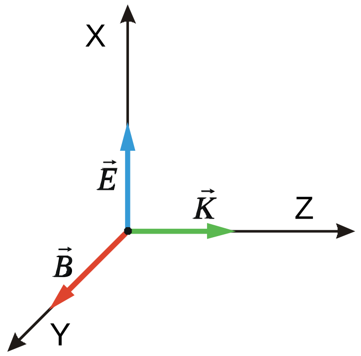
T6/C1.- Una onda electromagnética posee un campo eléctrico $\vec{E} = 10sen(10^7 z - 3\cdot 10^{15} t)\vec{i}$ (expresado en unidades del S.I.). Calcula: (a) La longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación [0.25 puntos]. (b) La expresión del campo magnético asociado [0.5 puntos]. (c) La dirección en la que deberíamos colocar una antena dipolar eléctrica para que la recepción fuera óptima [0.25 puntos].

a)

La fase espacial de la onda es:

$$K_Z \cdot z = 10^7 z \to K_Z = K = 10^7 rad/m$$

$$K\lambda = 2\pi \to \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{10^7} m$$



La frecuencia angular se obtiene de la fase temporal:

$$\omega = 2\pi f \to f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\cdot 10^{15}}{2\pi} = 4'8\cdot 10^{14} Hz$$

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\omega}{K} = \frac{3\cdot 10^{15}}{10^7} = 3\cdot 10^8 m/s$

<u>Buscamos el campo magnético:</u>

$$\vec{B} = \vec{B}_0 sen(10^7 z - 3\cdot 10^{15} t)\vec{j}$$

Para concretar la expresión del campo magnético solo hemos de calcular la amplitud de esta onda:

$$\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{u}_B = B_0 \cdot \vec{j}$$

$$E_0 = v\cdot B_0 \to B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{10}{3\cdot 10^8} = 3'3\cdot 10^{-8}(T) \to \vec{B}_0 = 3'3\cdot 10^{-8}\vec{j}(T)$$

$$\vec{B} = 3'3\cdot 10^{-8} sen(10^7 z - 3\cdot 10^{15} t)\vec{j}(T)$$

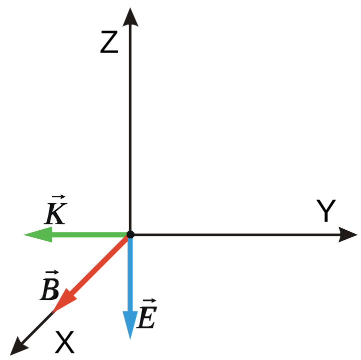
T6/C2.- Una onda electromagnética posee un campo $\vec{B} = 10^{-8} sen(2\pi\cdot 10^6 y + 6\pi\cdot 10^{14} t)\vec{i}$ (expresado en unidades del S.I.). Calcula: (a) La velocidad y sentido de propagación de la onda [0.5 puntos]. (b) La expresión del campo eléctrico asociado [0.5 puntos].

a)

La velocidad de propagación se obtiene de los valores del número de ondas $K = 2\pi\cdot 10^6 rad/m$ y la frecuencia angular $\omega = 3\cdot 10^{14} rad/s$:

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{6\pi\cdot 10^{14}}{2\pi\cdot 10^6} = 3\cdot 10^8 m/s$$

Cuando las fases espacial y temporal tiene el mismo signo, la onda se propaga en el sentido negativo del eje. Esta onda viaja en el sentido negativo del eje Y.



