

# Proyecto integrador DSP

## Filtrado de ruido con transformada de wavelet

Gatica, Isaias  
 Martin, Santiago  
 Saez, Lautaro Andrés  
 Vidman, Xavier Harry

### I. Introducción

En el siguiente informe estudiaremos los conceptos de las señales wavelets, transformada de wavelet, y como utilizarlos para filtrar ruido de señales unidimensionales y bidimensionales.

### II. Marco teórico

Una Wavelet es una “pequeña onda” que tiene su energía concentrada en un período de tiempo determinado, son de duración definida, irregulares, lo que les permite adaptarse y converger de mejor manera a la señal que se quiere analizar. Las familias de estas wavelet se definen como:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad ; a \neq 0. \quad (1)$$

Donde  $a$  y  $b$  son los parámetros de escala y traslación respectivamente, se puede ver en la figura 3 como trabajan los parámetros  $a$  y  $b$ . El parámetro  $b$ , asociado a la traslación, hace que la wavelet recorra a la señal  $x(t)$  a través del tiempo. Mientras que el parámetro  $a$ , permite controlar el ancho de la wavelet.

Por otro lado, la transformada de wavelet queda definida como:

$$C_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (2)$$

Donde  $\psi_{a,b}(t)$  es la función que se utiliza para analizar a la señal  $x(t)$  que se quiera estudiar. Realizando una analogía con Fourier, el trabajo que realiza  $\psi_{a,b}(t)$ , es análogo al de las exponenciales complejas  $e^{-j\omega t}$ . El resultado de esta transformada es una familia de coeficientes  $C_f(a, b)$  que representan de mejor manera la señal teniendo en cuenta la wavelet utilizada. Es notorio que el resultado es bidimensional ya que  $a$  y  $b$  son parámetros independientes. Donde  $a$  esta relacionado con la frecuencia que posee la señal y  $b$  nos brinda información del momento temporal que se analiza. Esto se entiende mejor al ver la figura ??, donde el gráfico superior muestra como cambia la frecuencia de una señal en función de la traslación  $b$ , en específico en  $b_0$ . Y el gráfico inferior muestra el resultado de la transformada, evidenciando en el tiempo  $b_0$  el cambio de frecuencia.

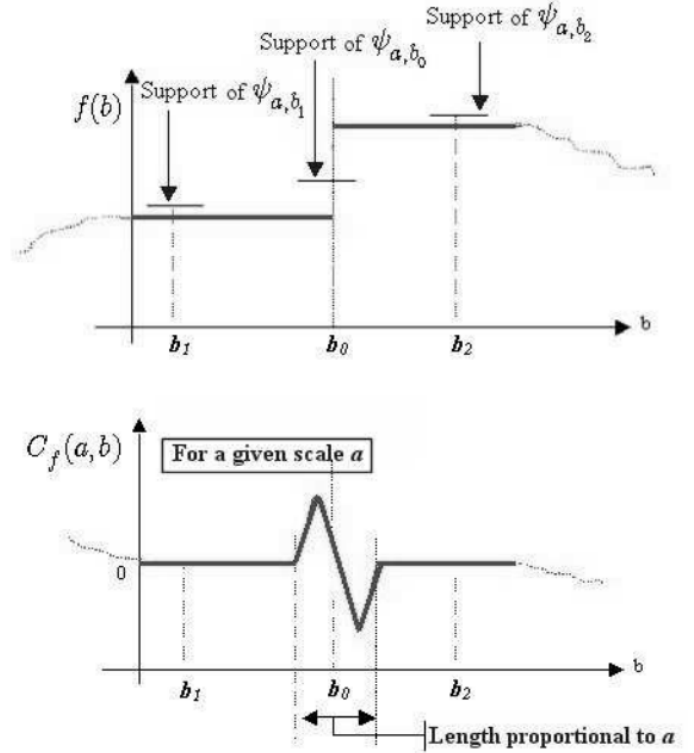


Figura 1: Representación del resultado de transformada wavelet en relación a los coeficientes de traslación y escala

