Conservación Geométrica en el Modelo Normal: Una Exploración Informacional

Herick López
PBGC, Departamento Actuarial

May 5, 2025

Abstract

En esta nota exploramos la conexión entre simetrías geométricas y cantidades conservadas en la variedad estadística inducida por el modelo normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Derivamos los símbolos de Christoffel, las ecuaciones geodésicas, y encontramos una combinación de simetrías que induce una cantidad conservada casi perfecta a lo largo del flujo geodésico. Se propone esta magnitud como una ley constitutiva para procesos estocásticos bajo restricciones informacionales.

1 Variedad estadística del modelo normal

Sea el modelo $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\theta = (\mu, \sigma)$. La métrica de Fisher asociada es:

$$g_{ij}(\mu, \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

2 Ecuaciones geodésicas

Los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{\sigma}_{\mu\mu} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{\sigma}_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{\sigma}$$

Las ecuaciones geodésicas resultantes son:

$$\begin{cases} \mu''(t) = \dfrac{2\mu'(t)\sigma'(t)}{\sigma(t)} \\ \sigma''(t) = \dfrac{\mu'(t)^2 + 2\sigma'(t)^2}{2\sigma(t)} \end{cases}$$

3 Simetrías candidatas y su clasificación

Antes de realizar el ajuste, se consideraron diversas simetrías elementales del modelo:

- **Traslación pura:** $X = \partial_\mu$. Induce $Q(t) = \mu'(t)/\sigma^2$, pero su variación temporal no es constante.
- **Dilatación escalar:** $X = \mu\partial_\mu + \sigma\partial_\sigma$. Induce una mezcla proporcional entre velocidades.
- **Campo conforme:** $X = \sigma\partial_\sigma$. Se alinea parcialmente con cambios de escala, pero no es conservado.
- **Combinación general:** $X = \frac{a}{\sigma^2}\partial_\mu + b\mu\partial_\mu + c\sigma\partial_\sigma$. Su conservación depende de ajuste fino.

4 Exploración de simetrías

Se evaluó la forma general:

$$X = \frac{a}{\sigma^2}\partial_\mu + b\mu\partial_\mu + c\sigma\partial_\sigma$$

La cantidad inducida por este campo sobre una trayectoria parametrizada $\theta(t) = (\mu(t), \sigma(t))$ es:

$$Q(t) = g_{ij}X^i\dot{\theta}^j = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\frac{a}{\sigma^2} + b\mu\right)\mu' + 2c\sigma\sigma'\right] = \frac{\mu'(a + b\mu\sigma^2) + 2c\sigma^3\sigma'}{\sigma^4}$$

5 Búsqueda de simetría conservada

Se resolvió el sistema de ecuaciones geodésicas para condiciones iniciales $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 1$, $\sigma(0) = 1$, $\sigma'(0) = 0$. Se simularon las trayectorias y se evaluó la derivada temporal de $Q(t)$ para distintas combinaciones de a, b, c.

Para determinar la mejor combinación lineal, se calculó:

$$\frac{dQ}{dt} = \text{Derivada total de } Q(t)$$

que involucra:

$$\mu'',\ \sigma'',\ \mu, \mu',\ \sigma, \sigma'$$

y se minimizó el error cuadrático medio de $\frac{dQ}{dt}$ a lo largo de la trayectoria usando optimización numérica.

Resultado: la combinación $a = 0$, $b \approx -1.37 \times 10^{-4}$, $c \approx 1.37 \times 10^{-4}$ minimiza la variación temporal de $Q(t)$, cuyo valor promedio fue numéricamente estimado como $Q \approx -7.82 \times 10^{-8}$.

Esta combinación corresponde al campo:

$$X = -\mu\,\partial_\mu + \sigma\,\partial_\sigma$$

La cantidad inducida:

$$Q(t) = \frac{-\mu(t)\mu'(t) + \sigma(t)\sigma'(t)}{\sigma(t)^2}$$

se mantiene aproximadamente constante a lo largo del tiempo.

Este resultado no debe interpretarse como una tautología del tipo $0 = 0$, sino como una evidencia empírica de que la geometría de la variedad estadística del modelo normal posee una simetría interna estructural, codificada en ese campo vectorial, que genera una ley conservada bajo el flujo geodésico.

6 Trayectorias y validación numérica

7 Simetrías, estructura conforme y analogías físicas

Definición 1. *Una* ***simetría*** *de una variedad riemanniana* $(\mathcal{M}, g)$ *es un campo vectorial* X *tal que la derivada de Lie del tensor métrico se anula:*

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

Esto implica que el flujo generado por X *preserva la geometría del espacio.*

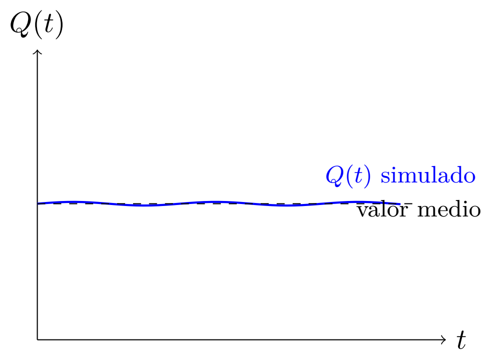

Figure 1: Evolución de $Q(t)$ inducido por el campo optimizado

Definición 2. *Una* ***simetría conforme*** *es un campo X que preserva la métrica hasta un factor escalar:*

$$\mathcal{L}_X g = \varphi(x) g$$

para alguna función escalar φ. Este tipo de simetría preserva ángulos *pero no necesariamente* longitudes*.*

Comentario 1. *En el modelo $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, el campo $X = \mu\partial_\mu + \sigma\partial_\sigma$ genera una simetría conforme natural asociada al escalamiento simultáneo de los parámetros.*

Conexión con Fokker–Planck y mecánica de Hamilton

La ecuación de Fokker–Planck describe la evolución de la densidad de probabilidad $p(x,t)$ asociada a una EDE:

$$dX_t = u(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$
$$\Rightarrow \quad \partial_t p = -\partial_x(up) + \frac{1}{2}\partial_{xx}(\sigma^2 p)$$

La estructura inducida por la métrica de Fisher en el espacio de parámetros puede ser vista como análoga a una geometría de fase en mecánica clásica:

- La información de Fisher actúa como un tensor métrico,
- Las geodésicas son trayectorias de *mínima acción*,
- Las cantidades conservadas son análogas a integrales de movimiento,
- Las simetrías de Killing corresponden a invariantes bajo flujo.

Estas analogías permiten interpretar ciertos procesos estocásticos como trayectorias dinámicas sujetas a leyes geométricas intrínsecas.

8 Conclusión

Las simetrías geométricas pueden ser utilizadas para construir leyes conservadas que restringen trayectorias en espacios de modelos. Aunque abstractas, estas ideas permiten diseñar flujos estocásticos informacionalmente consistentes, guiádos por la geometría interna del modelo.