

ES563 – Laboratório de Máquinas Elétricas

Prof. Luiz Otávio Saraiva Ferreira – 01/2010

FEM/UNICAMP

Pré-roteiro de Modelo Dinâmico de Motores CC de Imã Permanente

Bibliografia

T. Kenjo and S. Nagamori, **Permanent-Magnet and Brushless DC Motors**, Oxford University Press, New York, USA, 1985.

Introdução

Os motores CC de imã permanente são largamente utilizados em automação e controle por causa de duas características únicas: são simples, e o torque e a velocidade variam linearmente com a corrente de controle, característica ausente nos demais tipos de motores elétricos. Isto significa que, para uma certa carga, a velocidade em regime é função direta da tensão de controle. As potências típicas variam desde fração de watt até 2 kW.

O símbolo elétrico de motor CC de imã permanente é mostrado abaixo:

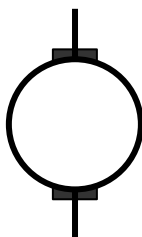


Figura 1: Símbolo do motor elétrico de ímã permanente.

Pode-se controlar o motor pela corrente ou pela tensão elétrica nos terminais, isto é, alimentando-o com uma fonte de corrente ou uma fonte de tensão. Normalmente são usados servo-amplificadores como fontes controladas de tensão ou corrente. Os casos elementares são mostrados na Figura 01.

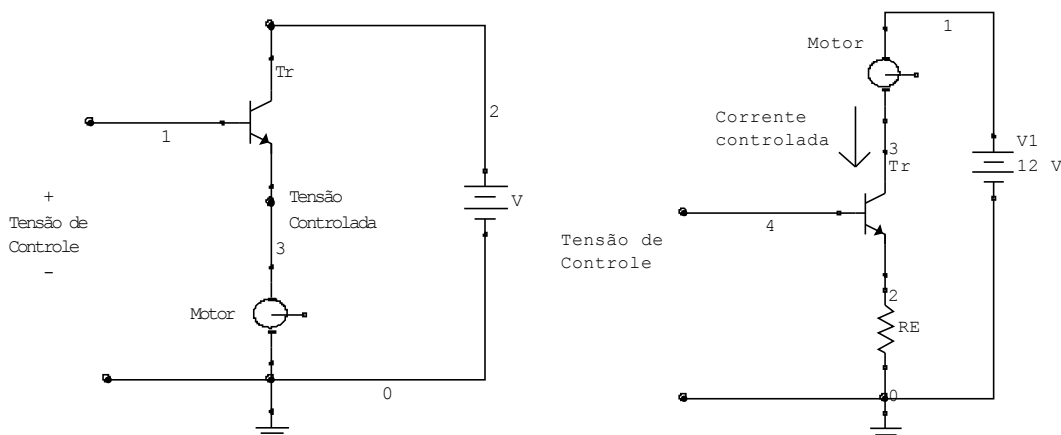


Figura 2: (esquerda) Amplificador de tensão. Funciona como uma fonte de tensão controlada por tensão. (direita) Amplificador de corrente. Funciona como uma fonte de corrente controlada por tensão.

Em ambos os casos tem-se amplificação do sinal de controle, que então atua no motor. A resposta do conjunto motor-amplificador depende das características tanto do motor quanto do amplificador.

Estudaremos os modelos das características dinâmicas (em regime transiente) dos motores CC de ímã permanente. Serão apresentados os circuitos elétricos equivalentes ao motor tais que, quando incluídos como carga do amplificador, tem-se a representação do comportamento do sistema completo: motor+amplificador.

NOTA: o amplificador que aciona o motor é chamado, na literatura inglesa, de “drive”.

O modelo dinâmico representa as alterações dessas características durante a operação.

Modelo Dinâmico de Motores CC de Ímã Permanente

O circuito elétrico que representa as características dinâmicas inclui tanto os elementos dissipadores quanto os elementos armazenadores de energia, conforme mostrado na figura abaixo.

