

Formulario: Producto punto, Producto cruz, Leyes de Newton y Movimiento circular (ampliado)

1) Producto punto (producto escalar)

Fórmulas principales:

- En componentes (vectores en \mathbb{R}^n):

$$u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + \dots$$

- Forma geométrica:

$$u \cdot v = ||u|| ||v|| \cos(\theta)$$

- Proyección de u sobre v:

Proyección escalar: $\text{proj}_v(u) = (u \cdot v) / ||v||$.

Proyección vectorial: $\text{proj}_{v_vec}(u) = ((u \cdot v) / ||v||^2) v$.

- Trabajo realizado por una fuerza F que desplaza s:

$$W = F \cdot s = ||F|| ||s|| \cos(\theta)$$

Significado de las variables:

- u_x, u_y, u_z : componentes del vector u.
- v_x, v_y, v_z : componentes del vector v.
- $||u||, ||v||$: magnitudes de los vectores.
- θ : ángulo entre u y v.
- W: trabajo (Joules si F en N y s en m).

Propiedades:

- Conmutativo; bilineal; $u \cdot u = ||u||^2$.
- Si $u \cdot v = 0$ y ninguno es cero, son ortogonales.

Ejemplo:

- $u = (2, -1, 3), v = (4, 5, -1)$
 $u \cdot v = 2*4 + (-1)*5 + 3*(-1) = 8 - 5 - 3 = 0$. Resultado final: 0 → ortogonales.

2) Producto cruz (producto vectorial)

Fórmulas principales (solo en \mathbb{R}^3):

- Determinante (concepto):

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

- Componentes:

$$u \times v = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x).$$

- Magnitud / área del paralelogramo:

$$||u \times v|| = ||u|| ||v|| |\sin(\theta)|.$$

- Torque (momento) generado por una fuerza F aplicada en el punto r:

$$\tau = r \times F.$$

- Producto triple escalar (volumen):

$$u \cdot (v \times w) \text{ (volumen del paralelepípedo formado por } u, v, w).$$

Significado de las variables:

- i, j, k : vectores unitarios en x,y,z.
- θ : ángulo entre u y v.
- τ : torque (N·m).

Propiedades:

- Anticonmutativo: $u \times v = - (v \times u)$.
- $u \times v$ es perpendicular a ambos u y v.
- Distributiva: $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Ejemplo:

$$u = (1, 2, 3), \quad v = (4, 5, 6)$$
$$u \times v = (-3, 6, -3).$$

3) Leyes de Newton y fórmulas relacionadas

Primera ley (inercia)

- Si $\sum F = 0 \rightarrow$ velocidad constante (incluye reposo).

Segunda ley (dinámica)

- Vectorial: $\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$.
- Componentes: $\sum F_x = m a_x$, $\sum F_y = m a_y$.

Fuerzas comunes:

- Peso: $\mathbf{W} = m \mathbf{g}$ (vector mg hacia abajo).
- Normal: \mathbf{N} (perpendicular a la superficie).
- Fricción estática máxima: $f_{s,max} = \mu_s N$.
- Fricción cinética: $f_k = \mu_k N$.
- Fuerza elástica (resorte): $F_s = -k x$ (Hooke).
- Ley de gravitación universal: $F_g = G m_1 m_2 / r^2$.

Tercera ley (acción-reacción)

- $F_{AB} = - F_{BA}$.

Dinámica rotacional

- Torque: $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
- Momento de inercia: $I = \sum m_i r_i^2$ o $I = \int r^2 dm$.
- Ecuación rotacional análoga: $\sum \tau = I \alpha$.

Ejemplo (segunda ley):

- $m = 2 \text{ kg}$, $F_{\text{net}} = 10 \text{ N} \rightarrow a = F/m = 5 \text{ m/s}^2$.

4) Movimiento circular

4.1 Movimiento circular uniforme (MCU)

Fórmulas:

- $v = \omega * r$.
- $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$.
- $T = 2\pi / \omega$.
- $f = 1 / T$.
- $a_c = v^2 / r = \omega^2 * r$.
- $v = 2\pi r / T$.

