

1. Ejercicio 3

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \quad (1)$$

1.1. Calculo de la DTFT y la DFT

Utilizando la defnición de la DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2)$$

Donde:

$$\omega = 2\pi f \quad (3)$$

Llegamos a:

$$X(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} \quad (4)$$

Para el cálculo de la DFT utilizamos la ecuación:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_k n} \quad (5)$$

Donde:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} \quad (6)$$

Obteniendo:

$$X[k] = 1 + e^{-\frac{j2\pi k}{4}} + e^{-\frac{j4\pi k}{4}} + e^{-\frac{j6\pi k}{4}} \quad (7)$$

Al comparar los resultados, ecuación 4 con ecuación 7, se observa que la diferencia recae en la frecuencia. Debido a esto, en la ecuación 4 la frecuencia asociada es la ecuación 3 que toma valores para todo f dando como resultado un espectro continuo en frecuencia. Esto es un inconveniente a la hora de realizar el cálculo numérico (por los infinitos valores). Por esto para la *DFT* se discretiza la frecuencia angular dando como resultado la ecuación 6. Se concluye que es imposible encontrar de forma exacta la *DTFT* a partir de la *DFT*. En otras palabras, se puede decir que la *DFT* muestrea el espectro continuo de la *DTFT*.

1.2. Calculo de la DFT con distintos puntos

Se generaron las señales con $N=3$, $N=4$ y $N=8$ y con dichas señales se calculo la DFT mediante la *fft* y se obtuvieron los graficos presentando en la figura 1:

Se añadio en los graficos una señal punteada que corresponde al espectro real de la señal $x[n]$. Se puede apreciar que los valores que toma la DFT coinciden con el valor de la envolvente en dichos puntos, por lo que seria posible aproximar la DTFT con la DFT.

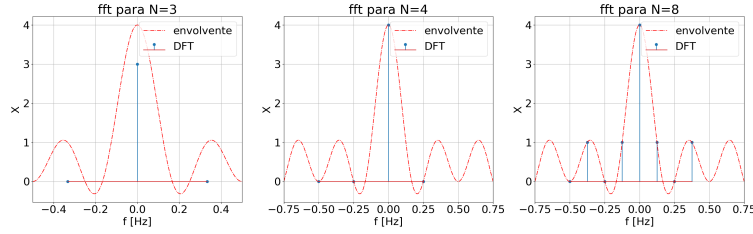


Figura 1: Espectros generados con 3,4 y 8 puntos.

1.3. DTF con zero-padding

Se realizó ahora nuevamente el cálculo de la DFT de las señales de la sección anterior pero ahora con el objetivo de estudiar el efecto del *zero-padding*, el cual consiste en rellenar con ceros una señal hasta un número determinado de puntos. Se tomaron las señales anteriores y se rellenaron con ceros hasta tener 256 puntos para luego calcular su DFT, los resultados obtenidos se muestran en la figura 2. Ahora es posible observar de mejor manera, lo comentado en el

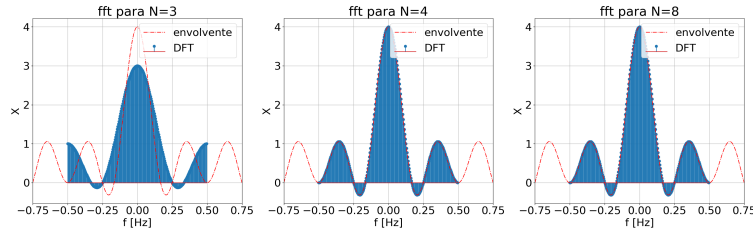


Figura 2: *fft* con zero-padding hasta 256 puntos para 3,4 y 8 puntos de la señal $x[n]$

apartado anterior, como el zero-padding no agrega más información al espectro sino que permite una mejor visualización del mismo, cuando se toman 3 puntos de la señal original, no se llega a tomar la señal completa si no que se recorta, por lo que el espectro si bien un aspecto similar, es más ancho y de menor amplitud (al ser un cajón de 3 puntos y no de 4 puntos como la señal original), y para los casos de $N=4$ y $N=8$ que si se utiliza toda la información de la señal $x[n]$ se ve claramente que los valores de la DFT corresponden a muestras de la DTFT.

1.4. Cálculo exacto de la DTFT

Para obtener la DTFT a partir de la *fft*, la cual se puede asociar a un muestreo del espectro de la DTFT, mediante la siguiente relación

$$X[k] = X_{DTFT} \left(\frac{2\pi}{N} k \right) \quad (8)$$

Donde N es el numero de puntos que se utilizan para calcular la DFT.

