Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

Especialización en Estadística Aplicada

# Diseño de Experimentos

## Tarea 3

Adriana Haydeé Contreras Peruyero (haydeeperuyero@im.unam.mx)

Alejandro Jiménez Palestino (ajpalestino@gmail.com)

Jesus Alberto Urrutia Camacho (urcajeal@gmail.com)

Ciudad de México

8 de junio de 2021

# Índice

# 1. Problema 1

En una fábrica que produce lotes de tinte están preocupados por la consistencia de la fuerza del tinte. Para medir la fuerza del tinte se pintan cuadrados de tela bajo condiciones controladas. Estos cuadrados de tela se comparan con un estándar, si hay coincidencia se califica con 100. Se seleccionaron al azar 6 lotes de tinte, para cada uno se seleccionaron al azar 6 cuadrados de tela entintada y se calificaron. Los datos son:

| lote1 | lote2 | lote3 | lote4 | lote5 | lote6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 94.5 | 89.0 | 88.5 | 100.0 | 91.5 | 98.5 |
| 93.0 | 90.0 | 93.5 | 99.0 | 93.0 | 100.0 |
| 91.0 | 92.5 | 93.5 | 100.0 | 90.0 | 98.0 |
| 89.0 | 88.5 | 88.0 | 98.0 | 92.5 | 100.0 |
| 96.5 | 91.5 | 92.5 | 95.0 | 89.0 | 96.5 |
| 88.0 | 91.5 | 91.5 | 97.5 | 91.0 | 98.0 |

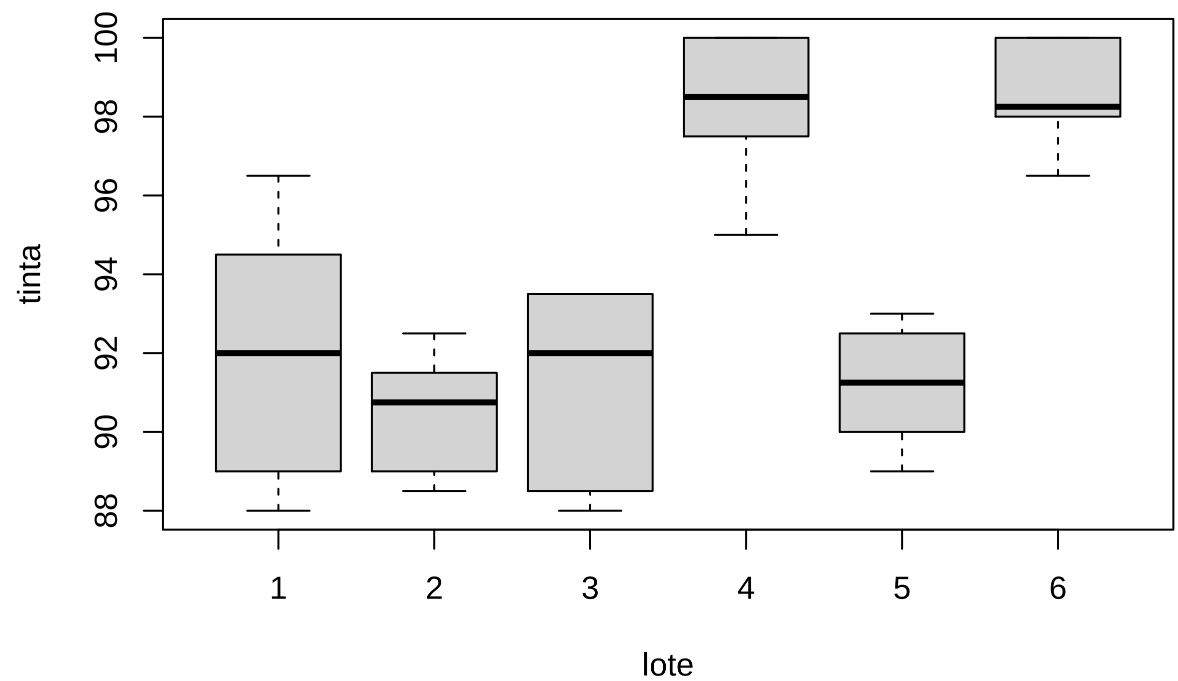
Escriba un modelo lineal para este experimento, explique los términos y realice el analisis de varianza para los datos. Concluya.