Esto no permite realizar un análisis en tiempo-frecuencia como se mencionó anteriormente. Cabe recalcar que existen diferentes tipos de wavelets madres, en la figura 2 se pueden ver las más utilizadas:

Debido a que los parámetros  $a$  y  $b$  pueden tomar infinitos valores se los limita utilizando el teorema de muestreo de Shannon para el cual:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Obteniendo la siguiente expresión para la familia de wavelet:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (3)$$

Para que esta función  $\psi$  sea una wavelet, las funciones  $\{\psi_{j,k}\}_{\{j,k\} \in \mathbb{Z}}$  deben formar una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .

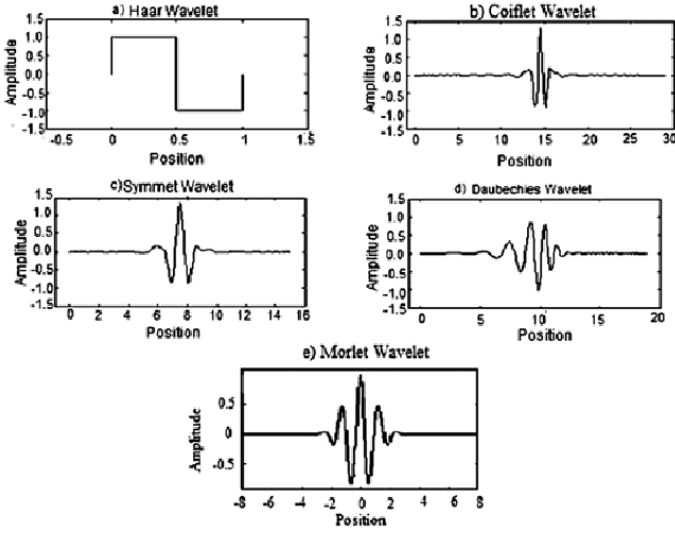


Figura 2: Bases ortonormales de wavelets madres más utilizadas

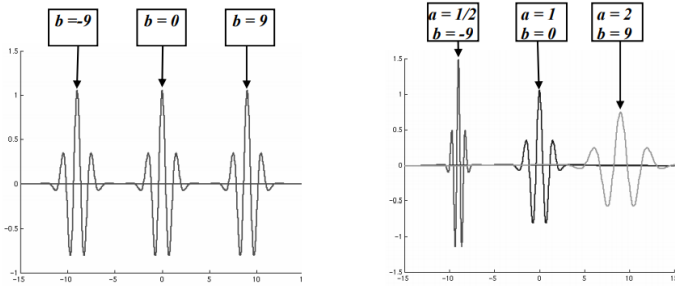


Figura 3: Traslación y escalamiento de una wavelet

Con el fin de explicar este requerimiento es necesario explicar un concepto llamado Analisis Multi-Resolución.

### Análisis Multi-Resolución

Un análisis multiresolución para  $L^2(\mathbb{R})$  consiste en una secuencia de subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , y una función  $\phi \in V_0$  tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- i. Los espacios  $V_j$  están anidados, es decir:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$$

- ii.  $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  y  $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$

- iii. Para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_{j-1} = D(V_j)$

- iv.  $f \in V_0 \rightarrow T_k f \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$

- v.  $\{T_k \phi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_0$

Definimos a los espacios  $V_j$  como los espacios de aproximación. Por otro lado, definimos a  $W_j$  como el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j-1}$  esto nos permite plantear la siguiente relación:

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (4)$$

$W_j$  es llamado conjunto de detalle debido a que la proyección ortogonal de la señal en este espacio son

los detalles y  $V_j$  espacio de aproximación ya que la proyección ortogonal de la señal sobre este espacio son las aproximaciones. Esto nos permite reescribir la ecuación 4 como:

$$A_{j-1}(t) = A_j(t) + D_j(t) \quad (5)$$

Donde  $A_j(t)$  se define como:

$$A_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (6)$$

Donde:

$$\beta_{j,k} = \langle x(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\phi_{j,k}(t)} dt \quad (7)$$

