

Proyecto integrador DSP

Filtrado de ruido con transformada de wavelet

Gatica, Isaias
 Martin, Santiago
 Saez, Lautaro Andrés
 Vidman, Xavier Harry

I. Introducción

En el siguiente informe estudiaremos los conceptos de las señales wavelets, transformada de wavelet, y como utilizarlos para filtrar ruido de señales unidimensionales y bidimensionales.

II. Marco teórico

Una Wavelet es una “pequeña onda” que tiene su energía concentrada en un período de tiempo determinado, son de duración definida, irregulares, lo que les permite adaptarse y converger de mejor manera a la señal que se quiere analizar. Las familias de estas wavelet se definen como:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad ; a \neq 0. \quad (1)$$

Donde a y b son los parámetros de escala y traslación respectivamente, se puede ver en la figura 3 como trabajan los parámetros a y b . El parámetro b , asociado a la traslación, hace que la wavelet recorra a la señal $x(t)$ a través del tiempo. Mientras que el parámetro a , permite controlar el ancho de la wavelet.

Por otro lado, la transformada de wavelet queda definida como:

$$C_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (2)$$

Donde $\psi_{a,b}(t)$ es la función que se utiliza para analizar a la señal $x(t)$ que se quiera estudiar. Realizando una analogía con Fourier, el trabajo que realiza $\psi_{a,b}(t)$, es análogo al de las exponenciales complejas $e^{-j\omega t}$. El resultado de esta transformada es una familia de coeficientes $C_f(a, b)$ que representan de mejor manera la señal teniendo en cuenta la wavelet utilizada. Es notorio que el resultado es bidimensional ya que a y b son parámetros independientes. Donde a esta relacionado con la frecuencia que posee la señal y b nos brinda información del momento temporal que se analiza. Esto se entiende mejor al ver la figura ??, donde el gráfico superior muestra como cambia la frecuencia de una señal en función de la traslación b , en específico en b_0 . Y el gráfico inferior muestra el resultado de la transformada, evidenciando en el tiempo b_0 el cambio de frecuencia.

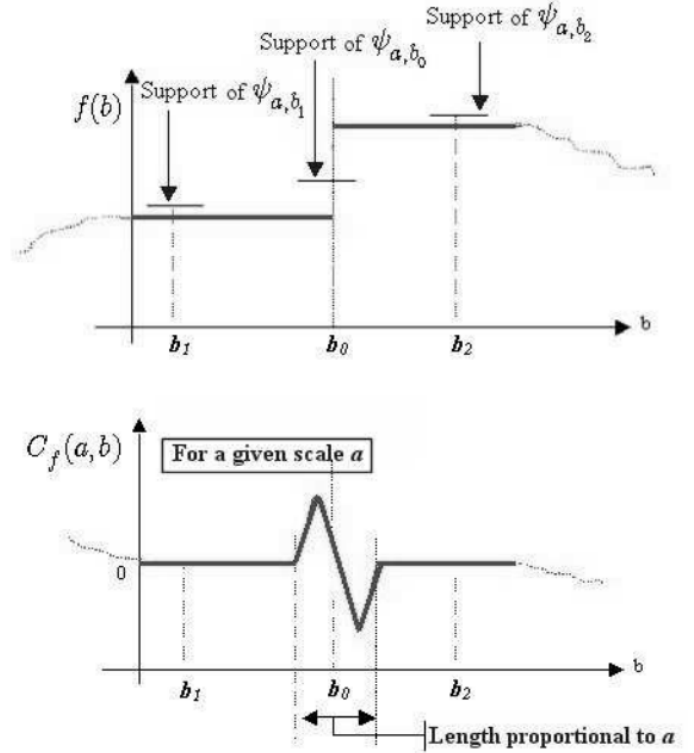


Figura 1: Representación del resultado de transformada wavelet en relación a los coeficientes de traslación y escala

Esto no permite realizar un análisis en tiempo-frecuencia como se mencionó anteriormente. Cabe recalcar que existen diferentes tipos de wavelets madres, en la figura 2 se pueden ver las más utilizadas:

Debido a que los parámetros a y b pueden tomar infinitos valores se los limita utilizando el teorema de sampleo de Shanon para el cual:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Obteniendo la siguiente expresión para la familia de wavelet:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (3)$$

Para que esta función ψ sea una wavelet, las funciones $\{\psi_{j,k}\}_{\{j,k\} \in \mathbb{Z}}$ deben formar una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