<u>Buscamos el campo eléctrico:</u>

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 sen(2\pi\cdot 10^6 y + 6\pi\cdot 10^{14} t)$$

$$\vec{E}_0 = E_0\cdot\vec{u}_E \to E_0 = v\cdot B_0 = 3\cdot 10^8\cdot 10^{-8}(V/m) \to \vec{E}_0 = 3(-\vec{k})(V/m)$$

$$\vec{E}(x,t) = -3sen(2\pi\cdot 10^6 y + 6\pi\cdot 10^{14} t)\vec{k}(V/m)$$

c) Si la antena es dipolar eléctrica, ha de orientarse en la dirección de vibración del campo eléctrico. En este caso en la dirección del eje Z.

d) Hallamos el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}_0 sen\varphi \times \vec{B}_0 sen\varphi}{\mu_0} = \frac{E_0\cdot B_0 sen^2\varphi}{\mu_0}\vec{u}_E\times\vec{u}_B$$

$$\vec{S} = \frac{3\cdot 10^{-8} sen^2(2\pi\cdot 10^6 y + 6\pi\cdot 10^{14} t)}{4\pi\cdot 10^{-7}}(-\vec{k})\times\vec{i}$$

$$\vec{S} = -0'0239 sen^2(2\pi\cdot 10^6 y + 6\pi\cdot 10^{14} t)\vec{j}\ (W/m^2)$$

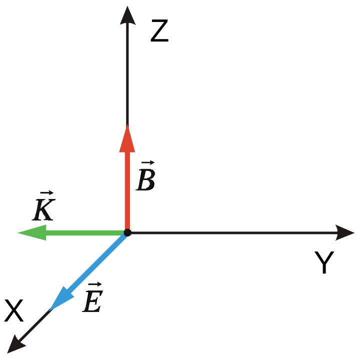
T6/C3.- Una onda electromagnética plana armónica, con longitud de onda $\lambda = 2\mu m$ y período $T = 6'666 \cdot 10^{-15} s$, se propaga en sentido negativo del eje Y. El campo magnético en t =0 e y =0 es: $\vec{B}(0,0) = B_0\vec{k}(T)$, siendo $B_0 = 10^{-8}(T)$. (a) ¿En qué medio se propaga la onda? [0.25 puntos]. (b) Escribe las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético asociados a la onda [0.75puntos].

a) Para determinar el medio en que se propaga la onda sólo hemos de buscar su índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega / K} = \frac{c \cdot K}{\omega} = \frac{c \cdot 2\pi / \lambda}{2\pi / T} = \frac{c \cdot T}{\lambda}$$

$$n = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6'666 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0'9999 \approx 1 \Rightarrow v = c = 3 \cdot 10^8 m/s$$

La onda viaja en vacío o en aire.



b) Vamos a obtener la función campo magnético:

$$\vec{B}(y,t) = \vec{B}_0 sen(\omega t + Ky + \phi_0)$$

El vector amplitud viene dado en el enunciado: $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{u}_B = 10^{-8} \cdot \vec{k} = 10^{-8}\vec{k}(T)$

La frecuencia angular puede obtenerse desde el valor del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6'666 \cdot 10^{-15}} = 3\pi \cdot 10^{14} rad/s$$

El número de ondas:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-6}} = \pi \cdot 10^6 rad/m$$

Según los cálculos anteriores, la expresión del campo magnético será:

$$\vec{B}(y,t) = 10^{-8}\vec{k} \cdot sen(3\pi \cdot 10^{14} t + \pi \cdot 10^6 y + \phi_0)$$

En esta onda queda por determinar la fase inicial (o fase constante) ϕ_0. El motivo de su presencia corresponde a que el enunciado especifica el valor que ha de tener el campo magnético en un instante concreto y en una posición concreta: $\vec{B}(0,0) = 10^{-8}\vec{k}(T)$

Hemos de ajustar el valor de la constante para que esta condición se cumpla:

$$\vec{B}(0,0) = 10^{-8}\vec{k} \cdot sen(3\pi \cdot 10^{14} \cdot 0 + \pi \cdot 10^6 \cdot 0 + \phi_0) = 10^{-8}\vec{k} \Rightarrow sen(\phi_0) = 1 \rightarrow \phi_0 = \pi/2$$

Finalmente, el campo magnético queda: $\vec{B}(y,t) = 10^{-8}\vec{k} \cdot sen(3\pi \cdot 10^{14} t + \pi \cdot 10^6 y + \pi/2)(T)$