En este problema estamos suponiendo que dado que las telas son entintadas bajo condiciones controladas, es decir no existe variación debido al proceso de entintado o a las telas, partimos del supuesto que cualquier variación en el puntaje del desempeño del tinte proviene de los lotes.

Bajo ese supuesto podemos decir que se tiene un diseño completamente al azar, unifactorial, de efectos fijos con 6 tratamientos y 6 repeticiones para cada uno.

Donde el modelo lineal es: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$ $y_{ij}$ es la observacion de la j esima u.e. del i esimo tratamiento, $\mu$ es la media general, comun a todas las u.e. $\tau_i$ es el efecto del tratamiento i esimo $\varepsilon_{ij}$ es el error experimental de la unidad ij. Hay en total 6 tratamientos y 6 repeticiones en cada uno por lo que decimos que es un modelo balanceado.

```
boxplot(tinta~lote)
```




```r
analisis <- aov(tinta~lote)
summary(analisis)
```

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## lote         5  415.5   83.09   18.59 2.16e-08 ***
## Residuals   30  134.1    4.47
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
TukeyHSD(analisis)
```

```
##   Tukey multiple comparisons of means
##     95% family-wise confidence level
##
## Fit: aov(formula = tinta ~ lote)
##
## $lote
##            diff        lwr       upr     p adj
## 2-1 -1.50000000  -5.212508  2.212508 0.8193236
## 3-1 -0.75000000  -4.462508  2.962508 0.9891152
## 4-1  6.25000000   2.537492  9.962508 0.0002222
## 5-1 -0.83333333  -4.545842  2.879175 0.9825450
## 6-1  6.50000000   2.787492 10.212508 0.0001259
## 3-2  0.75000000  -2.962508  4.462508 0.9891152
## 4-2  7.75000000   4.037492 11.462508 0.0000074
## 5-2  0.66666667  -3.045842  4.379175 0.9936545
## 6-2  8.00000000   4.287492 11.712508 0.0000042
```

```
## 4-3  7.00000000   3.287492 10.712508 0.0000403
## 5-3 -0.08333333  -3.795842  3.629175 0.9999998
## 6-3  7.25000000   3.537492 10.962508 0.0000229
## 5-4 -7.08333333 -10.795842 -3.370825 0.0000334
## 6-4  0.25000000  -3.462508  3.962508 0.9999446
## 6-5  7.33333333   3.620825 11.045842 0.0000189
```

```r
factor.lote <- c("lote2","lote5" ,"lote3" ,"lote1" ,"lote6" ,"lote4" )
m.lote <- c( mean(lote2), mean(lote5), mean(lote3), mean(lote1), mean(lote6), mean(lote4))
m.lote
```

```
## [1] 90.50000 91.16667 91.25000 92.00000 98.50000 98.25000
```

```r
agrupado <- c("a_", "a_", "a_", "a_", "_b", "_b")

grupos <- data.frame(factor.lote, m.lote, agrupado)

