Ingeniería Informática

AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

CURSO 2022/2023

Tema 11. Cinemática de sistemas robóticos 2

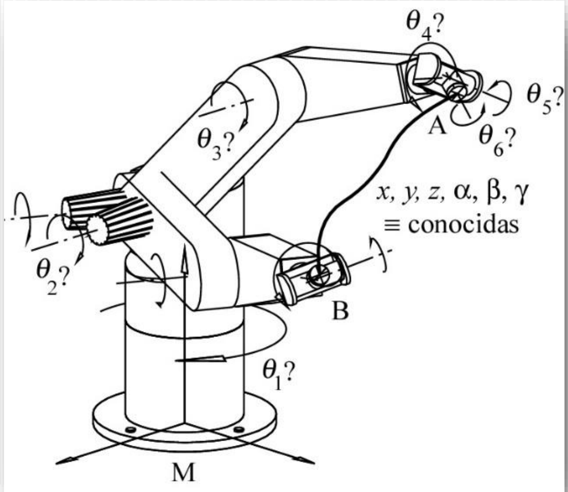
Cinemática inversa de robots manipuladores

1. Introducción.
2. Solución algebraica.
3. Solución geométrica.
4. Solución de Pieper.
5. Conclusiones.

INTRODUCCIÓN

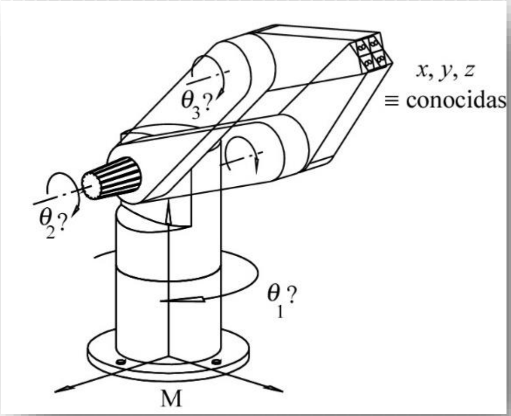
Introducción

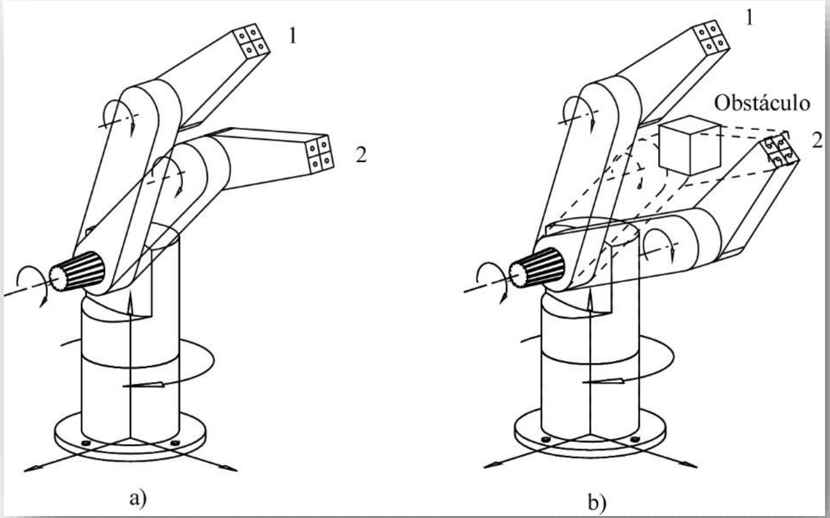
- Cinemática inversa
  - Determinar la posición de las articulaciones del robot si lo que se conoce es la localización del extremo



Introducción

- Valores de las variables articulares para que el extremo se encuentre en una localización dada.
  - Sin solución: soluciones fuera del espacio de trabajo o fuera de rango.
  - Múltiples soluciones: codo arriba-abajo, muñeca arriba-abajo.





Introducción

- Valores de las variables articulares para que el extremo se encuentre en una localización dada.
  - Sistemas de ecuaciones en la resolución cinemática.

Robot *n* articulaciones

$$^{\text{base}}\mathbf{T}_{\text{extremo}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x^0_{\text{extremo}} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y^0_{\text{extremo}} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z^0_{\text{extremo}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática directa

$$\begin{aligned}
x^0_{\text{extremo}} &= f_1\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
y^0_{\text{extremo}} &= f_2\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
z^0_{\text{extremo}} &= f_3\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{11} &= f_4\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{12} &= f_5\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{13} &= f_6\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{21} &= f_7\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{22} &= f_8\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{23} &= f_9\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{31} &= f_{10}\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{32} &= f_{11}\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
r_{33} &= f_{12}\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right)
\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones
en la resolución cinemática

n articulaciones

$$\begin{aligned}
x^0_{\text{extremo}} &= f_x\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
y^0_{\text{extremo}} &= f_y\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
z^0_{\text{extremo}} &= f_z\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
\alpha^0_{\text{extremo}} &= f_\alpha\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
\beta^0_{\text{extremo}} &= f_\beta\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\
\gamma^0_{\text{extremo}} &= f_\gamma\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right)
\end{aligned}$$

Relaciones entre extremo del robot
y variables articulares

Introducción

Formas de resolución de la cinemática inversa

- Solución algebraica
  - Consiste en obtener un sistema de *n* ecuaciones en función de la localización del extremo del robot.
  - Se puede obtener partiendo de la solución de la cinemática directa mediante el algoritmo de Denavit-Hartenberg, despejando de la matriz de transformación final las variables articulares.
- Solución geométrica
  - Consiste en descomponer la cadena cinemática del robot en varios planos geométricos, resolviendo por trigonometría el problema asociado a cada plano.
- Solución de Pieper (desacoplo cinemático)
  - Consiste en separar las articulaciones de la muñeca del resto, resolviendo ambos conjuntos por separado.

Introducción

Formas de resolución de la cinemática inversa:

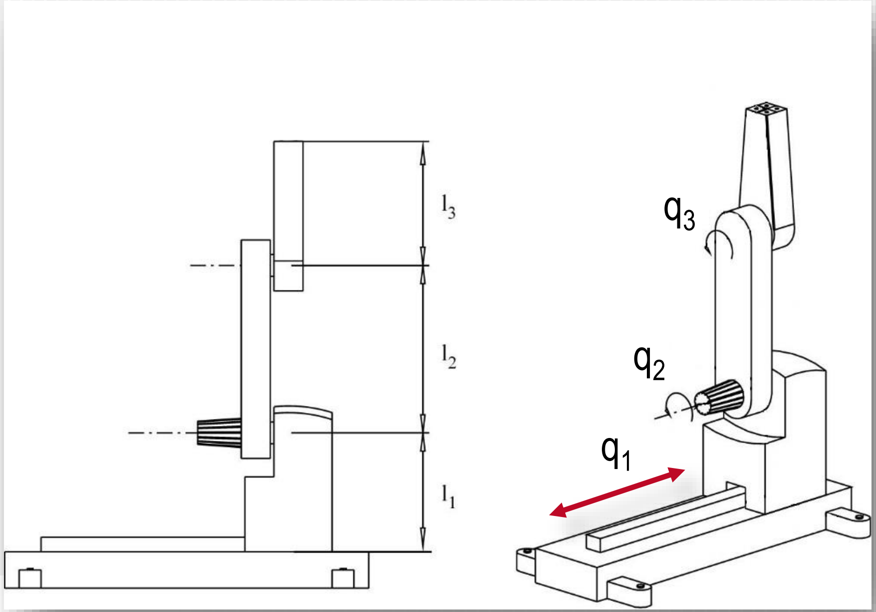
- Solución algebraica
  - Solución empleada para resolver cualquier tipo de robot. Para robots de un alto número de GDL (n<=6), las ecuaciones resultantes se resuelven mediante métodos matemáticos numéricos.
- Solución geométrica
  - Robots de pocos grados de libertad (n<=4) y para robots antropomórficos de 6 GDL con muñeca esférica y composición tipo planar para los 3 primeros GDL.
- Solución de Pieper (desacoplo cinemático)
  - Para robots antropomórficos de $n = 6$ GDL con muñeca esférica.

Ingeniería Informática

SOLUCIÓN ALGEBRAICA

Solución algebraica

- <u>Ejemplo</u>: robot de 3 GDL, una articulación prismática y dos rotacionales.