El campo eléctrico se obtiene calculando el vector amplitud: $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{u}_E = v \cdot B_0 \cdot \vec{u}_E = 3\vec{i}(V/m)$

Conocida la amplitud del campo eléctrico: $\vec{E}(y,t) = 3\vec{i} \cdot sen(3\pi \cdot 10^{14} t + \pi \cdot 10^6 y + \pi/2)(V/m)$

d) Hallamos el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}_0 sen\varphi \times \vec{B}_0 sen\varphi}{\mu_0} = \frac{E_0 \cdot B_0 sen^2\varphi}{\mu_0}\vec{u}_E \times \vec{u}_B$$

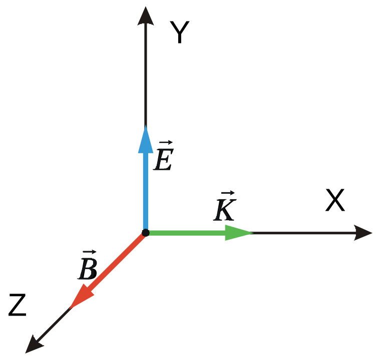
$$\vec{S} = \frac{3 \cdot 10^{-8} sen^2(3\pi \cdot 10^{14} t + \pi \cdot 10^6 y + \pi/2)}{4\pi \cdot 10^{-7}}\vec{i} \times \vec{k}$$

$$\vec{S} = -0'0239 sen^2(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)\vec{j}\ (W/m^2)$$

T6/C4.- Una onda electromagnética plana que se propaga en un material de índice de refracción n =1.5, en la dirección positiva del eje *X*, tiene un valor máximo del campo eléctrico de 10*V/m*. Si la onda está polarizada linealmente según el eje *Y*, y su longitud de onda en el material es de *500nm*, determina: (a) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos]. (b) La dirección en la que deberíamos colocar una antena dipolar magnética para que la recepción fuera óptima [0.25 puntos].

a)

Buscamos el campo eléctrico:



$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 sen(\omega t - Kx)$$

Para concretar la expresión del campo eléctrico necesitamos obtener tres características: $\vec{E}_0$, K y ω.

1) La amplitud del campo eléctrico es $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{u}_E = 10\vec{j}$

2) El número de ondas, K es el módulo del vector propagación $\vec{K}$ y está vinculado con la longitud de onda:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{500 \cdot 10^{-9}} = 4\pi \cdot 10^6 rad/m$$

3) La frecuencia ω se vincula con el número de ondas

$$\omega = K \cdot v$$

Donde v es la velocidad de propagación de la onda. La velocidad de propagación de la onda se obtiene del índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1'5} = 2 \cdot 10^8 m/s$$

Así la frecuencia angular resulta:

$$\omega = K \cdot v = 4\pi \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^8 = 8\pi \cdot 10^{14} rad/s$$

Conocidas las características de la onda ya podemos escribir la función campo eléctrico:

$$\vec{E}(x,t) = 10\vec{j} \cdot sen(8\pi \cdot 10^{14} t - 4\pi \cdot 10^6 x)(V/m)$$

Este campo eléctrico puede escribirse por medio de sus componentes:

$$E_X = 0$$
$$E_Y = 10 sen(8\pi \cdot 10^{14} t - 4\pi \cdot 10^6 x)$$
$$E_Z = 0$$

Buscamos el campo magnético:

Conocido uno de los campos de la onda electromagnética, la obtención del otro campo es muy sencilla. Basta con hallar la amplitud de este segundo campo. En este caso, vamos a buscar la amplitud del campo magnético:

De las ecuaciones de Maxwell se deduce que los módulos de las amplitudes están relacionadas por la expresión: $E_0 = v \cdot B_0$

El vector amplitud de campo magnético se puede escribir: $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{u}_B$