kbl(grupos, booktabs = T, align = "c", caption = "Comparacion de pares por grupo", col.names = c("Lote"
kable_styling(position = "center", latex_options = "hold_position")
```

**Cuadro 1:** Comparacion de pares por grupo

| Lote | Promedio desempeño tinte | Grupo |
|---|---|---|
| lote2 | 90.50000 | a_ |
| lote5 | 91.16667 | a_ |
| lote3 | 91.25000 | a_ |
| lote1 | 92.00000 | a_ |
| lote6 | 98.50000 | _b |
| lote4 | 98.25000 | _b |

Utilizando el Análisis de Tukey podemos decir que de los 6 lotes que se muestrearon, los lotes 2, 5, 3 y 1 se desempeñan por debajo de los lotes 6 y 4 dado que estos se agrupan unicamente en 2 grupos. La Recomendacion despues de este análisis es: Identificar las diferencias en la fabricación entre estas dos agrupaciónes dado que tenemos evidencia para decir que los tratamientos son diferentes para estos dos grupos.

# 2. Problema 2

**Se estudia el acabado de la superficie de metal de ciertas partes hechas por cuatro máquinas. Se realizó un experimento en el cual cada máquina es operada por tres operadores diferentes y se seleccionan y prueban dos especímenes de cada operador. Dada la localización de las máquinas, se utilizaron diferentes operadores en cada máquina los cuales fueron seleccionados al azar. Los datos se presentan a continuación.**

*Escriba el modelo lineal para este experimento, explique los términos e interprete el análisis de varianza para los datos. Concluya.*

A continuación, se describirán las características del diseño total del experimento.

Dado que es un experimentos con diseño de efectos anidados balanceados, la ecuación que describe este modelo es la siguiente:

$$y_{kmo} = \mu + \tau_m + \beta_{m(o)} + \varepsilon_{k(mo)}$$

**Cuadro 2:** Resultados por operador y máquina

| maq | oper | y |
|---|---|---|
| Machine1 | 1 | 79 |
| | | 62 |
| | 2 | 94 |
| | | 74 |
| | 3 | 46 |
| | | 57 |
| Machine2 | 1 | 92 |
| | | 99 |
| | 2 | 85 |
| | | 79 |
| | 3 | 76 |
| | | 68 |
| Machine3 | 1 | 88 |
| | | 75 |
| | 2 | 53 |
| | | 56 |
| | 3 | 46 |
| | | 57 |
| Machine4 | 1 | 36 |
| | | 53 |
| | 2 | 40 |
| | | 56 |
| | 3 | 62 |
| | | 47 |

$$ConK = 1, \cdots, 24$$
$$m = 1, 2, 3, 4.$$
$$o = 1, 2, 3.$$

Existen dos factores:

1. Máquina y,
2. Operador.

Con cuatro niveles del factor Máquina y tres niveles el factor operador. Es decir, 4x3, respectivamente.

La relación entre ambos factores es que están **anidados**. Ya que una característica de este diseño es que hay dos factores, donde el factor *Máquina* es fijo, mientras que los *Operadores* son aleatorios, pues los tres "operadores en cada máquina (. . . ) fueron seleccionados al azar". Otra característica es que los niveles $j$ del factor *Operadores* son similares pero no idénticos para las diferentes máquinas, ya que los niveles de *Operadores* están marcados por etiquetas. Esto lleva rechazar que sean niveles cruzados. A continuación, se muestra una tabla que resume la anterior información.

**Cuadro 3:** Resumen de los términos del modelo

| Factores | Factor | Anidación | Tamaño | Hipótesis_Nula |
|---|---|---|---|---|
| Máquina | Fijo | Principal | 1,...,4 | Ho : Mui = Muj |
| Operador | Aleatorio | Anidado | 1,...3 | sigma = 0 |

Para elaborar el análisis de ANOVA es necesario tener en consideración que el efecto del factor *Operador* es aleatorio, por lo que su hipótesis nula corresponde a una prueba de variación, la cuál es : $H_o : \sigma^2 = 0$ . Mientras que la prueba del factor *Máquina* a ser fijo, su hipótesis nula corresponde a una prueba de igualdad de medias, la cuál es : $\mu_i = \mu_j$.

Entonces, para analizar la ANOVA, se corre el siguiente código. El cuál permite conocer los valores correctos del estadístico F.