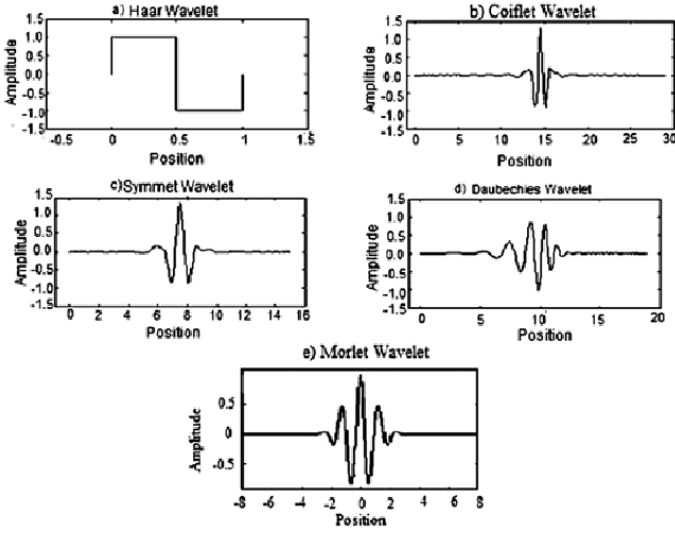


Figura 2: Bases ortonormales de wavelets madres más utilizadas

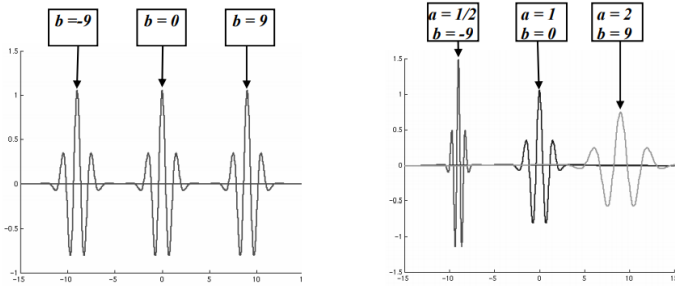


Figura 3: Traslación y escalamiento de una wavelet

Con el fin de explicar este requerimiento es necesario explicar un concepto llamado Analisis Multi-Resolución.

Análisis Multi-Resolución

Un análisis multiresolución para $L^2(\mathbb{R})$ consiste en una secuencia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, y una función $\phi \in V_0$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- i. Los espacios V_j están anidados, es decir:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$$

- ii. $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ y $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$

- iii. Para todo $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j-1} = D(V_j)$

- iv. $f \in V_0 \rightarrow T_k f \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$

- v. $\{T_k \phi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0

Definimos a los espacios V_j como los espacios de aproximación. Por otro lado, definimos a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j-1} esto nos permite plantear la siguiente relación:

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (4)$$

W_j es llamado conjunto de detalle debido a que la proyección ortogonal de la señal en este espacio son

los detalles y V_j espacio de aproximación ya que la proyección ortogonal de la señal sobre este espacio son las aproximaciones. Esto nos permite reescribir la ecuación 4 como:

$$A_{j-1}(t) = A_j(t) + D_j(t) \quad (5)$$

Donde $A_j(t)$ se define como:

$$A_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (6)$$

Donde:

$$\beta_{j,k} = \langle x(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\phi_{j,k}(t)} dt \quad (7)$$

Estos coeficientes definen los promedios locales de la señal. Y $D_j(t)$ se define como:

$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (8)$$

Donde:

$$\alpha_{j,k} = \langle x(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\phi_{j,k}(t)} dt \quad (9)$$

Y estos coeficientes se relacionan con la diferencia entre promedios locales sucesivos (fluctuaciones de la señal). Para dar un cierre a la idea de multi-resolución se profundiza en la ecuación 4 que es el punto mas fuerte de esta técnica. Para esto la reescribimos de la siguiente manera:

$$V_J = V_K \oplus W_K \oplus \dots \oplus W_{J+1}, \quad J < K \quad (10)$$

La cual expresa que podemos pasar de un nivel de resolución J a cualquier nivel superior sumando los sucesivos detalles de los niveles inferiores. Es decir, la aproximación mejora a medida que el nivel J decrece. También observamos que cualquier nivel de resolución V_j se puede expresar como:

$$V_J = \sum_{j=J+1}^{+\infty} W_j \quad (11)$$

por lo tanto cualquier nivel es igual a la suma de sus infinitos detalles. Analogamente cualquier función puede ser expresada como una suma de infinitos detalles:

