

Filtrado de ruido en imágenes con transformada de wavelet

G.Isaías M.Santiago S.Lautaro Andres V.Xavier

Universidad Nacional del Comahue
Buenos Aires 14000, Neuquen

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

1 Resumen

2 Introducción

3 Marco Teórico

- Análisis multiresolución
- Banco de filtros
- Umbralización

4 Implementación

5 Resultados

- Imágenes de prueba
- Parámetros óptimos
- Comparación de filtros
- Imágenes reales

Resumen

Los objetivos de esta presentación son:

- Dar una introducción a las funciones wavelets y transformada wavelet.
- Estudiar y utilizar distintos umbrales para el filtrado de ruido.
- Utilizar la transformada wavelet para filtrar ruido en imágenes.
- Comparar este método de filtrado con otros.

Introducción a la transformada wavelet

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

Analogía con Fourier

$$\text{Fourier} \rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$\text{Wavelet} \rightarrow X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (2)$$

Filtrado de ruido en imágenes con transformada de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

- Análisis multiresolución
- Banco de filtros
- Umbralización

Implementación

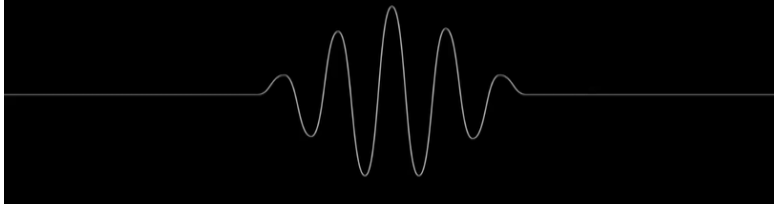
Resultados

- Imágenes de prueba
- Parámetros óptimos
- Comparación de filtros
- Imágenes reales

FOURIER TRANSFORM



WAVELET TRANSFORM



Filtrado de ruido en imágenes con transformada de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

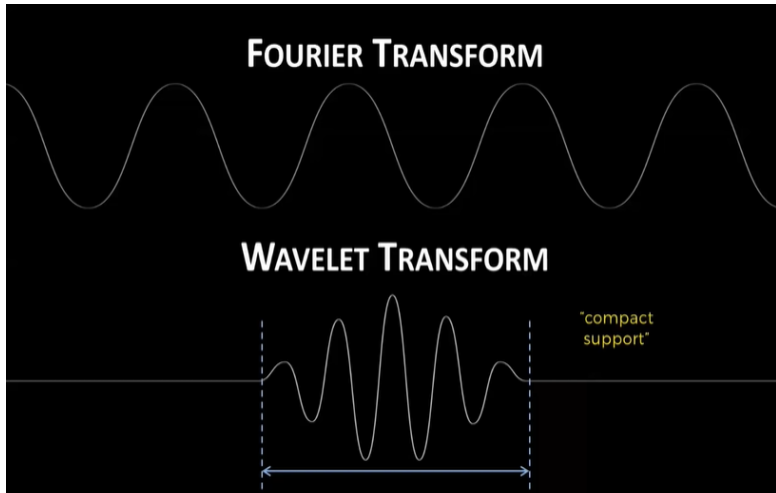
Marco Teórico

Análisis multiresolución
Banco de filtros
Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba
Parámetros óptimos
Comparación de filtros
Imágenes reales



Filtrado de ruido en imágenes con transformada de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

