

Analisi e Sintesi di un Quadrilatero Articolato generatore di funzione

Alexandru Cretu (0324428)

18/06/2023

Indice

1	Introduzione	2
2	Analisi Quadrilatero Articolato del brevetto	3
2.1	Dimensioni brevetto	3
2.2	Regola di Grashof	4
2.2.1	Quadrilateri Articolati di Grashof	4
2.2.2	Quadrilateri Articolati non di Grashof	4
2.2.3	Applicazione	4
2.3	Analisi tramite Teorema di Aronhold-Kennedy	5
2.4	Analisi tramite Diagrammi Polari	6
2.5	Analisi tramite Equazioni di Chiusura	10
2.5.1	Analisi posizioni angolari	10
2.5.2	Analisi velocità angolari	11
2.5.3	Analisi accelerazioni angolari	12
2.5.4	Analisi jerk angolari	13
3	Sintesi Quadrilatero Articolato generatore di funzione	14
3.1	Funzione tra angoli del movente e del cedente da generare	14
3.2	Funzione tra escursione del forcellone e compressione della molla da generare	14
3.3	Fattori di Scala	15
3.4	Coefficienti Differenziali del Terzo Ordine	15
3.5	Circonferenza di Carter-Hall	16
3.6	Risultati	17
4	Verifica Risultati	18
4.1	Confronto Funzioni	18
4.2	Coefficienti Differenziali	19
4.2.1	Applicazione per $\lambda = 5$	20
4.2.2	Applicazione per $\lambda = 7.5$	21
4.2.3	Applicazione per $\lambda = 10$	22
4.3	Confronto Vantaggio Meccanico	23
4.4	Confronto Angolo di Trasmissione	24
4.5	Regola di Grashof	25
4.5.1	Applicazione per $\lambda = 5$	25
4.5.2	Applicazione per $\lambda = 7.5$	25
4.5.3	Applicazione per $\lambda = 10$	25
5	Conclusioni	26
5.1	Soluzione Migliore	26
6	Riferimenti Bibliografici	27
7	Programmi di Calcolo	28
7.1	MATLAB	28
7.1.1	Equazioni di Chiusura del Quadrilatero Articolato	28
7.1.2	Metodo di Netwon-Raphson	29
7.1.3	Analisi	30
7.1.4	Sintesi	34
7.2	Solidworks	37

1 Introduzione

Nella seguente esercitazione, si vuole effettuare un'analisi cinematica completa del quadrilatero articolato proposto nel **brevetto US 4,440,413** per la Honda da S. Miyakoshi e K. Yamamoto nel 3/04/1984 per la sospensione di un motociclo, utilizzando più metodi per evitare eventuali errori.

I metodi utilizzati sono:

- *Teorema di Aronhold-Kennedy* (metodo grafico);
- *Diagrammi Polari* (metodo grafico);
- *Equazioni di Chiusura* (risolte su **MATLAB**);

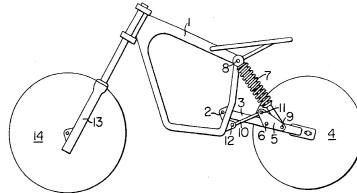


Figura 1: Motociclo.

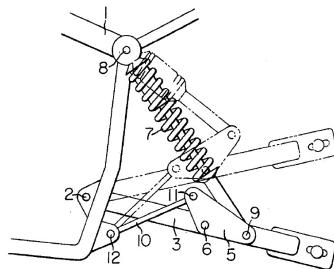


Figura 2: Quadrilatero Articolato.

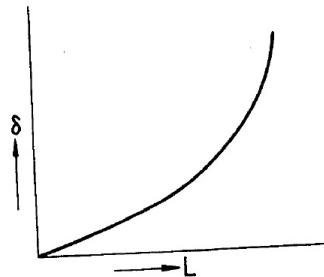


Figura 3: Funzione generata dal quadrilatero articolato.

Successivamente, si vuole sintetizzare un quadrilatero articolato generatore di funzione, in modo tale che il *vantaggio meccanico* aumenti con la rotazione in senso antiorario del forcellone.

Poiché la soluzione non è unica, si possono utilizzare i parametri liberi del metodo per scegliere il quadrilatero articolato con *angolo di trasmissione* migliore.

Infine, la correttezza del risultato ottenuto è stata verificata mediante simulazione su **Solidworks** e riutilizzando i risultati dell'analisi.

2 Analisi Quadrilatero Articolato del brevetto

2.1 Dimensioni brevetto

Per analizzare il quadrilatero articolato relativo al brevetto, inizialmente sono stati misurati i membri del meccanismo, ottenendo i seguenti valori:

1 Movente: 1.2 [cm];

2 Biella: 5.2 [cm];

3 Cedente: 2.8 [cm];

4 Telaio: 6.8 [cm];

- $\theta_{1min} = 88^\circ$;

- $\theta_{1max} = 120^\circ$;