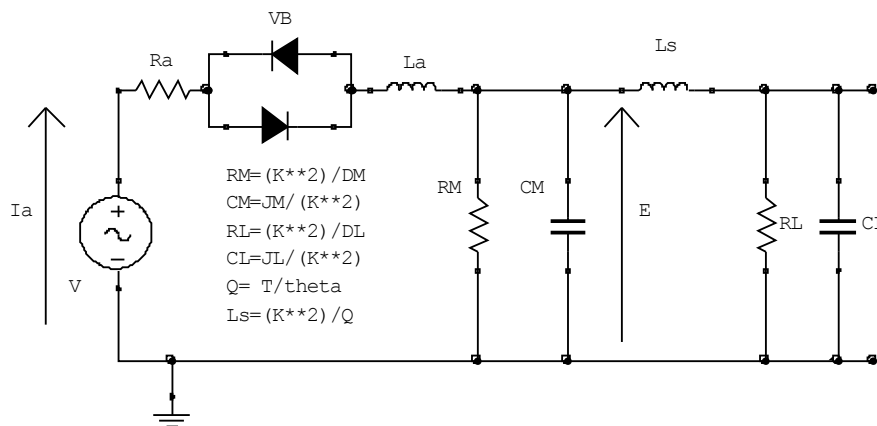


Figura 9: As resistências R_M e R_L representam as perdas de energia do motor e da carga. Os capacitores C_M e C_L representam a inércia do motor e da carga. O indutor L_a representa a indutância da armadura e a resistência R_a representa a resistência elétrica da armadura. Os diodos representam a queda de tensão nas escovas. O indutor L_s representa a torção do eixo, cuja constante de torção Q é igual ao torque T necessário para torcer o eixo de um ângulo θ . A tensão E é representada a força contraeletromotriz, proporcional à velocidade do rotor.

O circuito pode ser colocado como carga do amplificador para estudo da dinâmica do sistema.

As equivalências entre dispositivos elétricos e mecânicos se baseiam na energia. As equações para os elementos do modelo do motor que representam a parte mecânica são deduzidas abaixo.

A representação das inércias do motor e da carga por capacitâncias baseia-se na seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} \cdot J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{C}$$

Onde J é o momento de inércia, ω é a velocidade angular, V é a tensão elétrica e C é a capacitância. Como a força contraeletromotriz E é proporcional à velocidade ω , tem-se:

$$C = J/K^2$$

A representação das perdas de energia do motor e da carga por resistências elétricas baseia-se na seguinte igualdade:

$$E^2 / R = D \omega^2$$

Substituindo-se E por $K\omega$, tem-se

$$R = K^2 / D$$

Onde E é a tensão na resistência, R é a resistência, ω é a velocidade angular e D o coeficiente de atrito.

A representação da torção do eixo do motor por uma indutância baseia-se no fato de que um torque T aplicado ao eixo produz uma torção θ proporcional ao torque:

$$T = Q\theta$$

Onde Q é a constante de proporcionalidade.

A representação da torça do eixo do motor por um indutor baseia-se na igualdade entre a energia armazenada no indutor L_s percorrido pela corrente i e a energia armazenada na torção do eixo:

$$\frac{1}{2} L_s i^2 = \frac{1}{2} Q \theta^2$$

Substituindo-se $T = Ki$ na equação acima tem-se:

$$L_s = \frac{K^2}{Q}$$

Onde K é a constante elétrica K_E do motor.

Geralmente se utiliza um circuito simplificado. Pode-se, inicialmente, eliminar os diodos, que introduzem uma zona-morta (não-linearidade) no modelo, ficando-se com o circuito da Figura 4.

