Fundamento del condensador plano

Un condensador plano está formado por dos láminas de material conductor y dispuestas de forma que sus superficies (de área S) estén paralelas y separadas una distancia d.

Este sistema tiene múltiples usos tanto en electrostática como en circuitos de corriente continua y alterna. Por ello, vamos a dedicarle una atención especial.

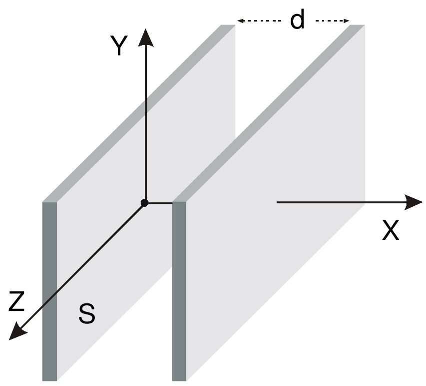
En este documento, sólo pondremos los cimientos para entender su funcionamiento posterior.

Nos planteamos tres objetivos:

1º) Campo eléctrico generado en sus proximidades por un plano "ilimitado" cargado con densidad superficial σ.

2º) Campo eléctrico generado por dos planos "ilimitados" cargados con densidades opuestas.

3º) Función potencial eléctrico en la región ocupada por el condensador.



1º) Tomaremos un plano de grandes dimensiones con una carga distribuida uniformemente que expresamos como densidad superficial de carga "σ":

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cerrada A. Esta superficie es un cilindro recto con el eje perpendicular al plano cargado cuyas bases B_1 y B_2 son paralelas a éste. Se muestra en la Figura 1. Obsérvese que la intersección de A con el plano cargado es un círculo semejante a las bases cuya área hemos denominado S_i.

En primer lugar, hallamos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie A:

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{Lateral} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

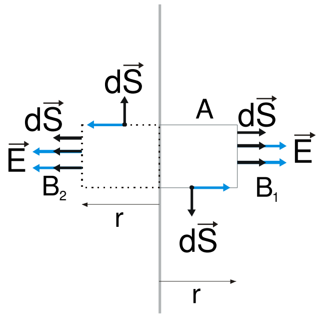


Figura 2

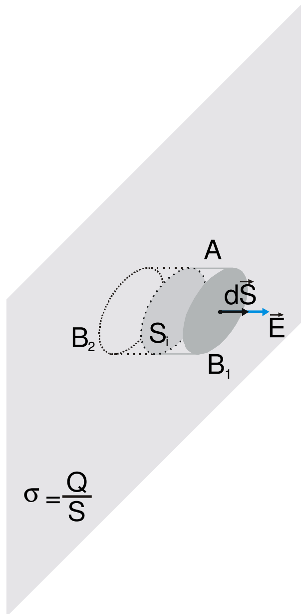


Figura 1

Obsérvese que los vectores campo eléctrico $\vec{E}$ y superficie $d\vec{S}$ son perpendiculares en la cara lateral de A y paralelos en las bases.

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{B_1} E\cdot dS\cdot\cos 0^{\circ} + \int_{B_2} E\cdot dS\cdot\cos 0^{\circ} + \int_{Lateral} E\cdot dS\cdot\cos 90^{\circ}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico generado por el plano no aporta flujo a través de la superficie lateral del cilindro y es máximo en las bases.

Finalmente, el flujo del campo eléctrico a través de la superficie A resulta:

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\int_{B_1} \cdot dS + E\int_{B_2} dS \rightarrow \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES_{B_1} + ES_{B_2} = 2ES_i$$

Ahora, para aplicar el teorema de Gauss necesitamos conocer la carga encerrada en el cilindro A. Es la contenida en el círculo de área S_i y se obtiene con la densidad superficial de carga: $Q_{\text{int},A} = \sigma\cdot S_i$

El teorema de Gauss establece: $\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int},A}}{\varepsilon_0} \rightarrow 2E\cdot S_i = \dfrac{\sigma\cdot S_i}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

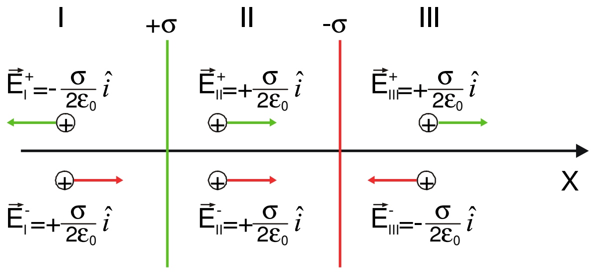
Con este resultado ya podemos evaluar el campo eléctrico que generan dos planos cargados con densidades opuestas.

manolo@auladoce.com

2º) Campo eléctrico generado por dos planos cargados con densidades iguales y opuestas.

