



Ingeniería Informática



# AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

## CURSO 2022/2023

Tema 10. Cinemática de sistemas robóticos 1



# Cinemática directa de robots manipuladores

1. Introducción.
2. Espacio articular y espacio cartesiano.
3. Problema cinemático directo.
4. Conclusiones.





Ingeniería Informática

A vertical bar on the left side of the slide, composed of several colored segments: red, blue, yellow, and red.

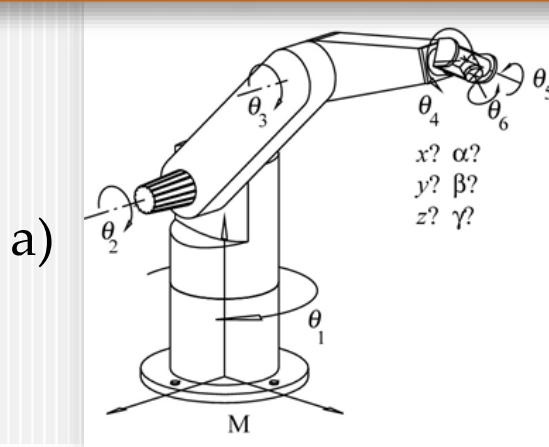
# INTRODUCCIÓN



# Introducción

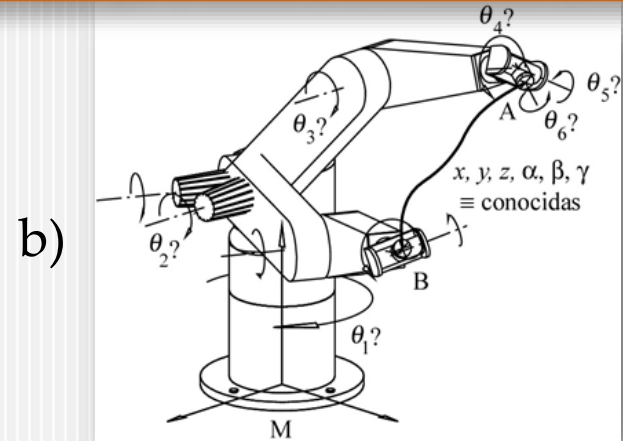
- Modelo cinemático: estudia la localización del robot sin tener en cuenta las fuerzas y/o pares que causan el movimiento.
- Problemas a resolver en un sistema robótico:

Determinar la localización del extremo del robot basándose en la posición de las articulaciones



Cinemática directa

Determinar la posición de las articulaciones del robot si lo que se conoce es la localización del extremo



Cinemática inversa



# Introducción: aplicaciones modelo cinemático

- **Aplicaciones** del modelo cinemático de un robot.
  - Simulación del movimiento de sistemas robóticos.
  - Control cinemático de robots: planificación de trayectorias.
  - Diseño de robots: cálculo de las dimensiones óptimas de los eslabones.





Ingeniería Informática



# ESPACIO ARTICULAR Y ESPACIO CARTESIANO



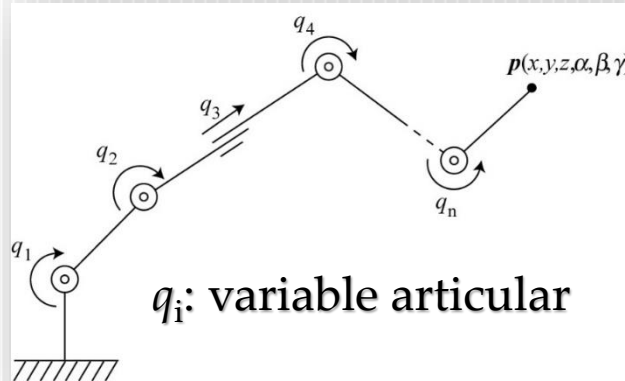
# Espacio articular – Espacio cartesiano

## Espacio articular

Vector de variables articulares define la posición de todas las articulaciones del robot

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

Modelo  
cinemático  
**inverso**



Robot de  $n$  articulaciones

Modelo  
cinemático  
**directo**

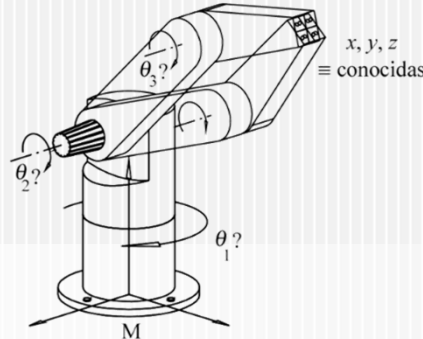
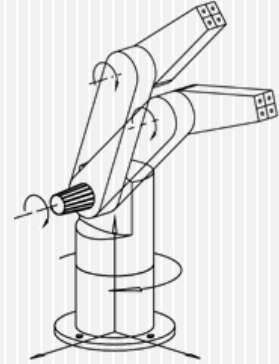
## Espacio cartesiano

$$\mathbf{p} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

Vector de posición y orientación del extremo del robot en el espacio cartesiano tridimensional euclídeo

# Espacio articular – Espacio cartesiano

- **Resolución modelo cinemático directo.**
  - Solución única: dado un vector de variables articulares de un sistema robótico, sólo existe una posición y orientación del extremo final.
- **Resolución modelo cinemático inverso.**
  - Posibles diferentes soluciones.
    - *Múltiples soluciones*: diferentes configuraciones del robot para un mismo punto en el espacio cartesiano.
    - *Sin solución*: soluciones fuera del espacio de trabajo o singularidades.

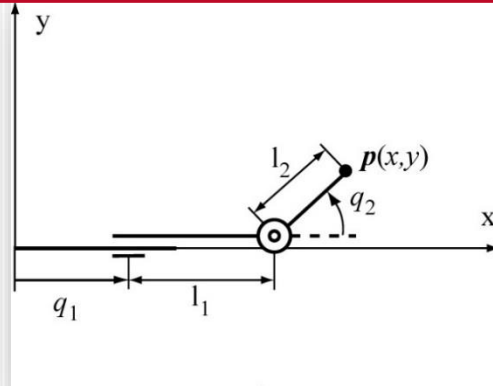




# Espacio articular – Espacio cartesiano

- Ejemplo de resolución del modelo cinemático
  - Mecanismo de 2 GDL: prismática – rotacional.

Modelo cinemático directo



$$\mathbf{q} = (q_1, q_2)$$



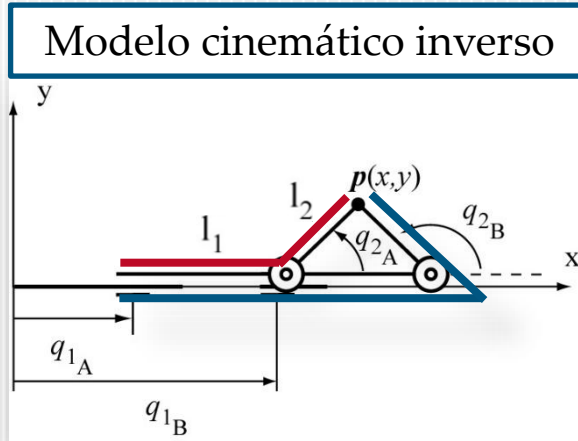
$$\mathbf{p} = (x, y)$$

$$x = q_1 + l_1 + l_2 \cdot \cos q_2$$

$$y = l_2 \cdot \sin q_2$$

# Espacio articular – Espacio cartesiano

- Ejemplo de resolución del modelo cinemático
  - Mecanismo de 2 GDL: prismática – rotacional.



$$p = (x, y)$$



$$q_{s1} = (q_{1A}, q_{2A}) \quad q_{s2} = (q_{1B}, q_{2B})$$

$$\frac{y}{l_2} = \sin q_2 \Rightarrow q_2 = \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right)$$

$$q_1 = x - l_1 - l_2 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right)\right)$$

$$q_{2A} = \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right) \quad q_{2B} = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right)$$



$q_{1A} \quad q_{1B}$



# PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

# Problema cinemático directo

## ▪ Objetivo

- Obtener la localización del extremo del robot basándose en el valor de las variables articulares.

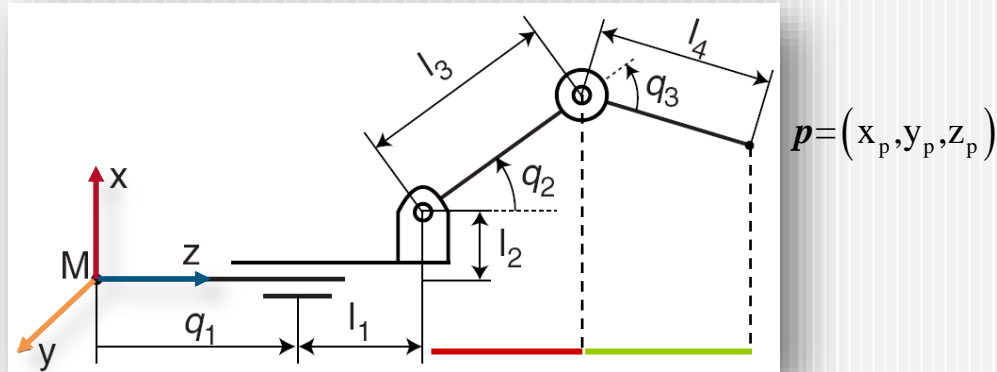
$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{\text{blue arrow}} \boxed{p = F(q)} \xleftarrow{\text{orange arrow}} (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

## ▪ Resolución

- Método geométrico.
  - Utiliza relaciones trigonométricas para obtener la posición del extremo del robot.
  - Normalmente sólo se utiliza para obtener la posición y no la orientación.
- Mediante transformaciones homogéneas.
  - Algoritmo *Denavit-Hartenberg* (DH).