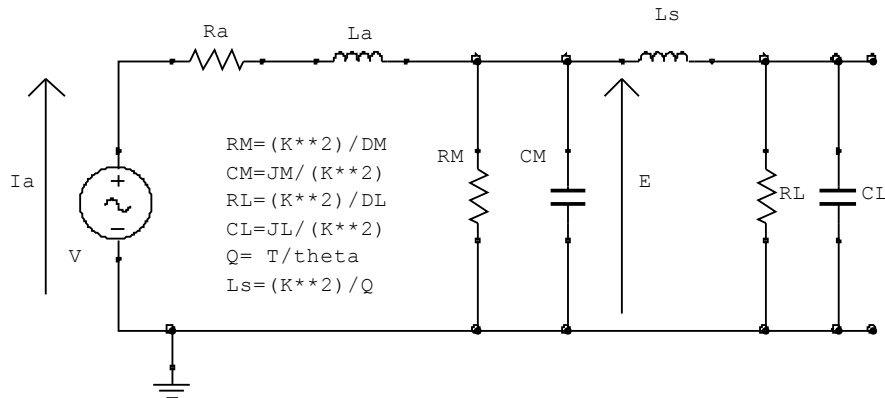


Figura 10: Circuito simplificado com a eliminação da queda de tensão nas escovas (diodos).

Que tem a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{K F(s)} \frac{R_L}{1 + s R_L C_L}$$

Onde $F(s)$ é a impedância do circuito equivalente visto da entrada quando a saída está em aberto, e é igual a:

$$F(s) = (R_a + sL_a) + \frac{R_M(sL_s(1 + sR_L C_L) + R_L)}{(1 + sR_L C_L)(1 + sR_M C_M)sL_s + (R_L + R_M) + s(C_M + C_L)R_M R_L}$$

Desprezando-se também R_M , L_a e L_s tem-se o seguinte circuito equivalente:

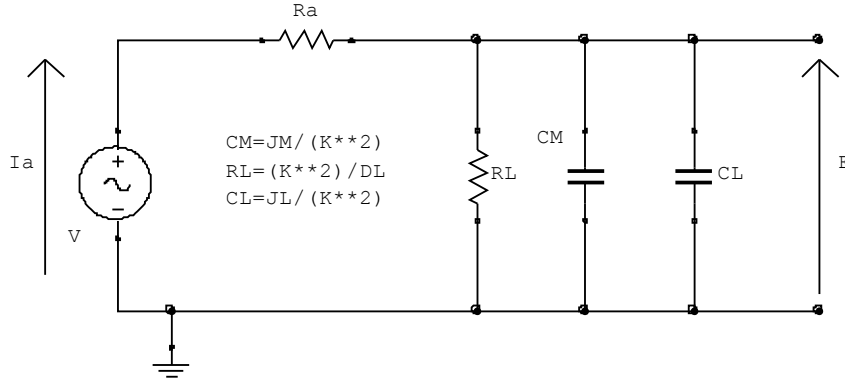


Figura 11: Circuito equivalente de um motor CC de imã permanente desprezando-se a elasticidade do eixo, a indutância da armadura, as perdas internas do motor e a queda de tensão nas escovas.

Neste caso a função de transferência é de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{k}{s\tau + 1}$$

Onde k é a constante de ganho e τ é a constante de tempo dada por:

- 1) Se o coeficiente de atrito viscoso D for desprezado ($D=0$)

$$k = 1/K$$

$$\tau = R_a(J_M + J_L)K^2$$

- 2) Se o coeficiente de atrito viscoso D for considerado ($D \neq 0$)

$$k = \frac{K}{K^2 + R_a D}$$

$$\tau = \frac{R_a(J_M + J_L)}{K^2 + R_a D}$$

Desprezando-se ainda as perdas por atrito e a inércia do motor, mas considerando-se a indutância da armadura o circuito equivalente é:

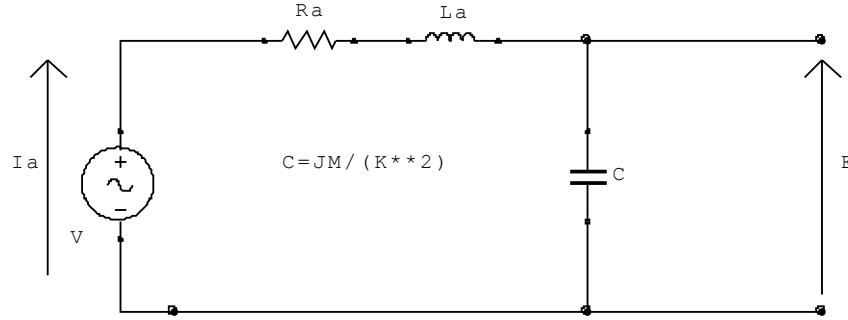


Figura 12: Circuito equivalente de um motor CC de imã permanente desprezando-se a elasticidade do eixo, as perdas internas do motor, a inércia do motor e a queda de tensão nas escovas.