Aplicación el algoritmo DH

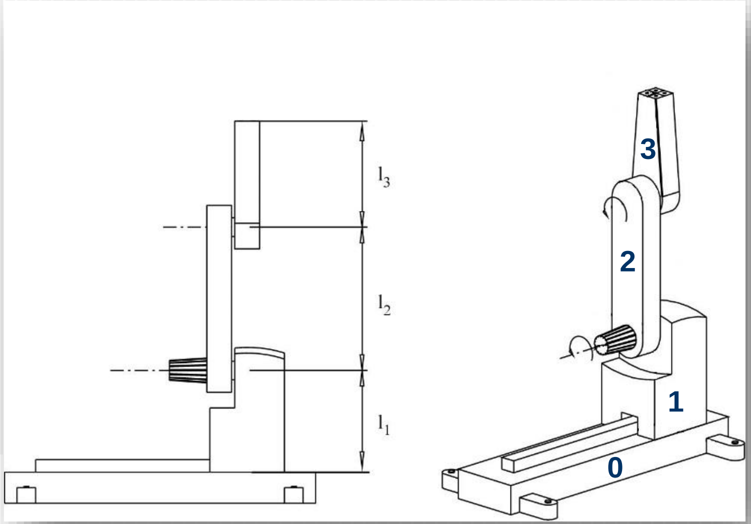
$^{base}T_{extremo}$

Resolución de q1,q2,q3

$$
\begin{aligned}
x^0_{extremo} &= \boxed{f_x(q_1, q_2, \cdots, q_n)} \\
y^0_{extremo} &= f_y(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
z^0_{extremo} &= f_z(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
\alpha^0_{extremo} &= f_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
\beta^0_{extremo} &= f_\beta(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
\gamma^0_{extremo} &= f_\gamma(q_1, q_2, \cdots, q_n)
\end{aligned}
$$

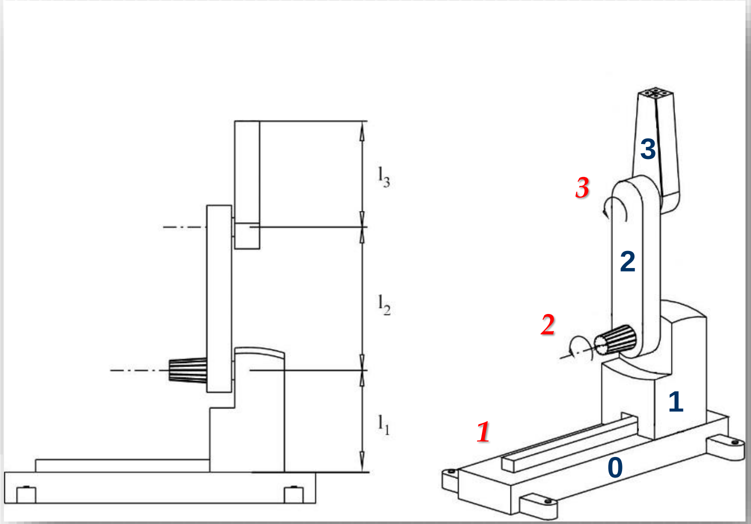
Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **1**. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con **n** (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.



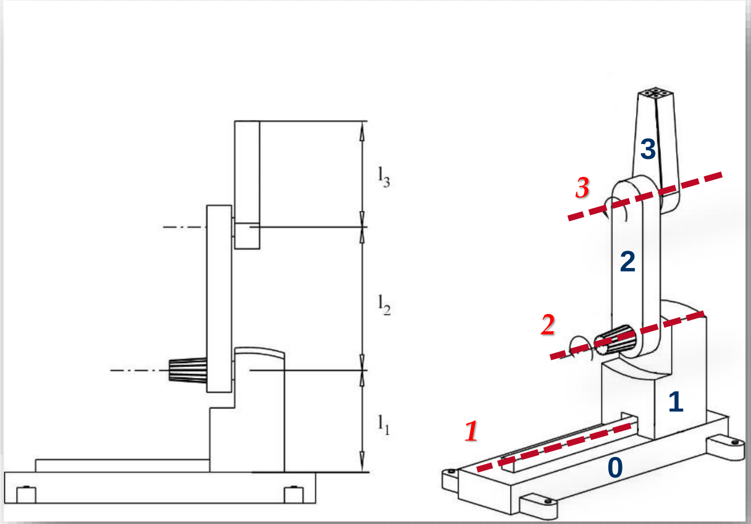
Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **2**. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en **n**.



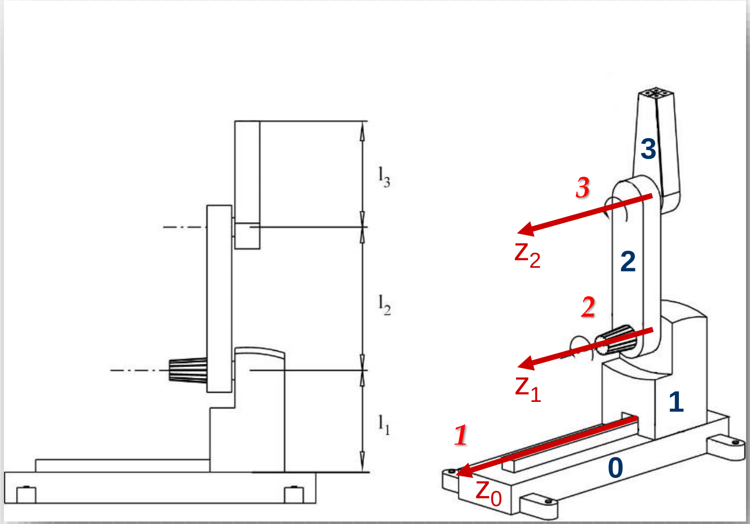
Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **3**. Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.



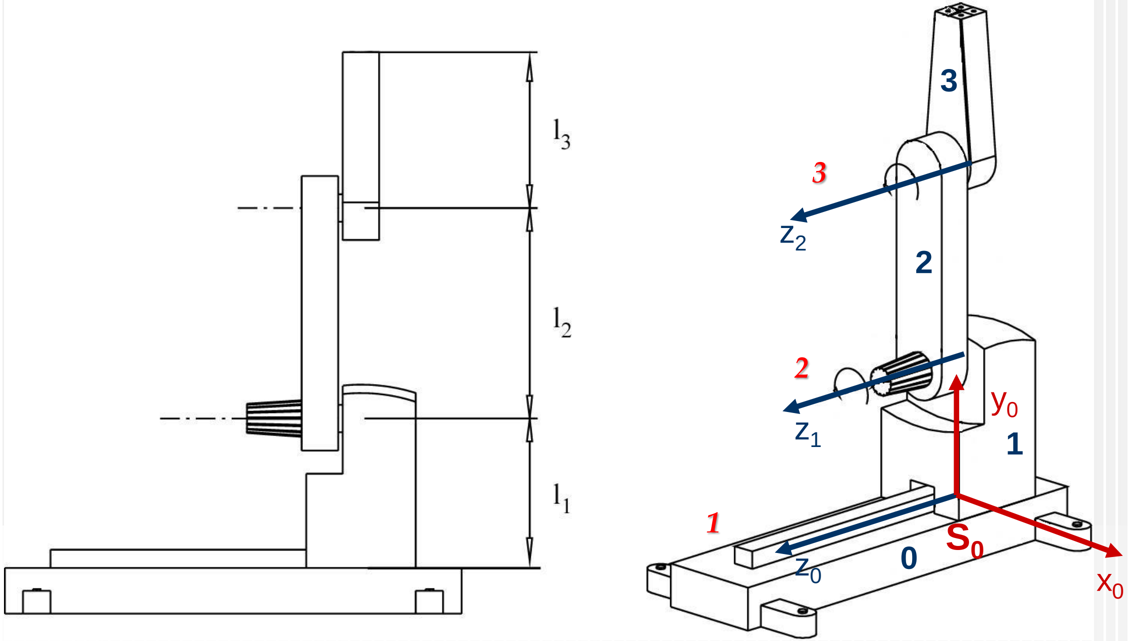
Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **4**. Para el eje **i**, de 0 a n-1, situar el eje **zi** sobre el eje de la articulación **i+1**.



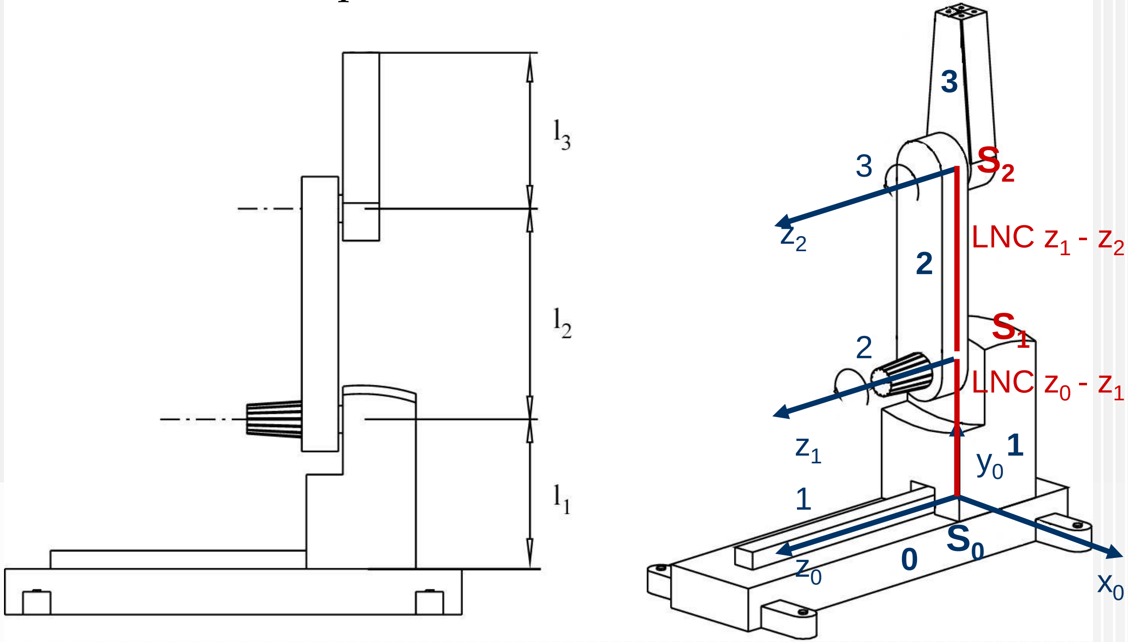
Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **5**. Situar el origen del sistema de la base S_0 en cualquier punto del eje z_0. Los ejes $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0.



