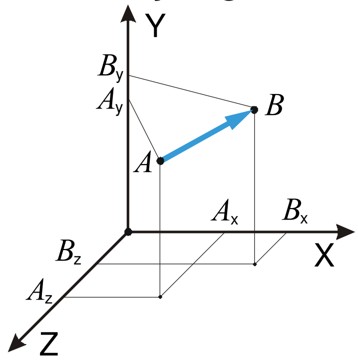
VECTORES

Obtención del vector a partir de las coordenadas de los puntos extremo y origen.



En la figura de la derecha se muestran los puntos A y B.

Vamos a expresar el vector que tiene origen en A y extremo en B. Es decir, $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = (B_x - A_x)\cdot\hat{i} + (B_y - A_y)\cdot\hat{j} + (B_z - A_z)\cdot\hat{k}$$

Cada componente de $\vec{V}$ se obtiene restando las coordenadas correspondientes de extremo y origen.

Dada la expresión cartesiana del vector: $\vec{V} = V_X\hat{i} + V_Y\hat{j} + V_Z\hat{k}$, el m*ódulo del vector es:*

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}$$

Vector unitario de un vector: Dado el vector $\vec{V}$, hallamos su vector unitario:

$$\hat{u}_V = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|}$$

El vector $\hat{u}_V$ tiene la dirección del vector $\vec{V}$ y módulo unidad.

Producto escalar:

Dados dos vectores: $\vec{A} = a_X\hat{i} + a_Y\hat{j} + a_Z\hat{k}$ y $\vec{B} = b_X\hat{i} + b_Y\hat{j} + b_Z\hat{k}$

Definición: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\alpha$

De la definición de este producto se deduce: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$ con $\vec{A}\neq 0 \; y \; \vec{B}\neq 0$.

El producto escalar de dos vectores es un número.

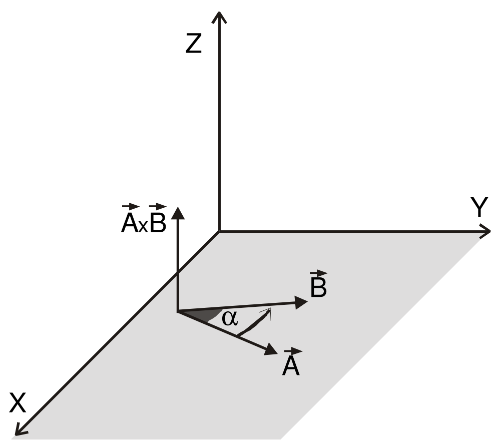
Expresión cartesiana del producto escalar: $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_X b_X + a_Y b_Y + a_Z b_Z$

Producto vectorial:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}(a_Y b_Z - a_Z b_Y) - \hat{j}(a_X b_Z - a_Z b_X) + \hat{k}(a_X b_Y - a_Y b_X)$$

El módulo del producto vectorial es: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot sen\,\alpha$



El sentido del producto vectorial coincide con el dedo pulgar de la mano derecha cuando ésta gira con la palma orientada desde $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ barriendo el ángulo α, en el plano que forman ambos vectores (véase figura adjunta).

El producto vectorial de dos vectores es un vector.

El vector producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos vectores.

Ejemplo 1: Dados los puntos A (1,-2,-5) y B (-1, 2,-1), encontrar:

a) El vector $\overrightarrow{AB}$, b) el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, c) el vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x)\cdot\hat{i} + (B_y - A_y)\cdot\hat{j} + (B_z - A_z)\cdot\hat{k} = (-1-(+1))\cdot\hat{i} + (2-(-2))\cdot\hat{j} + (-1-(-5))\cdot\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = -2\,\hat{i} + 4\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (+4)^2 + (+4)^2} = 6$

c) $\hat{u}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \dfrac{-2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}}{6} = -\dfrac{1}{3}\hat{i} + \dfrac{2}{3}\hat{j} + \dfrac{2}{3}\hat{k}$

Ejemplo 2: Dados los vectores $\vec{V}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = \hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$, obtener:

a) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, b) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, c) usando el producto escalar, el ángulo que forman ambos vectores, d) usando el producto vectorial, el ángulo que forman ambos vectores, e) $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)\cdot\vec{V}_1$

a) El producto escalar de los dos vectores resulta:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (+2,-1,+2)\cdot(+1,-1,-2) = (+2)\cdot(+1) + (-1)\cdot(-1) + (+2)\cdot(-2) = -1$$

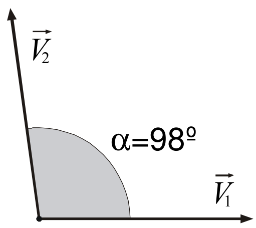
b) El producto vectorial se obtiene por medio del determinante:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ +2 & -1 & +2 \\ +1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}\big((-1)(-2) - (+2)(-1)\big) - \hat{j}\big((+2)(-2) - (+2)(-1)\big) + \hat{k}\big((+2)(-1) - (-1)(+1)\big)$$