Cuja função de transferência é de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{\left(\frac{K^2}{s J_M} \right) \left(\frac{1}{K} \right)}{R_a + s L_a + \frac{K^2}{s J_M}} = \frac{K}{s^2 L_a J_M + s R_a J_M + K^2}$$

Que escrita na forma padrão de segunda ordem é:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 / K}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Onde

ω_n (frequência angular característica)	$= 1 / \sqrt{(\tau_E \tau_M)}$
ζ (fator de amortecimento)	$= \sqrt{(\tau_M / \tau_E)}$
τ_E (constante de tempo elétrica)	$= L_a / R_a$
τ_M (constante de tempo mecânica)	$= J_M R_a / K^2$

Neste caso, se $\zeta \gg 2$, isto é, se $4\tau_E \ll \tau_M$, a função de transferência pode ser aproximada por:

$$G(s) = \frac{1/K}{(s\tau_E + 1)(s\tau_M + 1)}$$

O que torna mais claro o significado das constantes de tempo elétrica e mecânica.

Se τ_E for extremamente menor que τ_M , é razoável fazer-se $\tau_E = 0$, tendo-se o circuito equivalente abaixo:

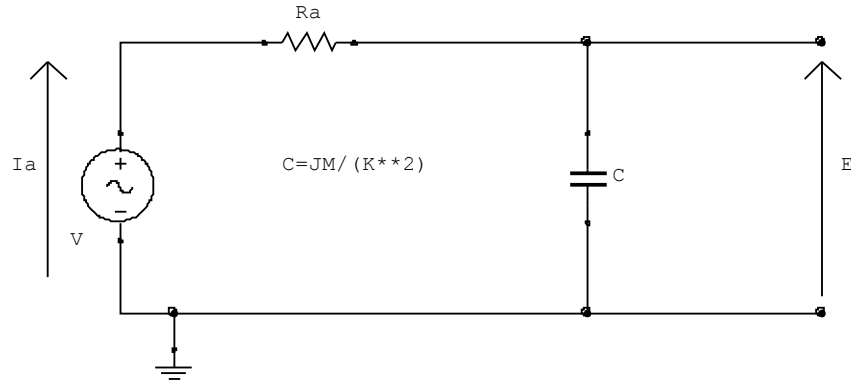


Figura 13: Circuito equivalente de um motor CC de imã permanente desprezando-se a elasticidade do eixo, a indutância da armadura, as perdas internas do motor, a inércia do motor, as perdas na carga e a queda de tensão nas escovas.

Cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1/K}{1 + s\tau}$$

Onde τ é a constante de tempo, no caso a constante mecânica, dada por:

$$\tau_M = J_M R_a / K^2$$

$$G(s) = (1/sCK)/(R_a + 1/sC) = (1/K)/(1 + s\tau_M)$$

Onde τ_M é a constante de tempo do motor:

$$\tau_M = J_M R_a / K^2$$

Função de Transferência do conjunto Motor-Drive

Veremos dois casos elementares: 1) Acionamento por tensão e 2) Acionamento por corrente.