```r
roper <- as.random(oper)
fmaq <- as.fixed(maq)
modelo <- lm(y ~ fmaq + roper%in%fmaq)
gad(modelo)
```

| | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F) |
|---|---|---|---|---|---|
| fmaq | 3 | 3617.667 | 1205.8889 | 3.423794 | 0.0727968 |
| fmaq:roper | 8 | 2817.667 | 352.2083 | 4.168146 | 0.0134083 |
| Residual | 12 | 1014.000 | 84.5000 | NA | NA |

Con un P valor de 0.0728 no existe efecto significativo del tratamiento de maquinaria sobre las superficies de metal, por lo que no se rechaza la hipótesis de $\mu_i = \mu_j$ con una confianza del 95 %. Por otra parte, hay variabilidad de las superficies de metal en cada operador de cada máquina, por lo que se rechaza la hipótesis nula de $H_o : \sigma^2 = 0$ con un P valor de 0.013 con una confianza del 95 %. Por lo anterior, se debería de tratar de reducir esta variabilidad al entrenar mejor a los operadores.

```r
compon <- lmer(y ~ maq + (1|maq:oper))
summary(compon)
```

```
## Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
## Formula: y ~ maq + (1 | maq:oper)
##
## REML criterion at convergence: 164.1
##
## Scaled residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.04636 -0.69740 -0.05224  0.72879  1.48805
##
## Random effects:
##  Groups   Name        Variance Std.Dev.
##  maq:oper (Intercept) 133.9    11.570
##  Residual              84.5     9.192
## Number of obs: 24, groups:  maq:oper, 12
##
## Fixed effects:
##             Estimate Std. Error t value
## (Intercept)   68.667      7.662   8.962
## maqMachine2   14.500     10.835   1.338
## maqMachine3   -6.167     10.835  -0.569
```

```
## maqMachine4  -19.667     10.835  -1.815
##
## Correlation of Fixed Effects:
##             (Intr) mqMch2 mqMch3
## maqMachine2 -0.707
## maqMachine3 -0.707  0.500
## maqMachine4 -0.707  0.500  0.500
```

```
# estima los componentes de varianza
```

Respecto a los **componentes de varianza**, es posible afirmar que el factor anidado (operador en Maquinaria) produce el 61.30952 % de varianza. Lo cuál enfatiza la decisión de rechazar la hipótesis nula de $H_0 : \sigma^2 = 0$, ya que este tratamiento aporta variabilidad dentro del resultado de las superficies de metal.

**Cuadro 4:** Resumen de los términos del modelo

| Fuente_varianza | Varianza | Proporción |
|---|---|---|
| Operador en Máquina | 133.9 | 0.6130950 |
| Error | 84.5 | 0.3869048 |
| Total | 128.4 | 1.0000000 |

Finalmente, si ignoraramos que hubiese diferentes operadores, y por lo tanto no hubiese efectos aleatorios, se podría simular el siguiente escenario. Si se deseara comprobar el efecto del efecto de *Máquina*, se aplicaría un factorial de una vía balanceado del efecti fijo *Maquinaria*.

```
sin <- aov(y ~ maq)
summary(sin)
```

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## maq          3   3618  1205.9   6.294 0.0035 **
## Residuals   20   3832   191.6
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Se podría concluir que existe un efecto en el tratamiento de las máquinas sobre las superficies de metal, al rechazar la hipótesis de $\mu_i = \mu_j$ con un P valor de 0.0035.

# 3. Problema 3

**Se diseña un experimento para estudiar la dispersión de los pigmentos de una pintura. Se estudian cuatro mezclas diferentes de un pigmento particular. El procedimiento consiste en preparar una mezcla particular y en aplicarla después a un panel utilizando tres métodos (con brocha, por rocío y con rodillo). La respuesta medida es el porcentaje de reflectancia (coeficiente de reflexión) del pigmento. Se repite el experimento completo en 3 días. Los datos obtenidos se presentan a continuación:**

---

# Referencias

[1] Nombre del autor, *Título del libro*, núm. ed., Editorial, año.