Estos coeficientes definen los promedios locales de la señal. Y  $D_j(t)$  se define como:

$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (8)$$

Donde:

$$\alpha_{j,k} = \langle x(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\phi_{j,k}(t)} dt \quad (9)$$

Y estos coeficientes se relacionan con la diferencia entre promedios locales sucesivos (fluctuaciones de la señal). Para dar un cierre a la idea de multi-resolución se profundiza en la ecuación 4 que es el punto mas fuerte de esta técnica. Para esto la reescribimos de la siguiente manera:

$$V_J = V_K \oplus W_K \oplus \dots \oplus W_{J+1}, \quad J < K \quad (10)$$

La cual expresa que podemos pasar de un nivel de resolución  $J$  a cualquier nivel superior sumando los sucesivos detalles de los niveles inferiores. Es decir, la aproximación mejora a medida que el nivel  $J$  decrece. También observamos que cualquier nivel de resolución  $V_j$  se puede expresar como:

$$V_J = \sum_{j=J+1}^{+\infty} W_j \quad (11)$$

por lo tanto cualquier nivel es igual a la suma de sus infinitos detalles. Analogamente cualquier función puede ser expresada como una suma de infinitos detalles:

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \quad (12)$$

A partir de las ecuaciones 11 y 12 se puede ver que:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus (\oplus_{j=-\infty}^J W_j) \quad (13)$$

Y finalmente como el espacio  $V_j$  se relaciona con el espacio detalle  $A_j(t)$  y el  $W_j(t)$  con los espacios de detalles  $D_j(t)$ :

$$x(t) = A_J(t) + \sum_{j=-\infty}^J D_j(t) \quad (14)$$

Por lo tanto, podemos definir a cualquier señal  $x(t)$  como la suma de una aproximación, que vendría ser la parte mas "burda" de la señal, con sus infinitos detalles que serían "toques finales". Esto se observa en la figura 4, donde se utilizo una wavelet symmet 4 y 3

de niveles de descomposición. En rojo la señal original, en azul la aproximación y en verde las tres señales de detalle correspondientes. A partir de esta idea es sencillo

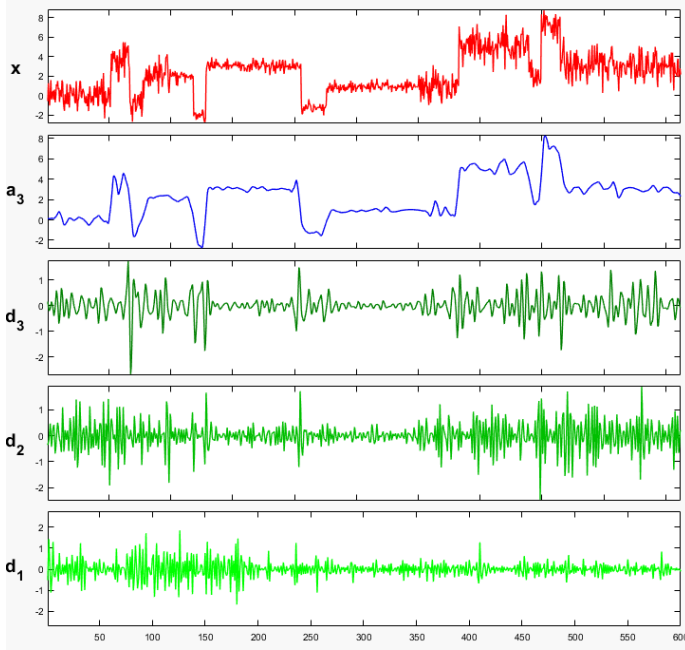


Figura 4: Descomposición de nivel 3 de una señal utilizando una wavelet sym4

imaginarse como la transformada de wavelet se aplica para eliminar el ruido de una señal. Si se busca una forma de filtrar estos coeficientes a partir de parámetros que se relacionan con el ruido de la señal se eliminarían las componentes no deseadas y a la hora de reconstruir la señal, con las componentes que sobreviven al filtro, se obtendría la versión sin ruido. Estos parámetros son llamados umbrales y se definirán mas adelante.