# Problema cinemático directo

- **Método geométrico. Ejemplo 1 de resolución.**
  - Mecanismo robótico planar de 3 GDL.
    - 1 Prismática ( $q_1$ ).
    - 2 Rotacionales ( $q_2, q_3$ ).



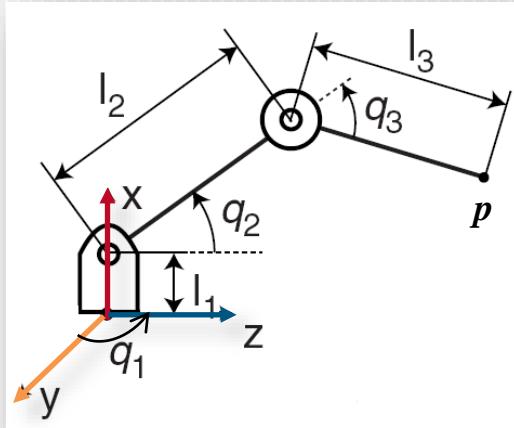
$$z_p = q_1 + l_1 + l_3 \cos q_2 + l_4 \cos(q_2 + q_3)$$

$$x_p = l_2 + l_3 \sin q_2 + l_4 \sin(q_2 + q_3)$$

$$y_p = 0$$

# Problema cinemático directo

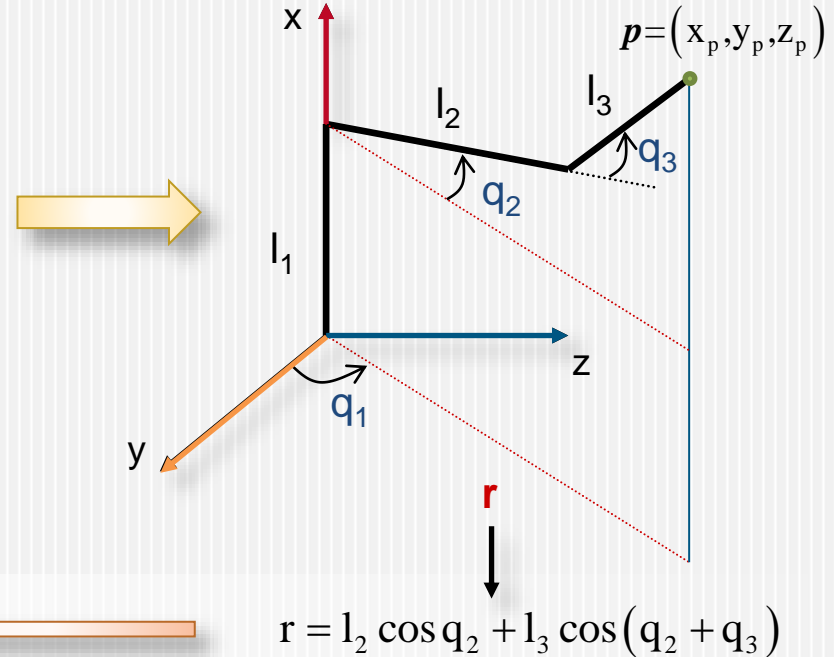
- **Método geométrico. Ejemplo 2 de resolución.**
  - Mecanismo robótico de 3 GDL rotacionales ( $q_1, q_2, q_3$ ).



$$x_p = l_1 + l_2 \sin q_2 + l_3 \sin(q_2 + q_3)$$

$$y_p = r \cdot \cos q_1$$

$$z_p = r \cdot \sin q_1$$



$$r = l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

# Problema cinemático directo

## ■ Mediante transformaciones homogéneas.

- Asocia Sistemas de Referencia a cada eslabón del mecanismo robótico.
- Calcula las transformaciones homogéneas compuestas de traslaciones y giros básicos para pasar del sistema asociado al eslabón  $i-1$  al del  $i$ .
- La transformación queda en función de los parámetros de la articulación  $i$ .

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{F}(q_i)$$

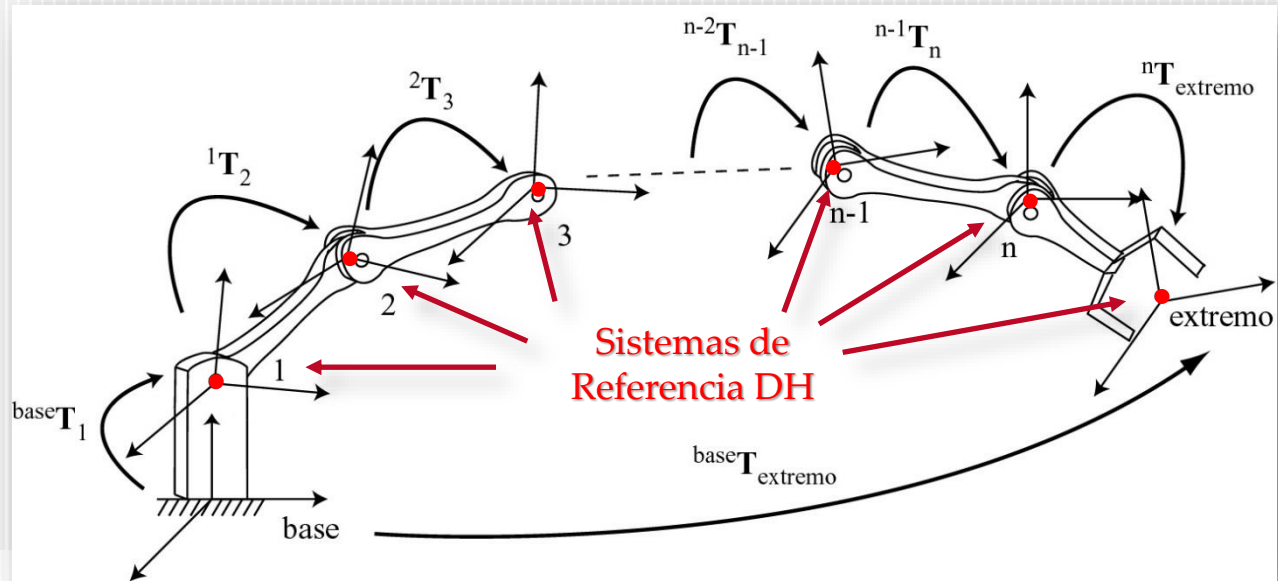


### *Algoritmo Denavit-Hartenberg (DH)*

- Definición de reglas para asociar Sistemas de Referencia a los eslabones de un robot
- Definición y cálculo de los Parámetros DH para pasar de un Sistema de Referencia a otro
- Cálculo de la transformación entre el Sistema de Referencia de la base y del extremo

# Problema cinemático directo

- Mediante transformaciones homogéneas.
  - Iterando las transformaciones homogéneas desde la base al extremo, se puede obtener  ${}^{base}T_{extremo}$  a partir del vector  $q$ .



Robot de  $n$  articulaciones



# Problema cinemático directo

- Mediante transformaciones homogéneas.
  - Definición de los parámetros DH.
    - 4 Transformaciones simples para obtener la matriz

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i$$



*Parámetros DH* ( $\theta_i$   $d_i$   $a_i$   $\alpha_i$ )

2 Transformaciones de rotación ( $\theta_i$ ,  $\alpha_i$ )

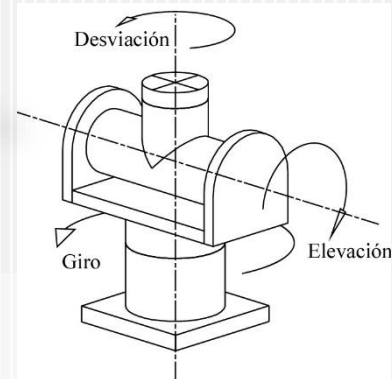
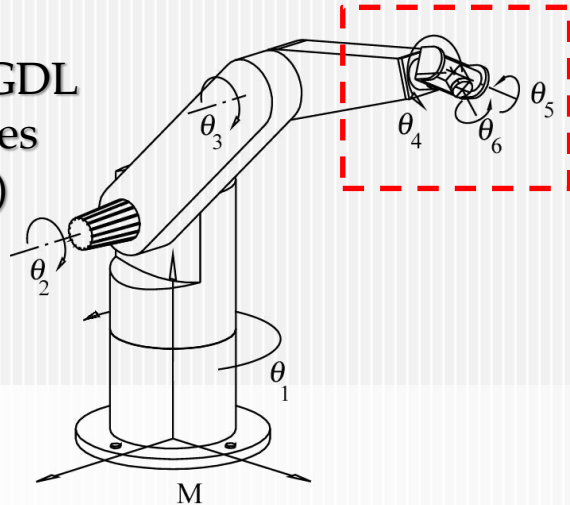
2 Transformaciones de traslación ( $d_i$ ,  $a_i$ )

**Parámetros variables relativos a una articulación (rotación , prismática)  $\rightarrow \theta_i$  ,  $d_i$**

# Problema cinemático directo

- **Solución cinemática de un robot articular mediante DH.**
  - Aplicación del algoritmo DH: reglas para resolver la cinemática directa.
    - 1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.
    - 2. Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro ( $\theta_i$   $d_i$   $a_i$   $\alpha_i$ ) → 10-13 reglas.
    - 3. Reglas para calcular la matriz de transformación  ${}^{base}T_{extremo}$ . 14-15 reglas.