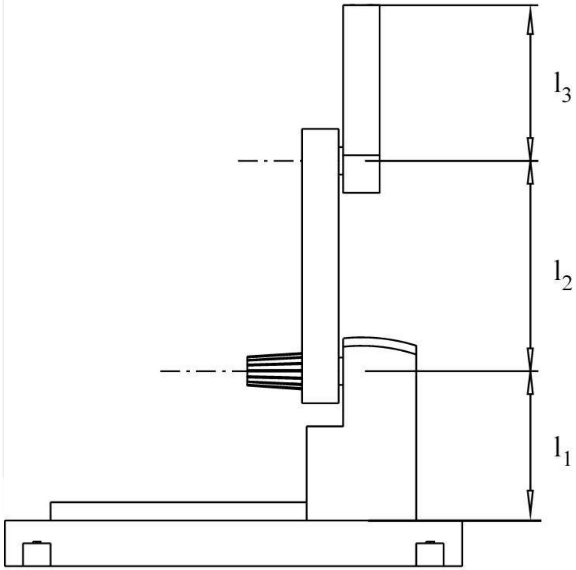
Solución algebraica

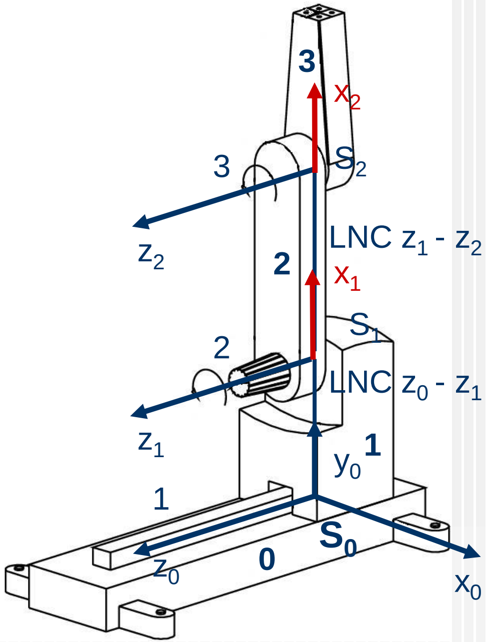
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **6**. Para **i** de 1 a n-1, situar el origen del sistema **Si** en la intersección del eje $\mathbf{z_i}$ con la línea normal común a $\mathbf{z_{i-1}}$ y $\mathbf{z_i}$. Si ambos ejes se cortasen se situaría **Si** en el punto de corte. Si fuesen paralelos situaría **Si** se situaría en la articulación i+1.



Solución algebraica

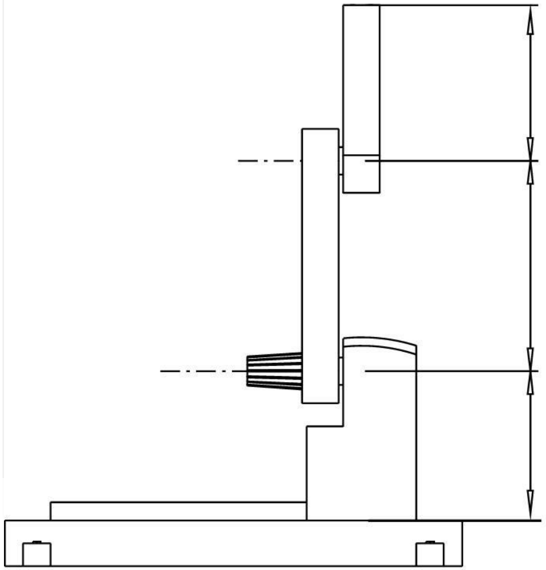
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **7**. Situar $\mathbf{x_i}$ en la línea normal común a $\mathbf{z_{i-1}}$ y $\mathbf{z_i}$.

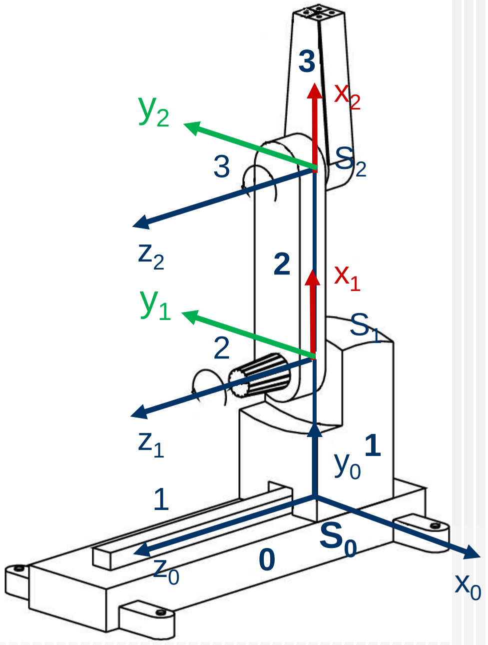




Solución algebraica

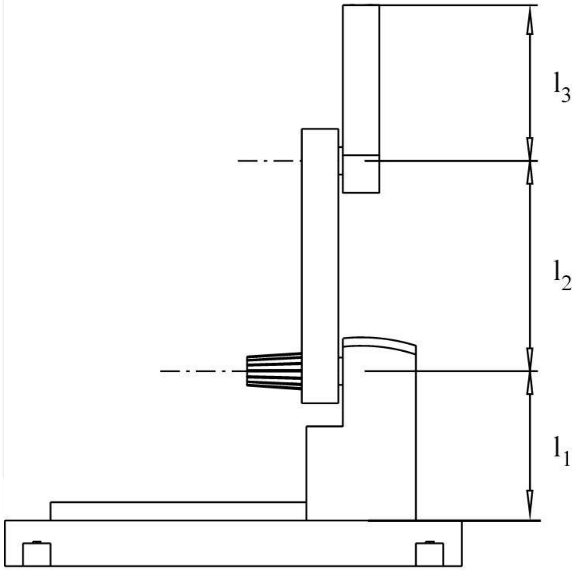
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **8**. Situar $\mathbf{y_i}$ de modo que forme un sistema dextrógiro con $\mathbf{x_i}$ y $\mathbf{z_i}$.

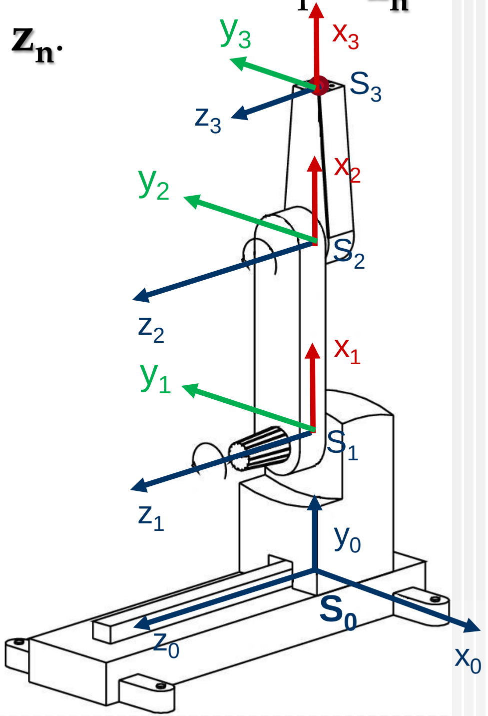




Solución algebraica

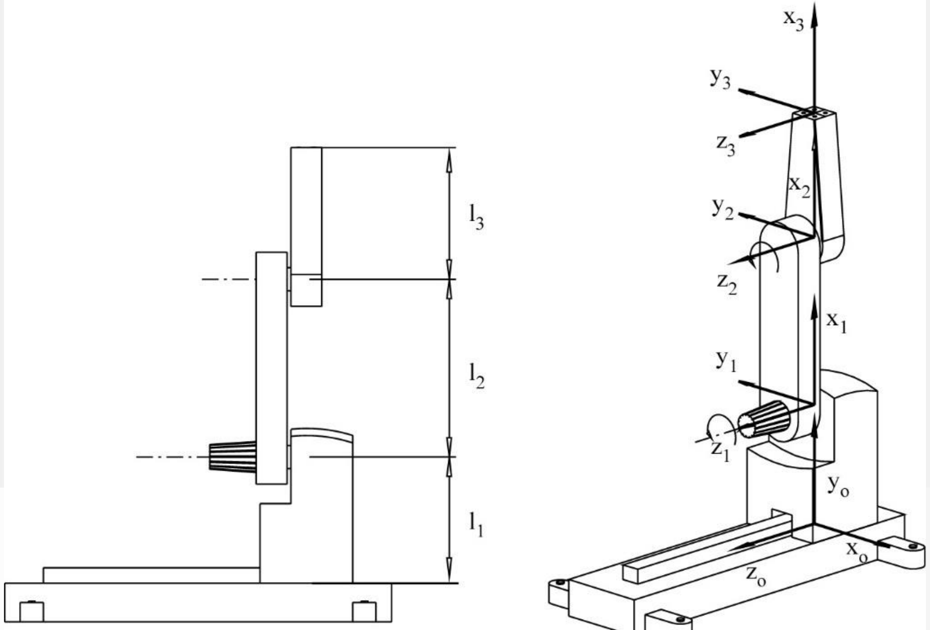
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  - **9**. Situar el sistema **Sn** en el extremo del robot de modo que $\mathbf{z_n}$ coincida con la dirección de $\mathbf{z_{n-1}}$ y $\mathbf{x_n}$ sea normal a $\mathbf{z_{n-1}}$ y $\mathbf{z_n}$.