$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$

c) De la definición de producto escalar podemos escribir:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\left|\vec{V}_1\right|\cdot\left|\vec{V}_2\right|} = \frac{-1}{3\cdot\sqrt{6}} \rightarrow \alpha = 180º - 82º = 98º$$



El signo del producto escalar nos indica que los vectores forman un ángulo entre 90º y 180º

d) Si tomamos el módulo del producto vectorial:

$$\left|sen\,\alpha\right| = \frac{\left|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right|}{\left|\vec{V}_1\right|\cdot\left|\vec{V}_2\right|} = \frac{\sqrt{53}}{3\cdot\sqrt{6}} \rightarrow \alpha = 82º \text{ ó } \alpha = 98º$$

ALFABETO GRIEGO (letras más usadas en física y matemáticas)

Nombre	Minúscula	Mayúscula	Nombre	Minúscula	Mayúscula
alfa	α	Α	**nu**	ν	Ν
beta	β	Β	**pi**	π	Π
gamma	γ	Γ	**zeta**	ζ	Ζ
delta	δ	Δ	**ro**	ρ	Ρ
epsilón	ε	Ε	**sigma**	σ	Σ
fi	ϕ	Φ	**tau**	τ	Τ
ji	φ	ϑ	**theta**	θ	Θ
heta	η	Η	**psi**	ψ	Ψ
lambda	λ	Λ	**omega**	ω	Ω
mu	μ	Μ			

12 Centro Privado de Estudios Universitarios
AulaDoce

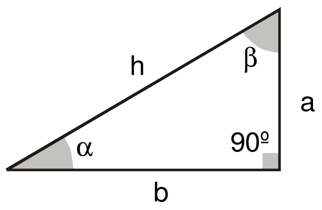
manolo@auladoce.com

FORMULARIO TRIGONOMETRÍA

$sen\alpha = a/h$

$\cos\alpha = b/h$

$tg\alpha = a/b$

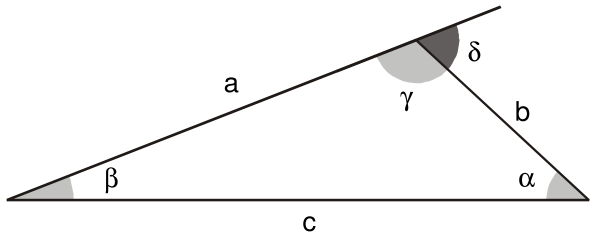


$sen\beta = b/h$

$\cos\beta = a/h$

$tg\beta = b/a$

TRIÁNGULOS ESCALENOS (ángulos distintos)

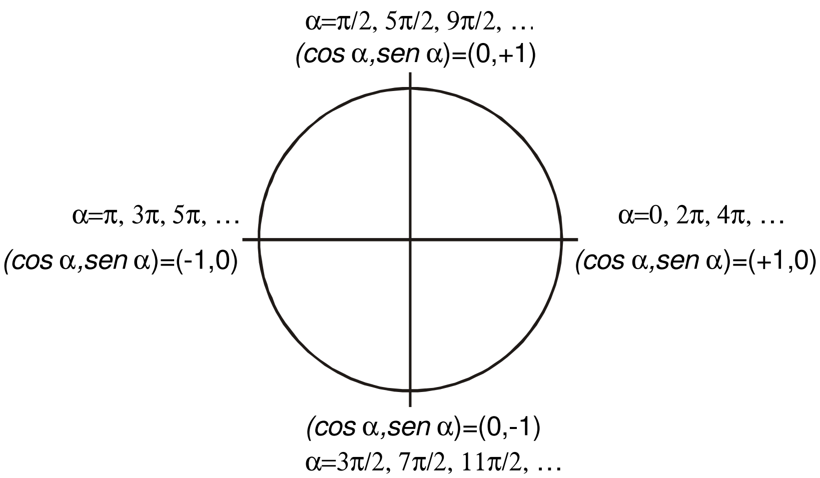


Teorema del seno: $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{b}{sen\,b} = \dfrac{c}{sen\,\gamma}$

Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Relación entre ángulos: $\alpha + \beta = \delta$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS FRECUENTES



$sen^2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = m\pi$

$\cos^2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = m\pi$

$sen^2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = (2m+1)\pi/2$

$\cos^2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = (2m+1)\pi/2$

$[m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..]$

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FRECUENTES

$sen(a \pm b) = sen\,a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot sen\,b$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp sena \cdot senb$
$sen\ 2a = 2sen\,a \cdot \cos a$	$\cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$
$sen(a/2) = \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$	$\cos(a/2) = \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$
$sen\,a + sen\,b = 2sen\dfrac{a+b}{2} \cdot \cos\dfrac{a-b}{2}$	$sena - senb = 2\cos\dfrac{a+b}{2} \cdot sen\dfrac{a-b}{2}$
$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2} \cdot \cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2sen\dfrac{a+b}{2} \cdot sen\dfrac{a-b}{2}$
$sen\,a \cdot sen\,b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$
$sen\,a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[sen(a-b) + sen(a+b)]$	