Robot de 6 GDL  
rotacionales  
( $\theta_1, \dots, \theta_6$ )

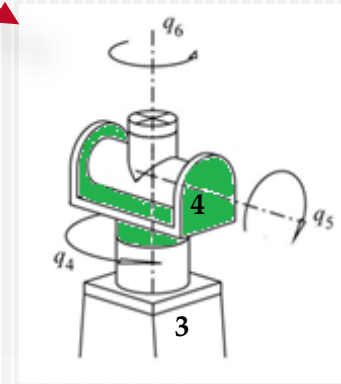
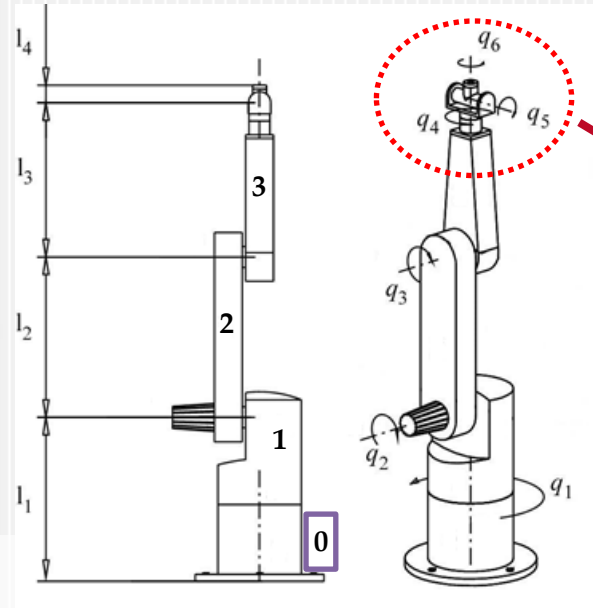
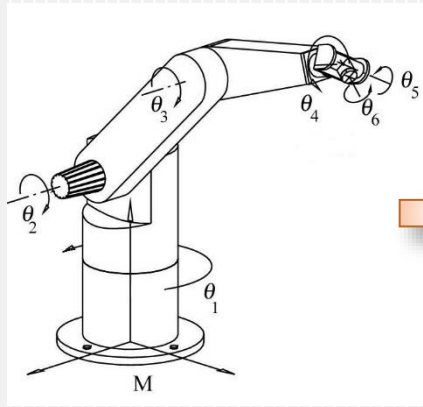


# Problema cinemático directo

Regla nº 1

## ■ Algoritmo DH.

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con **n** (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

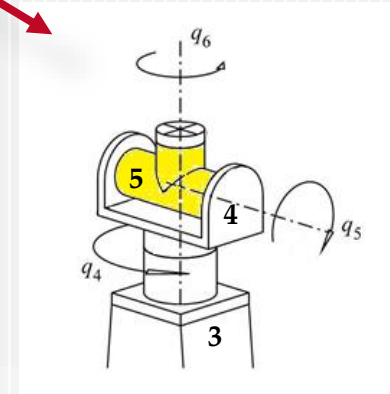
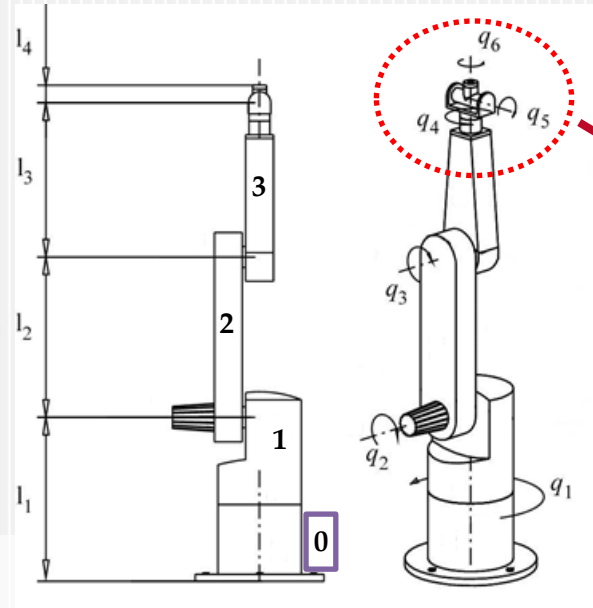
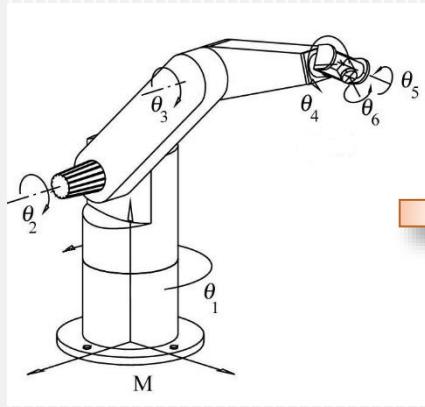


# Problema cinemático directo

Regla nº 1

## ■ Algoritmo DH.

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con **n** (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

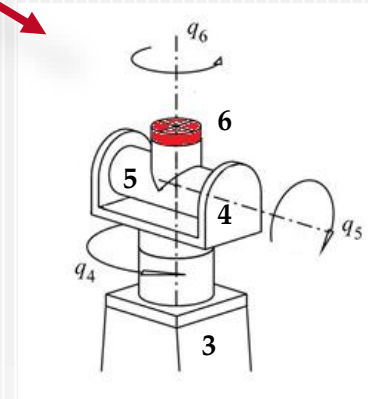
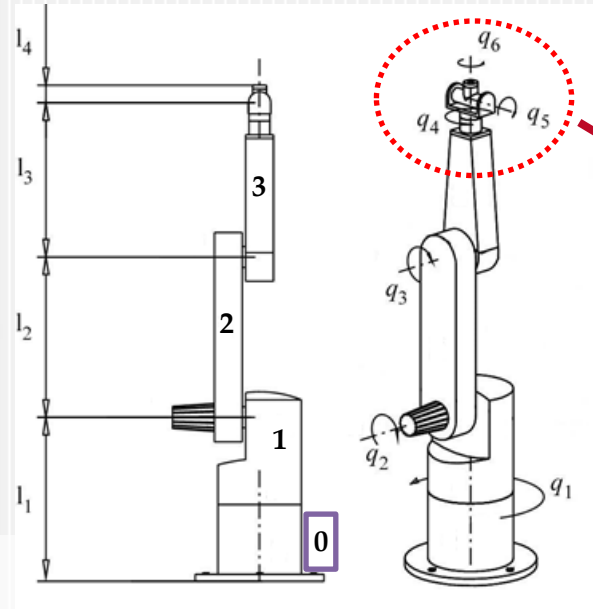
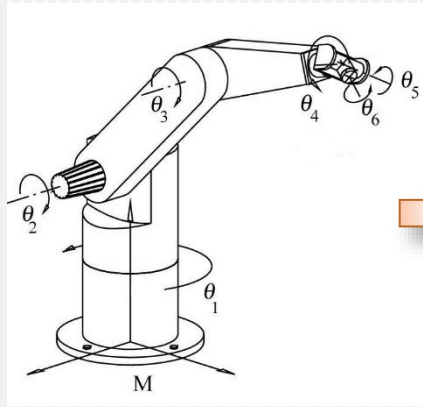


# Problema cinemático directo

Regla nº 1

## ■ Algoritmo DH.

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con **n** (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

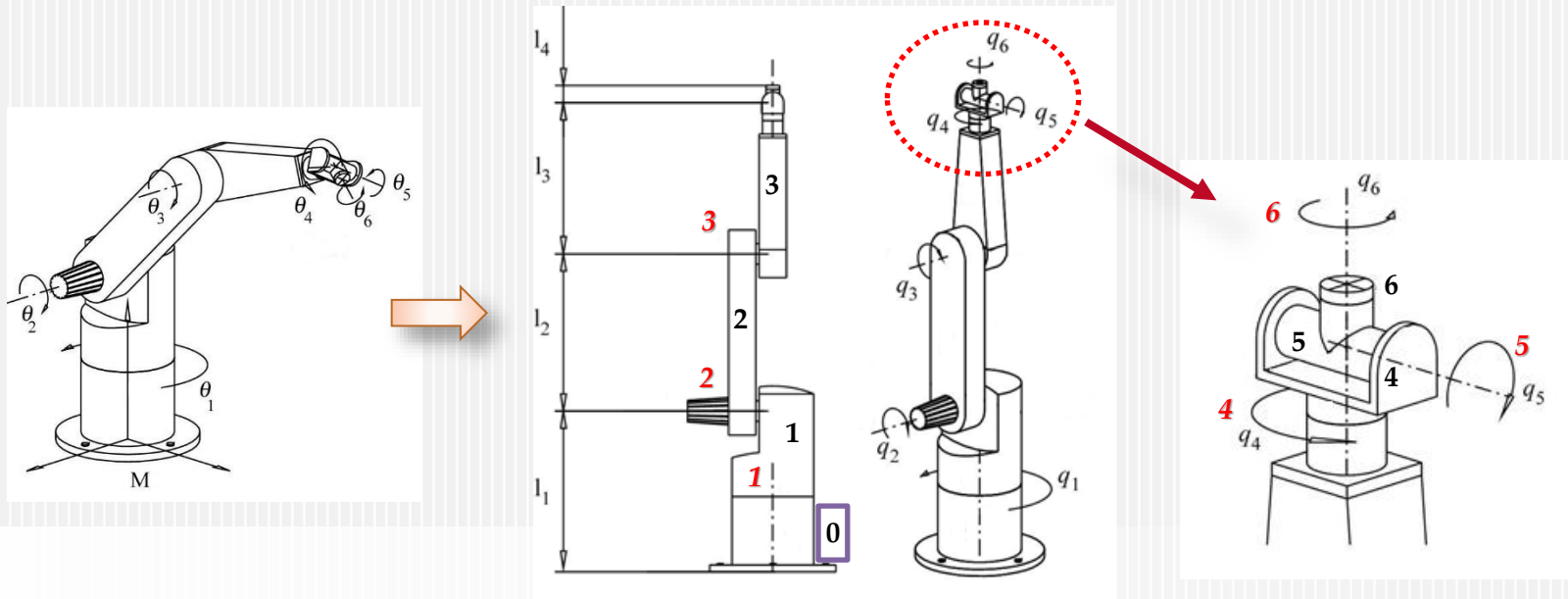


# Problema cinemático directo

Regla nº 2

## ■ Algoritmo DH.

- 2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.