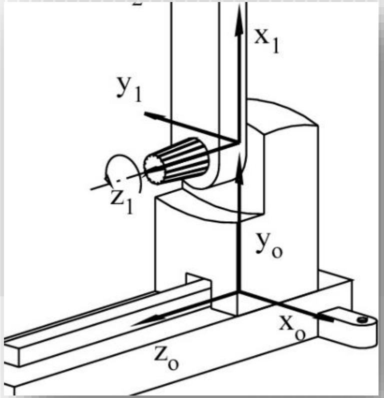
Solución algebraica

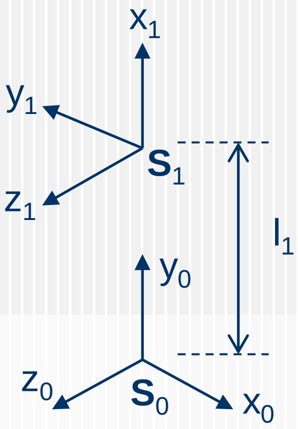
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
  1. **Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.**
  2. Reglas para calcular los parámetros DH (θ_i d_i a_i α_i) → 10-13 reglas.
  3. Reglas para calcular la matriz de transformación ${}^{base}T_{extremo}$. 14-15 reglas.



Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
  - **10**. θ_i: ángulo que habría que girar en torno a $\mathbf{z_{i-1}}$ para que $\mathbf{x_{i-1}}$ y $\mathbf{x_i}$ queden paralelos.
  - **11**. d_i: distancia medida sobre $\mathbf{z_{i-1}}$ que habría que desplazar **Si-1** para alinear $\mathbf{x_{i-1}}$ y $\mathbf{x_i}$
  - **12**. a_i: distancia medida sobre $\mathbf{x_i}$ (que ahora coincidiría con $\mathbf{x_{i-1}}$) que habría que desplazar el nuevo **Si-1** para que su origen coincidiese con **Si**.
  - **13**. α_i: ángulo que habría que girar en torno a $\mathbf{x_{i-1}}$(que ahora coincidiría con $\mathbf{x_i}$) para que el nuevo **Si-1** coincidiese totalmente con **Si**.

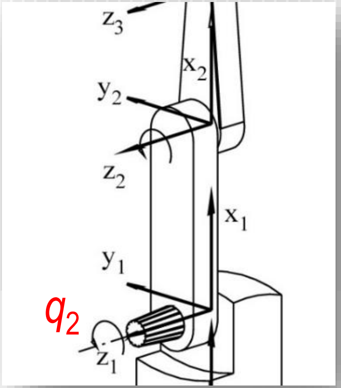


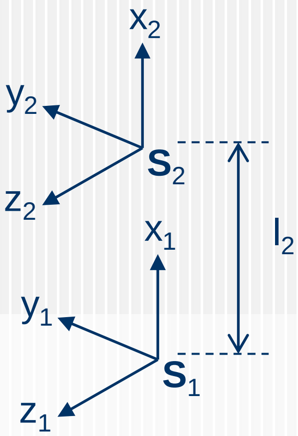


	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90º	q_1	l_1	0

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
  - **10**. θ_i: ángulo que habría que girar en torno a $\mathbf{z_{i-1}}$ para que $\mathbf{x_{i-1}}$ y $\mathbf{x_i}$ queden paralelos.
  - **11**. d_i: distancia medida sobre $\mathbf{z_{i-1}}$ que habría que desplazar **Si-1** para alinear $\mathbf{x_{i-1}}$ y $\mathbf{x_i}$
  - **12**. a_i: distancia medida sobre $\mathbf{x_i}$ (que ahora coincidiría con $\mathbf{x_{i-1}}$) que habría que desplazar el nuevo **Si-1** para que su origen coincidiese con **Si**.
  - **13**. α_i: ángulo que habría que girar en torno a $\mathbf{x_{i-1}}$(que ahora coincidiría con $\mathbf{x_i}$) para que el nuevo **Si-1** coincidiese totalmente con **Si**.

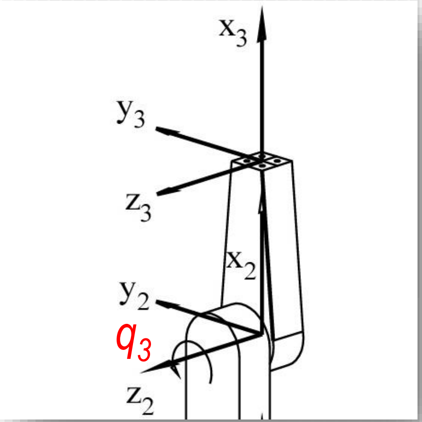


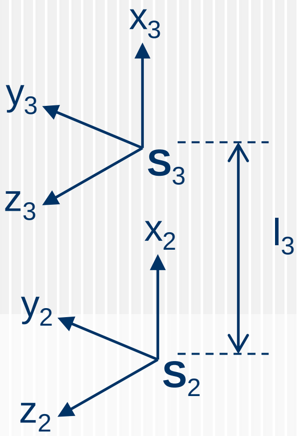


	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90º	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
  - **10**. θ_i: ángulo que habría que girar en torno a $\mathbf{z_{i-1}}$ para que $\mathbf{x_{i-1}}$ y $\mathbf{x_i}$ queden paralelos.
  - **11**. d_i: distancia medida sobre $\mathbf{z_{i-1}}$ que habría que desplazar **Si-1** para alinear $\mathbf{x_{i-1}}$ y $\mathbf{x_i}$
  - **12**. a_i: distancia medida sobre $\mathbf{x_i}$ (que ahora coincidiría con $\mathbf{x_{i-1}}$) que habría que desplazar el nuevo **Si-1** para que su origen coincidiese con **Si**.
  - **13**. α_i: ángulo que habría que girar en torno a $\mathbf{x_{i-1}}$(que ahora coincidiría con $\mathbf{x_i}$) para que el nuevo **Si-1** coincidiese totalmente con **Si**.

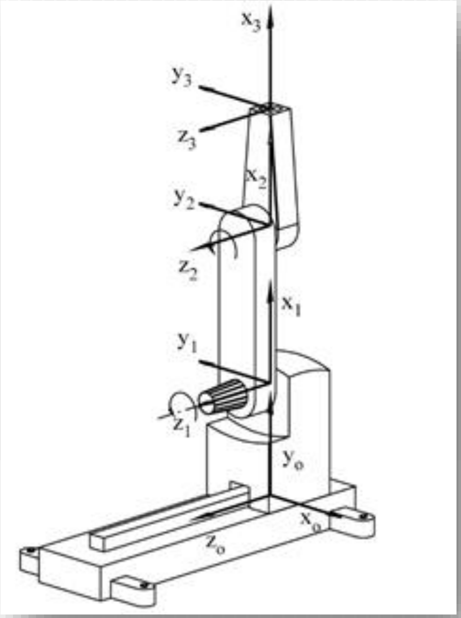




	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90º	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
  1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.
  2. **Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro (θ_i d_i a_i α_i) → 10-13 reglas.**
  3. Reglas para calcular las matriz de transformación ${}^{base}T_{extremo}$. 14-15 reglas.



	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1	90º	q_1	l_1	0	→ ${}^{0}\mathbf{T}_1$
2	q_2	0	l_2	0	→ ${}^{1}\mathbf{T}_2$
3	q_3	0	l_3	0	→ ${}^{2}\mathbf{T}_3$

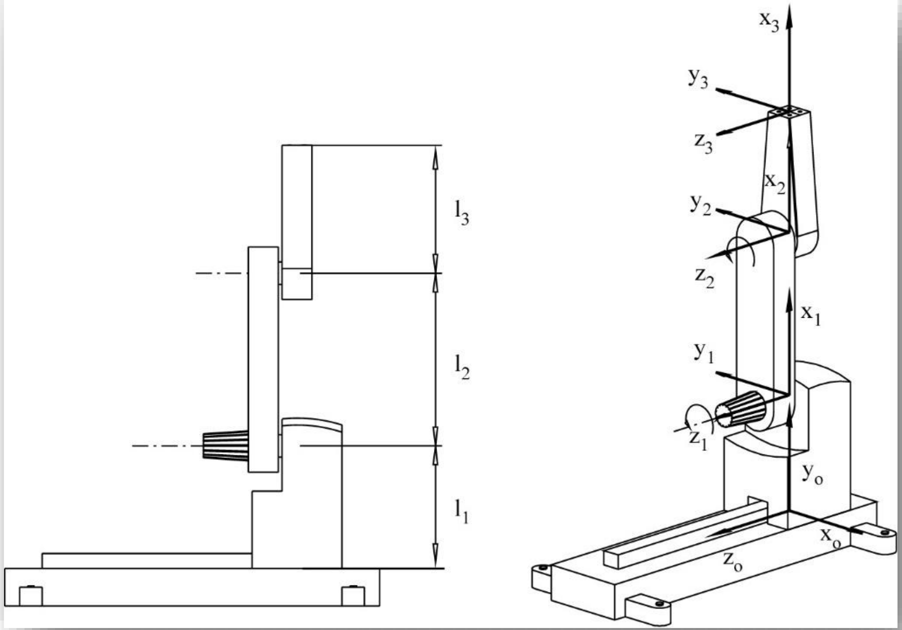
Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
  - **14**. Obtener las matrices ${}^{i-1}T_i$.
  - **15**. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $T = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2 \ldots {}^{n-1}T_n$
  - **16**. La matriz T define la posición y orientación del extremo del robot respecto a la base en función de las n coordenadas articulares.