Teniendo en mente la idea del filtrado y aun con el inconveniente de que el producto interno para calcular los coeficientes (ecuaciones 7 y 9) requiere un alto coste computacional, se plantea una estrategia basada en un algoritmo que relacione las bases ortonormales de wavelets y los bancos de filtros. Dicho algoritmo permite calcular los coeficientes  $a^j$  y  $d^j$  a partir de los coeficientes de aproximación de una escala anterior de resolución, es decir los  $a^{j-1}$ , siendo estos los coeficientes que representan de manera perfecta la señal a analizar. Para llegar a esta relación se parte de la ecuación 5 donde:

$$A_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi_{j,k}(t) \quad (15)$$

$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t) \quad (16)$$

con

$$a_k^j = \langle A_j(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (17)$$

$$d_k^j = \langle A_j(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (18)$$

Si deseamos obtener  $a_k^j$  y  $d_k^j$  a partir de  $A_{j-1}$ , para ello realizamos el producto interno  $A_{j-1}$  y la función de escala y wavelet

$$\langle A_{j-1}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle A_j(t) + D_j, \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (19)$$

$$\langle A_{j-1}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \langle A_j(t) + D_j, \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (20)$$

Operando matemáticamente (Ver anexo) llegamos a que:

$$a_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \langle \psi_{j-1,p}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \sqrt{2} a_{p-2k} \quad (21)$$

$$d_k^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \langle \psi_{j-1,p}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^{j-1} \sqrt{2} b_{p-2k} \quad (22)$$

Que se asemeja a la sumatoria de convolución

### III. Umbrales

Como se menciona anteriormente, es necesaria determinar parámetros llamados umbrales para realizar el filtrado de los coeficientes. Con el fin de seguir la nomenclatura utilizada en la bibliografía aplicada, a este método se lo denominará umbralización. La umbralización tiene dos características importantes a definir, el tipo de umbralización y las distintas forma de calcular el valor del umbral. En la figura 5 se observa los tipos de umbralización hard y soft, y el valor del umbral esta notado con  $\tau$ . El tipo de umbralización dura (hard) anula todos los coeficientes que estén en el rango  $[-\tau, \tau]$  y no modifica el resto. Lo mismo cumple el umbralizado suave (soft) con la diferencia que los coeficientes fuera de este rango se ven reducidos linealmente. El tipo hard reproduce de mejor forma los picos y discontinuidades si se piensa una señal en una dimensión, o por ejemplo, los bordes si se piensa en imágenes. Por otro lado, el tipo soft genera resultados mas suaves en la aproximación de la señal, lo que es satisfactorio si no se busca un resultado discontinuo. En las imágenes este método genera un efecto de difuminado justamente para suavizar el resultado final.

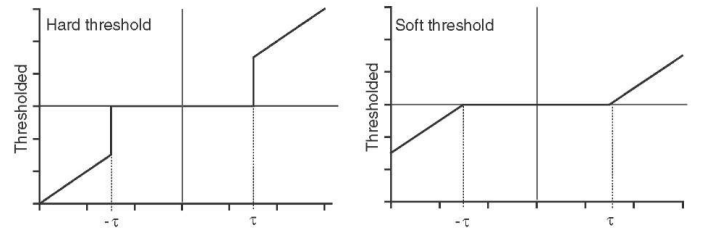


Figura 5: Tipos de umbralización más utilizados

Ahora, para el cálculo del umbral  $\lambda$  existen distintos algoritmos de los cuales se desarrollan los siguientes:

III-1. VisuShrink: Este algoritmo, mas conocido como umbral universal se calcula con la siguiente ecuación:

$$t_{univ} = \sigma_n \sqrt{2 \ln(n)} \quad (23)$$

Donde  $\sigma$  es la varianza del ruido y  $n$  es la dimensión de la señal. Esta ecuación se deriva a partir de que es conocido que el máximo valor de una señal que siga una distribución gaussiana con media cero y varianza  $\sigma^2$ , ( $x \sim N(0, \sigma^2)$ ) va ser menor que el valor  $\sigma_n \sqrt{2 \log(n)}$  con una probabilidad que tiene a uno cuando  $n$  tiene a infinito. Por lo tanto, este umbral igualara a cero los coeficientes que presenten ruido puro con una alta probabilidad. La simpleza del algoritmo lo hace de los mas utilizados, sin embargo al solo tener en cuenta las características del ruido y de la dimensión de la imagen suele suavizar mucho la imagen. Esto se debe a que elimina muchos coeficientes de información útil al intentar eliminar el ruido presente.

Antes de continuar con el siguiente umbral, cabe mencionar porque los umbrales depende de la dimensión de la señal. Es intuitivo que el umbral dependa de la varianza del ruido pero no tan así que dependa de la dimensión, esto se debe a que mientras mayor sea la dimensión aumenta la redundancia de la señal. Por lo tanto hay menos información nueva (al aumentar la dimensión) que la información de base. Desde el punto de vista de wavelet, esto no genera que se aumenten los coeficientes importantes. Por lo tanto existe una relación proporcional entre los coeficientes de ruido y la dimensión de la señal, lo que implica la necesidad de agregarlo al cálculo del umbral.

III-2. LevelShrink: A raíz de que el algoritmo VisuShrink aplicada el mismo umbral a cada nivel de descomposición se introduce el método LevelShrink que depende de la escala de cada nivel:

$$t_{level} = \sigma_n \sqrt{2 \ln(n)} 2^{-(J-j)/2} \quad (24)$$

Donde  $J$  es el número total de niveles de descomposición y  $j$  el nivel particular. Si bien esto genera un umbral que se adapta de mejor manera, sigue sin tener en cuenta los detalles de la señal a analizar.

III-3. BayesShrink: Este umbral tiene como base minimizar la inferencia bayesiana y sus ecuaciones son:

$$t_{bayes} = \begin{cases} \sigma_n^2 / \sigma_s & \text{si } \sigma_n^2 < \sigma_y^2 \\ \max(|y_i|) & \text{si } \sigma_n^2 \geq \sigma_y^2 \end{cases} \quad (25)$$

Donde  $\sigma_n^2 / \sigma_s$  es la varianza del ruido,  $\sigma_y^2$  es la varianza de la señal original y  $\sigma_s$  es la varianza de la señal pura que se estima con la siguiente ecuación:

$$\sigma_{sk} = \sqrt{\max \left( \left( \frac{1}{\text{size}(H_k)} \sum_{y_i \in H_k} y_i^2 \right) - \sigma_n^2, 0 \right)} \quad (26)$$

Este algoritmo tiene como ventaja respecto a los anteriores que utiliza información de la señal a analizar pero es necesario conocer información de la imagen original (sin ruido).

III-4. NormalShrink: Este algoritmo suple la desventaja de BayesShrink ya que no se necesita información de la señal sin ruido y presenta todas las ventajas incorporadas de utilizar información de la señal a analizar. Se lo define como:

$$t_{normal} = \frac{\beta_k \sigma_n^2}{\sigma_s} \quad (27)$$

Donde:

$$\beta_k = \sqrt{\frac{\ln(\text{size}(H_k))}{J}} \quad (28)$$

Y  $\sigma_s$  es el desvío estandar de la señal de cada nivel.

III-5. AWT(Adaptative Wavelet Treshholding: Por último, se presenta el algoritmo AWT el cual depende de la media aritmética y de la media geométrica de los coeficientes de la señal en cada nivel de análisis. Se lo define como:

$$t_{AWT} = c \sigma_n - |AM - GM| \quad (29)$$

Donde  $AM$  es la media aritmética,  $GM$  es la media geométrica y  $c = 2^{J-j}$ .