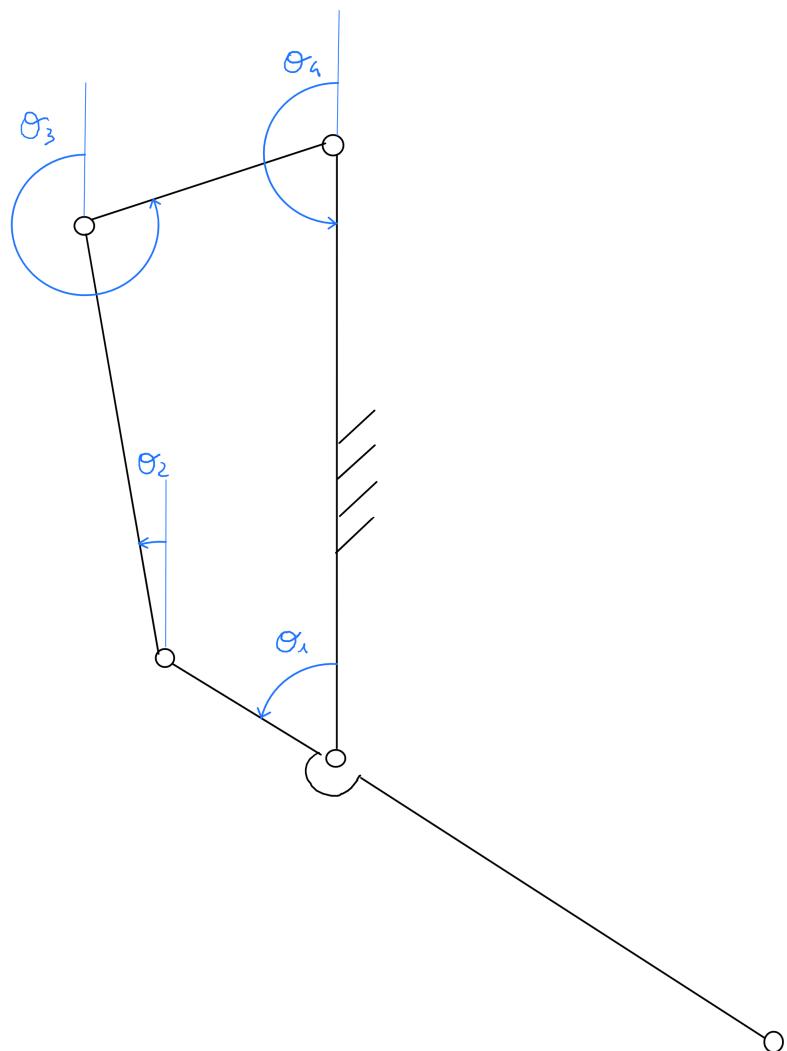


Figura 4: Verso degli angoli del quadrilatero articolato.

2.2 Regola di Grashof

Una volta ottenute le lunghezze dei membri, per riconoscere il tipo di quadrilatero articolato è possibile applicare la *Regola di Grashof*:

$$l_1 + l_4 \geq l_2 + l_3 \quad (1)$$

dove l_1 è l'asta più corta ed l_4 è l'asta più lunga.

Tale regola permette di individuare il numero di manovelle e bilancieri all'interno del meccanismo, dove:

- Manovella: può compiere una rotazione di 360° ;
- Bilanciere: può solo oscillare;

2.2.1 Quadrilateri Articolati di Grashof

I quadrilateri che soddisfano tale disequazione sono detti "di Grashof" e possono suddividersi in 3 tipi:

- Doppia manovella: se il telaio è l_1 ;
- Doppio bilanciere: se il telaio è il lato opposto a l_1 ;
- Manovella-bilanciere: se il telaio è il lato adiacente a l_1 ;

La caratteristica dei quadrilateri articolati di Grashof è che il bilanciere non può mai superare il telaio, quindi oscilla in un semipiano.

2.2.2 Quadrilateri Articolati non di Grashof

Invece, i quadrilateri che non soddisfano tale disequazione sono detti "non di Grashof" e sono tutti doppi bilancieri.

La caratteristica dei quadrilateri articolati non di Grashof è che il bilanciere può sovrapporsi al telaio.

2.2.3 Applicazione

Poiché il membro più corto è il movente ed il membro più lungo è il telaio, otteniamo:

$$1.2[cm] + 6.8[cm] \geq 5.2[cm] + 2.8[cm] \quad (2)$$

ovvero:

$$8[cm] \geq 8[cm] \quad (3)$$

e tale disequazione è verificata, quindi il quadrilatero articolato è di Grashof.

Infine, dato che il telaio è il lato adiacente a l_1 , il quadrilatero articolato è di tipo Manovella-Bilanciere.

2.3 Analisi tramite Teorema di Aronhold-Kennedy

Utilizzando il *Teorema di Aronhold-Kennedy*, è possibile individuare le velocità assolute dei centri di istantanea rotazione:

$$(\vec{V}_{P_{13}})^{(1)} = (\vec{V}_{P_{13}})^{(3)} = \vec{\omega}_1 \times P_{14}P_{13} = \vec{\omega}_3 \times P_{34}P_{13} \quad (4)$$

$$(\vec{V}_{P_{12}})^{(1)} = (\vec{V}_{P_{12}})^{(2)} = \vec{\omega}_1 \times P_{14}P_{12} = \vec{\omega}_2 \times P_{24}P_{12} \quad (5)$$

Da queste formule è possibile ricavare le velocità angolari ω_2 della biella ed ω_3 del cedente in funzione della velocità angolare ω_1 del movente:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{P_{14}P_{12}}{P_{24}P_{12}} \quad (6)$$

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{P_{14}P_{13}}{P_{34}P_{13}} \quad (7)$$

Quindi, in virtù dei prodotti vettoriali, ω_2 avrà senso orario e quindi segno negativo, mentre ω_3 avrà senso antiorario e quindi segno positivo.