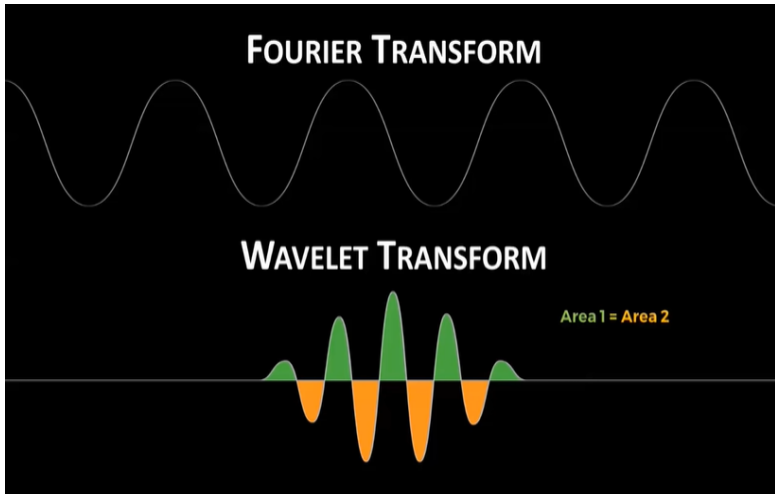
Marco Teórico

Análisis
multiresolución
Banco de filtros
Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba
Parámetros óptimos
Comparación de
filtros
Imágenes reales



Filtrado de ruido en imágenes con transformada de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución
Banco de filtros
Umbralización

Implementación

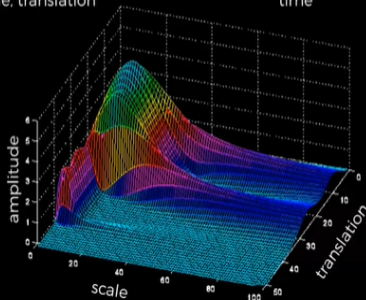
Resultados

Imágenes de prueba
Parámetros óptimos
Comparación de
filtros
Imágenes reales

WAVELET TRANSFORM

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt$$

scale, translation time



Credit: Rowan
University

Filtrado de ruido en imágenes con transformada de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución
Banco de filtros
Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba
Parámetros óptimos
Comparación de
filtros
Imágenes reales

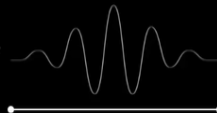
TRANSLATION AND SCALE



high-frequency
scale
(low scale)



low-frequency
scale
(high scale)



Matemáticamente...

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad ; a \neq 0. \quad (3)$$

Si $a = 2$ y $b = 1$:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (4)$$

Las funciones $\{\psi_{j,k}\}_{\{j,k\} \in \mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Análisis multiresolución

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

Un análisis multiresolución para $L^2(\mathbb{R})$ consiste en una secuencia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, una función una función $\phi \in V_0$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

i. Los espacios V_j están anidados, es decir:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$$

ii. $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ y $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$

iii. Para todo $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j-1} = D(V_j)$

iv. $f \in V_0 \rightarrow T_k f \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$

v. $\{T_k \phi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0

Análisis multiresolución

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

Se define a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j-1}

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (5)$$

$$A_{j-1}(t) = A_j(t) + D_j(t) \quad (6)$$

Por otro lado:

$$V_J = V_K \oplus W_K \oplus \dots \oplus W_{J+1}, \quad J < K \quad (7)$$

Finalmente:

$$x(t) = A_J(t) + \sum_{j=-\infty}^J D_j(t) \quad (8)$$

Análisis multiresolución

→ Vemos ejemplo en el toolbox de Matlab
Para continuar:



$$A_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (9)$$

Donde:

$$\beta_{j,k} = \langle x(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (10)$$



$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (11)$$

Donde:

$$\alpha_{j,k} = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (12)$$

La función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son una base ortonormal de W_0

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

¿Cómo solucionamos el inconveniente del producto interno?

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

Estrategia: Algoritmo que relacione las bases ortonormales y la idea de banco de filtros.

Si partimos de la ecuación 5 y recordamos como se descomponían estas funciones, tenemos el inconveniente de los productos internos.

Reescribiendo la ecuación 5

$$A_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi_{j,k}(t) \quad (13)$$

$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t) \quad (14)$$

con

$$a_k^j = \langle A_j(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (15)$$

$$d_k^j = \langle A_j(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (16)$$

Podemos obtener a^j y d^j a partir de A_{j-1} , partiendo del producto interno de A_{j-1} y las funciones de escala y wavelet

$$\langle A_{j-1}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle A_j(t) + D_j, \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (17)$$

$$\langle A_{j-1}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \langle A_j(t) + D_j, \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (18)$$