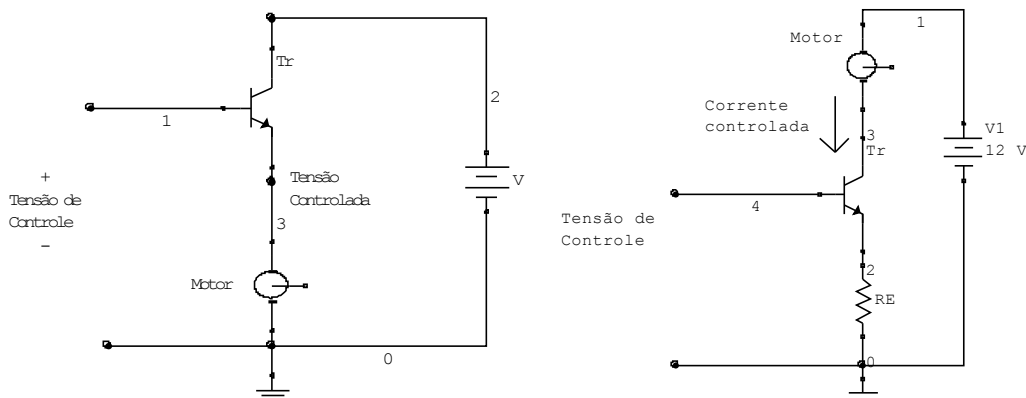


Figura 14: (esquerda) Amplificador de tensão. Funciona como uma fonte de tensão controlada por tensão. (direita) Amplificador de corrente. Funciona como uma fonte de corrente controlada por tensão.

Em ambos os casos assumiremos o modelo de motor da figura abaixo:

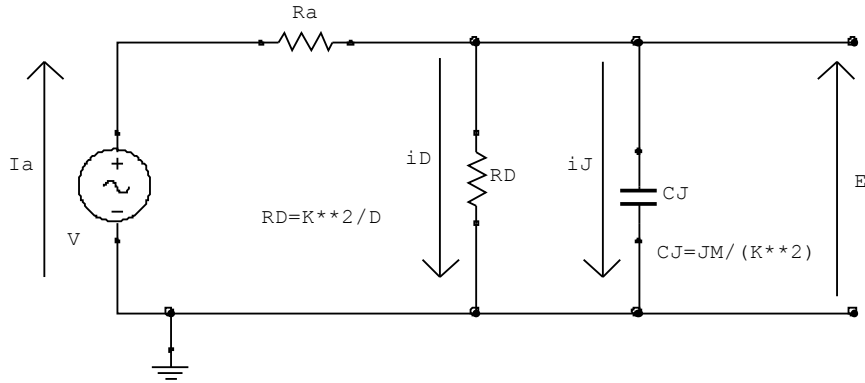


Figura 15: Circuito equivalente de um motor CC de ímã permanente desprezando-se a elasticidade do eixo, a indutância da armadura, a inércia do motor, as perdas na carga e a queda de tensão nas escovas.

No acionamento por tensão, se desprezarmos a queda de tensão v_{be} , poderemos assumir que a tensão no motor será igual à tensão de controle, e poderemos usar as funções de transferência apresentadas anteriormente.

No acionamento por corrente, se desprezarmos a queda de tensão v_{be} , a corrente do motor será diretamente proporcional à tensão de controle $v(t)$:

$$i_E = v/R_E$$

Então a função de transferência pode ser obtida a partir da equação mecânica:

$$m(t) = K i(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + D \omega(t)$$

Onde $K i(t)$ é o torque produzido pela corrente $i(t)$, que acelera o motor.

Cuja transformada de Laplace é:

E cuja função de transferência é:

$$\frac{\Omega(s)}{I(s)} = \frac{K_T}{sJ + D}$$

Substituindo-se $I(s)$ por $V(s)/R_E$, devido ao amplificador, tem-se:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{1}{R_E} \frac{K_T}{sJ + D}$$

Modelo térmico

A dissipação de energia faz os motores se aquecerem. Esse aquecimento é regido pela seguinte equação:

$$Q dt = C d\theta + H\theta dt$$

(calor gerado = calor armazenado + calor dissipado)

Onde **Q** é o calor total gerado, **C** é a capacidade térmica, **H** é o coeficiente de dissipação de calor, **θ** é o aumento de temperatura e **t** é o tempo. Define-se também a resistência térmica como **$R_\theta=1/H$** .

Assumindo-se que o calor gerado é constante e resolvendo-se a equação diferencial tem-se:

$$\theta = A e^{\frac{-Ht}{C}} + \frac{Q}{H}$$

Onde a constante de integração $A = -(Q/H)$. Tem-se então que:

$$\theta = \frac{Q}{H} \left(1 - A e^{\frac{-Ht}{C}} \right)$$

Substituindo-se a elevação total de temperatura Q/H por θ_m e a constante de tempo térmica por τ_θ tem-se:

$$\theta = \theta_m \left(1 - A e^{\frac{-t}{\tau_\theta}} \right)$$

Em que, dada uma potência constante transformada em calor Q , tem-se a elevação de temperatura do motor resultante.