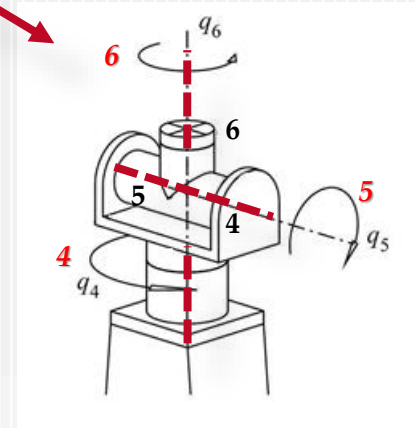
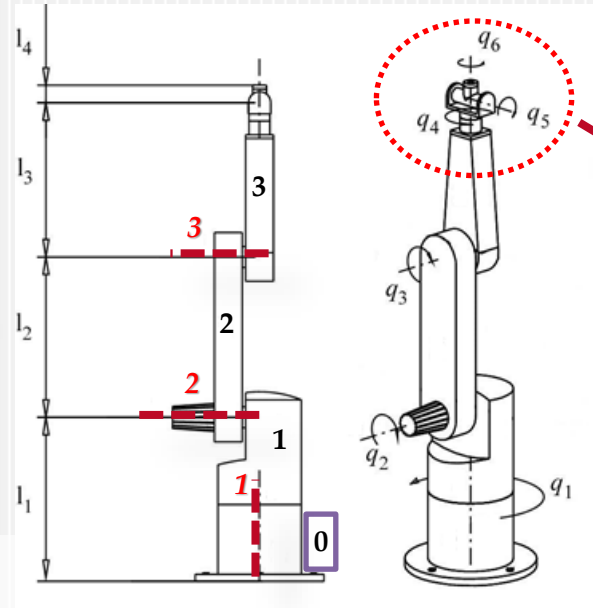
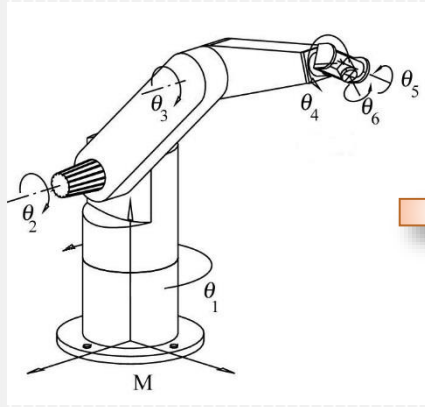


# Problema cinemático directo

Regla nº 3

## ■ Algoritmo DH.

- 3. Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

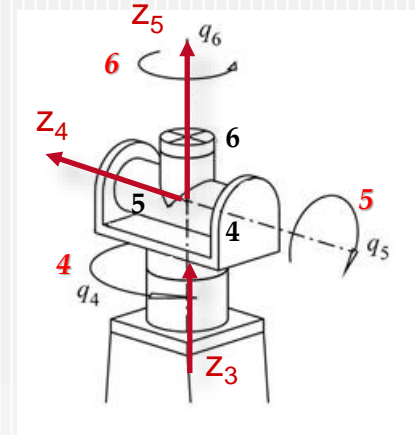
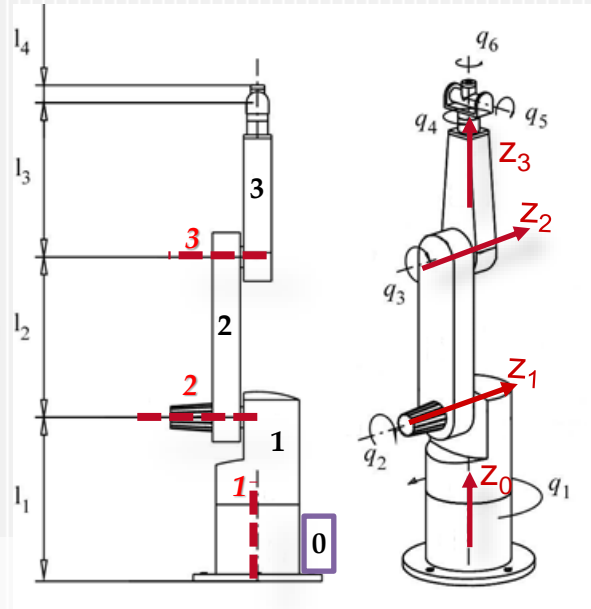
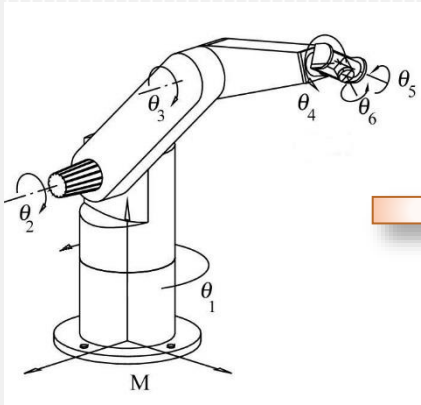


# Problema cinemático directo

Regla nº 4

## ■ Algoritmo DH.

- 4. Para el eje  $i$ , de 0 a  $n-1$ , situar el eje  $z_i$  sobre el eje de la articulación  $i+1$ .



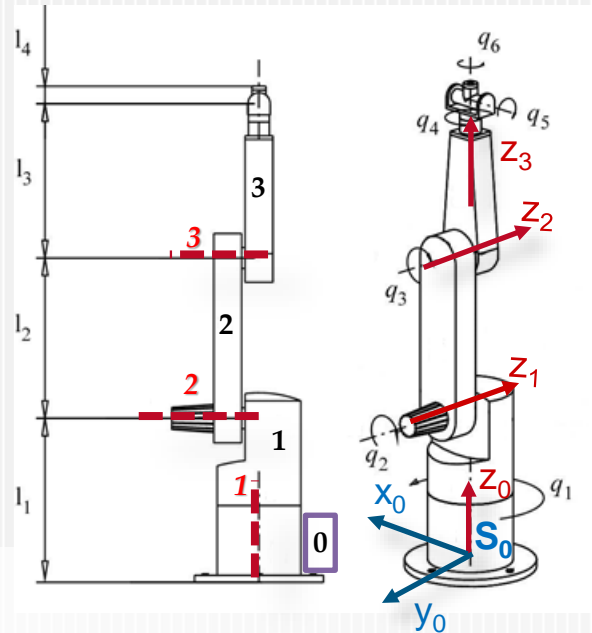


# Problema cinemático directo

Regla nº 5

## ■ Algoritmo DH.

- 5. Situar el origen del sistema de la base  $S_0$  en cualquier punto del eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  e  $y_0$  se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con  $z_0$ .

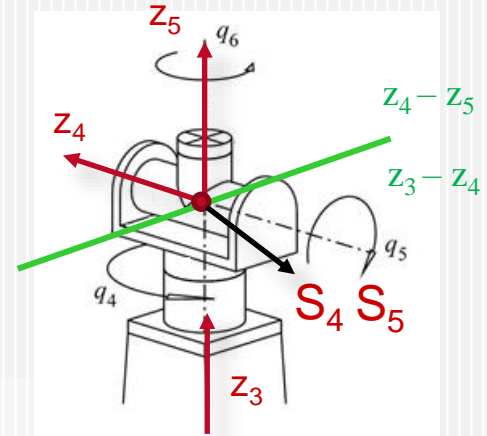
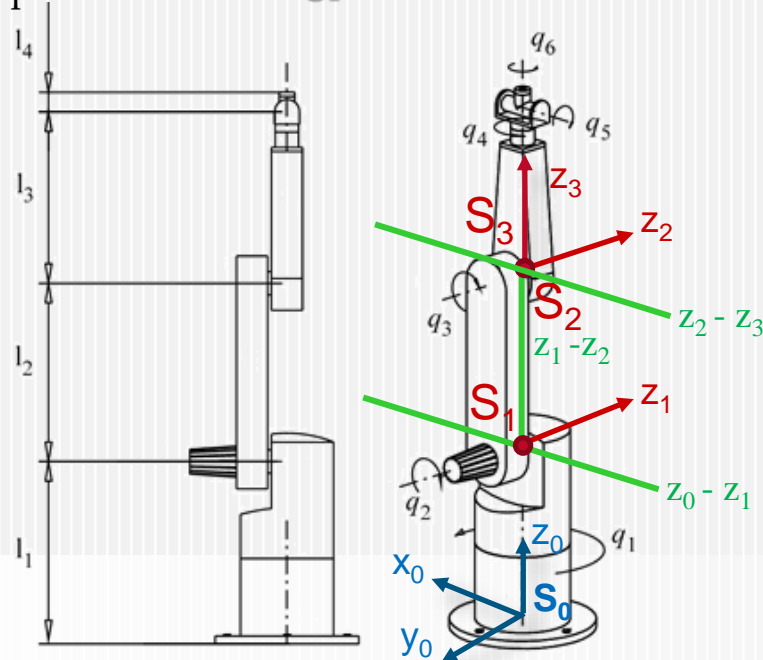


# Problema cinemático directo

Regla nº 6

## ■ Algoritmo DH.

- 6. Para  $i$  de 1 a  $n-1$ , situar el origen del sistema  $S_i$  en la intersección del eje  $z_i$  con la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si ambos ejes se cortasen se situaría  $S_i$  en el punto de corte. Si fuesen paralelos situaría  $S_i$  se situaría en la articulación  $i+1$ .