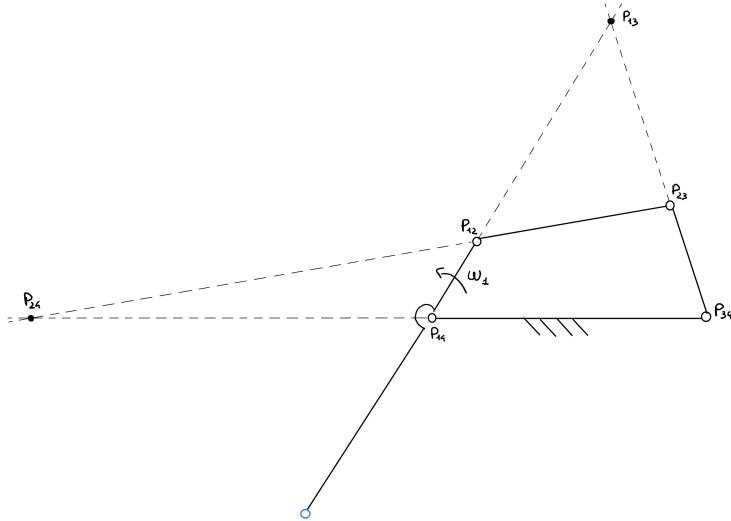


Figura 5: Applicazione del Teorema di Aronhold-Kennedy per l'individuazione dei centri di istantanea rotazione.

2.4 Analisi tramite Diagrammi Polari

Un ulteriore metodo per l'analisi è il *Metodo dei Diagrammi Polari*, il quale consente di determinare le caratteristiche cinematiche di punti appartenenti a corpi rigidi attraverso la soluzione grafica delle equazioni vettoriali che sussistono tra le caratteristiche cinematiche medesime:

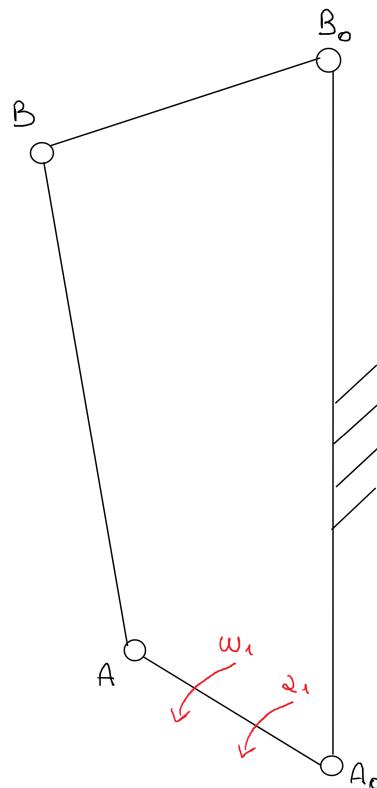


Figura 6: Quadrilatero articolato con i termini noti.

Vettore	Modulo	Direzione
\vec{V}_A	$\omega_1 A_0 A$	$\perp A_0 A$
\vec{V}_B	$\omega_3 B_0 B$	$\perp B_0 B$
\vec{V}_{BA}	$\omega_2 AB$	$\perp AB$

Quindi, in virtù delle seguenti formule vettoriali:

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\omega}_2 \times AB \quad (8)$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_3 \times B_0 B \quad (9)$$

ω_2 avrà senso orario e quindi segno negativo, mentre ω_3 avrà senso antiorario e quindi segno positivo.

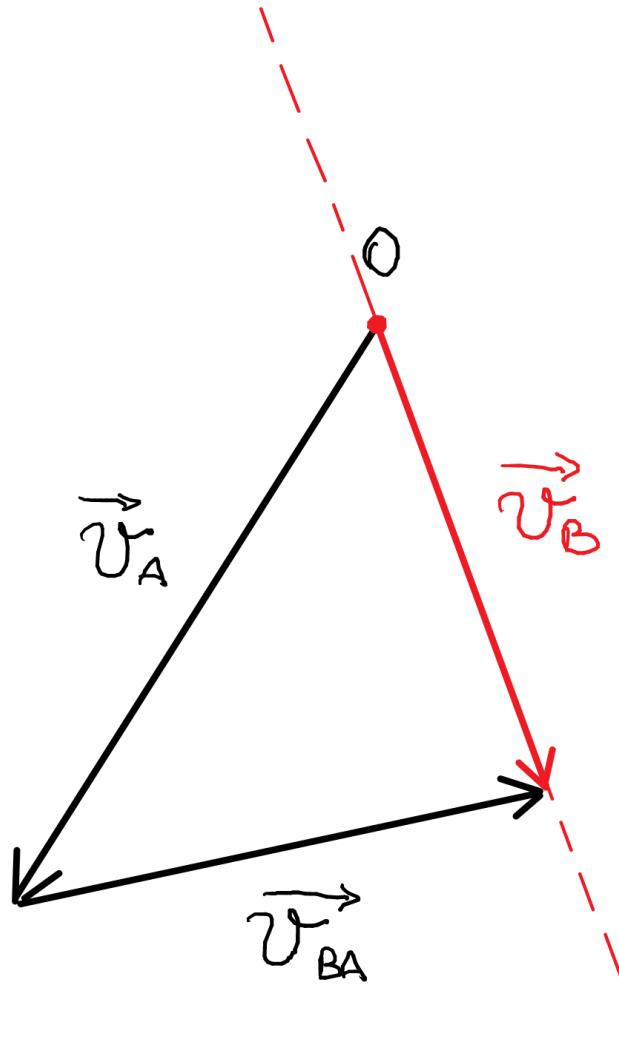


Figura 7: Diagramma polare delle velocità.