Variables:

- r : radio (m).
- v : velocidad lineal tangencial (m/s).
- ω : velocidad angular (rad/s).

- T: período (s).
- f: frecuencia (Hz).
- a_c : aceleración centrípeta (m/s^2).

Ejemplo MCU:

- $r = 0.5 \text{ m}$, $T = 2 \text{ s}$
 $\omega = 2\pi / T = \pi \text{ rad/s}$, $v = \omega r = \pi * 0.5 = \pi/2 \text{ m/s}$, $a_c = \omega^2 * r = \pi^2/2 \text{ m/s}^2$.

4.2 Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA)

Conceptos:

- Existe aceleración angular constante $\alpha = d(\omega)/dt$.
- Las fórmulas son análogas a las del MRUA lineal, sustituyendo:
- desplazamiento $x \leftrightarrow$ desplazamiento angular θ ,
- velocidad $v \leftrightarrow$ velocidad angular ω ,
- aceleración $a \leftrightarrow$ aceleración angular α .

Ecuaciones cinemáticas (MCUA):

- $\omega(t) = \omega_0 + \alpha * t$.
- $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 * t + (1/2) \alpha t^2$.
- $\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_0)$.

Relaciones lineal-angular:

- $s = r * \Delta \theta$ (arco).
- $v = r * \omega$, $v_0 = r * \omega_0$.
- $a_t = \alpha * r$ (aceleración tangencial).
- $a_c = \omega^2 * r$ (centrípeta).
- $a_{\text{total}} = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$ (magnitud de la aceleración total).

Torque y rotación:

- $\sum \tau = I * \alpha$.
- Energía cinética rotacional: $K_{\text{rot}} = (1/2) I \omega^2$.

Ejemplo MCUA:

- $r=0.4 \text{ m}$, $\omega_0=2 \text{ rad/s}$, $\alpha=1 \text{ rad/s}^2$, $t=3 \text{ s}$
- $\omega = 2 + 1*3 = 5 \text{ rad/s}$
- $\theta = 0 + 2*3 + 0.5*1*9 = 10.5 \text{ rad}$
- $v = \omega r = 2 \text{ m/s}$
- $a_t = \alpha r = 0.4 = 0.4 \text{ m/s}^2$
- $a_c = \omega^2 * r = 25*0.4 = 10 \text{ m/s}^2$
- $a_{\text{total}} = \sqrt{10^2 + 0.4^2} \approx 10.002 \text{ m/s}^2$

5) Fórmulas adicionales / utilidades

- Conversión grados \leftrightarrow radianes: $1 \text{ rad} = 180/\pi \text{ deg}$, $1 \text{ deg} = \pi/180 \text{ rad}$.
 - Derivadas e integrales:
 - $v = dr/dt$, $a = dv/dt = d^2 r / dt^2$.
 - En angulares: $v = r \omega$, $a_t = r \alpha$.
 - Trabajo y energía rotacional:
 - $W = \int F \cdot ds$.
 - $K_{\text{rot}} = (1/2) I \omega^2$.
 - $P = \tau \cdot \omega$.
-

6) Ejercicios propuestos (para practicar)

1. Dados $a=(3,-2,1)$ y $b=(-1,4,2)$: calcula $a \cdot b$, $a \times b$ y la proyección de a sobre b .
 2. Un objeto de 5 kg se mueve sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción $\mu_k=0.2$. Si se aplica una fuerza horizontal de 20 N, encuentra la aceleración.
 3. Un cuerpo realiza MCUA con $\omega_0=1.5 \text{ rad/s}$, $\alpha=0.8 \text{ rad/s}^2$, $r=0.25 \text{ m}$. Calcula ω , θ , v , a_t , a_c después de 4 s.
-

Si quieres, ahora lo exporto a PDF y te doy el enlace de descarga.