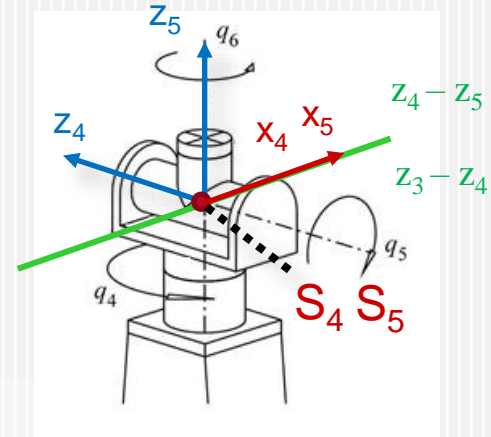
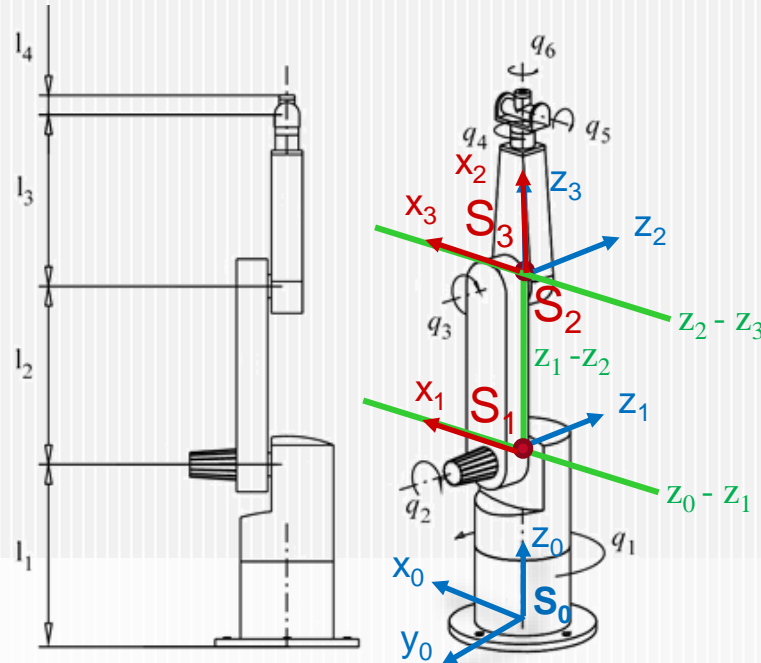


# Problema cinemático directo

Regla nº 7

## ■ Algoritmo DH.

- 7. Situar  $\mathbf{x}_i$  en la línea normal común a  $\mathbf{z}_{i-1}$  y  $\mathbf{z}_i$ .

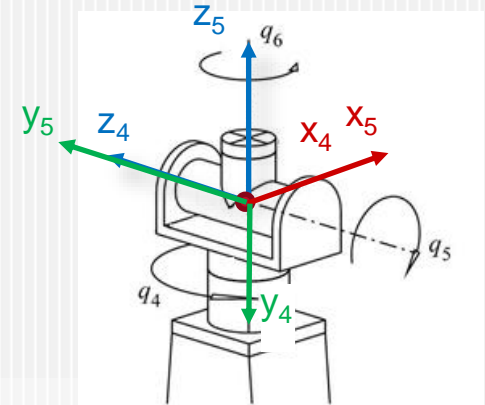
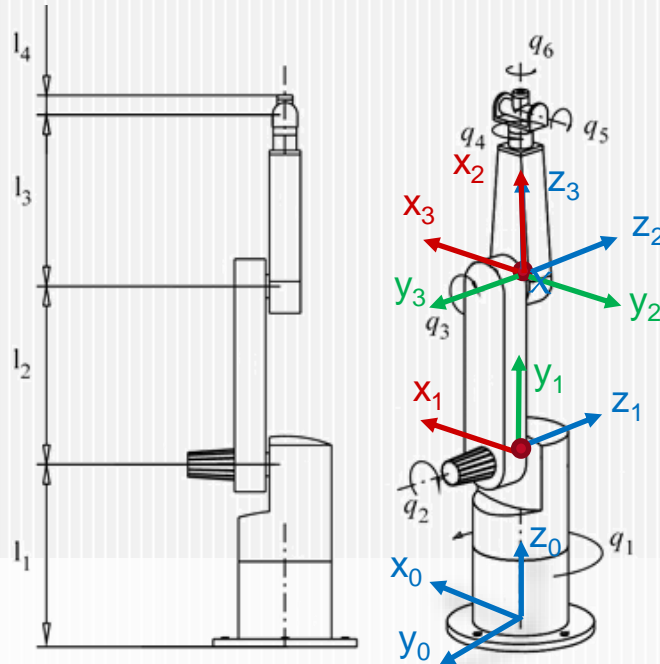


# Problema cinemático directo

Regla nº 8

## ■ Algoritmo DH.

- 8. Situar  $y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $x_i$  y  $z_i$ .

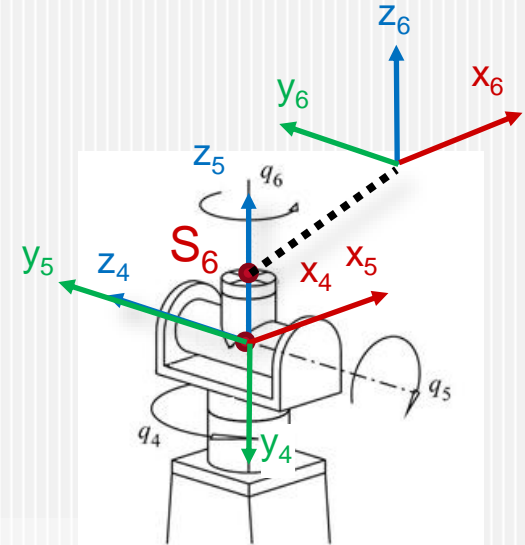
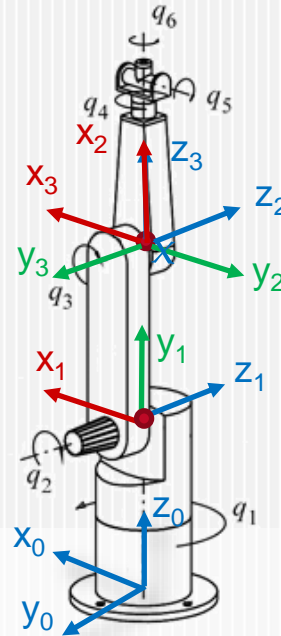
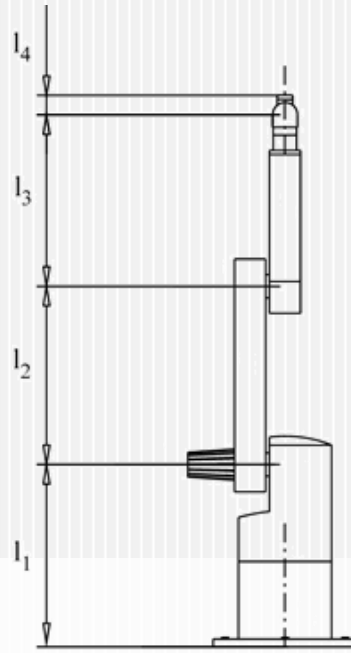


# Problema cinemático directo

Regla nº 9

## ■ Algoritmo DH.

- 9. Situar el sistema  $S_n$  en el extremo del robot de modo que  $z_n$  coincida con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  sea normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ .



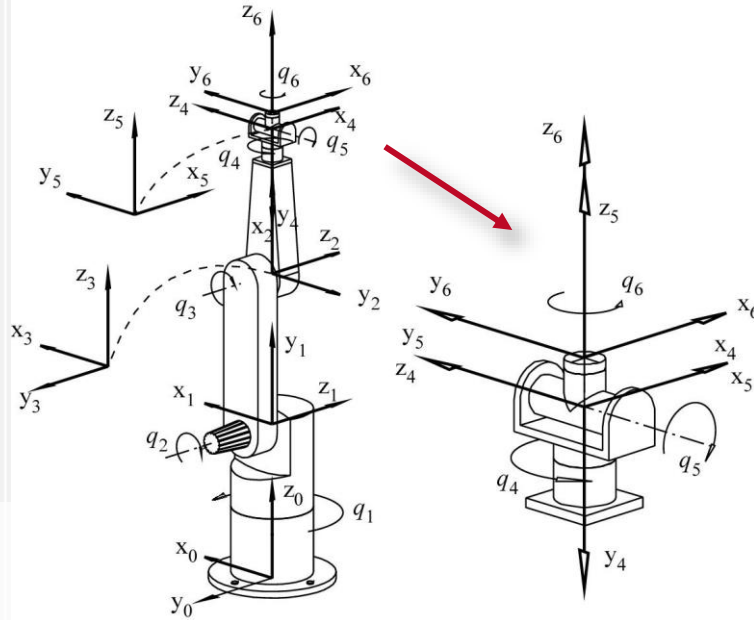
# Problema cinemático directo

## ■ Algoritmo DH.

1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.

2. Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro ( $\theta_i$   $d_i$   $a_i$   $\alpha_i$ ) → 10-13 reglas.

3. Reglas para calcular las matriz de transformación  ${}^{base}T_{extremo}$ . 14-15 reglas.

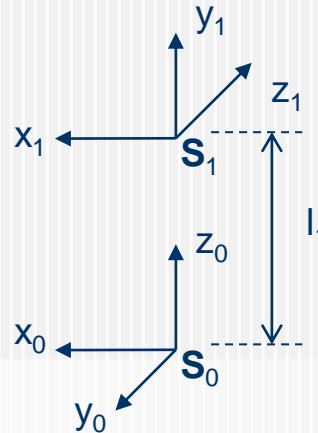
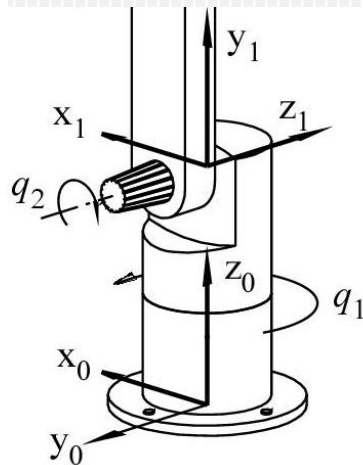


# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



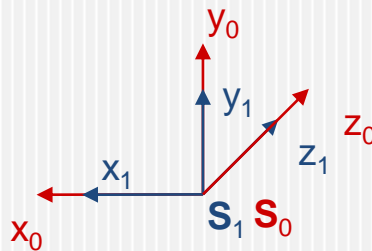
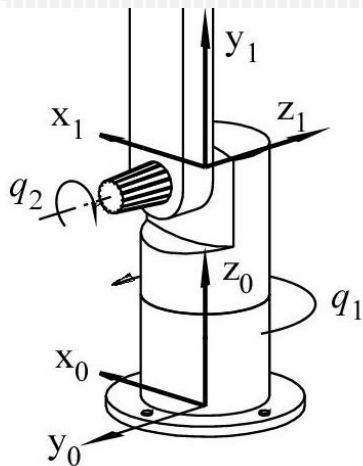
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1				

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$

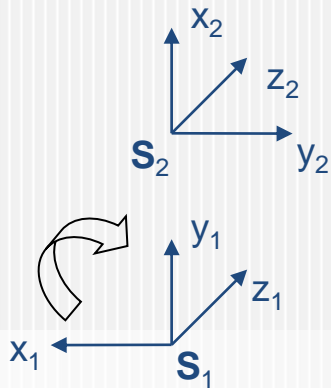
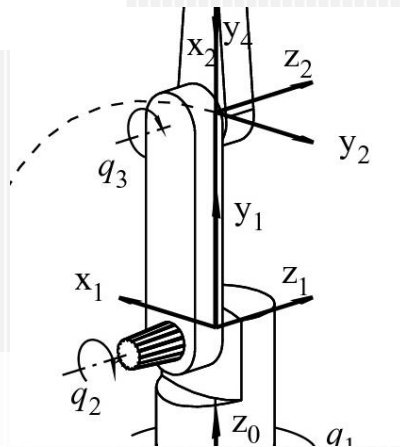


# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $z_{i-1}$  que habría que desplazar  $S_{i-1}$  para alinear  $x_{i-1}$  y  $x_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $S_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $S_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $x_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $x_i$ ) para que el nuevo  $S_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $S_i$ .



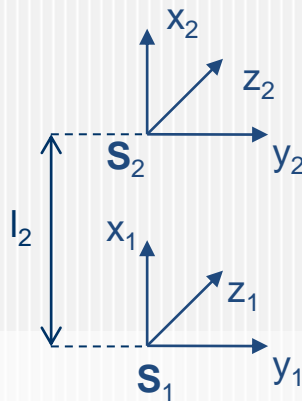
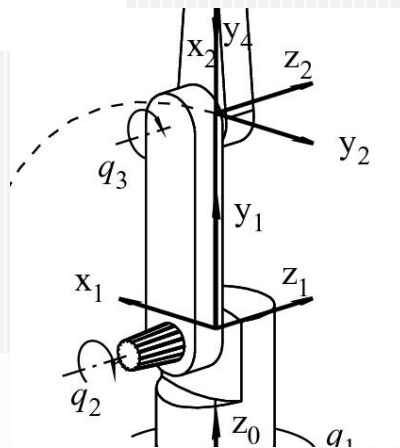
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2				

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $z_{i-1}$  que habría que desplazar  $S_{i-1}$  para alinear  $x_{i-1}$  y  $x_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $S_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $S_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $x_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $x_i$ ) para que el nuevo  $S_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $S_i$ .



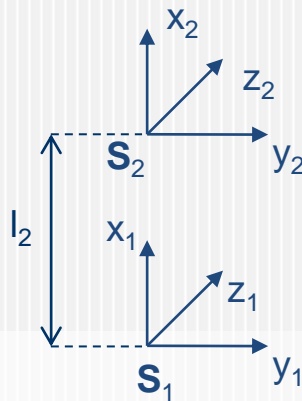
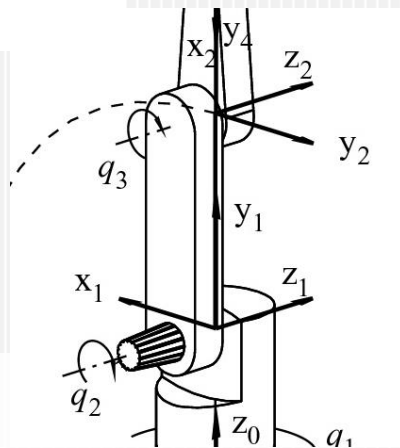
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$			

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $z_{i-1}$  que habría que desplazar  $S_{i-1}$  para alinear  $x_{i-1}$  y  $x_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $S_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $S_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $x_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $x_i$ ) para que el nuevo  $S_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $S_i$ .



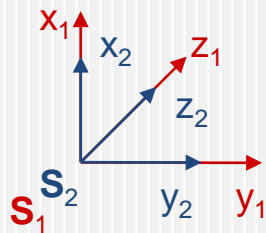
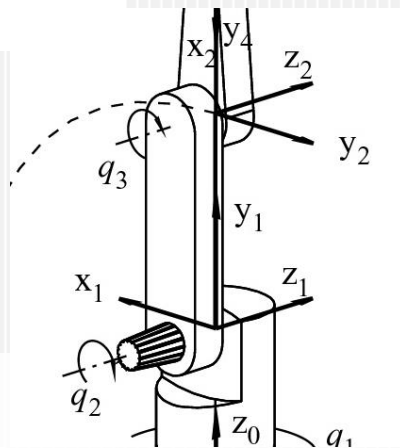
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0		

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $z_{i-1}$  que habría que desplazar  $S_{i-1}$  para alinear  $x_{i-1}$  y  $x_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $S_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $S_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $x_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $x_i$ ) para que el nuevo  $S_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $S_i$ .



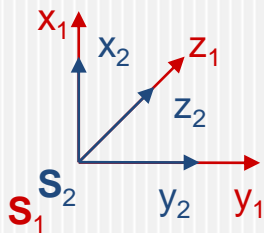
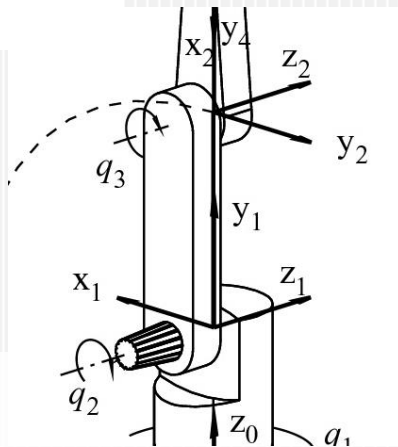
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $z_{i-1}$  que habría que desplazar  $S_{i-1}$  para alinear  $x_{i-1}$  y  $x_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $S_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $S_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $x_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $x_i$ ) para que el nuevo  $S_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $S_i$ .



