 sont tous de longueur paire, de sorte que les états 1 et 2 sont 2-périodiques.

On peut aussi invoquer que P n'est pas primitive puisqu'aucune de ses puissances n'est > 0.