Vettore	Modulo	Direzione
\vec{A}_A^t	$\alpha_1 A_0 A$	$\perp A_0 A$
\vec{A}_A^n	$\omega_1^2 A A_0$	$\parallel A A_0$
\vec{A}_B^t	$\alpha_3 B_0 B$	$\perp B_0 B$
\vec{A}_B^n	$\omega_3^2 B B_0$	$\parallel B B_0$
\vec{A}_{BA}^t	$\alpha_2 AB$	$\perp AB$
\vec{A}_{BA}^n	$\omega_2^2 BA$	$\parallel BA$

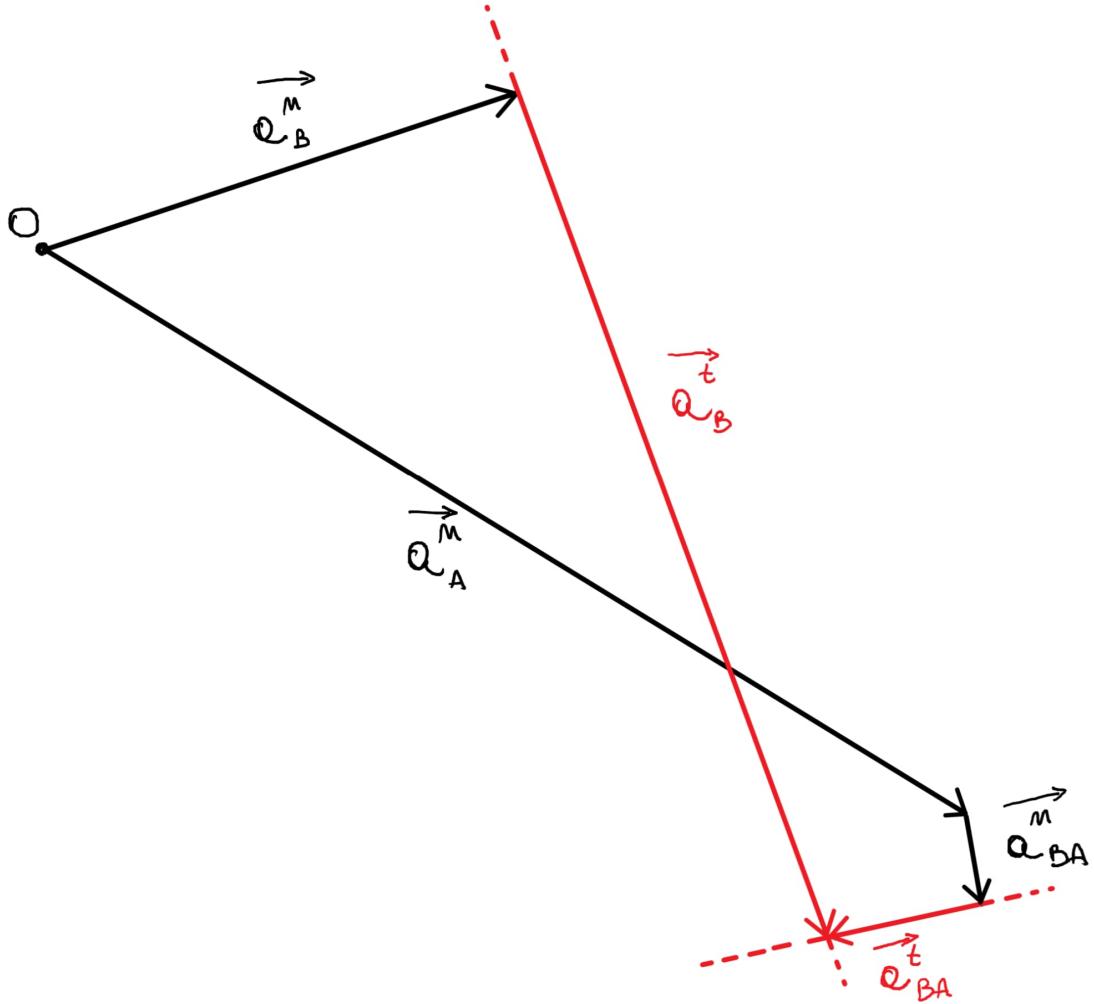


Figura 8: Diagramma polare delle accelerazioni.

Quindi, in virtù delle seguenti formule vettoriali:

$$\vec{A}_{BA}^t = \vec{\alpha}_2 \times AB \quad (10)$$

$$\vec{A}_B^t = \vec{\alpha}_3 \times B_0 B \quad (11)$$

α_2 avrà senso antiorario e quindi segno positivo, mentre α_3 avrà senso antiorario e quindi segno positivo.

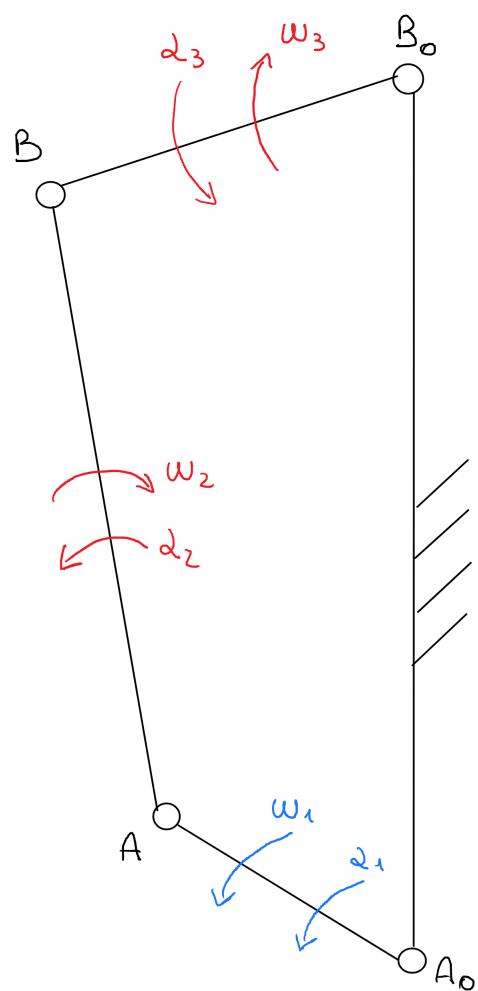


Figura 9: Quadrilatero articolato dopo il calcolo delle velocità e accelerazioni incognite.