$$
{}^{i-i}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\cos\alpha_i \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta_i & \mathrm{sen}\,\alpha_i \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta_i & a_i \cdot \cos\vartheta_i \\ \mathrm{sen}\,\vartheta_i & \cos\alpha_i \cdot \cos\vartheta_i & -\mathrm{sen}\,\alpha_i \cdot \cos\vartheta_i & a_i \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta_i \\ 0 & \mathrm{sen}\,\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:



$$^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1	90º	q_1	l_1	0	$\rightarrow\ {}^0\mathbf{T}_1$
2	q_2	0	l_2	0	$\rightarrow\ {}^1\mathbf{T}_2$
3	q_3	0	l_3	0	$\rightarrow\ {}^2\mathbf{T}_3$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:

$$
{}^{0}\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} x_{x^0_{\text{extremo}}} & x_{y^0_{\text{extremo}}} & x_{z^0_{\text{extremo}}} & x^0_{\text{extremo}} \\ y_{x^0_{\text{extremo}}} & y_{y^0_{\text{extremo}}} & y_{z^0_{\text{extremo}}} & y^0_{\text{extremo}} \\ z_{x^0_{\text{extremo}}} & z_{y^0_{\text{extremo}}} & z_{z^0_{\text{extremo}}} & z^0_{\text{extremo}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\rightarrow {}^{0}\mathbf{T}_3 = \boxed{{}^{0}\mathbf{T}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{T}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{T}_3}
$$

Matrices obtenidas con las tabla DH → f (q)

Matriz conocida (dato de partida para el cálculo de la cinemática inversa)

$$
\left({}^{0}\mathbf{T}_1\right)^{-1} \cdot {}^{0}\mathbf{T}_3 = {}^{1}\mathbf{T}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{T}_3
$$

f (q_1)

f (q_2, q_3)

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:

$$\left({}^{0}\mathbf{T}_{1}\right)^{-1}\cdot{}^{0}\mathbf{T}_{3}={}^{1}\mathbf{T}_{2}\cdot{}^{2}\mathbf{T}_{3}$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 & -\cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 & l_3 \cos q_2 \cos q_3 - l_3 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 + l_2 \cos q_2 \\ \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 & -\operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 + \cos q_2 \cos q_3 & 0 & l_3 \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + l_3 \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 + l_2 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{\mathbf{x}^0_{extremo}} & x_{\mathbf{y}^0_{extremo}} & x_{\mathbf{z}^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{\mathbf{x}^0_{extremo}} & y_{\mathbf{y}^0_{extremo}} & y_{\mathbf{z}^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{\mathbf{x}^0_{extremo}} & z_{\mathbf{y}^0_{extremo}} & z_{\mathbf{z}^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{x\,\text{extremo}}^0 & x_{y\,\text{extremo}}^0 & x_{z\,\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{x\,\text{extremo}}^0 & y_{y\,\text{extremo}}^0 & y_{z\,\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{x\,\text{extremo}}^0 & z_{y\,\text{extremo}}^0 & z_{z\,\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow z_{\text{extremo}}^0 - q_1 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = z_{\text{extremo}}^0}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 & -\cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 & l_3 \cos q_2 \cos q_3 - l_3 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 + l_2 \cos q_2 \\ \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 & -\operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 + \cos q_2 \cos q_3 & 0 & l_3 \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + l_3 \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 + l_2 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
  - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q3.

$$\left({}^{0}\mathbf{T}_{1}\right)^{-1}\cdot{}^{0}\mathbf{T}_{3}={}^{1}\mathbf{T}_{2}\cdot{}^{2}\mathbf{T}_{3} \Rightarrow \left({}^{1}\mathbf{T}_{2}\right)^{-1}\cdot\left({}^{0}\mathbf{T}_{1}\right)^{-1}\cdot{}^{0}\mathbf{T}_{3}={}^{2}\mathbf{T}_{3}$$

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1 \cos q_2 - l_2 \\ -\cos q_2 & -\operatorname{sen} q_2 & 0 & l_1 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & x_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & x_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}} & x^0_{\text{extremo}} \\ y_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & y_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & y_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}} & y^0_{\text{extremo}} \\ z_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & z_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & z_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}} & z^0_{\text{extremo}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\operatorname{sen} q_3 & 0 & \boxed{l_3 \cos q_3} \\ \operatorname{sen} q_3 & \cos q_3 & 0 & \boxed{l_3 \operatorname{sen} q_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
  - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q3.

$$\left({}^{1}\mathbf{T}_{2}\right)^{-1}\cdot\left({}^{0}\mathbf{T}_{1}\right)^{-1}\cdot{}^{0}\mathbf{T}_{3}={}^{2}\mathbf{T}_{3}$$

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1\cos q_2 - l_2 \\ -\cos q_2 & -\operatorname{sen} q_2 & 0 & l_1 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & x_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & x_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}} & x^0_{\text{extremo}} \\ y_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & y_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & y_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}} & y^0_{\text{extremo}} \\ z_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & z_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & z_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}} & z^0_{\text{extremo}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\operatorname{sen} q_3 & 0 & \boxed{l_3 \cos q_3} \\ \operatorname{sen} q_3 & \cos q_3 & 0 & \boxed{l_3 \operatorname{sen} q_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
  - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q3.

$$\left({}^{1}\mathbf{T}_2\right)^{-1} \cdot \left({}^{0}\mathbf{T}_1\right)^{-1} \cdot {}^{0}\mathbf{T}_3 = {}^{2}\mathbf{T}_3$$

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1 \cos q_2 - l_2 \\ -\cos q_2 & -\operatorname{sen} q_2 & 0 & l_1 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{x^0_{\text{extremo}}} & x_{y^0_{\text{extremo}}} & x_{z^0_{\text{extremo}}} & x^0_{\text{extremo}} \\ y_{x^0_{\text{extremo}}} & y_{y^0_{\text{extremo}}} & y_{z^0_{\text{extremo}}} & y^0_{\text{extremo}} \\ z_{x^0_{\text{extremo}}} & z_{y^0_{\text{extremo}}} & z_{z^0_{\text{extremo}}} & z^0_{\text{extremo}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-x^0_{\text{extremo}} \operatorname{sen} q_2 + y^0_{\text{extremo}} \cos q_2 - l_1 \cos q_2 - l_2$$

$$-x^0_{\text{extremo}} \cos q_2 - y^0_{\text{extremo}} \operatorname{sen} q_2 + l_1 \operatorname{sen} q_2$$

$$\Downarrow$$

$$-x^0_{\text{extremo}} \operatorname{sen} q_2 + \left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right) \cos q_2 - l_2$$

$$-x^0_{\text{extremo}} \cos q_2 - \left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right) \operatorname{sen} q_2$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
  - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q3.

$$\underbrace{\left({}^{1}\mathbf{T}_{2}\right)^{-1}\cdot\left({}^{0}\mathbf{T}_{1}\right)^{-1}\cdot{}^{0}\mathbf{T}_{3}}={}^{2}\mathbf{T}_{3}$$

$$\begin{matrix} -x^{0}_{\text{extremo}}\,\text{sen}\ q_2+\left(y^{0}_{\text{extremo}}-l_1\right)\ \cos q_2-l_2 \\ -x^{0}_{\text{extremo}}\cos q_2-\left(y^{0}_{\text{extremo}}-l_1\right)\ \text{sen}\ q_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_3 & -\,\text{sen}\ q_3 & 0 & \boxed{l_3\cos q_3} \\ \text{sen}\ q_3 & \cos q_3 & 0 & \boxed{l_3\,\text{sen}\ q_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$-x^{0}_{\text{extremo}}\,\text{sen}\ q_2+\left(y^{0}_{\text{extremo}}-l_1\right)\cos q_2=l_3\cos q_3+l_2$$

$$-x^{0}_{\text{extremo}}\cos q_2-\left(y^{0}_{\text{extremo}}-l_1\right)\text{sen}\ q_2=l_3\,\text{sen}\ q_3$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
  - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q3.

$$-x^0_{\text{extremo}} \operatorname{sen} q_2 + \left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right)\cos q_2 = l_3 \cos q_3 + l_2$$

$$-x^0_{\text{extremo}} \cos q_2 - \left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right)\operatorname{sen} q_2 = l_3 \operatorname{sen} q_3$$

$$\Downarrow$$

Cálculo q3: elevar al cuadrado y sumar ecuaciones
Cálculo q2: conocido q3, despejar sen q2 en una ecuación y sustituir en la otra

$$q_3 = \arccos\left(\frac{{x^0_{\text{extremo}}}^2 + \left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}\right)$$

$$q_2 = \arccos\left(\frac{\left(l_2 + l_3 \cos q_3\right)\left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right)^2 - x^0_{\text{extremo}} l_3 \operatorname{sen} q_3}{{x^0_{\text{extremo}}}^2 + \left(y^0_{\text{extremo}} - l_1\right)^2}\right)$$