A su vez sabemos que:

$$A_{j-1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \phi_k^{j-1}(t) \quad (19)$$

con lo que obtenemos que:

$$a_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \langle \phi_{j-1,p}, \phi_{j,k} \rangle \quad (20)$$

$$d_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \langle \phi_{j-1,p}, \psi_{j,k} \rangle \quad (21)$$

Pero tanto los productos internos de $\langle \phi_{j-1,p}, \phi_{j,k} \rangle$
 $\langle \phi_{j-1,p}, \psi_{j,k} \rangle$, son productos internos de funciones conocidas
que ya fueron calculadas por lo cual podríamos tomarlo como
coeficientes conocidos más aún como coeficientes de filtros.

$$\sqrt{2}a_{p-2k} = \langle \phi_{j-1,p}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (22)$$

$$\sqrt{2}b_{p-2k} = \langle \phi_{j-1,p}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (23)$$

Por lo que se definen los coeficientes de los filtros

$$[LD]_n = \sqrt{2}a_{-n} \quad (24)$$

$$[HD]_n = \sqrt{2}b_{-n} \quad (25)$$

Donde LD es un filtro pasa bajos y HD es un filtro pasa altos.

Por lo que reescribimos a a_k^j y d_k^j

$$a_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} [LD]_{2k-p} \quad (26)$$

$$d_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} [HD]_{2k-p} \quad (27)$$

Es posible realizar el proceso inverso y recuperar la señal original

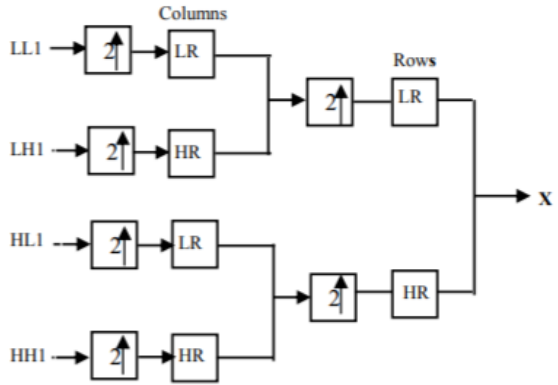


Figura: Reconstrucción con banco de filtros para 2D.

Umbralización

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

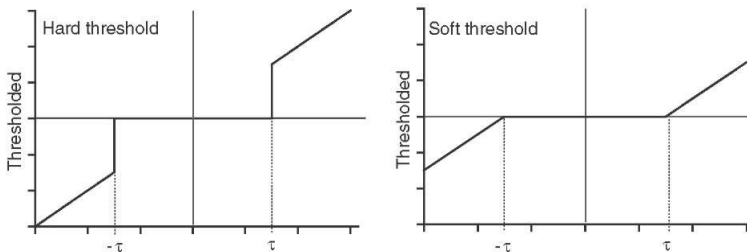


Figura: Modos de umbralización más utilizados

Umbralización

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

Algoritmos para el cálculo del umbral τ :

- VisuShrink
- LevelShrink
- BayesShrink
- NormalShrink
- AWT(Adaptative Wavelet Treshholding)

Pseudocódigo parámetros óptimos

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

- Leer todas las imágenes de una carpeta y normalizar sus valores entre 0 y 1.
- Agregar ruido gaussiano con $\mu = 0$ y varianza σ .
- Seleccionar el parámetro a variar, y dejar constante el resto de parámetros.
- Transformar la imagen utilizando la transformada de wavelet.
- Calcular los umbrales para cada nivel segun el umbral seleccionado.
- Aplicar el modo (soft - hard) y eliminar las componentes menores al umbral.
- Aplicar la antitransformada.
- Calcular el PSNR y el SSIM.