2.5 Analisi tramite Equazioni di Chiusura

Infine, l'ultimo metodo di analisi proposto è il *Metodo delle Equazioni di Chiusura*, il quale consiste nel risolvere un sistema di equazioni che deriva dalla rappresentazione vettoriale del meccanismo stesso:

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (12)$$

Sfruttando la relazione di Eulero e dividendo tra parte reale e parte immaginaria:

$$r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (13)$$

$$r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (14)$$

Dove θ_1 è l'angolo noto del movente e $\theta_4 = \pi$ è un angolo noto costante.

2.5.1 Analisi posizioni angolari

Sostituendo i termini noti:

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = -r_1 \cos \theta_1 + r_4 \quad (15)$$

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = -r_1 \sin \theta_1 \quad (16)$$

Tale sistema di equazioni è non lineare, quindi è stato utilizzato usando il Metodo di Newton-Raphson implementato su **MATLAB**.

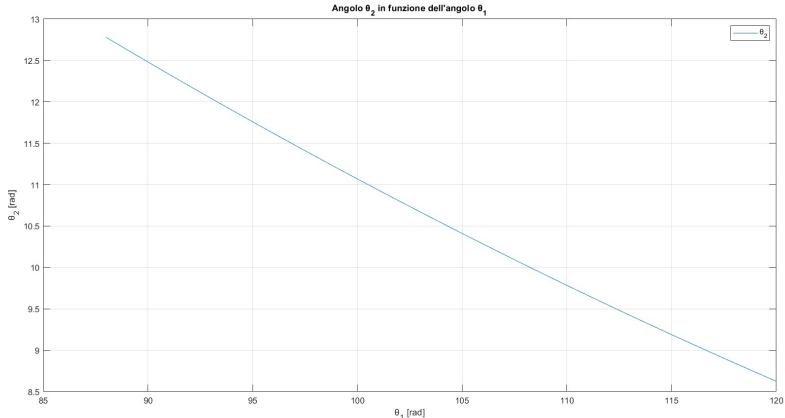


Figura 10: Grafico dell'angolo θ_2 in funzione dell'angolo θ_1 .

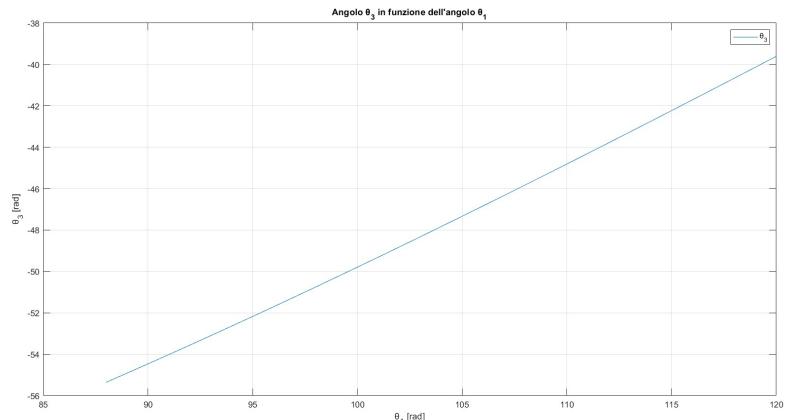


Figura 11: Grafico dell'angolo θ_3 in funzione dell'angolo θ_1 .

2.5.2 Analisi velocità angolari

Derivando il sistema:

$$-r_2\omega_2\sin\theta_2 - r_3\omega_3\sin\theta_3 = r_1\omega_1\sin\theta_1 \quad (17)$$

$$r_2\omega_2\cos\theta_2 + r_3\omega_3\cos\theta_3 = -r_1\omega_1\cos\theta_1 \quad (18)$$

Tale sistema di equazioni è lineare ed ammette soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti, lo *Jacobiano*, è non singolare:

$$\det(J) \neq 0 \Leftrightarrow \theta_2 \neq \theta_3 + k\pi \quad (19)$$

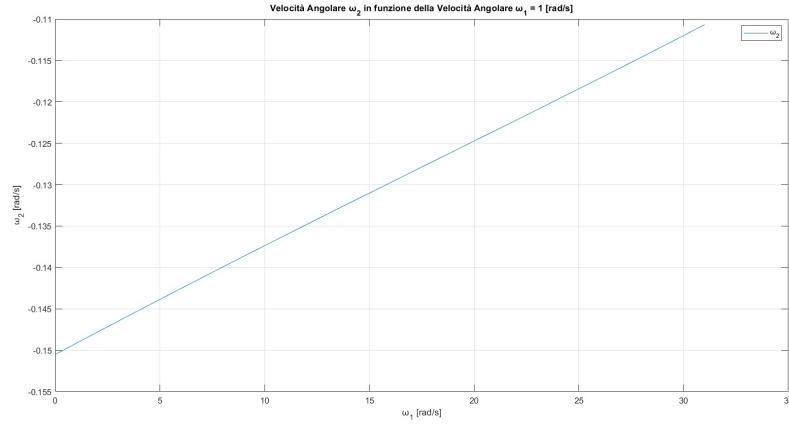


Figura 12: Grafico della velocità angolare ω_2 .

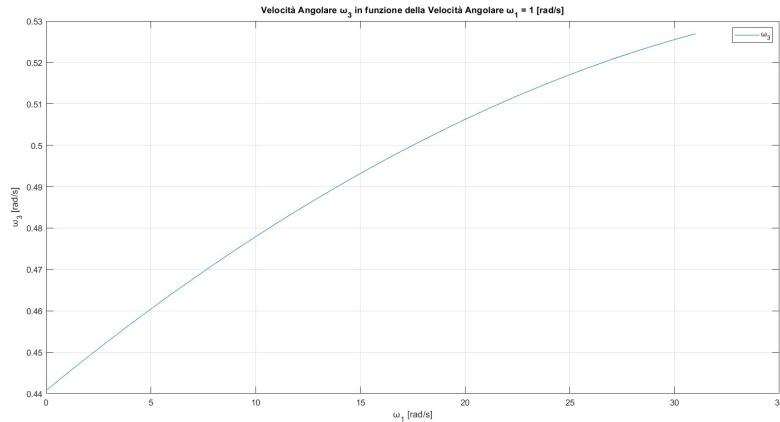


Figura 13: Grafico della velocità angolare ω_3 .