El calculo de la DTFT mediante el algoritmo de la *fft* nunca sera exacto. Debido a que la DTFT es continua en frecuencia mientras que la DFT no. Pero los valores obtenidos de la *fft*, pueden ser considerados como muestras del espectro siempre que se cumpla que

1. Señal sea de duracion finita (L).
2. Utilizar al menos L puntos.

1.5. codigo para la obtencion de la DTFT

Resultado teórico de cada una de las ecuaciones:

i)

$$x_1[n] = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq n \leq 4 \\ 10 - n & \text{si } 5 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad (9)$$

Por tabla se llega al resultado:

$$X_1(e^{j\omega}) = 25 \text{sinc}^2 \left(\frac{5\omega}{2\pi} \right) e^{-j\omega} \quad (10)$$

ii)

$$x_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq n \leq +2, \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad (11)$$

Mediante el uso de tablas de transformada se llegó a que el espectro está dado por:

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\frac{\omega 5}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \quad (12)$$

iii)

$$x_3[n] = (-0,5)^n u[n] \quad (13)$$

Donde nuevamente su espectro se obtuvo por tablas, dando como resultado:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0,5e^{j\omega}} \quad (14)$$

Mediante la implementacion del codigo se calculo la DTFT y se obtuvieron las siguiente figuras:

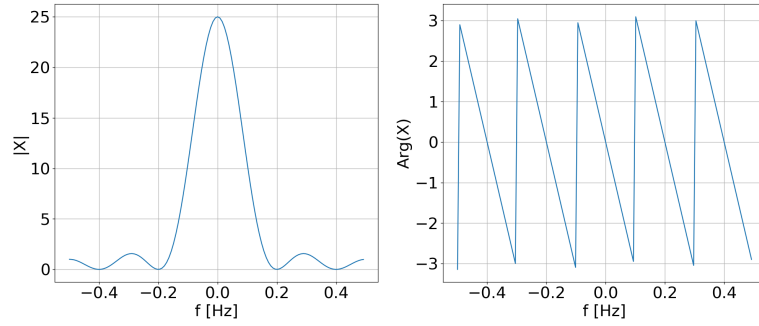


Figura 3: Espectro de la señal $x_1[n]$ mediante el algoritmo.

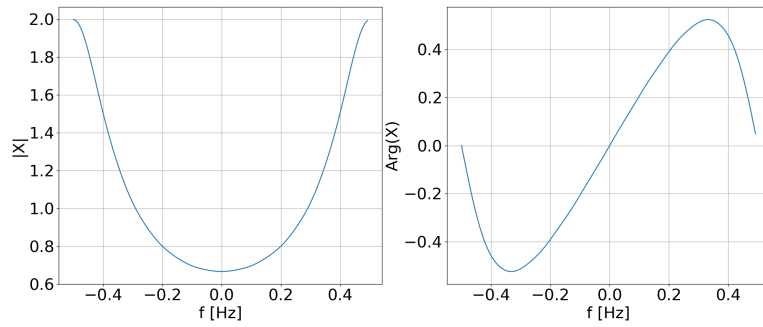


Figura 4: Espectro de la señal $x_2[n]$ mediante el algoritmo.

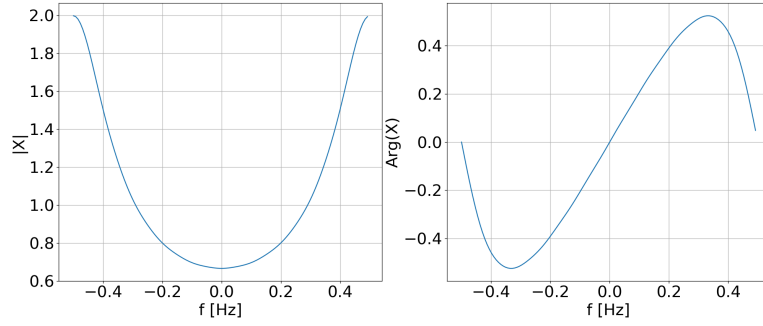


Figura 5: Espectro de la señal $x_3[n]$ mediante el algoritmo.

Se puede apreciar que los espectros representados en las figuras 3,4 y 5 coinciden de manera aproximada con lo obtenido de manera teorica.