Casamento Motor-Carga

Supondo-se que um servomotor é acoplado à carga por uma caixa de redução e desprezando-se, por simplicidade, as perdas por atrito, tem-se:

$$T = \left(J_M \xi + \frac{J_L}{\xi} \right)$$

Onde **T** é o torque de aceleração e **ξ** é a relação de redução. A redução que minimiza o torque de aceleração é dada por:

$$\xi = \sqrt{\frac{J_L}{J_M}}$$

Substituindo-se essa expressão na equação anterior tem-se:

$$\frac{T^2}{J_M} = 4\alpha^2 J_L$$

Onde o lado esquerdo da equação é relacionado ao motor e o lado direito à carga.

O lado esquerdo da equação acima é chamado de “power rate” quando o torque de pico do motor T_p é usado no lugar de T .

$$\text{power rate} = \frac{T_p^2}{J_M}$$

Assim, determinando-se o momento de inércia da carga J_L e a aceleração necessária, o motor pode ser selecionado pelo “power rate” nos catálogos dos fabricantes. Quando o motor é submetido a acelerações freqüentes deve-se usar o “continuous rated torque” ao invés do torque de pico para calcular o “power rate”.

Exercícios

- Escolha motores para as seguintes cargas:
 - Carga com coeficiente de atrito $D_L=10^{-3}$ Nm/rad/s à velocidade de 600rpm e momento de inércia $J_M=15 \times 10^{-4}$ kg.m².
 - Carga com coeficiente de atrito $D_L=5 \times 10^{-5}$ Nm/rad/s à velocidade de 5000rpm e momento de inércia $J_M=1 \times 10^{-4}$ kg.m².
- Para cada item, selecione um motor ranhurado (Tabela M1), um sem ranhuras (Tabela M2), e um sem núcleo (Tabela M3).
- Calcule a caixa de redução ótima para cada caso.
- Calcule a função de transferência dos motores, dos motores mais as cargas, e dos motores mais as caixas de redução e as cargas.
- Calcule a resposta ao degrau para o motor sem carga, com a carga acoplada diretamente, e com a carga acoplada através da caixa de redução.
- Calcule a curva de aquecimento de cada motor, supondo que a temperatura ambiente é de 32°C, e calcule a temperatura final para velocidade constante para as condições descritas nos itens a e b.

TABELA M1 – Motores CC ranhurados

Table 2.1. Catalogue data for slotted motors

Item	Manufacturers	Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.						Tamagawa Seiki Co., Ltd.					
		UGJMED -10M	UGJMED -40M	UGJMED -40L	UGTMEM -01SB4	UGTMEM -03MB2	UGTMEM -06SB2	TS908N7 -E4	TS908N8 -E3	TS688N6 -E3	TS902N2 -E6	TS668N4 -E6	TS906N2 -E13
Inertia J	10^{-6} kg.m ²	600	1600	2000	1.57	23.5	95	0.918	1.57	2.50	28.4	39.2	234
Electrical time constant τ_E	ms	6	12.2	10.1	0.3	0.8	1.9	0.45	0.3	0.8	1.6	1.3	1.4
Mechanical time constant τ_M	ms	13.7	24.8	28.5	4.1	6.5	11.7	9	7	8	12	12	18
Torque constant K_T	10^{-2} N.m.A ⁻¹	47	37	50.6	3.4	7.5	9.3	3.82	3.92	3.72	6.43	6.47	12.5
Back-e.m.f. constant K_B	10^{-2} V.s.rad ⁻¹	47	37	50.6	3.4	7.5	9.3	3.82	3.92	3.72	6.43	6.47	12.5
Armature resistance R_a	Ω	5.0	1.05	1.3	3.2	1.59	1.02	14.3	6.9	4	1.7	1.3	1.05
Power rate	kW.s ⁻¹	1.5	1.5	2.9	1.5	2.4	1.6	0.20	0.71	0.35	0.87	1.92	1.73
Rated continuous torque T	10^{-1} N.m	0.95	1.53	2.40	0.05	0.24	0.39	0.137	0.333	0.294	1.57	1.96	6.38
Rated rotational speed Ω	r.p.m.	1000	1000	1000	3000	2000	1300	3750	3000	3300	4000	4000	3000
Rated output P_0	W	100	160	250	15	50	53	5	10	10	60	80	200
Rated voltage	V	64	44	60	20.3	24.4	19.8	21	21	18.3	30.8	31.3	43
Weight	kg	6	10.5	12	0.22	1.1	1.6	0.09	0.15	0.4	1.3	1.5	3.0