A la derecha hemos colocado dos planos cargados en las condiciones referidas y escribimos los campos que cada plano genera en cada región del espacio.

Obsérvese con detenimiento el sentido de cada campo y nótese que el campo de la placa positiva es repulsivo, mientras que el de la placa negativa es atractivo.

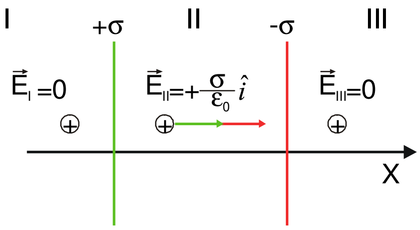


Para obtener el campo resultante en cada región sólo hemos de sumar los dos campos parciales en cada una:

Región I: $\vec{E}_I=\vec{E}_I^++\vec{E}_I^-=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}=0$

Región II: $\vec{E}_{II}=\vec{E}_{II}^++\vec{E}_{II}^-=+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}=+\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}$

Región III: $\vec{E}_{III}=\vec{E}_{III}^++\vec{E}_{III}^-=+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}=0$



3º) Una vez conocido el campo eléctrico generado por los dos planos cargados con densidades opuestas, nos disponemos a obtener la función potencial en el espacio en que se encuentra este sistema:

Para obtener la función potencial hemos de integrar la expresión: $dV=-\vec{E}\cdot d\vec{r}\rightarrow dV=-E_xdx-E_ydy-E_zdz$.

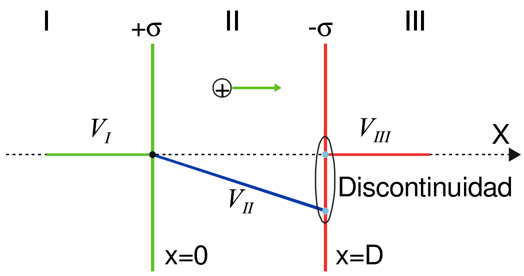
Hemos tomado la dirección X perpendicular a los planos cargados a fin de simplificar la expresión anterior:

$$dV=-E_xdx\rightarrow\int dV=\int -E_xdx$$

En la región I: $\displaystyle\int_I dV_I=-\int_I E_Idx\rightarrow V_I=0+C_1$

En la región II: $\displaystyle\int_{II} dV_{II}=-\int_I \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx\rightarrow V_{II}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x+C_2$

En la región III: $\displaystyle\int_{III} dV_{III}=-\int_{III} E_{III}dx\rightarrow V_{III}=0+C_3$



A la derecha presentamos las tres ramas de potencial obtenidas tomando las tres constantes de integración $C_i=0$.

Puesto que podemos dar el valor que deseemos a las constantes, vamos a ajustar sus valores para que la función potencial eléctrico sea continua en las dos fronteras entre las regiones.

En primer lugar elegimos (arbitrariamente) el valor de C_3:

$$V_{III}=C_3=0$$

Ahora imponemos la continuidad entre V_{II} y V_{III} en la placa negativa (x =D):

$$V_{II}(x=D)=V_{III}(x=D)\rightarrow-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}D+C_2=0\rightarrow C_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}D$$

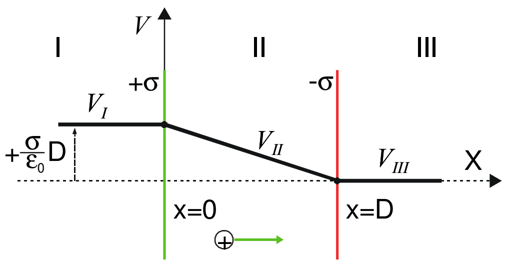
Así pues el potencial entre las placas tomará la forma: $V_{II}=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}x+\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}D$

Imponemos la continuidad del potencial en la frontera donde se encuentra la placa positiva (x=0)

$$V_I(x=0)=V_{II}(x=0)\rightarrow 0+C_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}D\rightarrow C_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}D$$

Con estos valores de las constantes la función potencial es continua:

$$V=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}D & x\le 0\\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(D-x) & 0\le x\le D\\ 0 & D\le x\end{cases}$$



A la derecha se ha representado gráficamente.