Tali grafici, confermano i versi dei vettori trovati tramite gli altri metodi.

2.5.3 Analisi accelerazioni angolari

Derivando nuovamente il sistema:

$$-r_2\alpha_2\sin\theta_2 - r_3\alpha_3\sin\theta_3 = r_1\alpha_1\sin\theta_1 + r_1\omega_1^2\cos\theta_1 + r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3 \quad (20)$$

$$r_2\alpha_2\cos\theta_2 + r_3\alpha_3\cos\theta_3 = -r_1\alpha_1\cos\theta_1 + r_1\omega_1^2\sin\theta_1 + r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3 \quad (21)$$

Come nel caso precedente, tale sistema di equazioni è lineare ed ammette soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti, lo *Jacobiano*, è non singolare:

$$\det(J) \neq 0 \Leftrightarrow \theta_2 \neq \theta_3 + k\pi \quad (22)$$

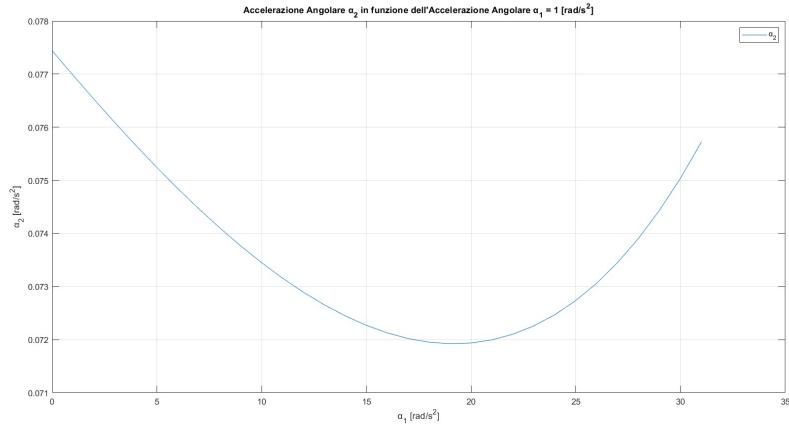


Figura 14: Grafico dell'accelerazione angolare α_2 .

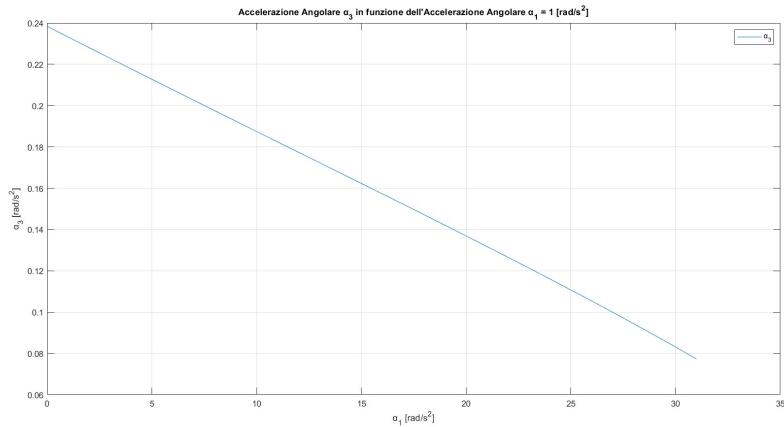


Figura 15: Grafico dell'accelerazione angolare α_3 .

Tali grafici, confermano i versi dei vettori trovati tramite gli altri metodi.

2.5.4 Analisi jerk angolari

Derivando nuovamente il sistema:

$$-r_2 J_2 \sin \theta_2 - r_3 J_3 \sin \theta_3 = r_1 J_1 \sin \theta_1 + 3r_1 \omega_1 \alpha_1 \cos \theta_1 - r_1 \omega_1^3 \sin \theta_1 + 3r_2 \omega_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_2 \omega_2^3 \sin \theta_2 + 3r_3 \omega_3 \alpha_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3^3 \sin \theta_3 \quad (23)$$

$$r_2 J_2 \cos \theta_2 + r_3 J_3 \cos \theta_3 = -r_1 J_1 \cos \theta_1 + 3r_1 \omega_1 \alpha_1 \sin \theta_1 + r_1 \omega_1^3 \cos \theta_1 + 3r_2 \omega_2 \alpha_2 \sin \theta_2 + r_2 \omega_2^3 \cos \theta_2 + 3r_3 \omega_3 \alpha_3 \sin \theta_3 + r_3 \omega_3^3 \cos \theta_3 \quad (24)$$

Come nel caso precedente, tale sistema di equazioni è lineare ed ammette soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti, lo *Jacobiano*, è non singolare:

$$\det(J) \neq 0 \Leftrightarrow \theta_2 \neq \theta_3 + k\pi \quad (25)$$

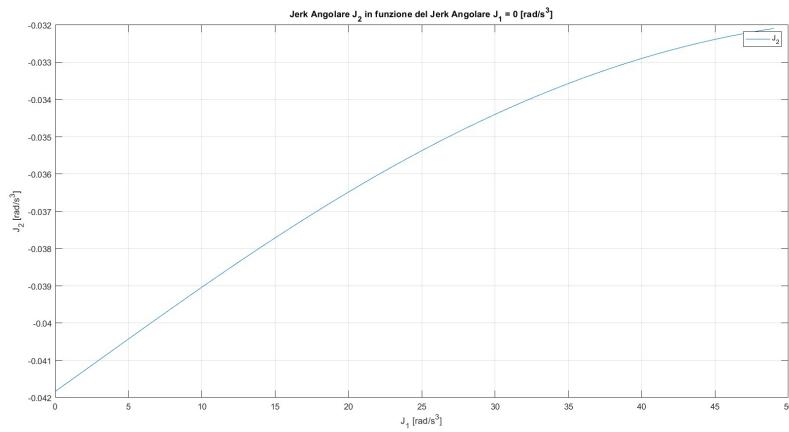


Figura 16: Grafico del jerk angolare J_2 .