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
  - Solución de los parámetros articulares q1,q2,q3.

$$^{0}\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = z^0_{extremo}$$

$$q_3 = \arccos\left(\frac{{x^0_{extremo}}^2 + \left(y^0_{extremo} - l_1\right)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}\right)$$

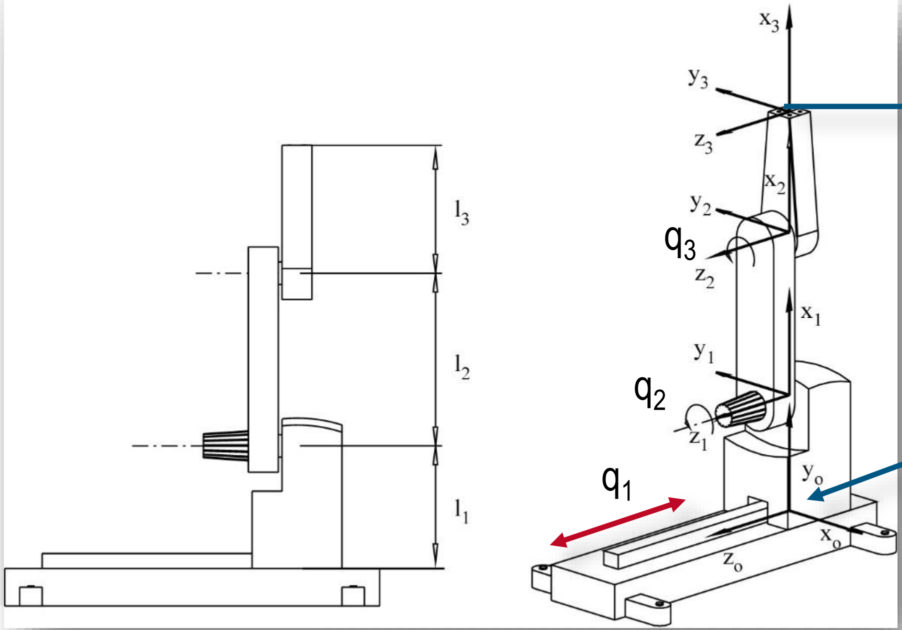
$$q_2 = \arccos\left(\frac{\left(l_2 + l_3 \cos q_3\right)\left(y^0_{extremo} - l_1\right)^2 - x^0_{extremo} l_3 \operatorname{sen} q_3}{{x^0_{extremo}}^2 + \left(y^0_{extremo} - l_1\right)^2}\right)$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90º	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA

Solución geométrica

- Resolución del problema mediante geometría y trigonometría.
  - **Resolución q1**



Sistema de referencia fijo S_0

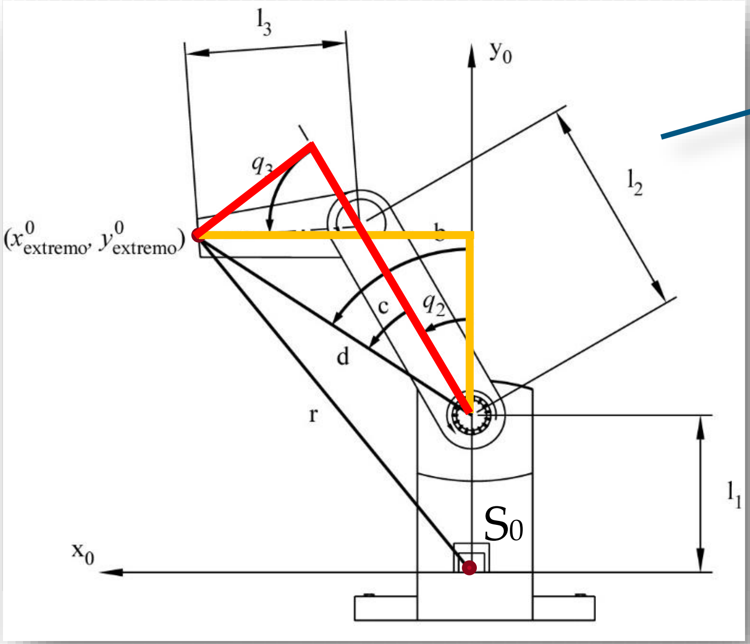
Dato conocido: posición y orientación extremo final

$$\begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{q_1 = z^0_{extremo}}$$

Solución geométrica

- Resolución del problema mediante geometría y trigonometría.
  - **Resolución q2**



$$q_2 = b - c$$

Ángulo b

$$\tan b = \frac{x^0_{extremo}}{y^0_{extremo} - l_1} \Rightarrow b = \arctan\left(\frac{x^0_{extremo}}{y^0_{extremo} - l_1}\right)$$

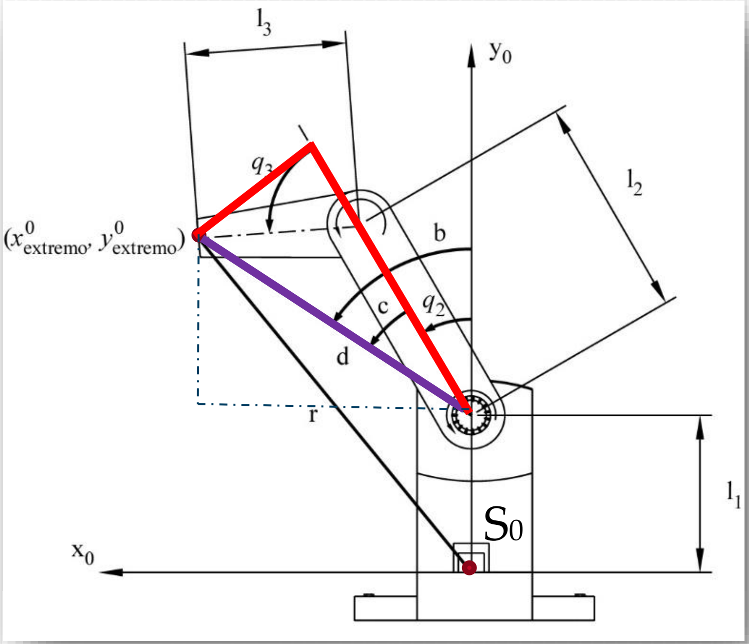
Ángulo c

$$\tan c = \frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3} \Rightarrow c = \arctan\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$\boxed{q_2 = \arctan\left(\frac{x^0_{extremo}}{y^0_{extremo} - l_1}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)}$$

Solución geométrica

- Resolución del problema mediante geometría y trigonometría.
  - **Resolución q3**



$$d^2 = (x^0_{\text{extremo}})^2 + (y^0_{\text{extremo}} - l_1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$d^2 = (l_2 + l_3 \cos q_3)^2 + l_3^2 \operatorname{sen}^2 q_3$$

$$\Downarrow$$

$$(x^0_{\text{extremo}})^2 + (y^0_{\text{extremo}} - l_1)^2 = l_2^2 + l_3^2 \cos^2 q_3 + 2 l_2 l_3 \cos q_3 + l_3^2 \operatorname{sen}^2 q_3$$

$$\Downarrow$$

$$(x^0_{\text{extremo}})^2 + (y^0_{\text{extremo}} - l_1)^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos q_3$$

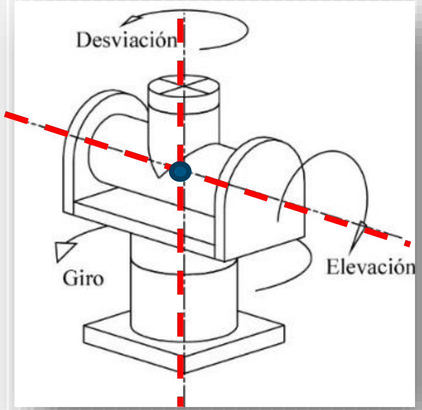
$$\Downarrow$$

$$\boxed{q_3 = \arccos\left(\frac{(x^0_{\text{extremo}})^2 + (y^0_{\text{extremo}} - l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}\right)}$$

SOLUCIÓN DE PIEPER

Solución de Pieper

- Consiste en separar las articulaciones de la muñeca del resto, resolviendo ambos conjuntos por separado.



3 GDL muñeca rotación robot

Muñeca esférica

Los 3 GDL se cortan en un punto denominado punto muñeca

⇩

El movimiento de las articulaciones de la muñeca no altera la posición espacial del punto de corte

⇩

3 primeros GDL = posicionan el robot en el punto muñeca

Solución de Pieper

- Desacoplo cinemático.
  - La posición de la muñeca es: $\boldsymbol{p}_5^0 = \boldsymbol{p}_{\text{muñeca}}^0$
  - La posición del extremo es: $\boldsymbol{p}_6^0 = \boldsymbol{p}_{\text{extremo}}^0$

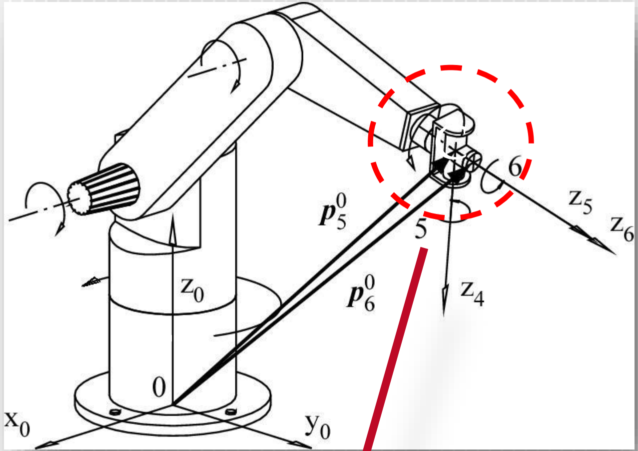
$\Downarrow$

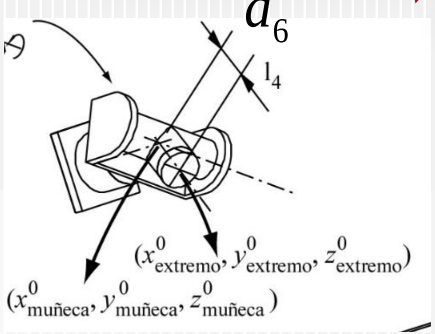
d_i: distancia, medida a lo largo de z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para que x_i y x_{i-1} queden alineados.