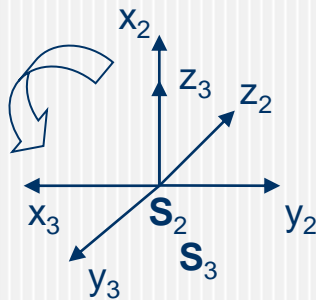
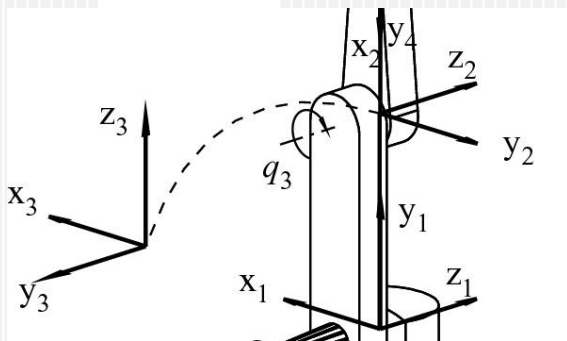
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



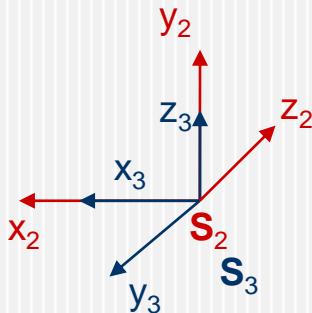
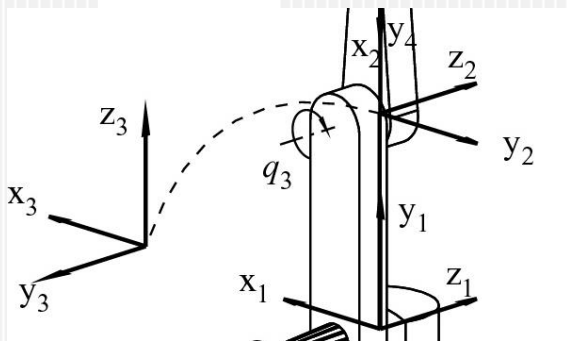
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0
3				

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



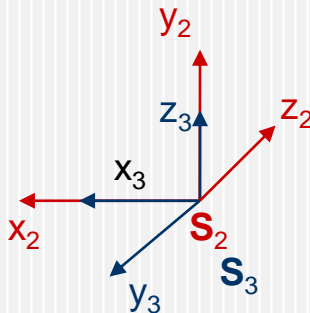
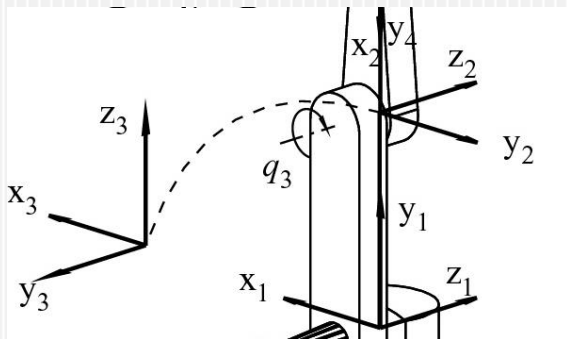
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0
3	$q_3 - 90^\circ$			

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0		

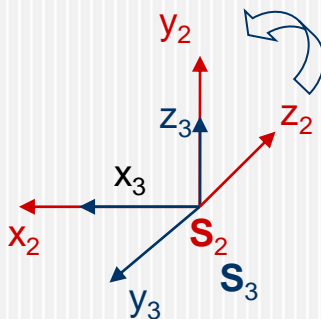
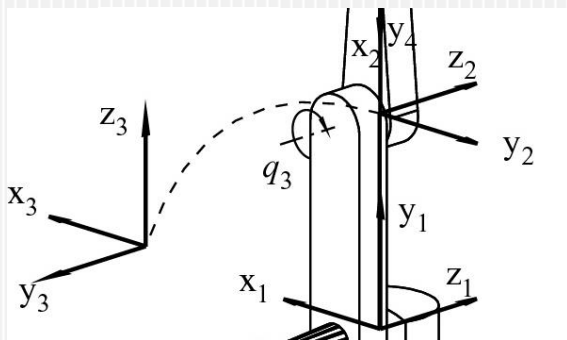


# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



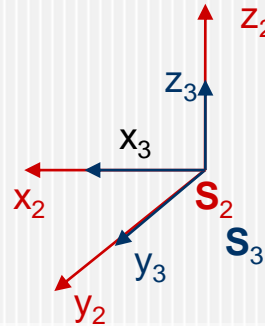
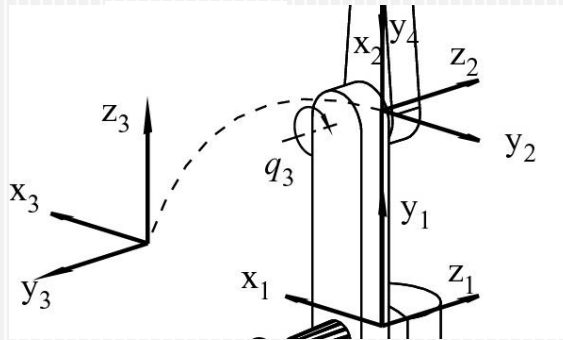
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0	0	

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



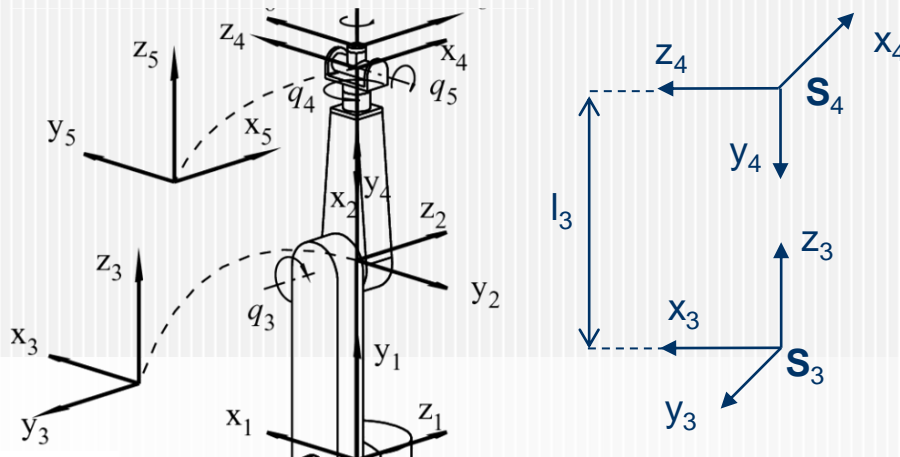
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0	0	$-90^\circ$

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



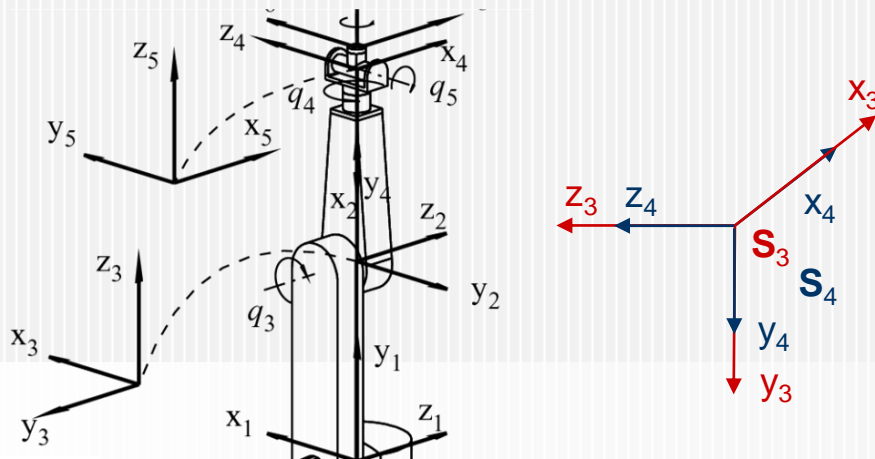
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
4				

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



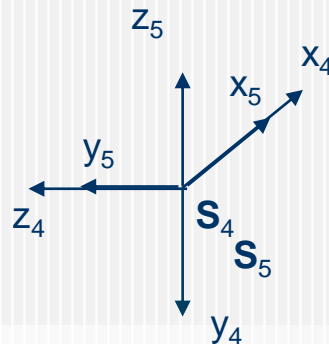
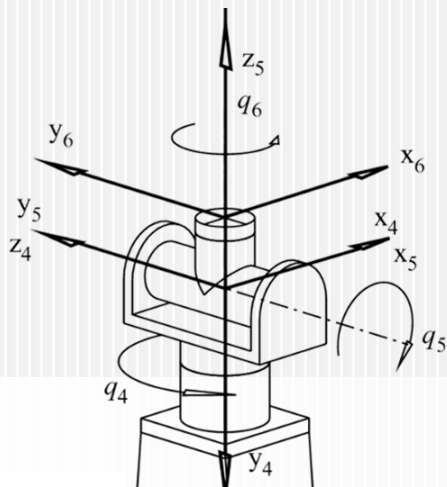
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
4	$q_4 - 90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- ▣ 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- ▣ 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- ▣ 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- ▣ 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



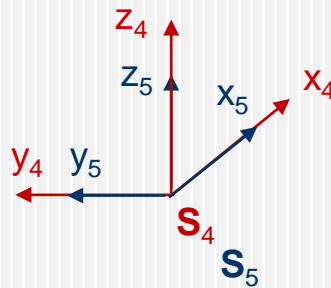
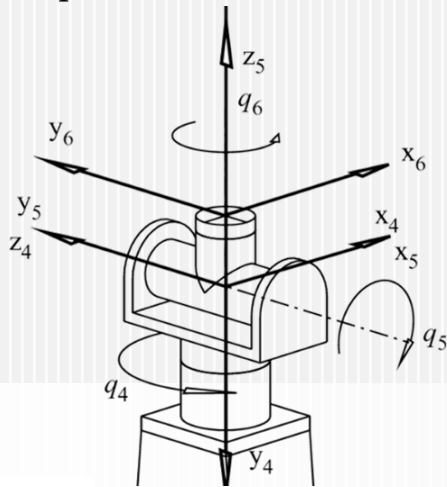
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
4	$q_4 - 90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$
5				