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \quad (12)$$

A partir de las ecuaciones 11 y 12 se puede ver que:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus (\oplus_{j=-\infty}^J W_j) \quad (13)$$

Y finalmente como el espacio V_j se relaciona con el espacio detalle $A_j(t)$ y el $W_j(t)$ con los espacios de detalles $D_j(t)$:

$$x(t) = A_J(t) + \sum_{j=-\infty}^J D_j(t) \quad (14)$$

Por lo tanto, podemos definir a cualquier señal $x(t)$ como la suma de una aproximación, que vendría ser la parte mas "burda" de la señal, con sus infinitos detalles que serían "toques finales". Esto se observa en la figura 4, donde se utilizo una wavelet symmet 4 y 3

de niveles de descomposición. En rojo la señal original, en azul la aproximación y en verde las tres señales de detalle correspondientes. A partir de esta idea es sencillo

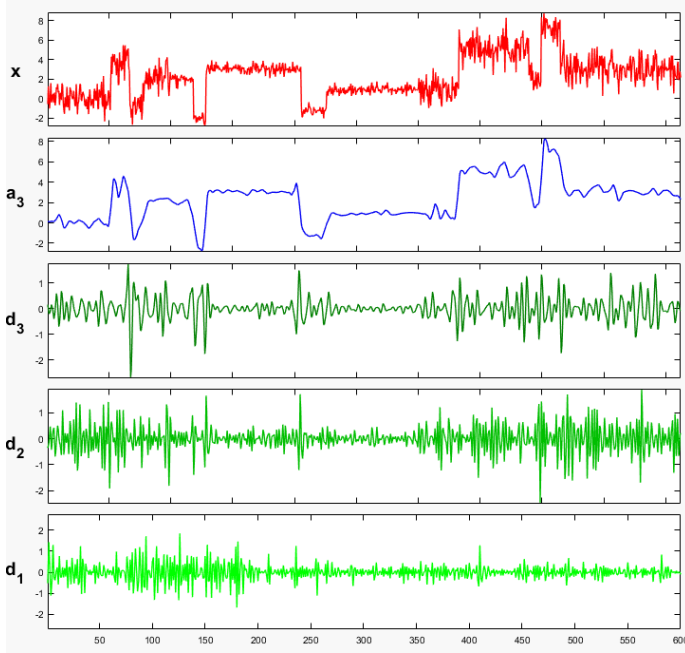


Figura 4: Descomposición de nivel 3 de una señal utilizando una wavelet sym4

imaginarse como la transformada de wavelet se aplica para eliminar el ruido de una señal. Si se busca una forma de filtrar estos coeficientes a partir de parámetros que se relacionan con el ruido de la señal se eliminarían las componentes no deseadas y a la hora de reconstruir la señal, con las componentes que sobreviven al filtro, se obtendría la versión sin ruido. Estos parámetros son llamados umbrales y se definirán mas adelante.

Teniendo en mente la idea del filtrado y aun con el inconveniente de que el producto interno para calcular los coeficientes (ecuaciones 7 y 9) requiere un alto coste computacional, se plantea una estrategia basada en un algoritmo que relacione las bases ortonormales de wavelets y los bancos de filtros. Dicho algoritmo permite calcular los coeficientes a^j y d^j a partir de los coeficientes de aproximación de una escala anterior de resolución, es decir los a^{j-1} , siendo estos los coeficientes que representan de manera perfecta la señal a analizar. Para llegar a esta relación se parte de la ecuación 5 donde:

$$A_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi_{j,k}(t) \quad (15)$$

$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t) \quad (16)$$

con

$$a_k^j = \langle A_j(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (17)$$

$$d_k^j = \langle A_j(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (18)$$

Si deseamos obtener a_k^j y d_k^j a partir de A_{j-1} , para ello realizamos el producto interno A_{j-1} y la función de escala y wavelet

$$\langle A_{j-1}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle A_j(t) + D_j, \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (19)$$

$$\langle A_{j-1}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \langle A_j(t) + D_j, \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (20)$$

Operando matemáticamente (Ver anexo) llegamos a que:

$$a_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \langle \psi_{j-1,p}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \sqrt{2} a_{p-2k} \quad (21)$$

$$d_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \langle \psi_{j-1,p}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \sqrt{2} b_{p-2k} \quad (22)$$

Que se asemeja a la sumatoria de convolución