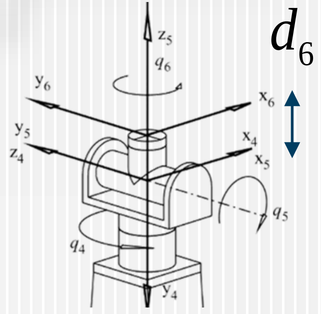
$$\boldsymbol{p}_5^0 = \boldsymbol{p}_6^0 - d_6 \cdot \boldsymbol{z}_6$$

$$
{}^0\mathbf{T}_6 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccc} & & \boldsymbol{z}_6 & \\ \end{array}
$$

$$
{}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & \mathrm{x}_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & \boxed{\mathrm{x}_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}}} & \mathrm{x}^0_{\text{extremo}} \\ \mathrm{y}_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & \mathrm{y}_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & \boxed{\mathrm{y}_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}}} & \mathrm{y}^0_{\text{extremo}} \\ \mathrm{z}_{\boldsymbol{x}^0_{\text{extremo}}} & \mathrm{z}_{\boldsymbol{y}^0_{\text{extremo}}} & \boxed{\mathrm{z}_{\boldsymbol{z}^0_{\text{extremo}}}} & \mathrm{z}^0_{\text{extremo}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$







Solución de Pieper

- Resolución cinemática inversa con Pieper.
  - Obtenido el punto muñeca (p_5^0): resolución mediante el método geométrico de q1,q2,q3.
  - Para el cálculo de las últimas tres se emplea la orientación:

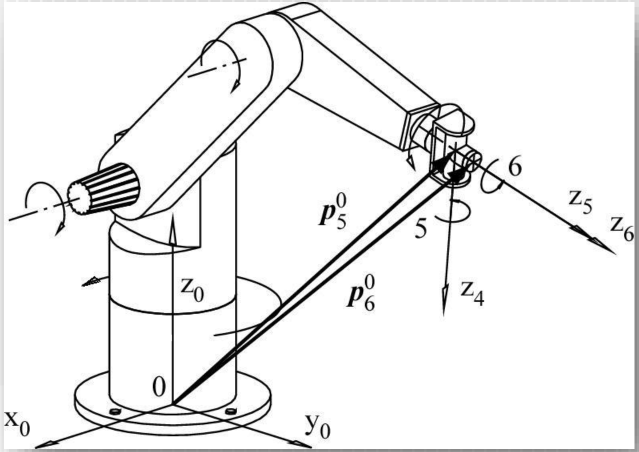
$$\underbrace{{}^{0}\mathbf{Rot}_{\text{extremo}}}_{\text{conocida}} = \underbrace{{}^{0}\mathbf{Rot}_{3}}_{\text{conocida}} \cdot {}^{3}\mathbf{Rot}_{\text{extremo}}$$

$$\Downarrow$$

$${}^{3}\mathbf{Rot}_{\text{extremo}} = {}^{3}\mathbf{Rot}_{6}$$

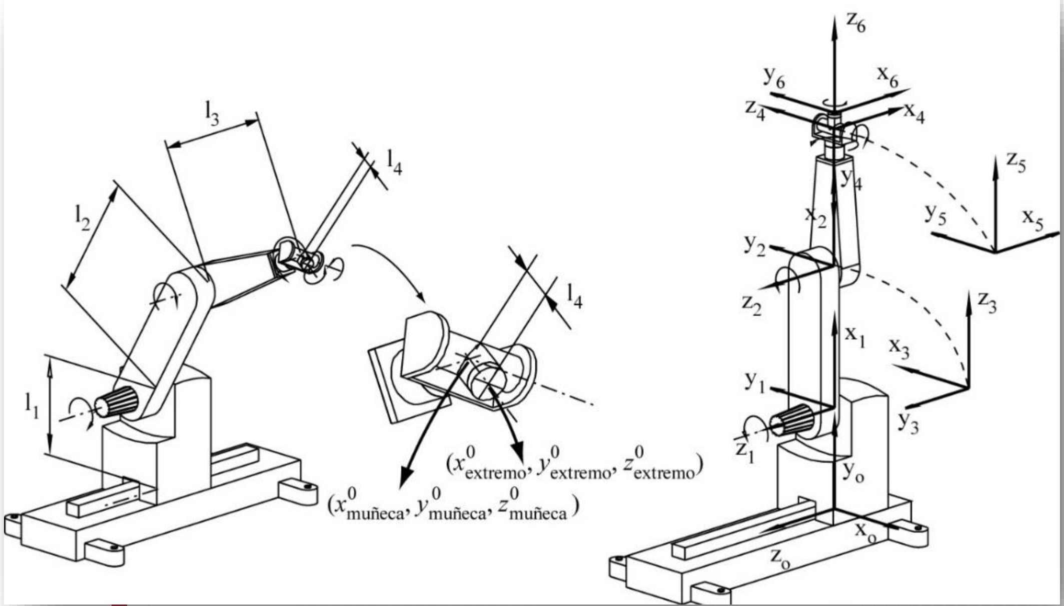
$$\Downarrow$$

$${}^{3}\mathbf{Rot}_{6} = \left({}^{0}\mathbf{Rot}_{3}\right)^{-1} \cdot {}^{0}\mathbf{Rot}_{\text{extremo}}$$



Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.



Pasos a seguir

1. Resolver cinemática directa (DH).
2. Calcular el punto muñeca
3. Resolver cinemática inversa para obtener q1,q2,q3 con el punto muñeca.
4. Obtener $^0Rot_3$ que depende de q1,q2,q3 que son conocidos.
5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 1. Resolver la cinemática directa

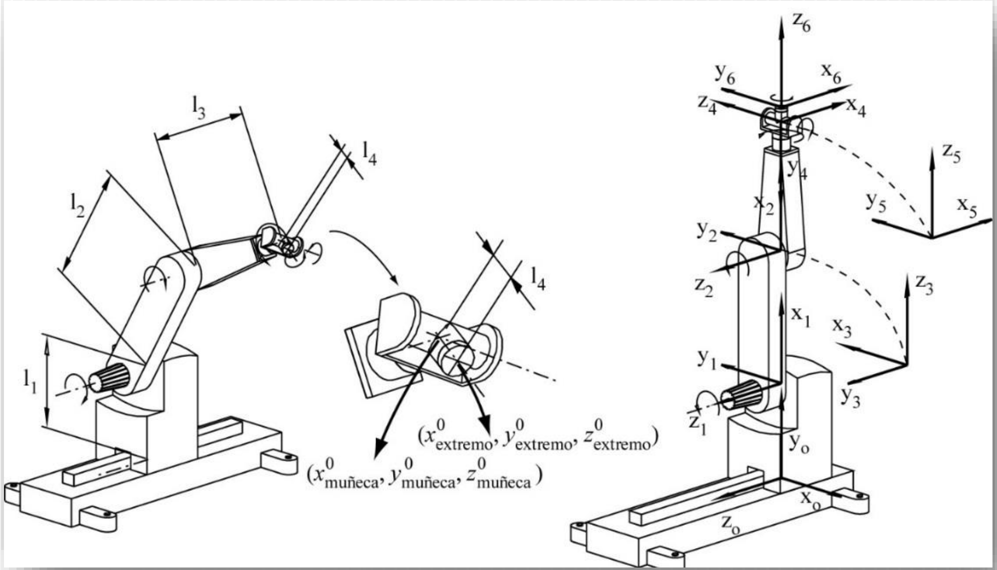
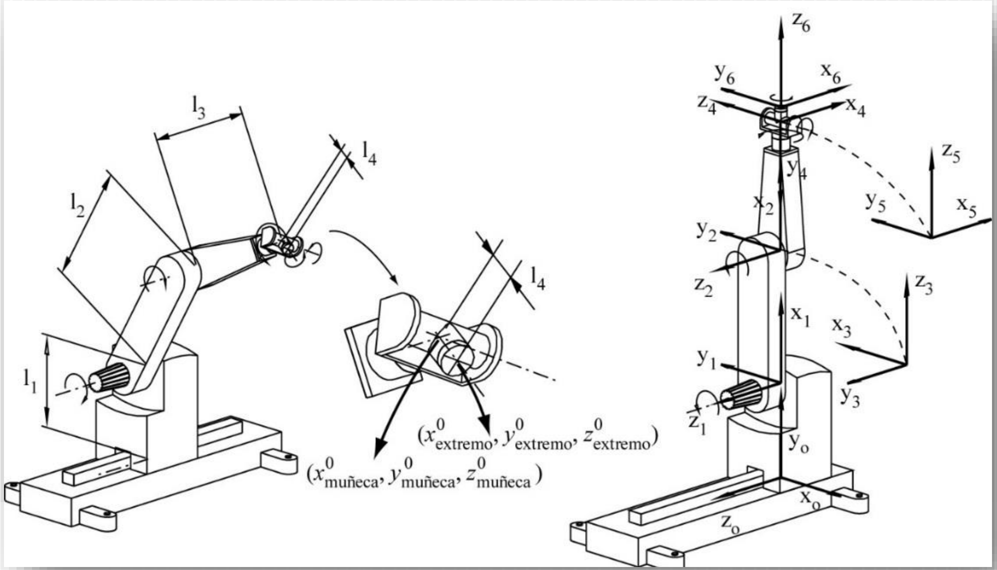