Lenna - $\sigma = 0,3$

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



House - $\sigma = 0,3$

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Wave - $\sigma = 0,3$

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Comparación de Niveles

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

PSNR	noise	1	2	4	6
Lenna	17.65	23.92	27.03	22.29	22.29
House	19.87	22.90	25.58	24.57	23.51
Wave	18.63	23.34	26.70	24.71	24.65
SSIM	noise	1	2	4	6
Lenna	0.518	0.742	0.856	0.847	0.808
House	0.620	0.806	0.882	0.839	0.814
Wave	0.586	0.761	0.839	0.820	0.803

Comparación de Niveles

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución
Banco de filtros
Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba
Parámetros óptimos
Comparación de
filtros
Imágenes reales



Comparación de niveles 2 - 6

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Comparación de modos

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

PSNR	noise	soft	hard
Lenna	17.65	27.03	21.41
House	19.87	25.58	20.20
Wave	18.63	26.70	20.85
SSIM	noise	soft	hard
Lenna	0.518	0.856	0.757
House	0.620	0.882	0.789
Wave	0.586	0.839	0.755

Comparación de modos

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

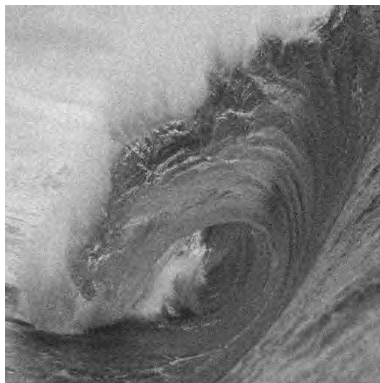
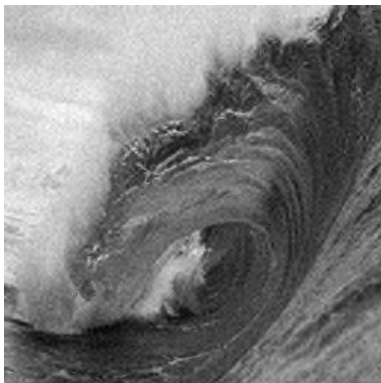
Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Comparación de umbrales

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

PSNR	noise	universal	bayes	level	normal	awt
Lenna	17.65	25.86	25.71	25.40	27.03	25.24
House	19.87	22.91	23.32	23.19	25.58	23.41
Wave	18.63	26.74	26.70	26.86	26.70	25.56
SSIM	noise	universal	bayes	level	normal	awt
Lenna	0.518	0.848	0.847	0.849	0.856	0.838
House	0.620	0.851	0.850	0.857	0.882	0.849
Wave	0.586	0.830	0.829	0.833	0.839	0.823

Comparación de umbrales

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G. Isaías,
M. Santiago,
S. Lautaro
Andres,
V. Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Comparación de la wavelet madre

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

PSNR	noise	haar	db4	sym8
Lenna	17.65	23.44	25.19	27.03
House	19.87	26.38	24.78	25.58
Wave	18.63	24.67	26.87	26.70
SSIM	noise	haar	db4	sym8
Lenna	0.518	0.819	0.853	0.856
House	0.620	0.848	0.875	0.882
Wave	0.586	0.805	0.836	0.839

Comparación de la wavelet madre - db4

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Comparación de la wavelet madre - haar

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Comparación de la wavelet madre - sym8

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Parámetros óptimos

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

level	wavelet	mode	umbral
6	sym8	soft	normal

Resultado del filtrado

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

	noise	wavelet	wiener	gaussian
Lenna	23.10	23.83	26.30	26.14
House	24.80	25.07	28.28	27.99
Wave	24.21	24.33	27.00	26.86
SSIM	noise	wavelet	wiener	gaussian
Lenna	0.647	0.870	0.843	0.835
House	0.740	0.906	0.895	0.886
Wave	0.693	0.887	0.862	0.853

Wavelet

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Wiener

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución
Banco de filtros
Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba
Parámetros óptimos
Comparación de
filtros
Imágenes reales



Gaussiano

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Principe de gales - 1925

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaías,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales



Resonancia magnética

Filtrado de
ruido en
imágenes con
transformada
de wavelet

G.Isaias,
M.Santiago,
S.Lautaro
Andres,
V.Xavier

Resumen

Introducción

Marco Teórico

Análisis
multiresolución

Banco de filtros

Umbralización

Implementación

Resultados

Imágenes de prueba

Parámetros óptimos

Comparación de
filtros

Imágenes reales