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



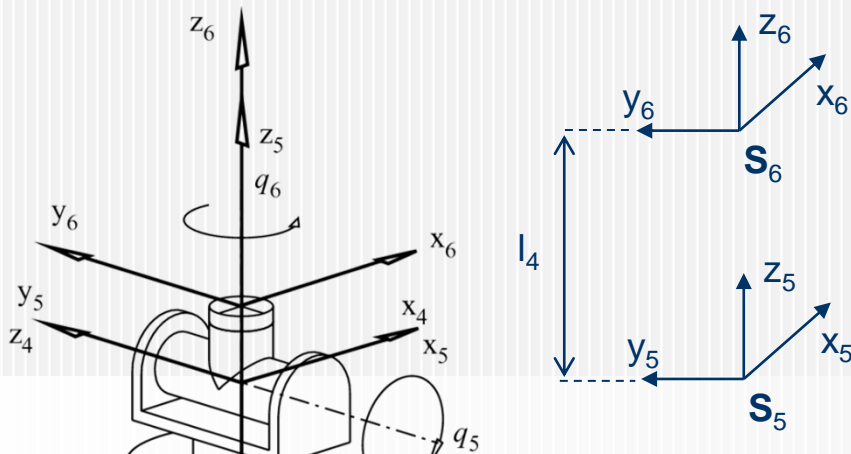
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
4	$q_4 - 90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$
5	$q_5$	0	0	$90^\circ$

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- ▣ 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- ▣ 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- ▣ 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- ▣ 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



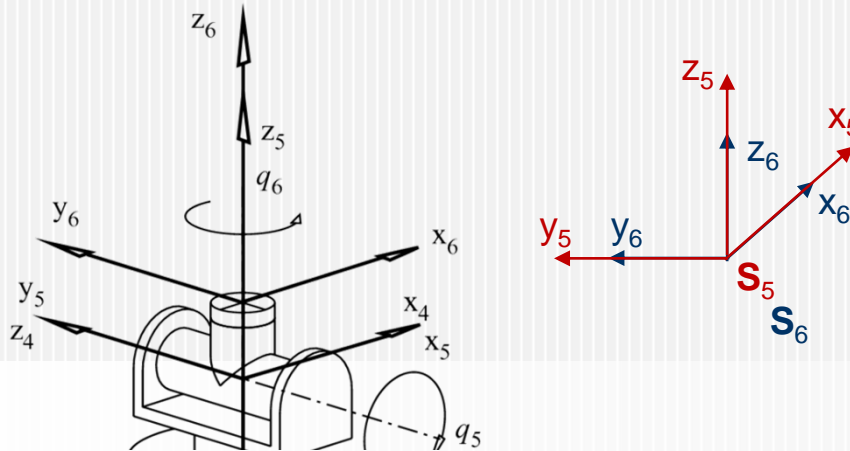
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
4	$q_4 - 90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$
5	$q_5$	0	0	$90^\circ$
6				

# Problema cinemático directo

Reglas 10-13

## ■ Algoritmo DH.

- 10.  $\theta_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{z}_{i-1}$  para que  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$  queden paralelos.
- 11.  $d_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{z}_{i-1}$  que habría que desplazar  $\mathbf{S}_{i-1}$  para alinear  $\mathbf{x}_{i-1}$  y  $\mathbf{x}_i$
- 12.  $a_i$ : distancia medida sobre  $\mathbf{x}_i$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  para que su origen coincidiese con  $\mathbf{S}_i$ .
- 13.  $\alpha_i$ : ángulo que habría que girar en torno a  $\mathbf{x}_{i-1}$  (que ahora coincidiría con  $\mathbf{x}_i$ ) para que el nuevo  $\mathbf{S}_{i-1}$  coincidiese totalmente con  $\mathbf{S}_i$ .



	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
4	$q_4 - 90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$
5	$q_5$	0	0	$90^\circ$
6	$q_6$	$l_4$	0	0



# Problema cinemático directo

## ■ Algoritmo DH.

1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia  $\rightarrow$  1-9 reglas.

**2. Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro ( $\theta_i$   $d_i$   $a_i$   $\alpha_i$ )  $\rightarrow$  10-13 reglas.**

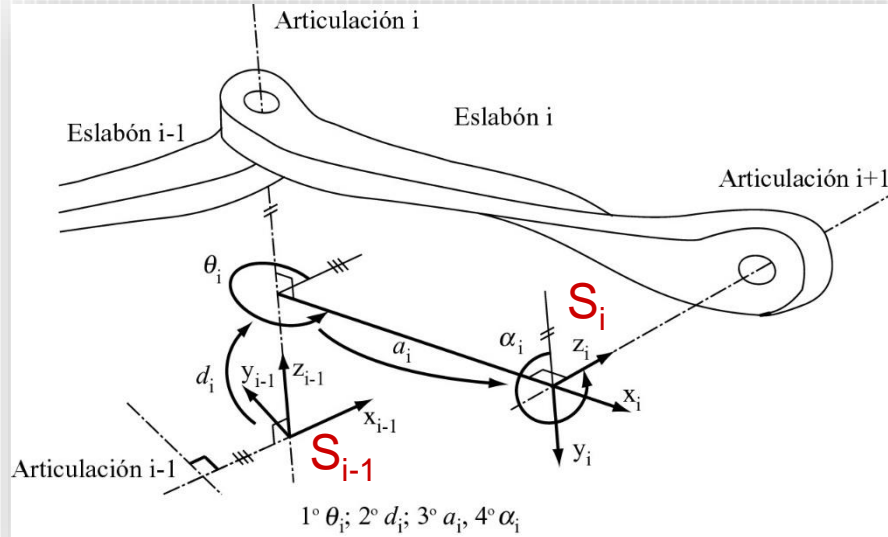
3. Reglas para calcular las matriz de transformación  ${}^{base}T_{extremo}$ . 14-15 reglas.

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$	$\rightarrow {}^0T_1$
2	$q_2+90^\circ$	0	$l_2$	0	$\rightarrow {}^1T_2$
3	$q_3-90^\circ$	0	0	$-90^\circ$	$\rightarrow {}^2T_3$
4	$q_4-90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$	$\rightarrow {}^3T_4$
5	$q_5$	0	0	$90^\circ$	$\rightarrow {}^4T_5$
6	$q_6$	$l_4$	0	0	$\rightarrow {}^5T_6$

# Problema cinemático directo

Regla nº 14

- Algoritmo DH.
  - 14. Calcular las matrices  ${}^{i-1}T_i$ .



$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
------------	-------	-------	------------

$${}^{i-1}T_i = \mathbf{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \mathbf{Tras}(z_{i-1}, d_i) \cdot \mathbf{Tras}(x_i, a_i) \cdot \mathbf{Rot}(x_i, \alpha_i)$$

# Problema cinemático directo

Regla nº 14

## ■ Algoritmo DH.

- 14. Calcular las matrices  ${}^{i-1}T_i$ .

$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
------------	-------	-------	------------

$${}^{i-1}T_i = \mathbf{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \mathbf{Tras}(z_{i-1}, d_i) \cdot \mathbf{Tras}(x_i, a_i) \cdot \mathbf{Rot}(x_i, \alpha_i)$$

Rotación



Traslación

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Problema cinemático directo

Regla nº 15

## ■ Algoritmo DH.

- 15. Calcular la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot:  $T$ .

$$T = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n$$

Robot  $n$  articulaciones

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$l_1$	0	$90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	0	$l_2$	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0	0	$-90^\circ$
4	$q_4 - 90^\circ$	$l_3$	0	$-90^\circ$
5	$q_5$	0	0	$90^\circ$
6	$q_6$	$l_4$	0	0

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$T$  define la posición y orientación del extremo del robot respecto a la base en función de las  $n$  coordenadas articulares

A vertical bar on the left side of the slide, composed of four colored segments: red at the top, blue, yellow, and red at the bottom.

# CONCLUSIONES



# Conclusiones

- Resolución del problema cinemático directo: localización del extremo del robot en función de las coordenadas articulares:
  - Método geométrico.
    - Basado en relaciones trigonométricas.
    - Se emplea para robots de pocos grados de libertad, normalmente para obtener la posición y no la orientación.
  - Método de Denavit-Hartenberg.
    - Basado en matrices de transformación homogénea.
    - Metodología muy empleada para cualquier tipo de robot manipulador o antropomórfico.



# Bibliografía



Torres, F., Pomares, J. Gil, P., Puente, S. T., Aracil, R. "Robots y sistemas sensoriales", Prentice Hall, Madrid (2005) ISBN: 84-205-3574-5.



A. Barrientos, A. L. F. Peñín, C. Balaguer, R. Aracil. "Fundamentos de Robótica", Mc Graw Hill (2007) ISBN: 978-84-481-5636-7



Ingeniería Informática



# AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

## CURSO 2022/2023

Tema 10. Cinemática de sistemas robóticos 1