Tabla de parámetros DH

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90º	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3+90º	0	0	90º
4	q_4-90º	l_3	0	-90º
5	q_5	0	0	90º
6	q_6	l_4	0	0

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 2. Calcular el punto muñeca.
  - 3. Resolver mediante el método geométrico q1, q2, q3



Datos cinemática directa

$$\begin{bmatrix} x^0_{\text{muñeca}} \\ y^0_{\text{muñeca}} \\ z^0_{\text{muñeca}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0_{\text{extremo}} \\ y^0_{\text{extremo}} \\ z^0_{\text{extremo}} \end{bmatrix} - l_4 \mathbf{z}_6$$

Método geométrico

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 4. Obtener ${}^0Rot_3$ que depende de q1,q2,q3 que son conocidos.

$$\underbrace{{}^0\mathbf{Rot}_{\text{extremo}}}_{\text{conocida}} = \underbrace{{}^0\mathbf{Rot}_3}_{\text{conocida}} \cdot {}^3\mathbf{Rot}_{\text{extremo}}$$

$${}^3\mathbf{Rot}_{\text{extremo}} = {}^3\mathbf{Rot}_6 = {}^3\mathbf{Rot}_4\,{}^4\mathbf{Rot}_5\,{}^5\mathbf{Rot}_6$$

$$\Downarrow$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	q_4-90º	l_3	0	-90º
5	q_5	0	0	90º
6	q_6	l_4	0	0

Solución de Pieper

$$^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \cdot \operatorname{sen}\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i \cdot \operatorname{sen}\theta_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cdot \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i \cdot \cos\theta_i & a_i \cdot \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 4. Obtener $^0Rot_3$ que depende de q1,q2,q3 que son conocidos.

$$^3\mathbf{Rot}_{extremo} = {}^3\mathbf{Rot}_6 = {}^3\mathbf{Rot}_4 \, {}^4\mathbf{Rot}_5 \, {}^5\mathbf{Rot}_6$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	q_4-90º	l_3	0	-90º
5	q_5	0	0	90º
6	q_6	l_4	0	0

$$^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4 - 90°) & 0 & -\operatorname{sen}(q_4 - 90°) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_4 - 90°) & 0 & \cos(q_4 - 90°) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_4 & 0 & \cos q_4 & 0 \\ -\cos q_4 & 0 & \operatorname{sen} q_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^4T_5 = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \operatorname{sen} q_5 & 0 \\ \operatorname{sen} q_5 & 0 & -\cos q_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^5T_6 = \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\operatorname{sen} q_6 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} q_6 & \cos q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

$$ {}^{3}\mathbf{Rot}_{extremo} = {}^{3}\mathbf{Rot}_{6} \Rightarrow {}^{3}\mathbf{Rot}_{6} = \left({}^{0}\mathbf{Rot}_{3}\right)^{-1} \cdot {}^{0}\mathbf{Rot}_{extremo} $$

$$ \Downarrow $$

$$ {}^{3}\mathbf{Rot}_{6} = {}^{0}\mathbf{Rot}_{3}^{T} \cdot \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} \end{bmatrix} $$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

$$^{3}\mathbf{Rot}_6 = {}^{0}\mathbf{Rot}_3^{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{x^0_{\mathrm{extremo}}} & \mathrm{x}_{y^0_{\mathrm{extremo}}} & \mathrm{x}_{z^0_{\mathrm{extremo}}} \\ \mathrm{y}_{x^0_{\mathrm{extremo}}} & \mathrm{y}_{y^0_{\mathrm{extremo}}} & \mathrm{y}_{z^0_{\mathrm{extremo}}} \\ \mathrm{z}_{x^0_{\mathrm{extremo}}} & \mathrm{z}_{y^0_{\mathrm{extremo}}} & \mathrm{z}_{z^0_{\mathrm{extremo}}} \end{bmatrix}$$

Cálculo a partir de la tabla DH

$$^{3}\mathrm{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \operatorname{sen} q_6 & -\operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \operatorname{sen} q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\operatorname{sen} q_5 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_5 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_5 \end{bmatrix}$$

Cálculo a partir de la tabla DH (q1,q2,q3 conocidas)

$$^{0}\mathrm{Rot}_3{}^{T} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

$$
{}^{3}\mathbf{Rot}_{6} = {}^{0}\mathbf{Rot}_{3}^{T} \cdot \begin{bmatrix} x_{x^{0}_{extremo}} & x_{y^{0}_{extremo}} & \boxed{x_{z^{0}_{extremo}}} \\ y_{x^{0}_{extremo}} & y_{y^{0}_{extremo}} & \boxed{y_{z^{0}_{extremo}}} \\ z_{x^{0}_{extremo}} & z_{y^{0}_{extremo}} & \boxed{z_{z^{0}_{extremo}}} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}\mathrm{Rot}_{6} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \operatorname{sen} q_6 & -\operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \operatorname{sen} q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\operatorname{sen} q_5 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_5 \operatorname{sen} q_6 & \boxed{\cos q_5} \end{bmatrix}
$$

Cálculo q5

$$
{}^{0}\mathrm{Rot}_{3}{}^{T} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \boxed{-\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3} & \boxed{\cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3} & \boxed{0} \end{bmatrix}
$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

$$ {}^3\mathrm{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \operatorname{sen} q_6 & -\operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \operatorname{sen} q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\operatorname{sen} q_5 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_5 \operatorname{sen} q_6 & \boxed{\cos q_5} \end{bmatrix} $$

Cálculo q5

$$ \| $$

$$ {}^0\mathrm{Rot}_3{}^T = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} \end{bmatrix} $$

$$ q_5 = \arccos \Big(x_{z^0_{extremo}} (-\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3) + $$
$$ + y_{z^0_{extremo}} (\cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3) \Big) $$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

$$^3\mathrm{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \operatorname{sen} q_6 & -\operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \operatorname{sen} q_4 \cos q_6 & \boxed{-\cos q_4 \operatorname{sen} q_5} \\ -\operatorname{sen} q_5 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_5 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_5 \end{bmatrix}$$

Cálculo q4

$$||$$

$$^0\mathrm{Rot}_3{}^T = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$q_4 = \arccos\left(-\frac{z_{z^0_{extremo}}}{\operatorname{sen} q_5}\right)$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación.

$$
{}^3\mathrm{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \operatorname{sen} q_6 & -\operatorname{sen} q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \operatorname{sen} q_4 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \operatorname{sen} q_6 + \operatorname{sen} q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \operatorname{sen} q_5 \\ \boxed{-\operatorname{sen} q_5 \cos q_6} & \operatorname{sen} q_5 \operatorname{sen} q_6 & \cos q_5 \end{bmatrix}
$$

$$=$$

Cálculo q6

$$
{}^0\mathrm{Rot}_3{}^T = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 - \operatorname{sen} q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} \end{bmatrix}
$$

$$
q_6 = \arccos\left(-\frac{x_{x^0_{extremo}}(-\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3)}{\operatorname{sen} q_5} - \frac{y_{x^0_{extremo}}(\cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3)}{\operatorname{sen} q_5} \right)
$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
  - 5. Calcular q4,q5,q6 a partir de las matrices de rotación

$$q_4 = \arccos\left(-\frac{z_{z^0_{\text{extremo}}}}{\operatorname{sen} q_5}\right)$$

$$q_5 = \arccos\Big(x_{z^0_{\text{extremo}}}(-\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3) + \\ + y_{z^0_{\text{extremo}}}(\cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3)\Big)$$

$$q_6 = \arccos\left(-\frac{x_{x^0_{\text{extremo}}}(-\operatorname{sen} q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \operatorname{sen} q_3)}{\operatorname{sen} q_5} - \\ - \frac{y_{x^0_{\text{extremo}}}(\cos q_2 \cos q_3 - \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3)}{\operatorname{sen} q_5}\right)$$

CONCLUSIONES

Conclusiones

- Cinemática inversa: configuración articular necesaria para alcanzar una localización y rotación dada.
  - Método geométrico.
  - Método algebraico.
  - Solución de Pieper.
- Bibliografía:

  - Robots y Sistemas Sensoriales. F. Torres, J. Pomares, P. Gil, S. Puente, R. Aracil. Prentice Hall. 2002.
  - Introduction to Robotics: Mechanics and Control. John Craig. Addison Wesley. 2004.
  - Fundamentos de Robótica. A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer, R. Aracil. Mc Graw Hill. 2007.

Ingeniería Informática

AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

CURSO 2022/2023

Tema 11. Cinemática de sistemas robóticos 2