This table is re-edited from manufacturers' catalogues

TABELA M2 – Motores CC sem ranhuras

Table 2.2. Catalogue data for slotless motors

Item	Manufacturers	Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.			Olympus Opto Electronics Co., Ltd.			
		UGMMEM -06AA1	UGMMEM -13AA-	UGMMEM -25AA1	OMS-312	OMS-512	OMS-1024	OMS-2024
Inertia J	10^{-6} kg m^2	56.7	141	283	0.13	0.22	0.58	1.73
Electrical time constant τ_E	ms	1.1	1.5	1.3	0.09	0.11	0.2	0.28
Mechanical time constant τ_M	ms	4.7	4.6	3.6	10	10	9.5	9.5
Torque constant K_T	$10^{-2} \text{ N m A}^{-1}$	10	17.8	19.3	0.85	0.89	2.3	2.1
Back-e.m.f. constant K_E	$10^{-2} \text{ V s rad}^{-1}$	10	17.8	19.3	0.85	0.89	2.3	2.3
Armature resistance R_a	Ω	0.84	1.03	0.47	5.3	3.6	6.3	2.6
Power rate	kW s^{-1}	6.1	11.5	21.5	0.069	0.11	0.29	0.36
Rated continuous torque T	10^{-1} N m	5.9	13	25	0.03	0.05	0.13	0.25
Rated rotational speed Ω	r.p.m.	3000	3000	3000	10500	10500	9200	9200
Rated output P_0	W	185	401	771	3	5	10	20
Rated voltage	V	40.5	68.5	70.9	12	12	24	24

Notes. Original data is converted to SI units.

Rotor. The coil is evenly fixed using epoxy resin and glass tape (see Fig. 2.14). Alnico magnets are used for field system.

$$\text{Power rate} = \frac{\text{Rated torque}}{J^2}$$

See Section 7.6.1 for power rate.

TABELA M3 – Motores CC sem núcleo

Table 3.3. Catalogue data for moving-coil motors

Items	Manufacturers	Sanyo Denki Co., Ltd.			Yasukawa Electric Mfg. Co., Ltd.			
		H1008 -101	H1009 -101	H1420 -102	UGSMEM -02A	UGSMEM -02B	UGSMEM -03A	UGSMEM -12B
Inertia J	10^{-6} kg m^2	4.9	3.5	76.5	4	4	3.3	4.65
Electrical time constant τ_E	ms	0.17	0.14	0.3	0.16	0.14	0.15	0.16
Mechanical time constant τ_M	ms	2.3	1.5	2.5	2.0	2.0	1.1	0.75
Torque constant K_T	$10^{-2} \text{ N m A}^{-1}$	4.11	4.50	13.3	4.10	8.19	4.49	6.39
Back-e.m.f. constant K_E	$10^{-2} \text{ V s rad}^{-1}$	4.11	4.50	13.3	4.10	8.19	4.49	6.39
Armature resistance R_a	Ω	0.7	0.55	0.7	0.80	3.40	0.68	0.67
Power rate	kW s^{-1}	6.5	20	22	11.1	11.1	34.5	28.8
Rated continuous torque T	N m	0.177	0.265	1.32	0.211	0.211	0.28	0.36
Rated speed Ω	r.p.m.	4500	3200	1120	3000	3000	4000	3000
Rated output power P_0	W	85	90	150	43	44	120	114