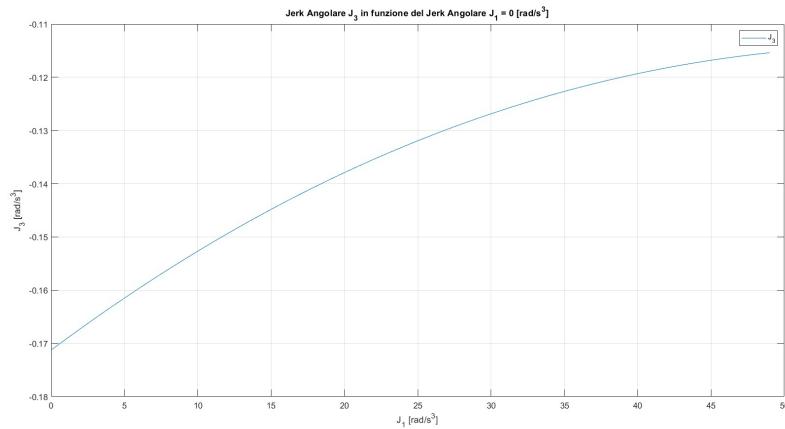


Figura 17: Grafico del jerk angolare J_3 .

3 Sintesi Quadrilatero Articolato generatore di funzione

Per la sintesi del quadrilatero articolato generatore di funzione, vi sono vari metodi. Quello proposto è una sintesi del terzo ordine, sfruttando anche la *Circonferenza di Carter-Hall*.

3.1 Funzione tra angoli del movente e del cedente da generare

La funzione che si vuole generare tra gli angoli del movente e gli angoli del cedente è la seguente:

$$\phi = \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

con $\Delta\phi = 20^\circ$, $\Delta\theta = 40^\circ$.

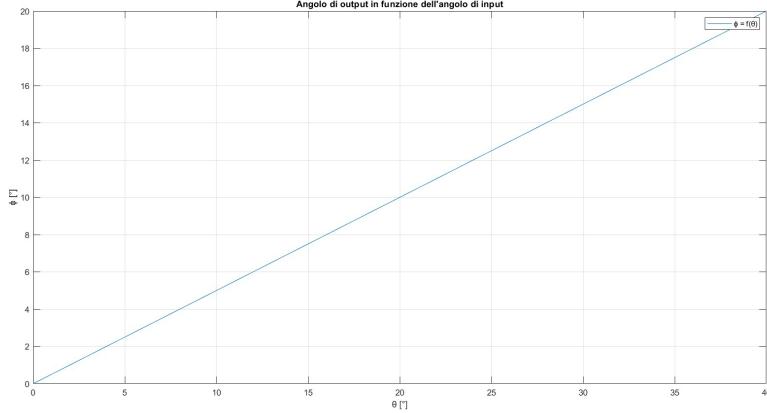


Figura 18: Funzione tra angoli da generare tramite sintesi.

3.2 Funzione tra escursione del forcellone e compressione della molla da generare

La funzione che si vuole generare tra l'escursione del forcellone e la compressione della molla deve essere una funzione continua strettamente crescente. Ragionando sulle dimensioni reali del quadrilatero articolato, si è imposto che per un movimento verticale L di 500 [mm] del forcellone, la molla si deve comprimere di un valore δ pari a 150 [mm]. Tale funzione quindi, è stata ottenuta tramite interpolazione dei seguenti punti:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 150 \end{pmatrix} \quad (27)$$

utilizzando un'esponenziale del tipo:

$$\delta = ae^{bL} \quad (28)$$

con $a = 0.9596$, $b = 0.0101$.

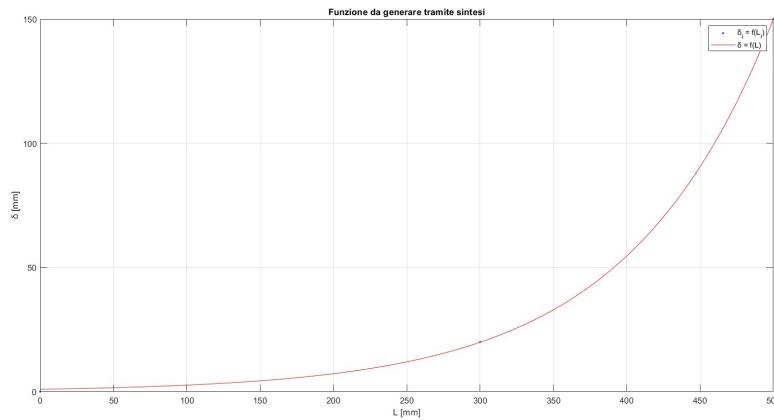


Figura 19: Funzione tra movimento verticale movente e compressione molla da generare tramite sintesi.