Por lo tanto, resultará:

$$\vec{B}_0 = \frac{E_0}{v} \cdot \vec{u}_B = \frac{10}{2 \cdot 10^8} \cdot \vec{k} = 5 \cdot 10^{-8} \vec{k}(T)$$

La función armónica de los dos campos de una onda EM es exactamente igual, por esto el campo magnético tendrá la forma:

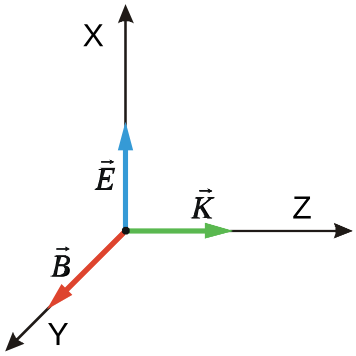
$$\vec{B}(x,t) = 5 \cdot 10^{-8} \vec{k} \cdot sen(8\pi \cdot 10^{14} t - 4\pi \cdot 10^6 x)(T)$$

En componentes:

$$B_X = 0$$
$$B_Y = 0$$
$$B_Z = 5 \cdot 10^{-8} sen(8\pi \cdot 10^{14} t - 4\pi \cdot 10^6 x)$$

b) Para optimizar la captura de señal con una antena dipolar magnética habrá que colocar la superficie de las espiras perpendiculares al vector campo magnético. Así se produce el máximo flujo a través de las espiras. En este caso las espiras deberán orientarse paralelas al plano XY, ya que $\vec{B} // \vec{k}$.

T6/C5.- Una onda EM posee un campo magnético asociado $\vec{B} = 3'3 \cdot 10^{-8} \cdot sen(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)\,\vec{j}$ (expresado en unidades del S.I.). Calcular: (a) La longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación [0.25 puntos]. (b) La expresión del campo eléctrico asociado [0.5 puntos]. (c) La dirección en la que deberíamos colocar una antena dipolar magnética para que la recepción fuera óptima [0.25 puntos].



a) La longitud de onda se obtiene desde el número de ondas:
Observando la fase espacial de la onda: $10^7 z = K \cdot z$

$$K \cdot \lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{10^7} = 2\pi \cdot 10^{-7} m$$

La frecuencia se obtiene de la fase temporal: $3 \cdot 10^{15} t = \omega \cdot t$
$\omega = 3 \cdot 10^{15} rad/s$, la frecuencia lineal será:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^{15}}{2\pi} = 4'8 \cdot 10^{14} Hz$$

La velocidad de propagación se obtiene de la relación entre la frecuencia angular y el número de ondas:

$$\omega = K \cdot v \rightarrow v = \frac{\omega}{K} = \frac{3 \cdot 10^{15}}{10^7} = 3 \cdot 10^8 m/s$$

Esta velocidad indica que la onda se propaga en el aire o vacío.

b) El campo eléctrico se obtiene sin más que evaluar su vector amplitud $\vec{E}_0$,

$$\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{u}_E = v \cdot B_0 \cdot \vec{i} = 3 \cdot 10^8 \cdot 3'3 \cdot 10^{-8} \vec{i} \approx 10\vec{i}\,(V/m)$$

$$\vec{E}(z,t) = 10 \cdot sen(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)\vec{i}$$

c) La antena dipolar magnética habrá de colocarse con las espiras paralelas al plano XZ, con esta orientación el campo magnético producirá flujo máximo en la espiras y se inducirá máxima corriente.

d) Hallamos el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}_0 sen\varphi \times \vec{B}_0 sen\varphi}{\mu_0} = \frac{E_0 \cdot B_0 sen^2\varphi}{\mu_0} \vec{u}_E \times \vec{u}_B$$

$$\vec{S} = \frac{10 \cdot 3'3 \cdot 10^{-8} sen^2(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)}{4\pi \cdot 10^{-7}} \vec{i} \times \vec{j}$$

$$\vec{S} = 0'263 sen^2(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)\vec{k}\ (W/m^2)$$