3.3 Fattori di Scala

Per passare da una funzione all'altra, è opportuno definire i fattori di scala K_θ e K_ϕ :

$$K_\theta = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = 0.0800 \quad (29)$$

$$K_\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta y} = 0.1324. \quad (30)$$

con $\Delta\phi = 20[\circ]$, $\Delta\theta[\circ] = 40$, $\Delta x[mm] = 500$, $\Delta y = 150[mm]$.

3.4 Coefficienti Differenziali del Terzo Ordine

Per effettuare la sintesi del terzo ordine, abbiamo bisogno dei seguenti coefficienti differenziali, i quali costituiscono l'espansione in serie di Taylor della funzione da generare intorno ad un determinato punto di precisione.

Grazie ai fattori di scala precedentemente determinati, otteniamo:

$$R = \frac{K_\phi}{K_\theta} y'(x_m) = 0.7544 \quad (31)$$

$$R' = \frac{K_\phi}{K_\theta^2} y''(x_m) = 0.0953 \quad (32)$$

$$R'' = \frac{K_\phi}{K_\theta^3} y'''(x_m) = 0.0120 \quad (33)$$

con $x_m = 380$.

La conoscenza di tali coefficienti consente di calcolare le caratteristiche geometriche delle polari del moto relativo tra i membri adiacenti al telaio, poiché sussistono anche le seguenti relazioni:

$$R = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} \quad (34)$$

$$R' = \left. \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} \quad (35)$$

$$R'' = \left. \frac{d^3\phi}{d\theta^3} \right|_{\theta=\theta_m} \quad (36)$$

3.5 Circonferenza di Carter-Hall

La *Circonferenza di Carter-Hall* è il luogo dei centri di istantanea rotazione, del moto relativo biella-telaio, di tutti i quadrilateri articolati aventi telaio della medesima lunghezza e caratterizzati dagli stessi coefficienti differenziali R, R', R'' dello sviluppo in serie di Taylor della funzione che lega la posizione angolare del cedente a quella del movente.

Inoltre, dal *Teorema di Bobillier*, nel moto relativo tra i membri 2 e 4, centro di istantanea rotazione in P_{24} , la tangente T alle polari forma con la congiungente A_0B_0 un angolo ψ pari a quello che la congiungente AB forma con l'asse di collineazione $P_{24}P_{13}$:

$$\psi = \text{atan2}(R(1 - R), R') = 1.09[\text{rad}] \quad (37)$$

Quindi, otteniamo:

$$d_c = \frac{3[R^2(1 - R)^2 + R'^2]f}{(1 - R)[R(1 - R)^3 + 2R^2(1 - R^2) + 3R'^2 + R''(1 - R)]} = 1927.5[\text{mm}] \quad (38)$$

$$e = \frac{Rf}{1 - R} = 1228.5[\text{mm}] \quad (39)$$

dove $f = 400$ [mm] è la lunghezza del telaio, d_c è il diametro della *Circonferenza di Carter-Hall* ed e è il punto di intersezione tra la congiungente A_0B_0 e l'asse di collineazione $P_{24}P_{13}$.

Noti questi valori, è possibile tracciare la *Circonferenza di Carter-Hall* e determinare il centro di istantanea rotazione P_{13} :

$$P_{13_x} = d_c \cos^2(\lambda + \psi) \quad (40)$$

$$P_{13_y} = \frac{d_c}{2} \sin(2(\lambda + \psi)) \quad (41)$$

dove λ è un angolo libero, il quale permette di generare vari quadrilateri articolati ed infine andare a scegliere quello con angolo di trasmissione migliore.

3.6 Risultati

Seguendo tale procedura e scegliendo più valori per λ , si sono ottenuti i seguenti quadrilateri articolati:

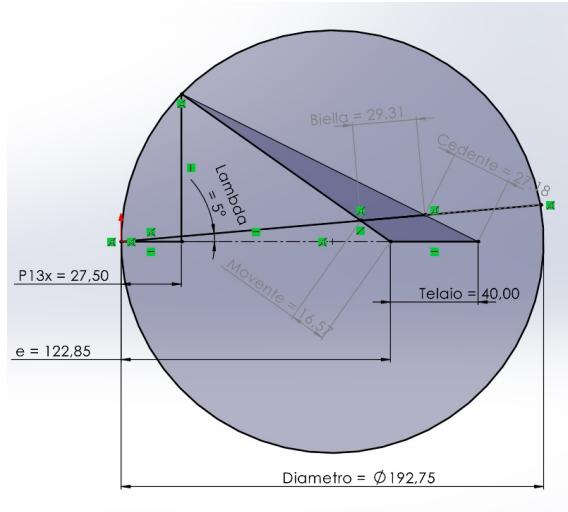


Figura 20: Quadrilatero Articolato con $\lambda = 5^\circ$.

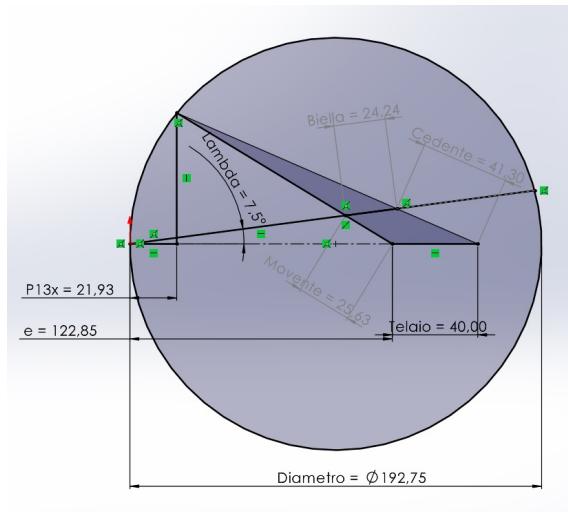


Figura 21: Quadrilatero Articolato con $\lambda = 7.5^\circ$.

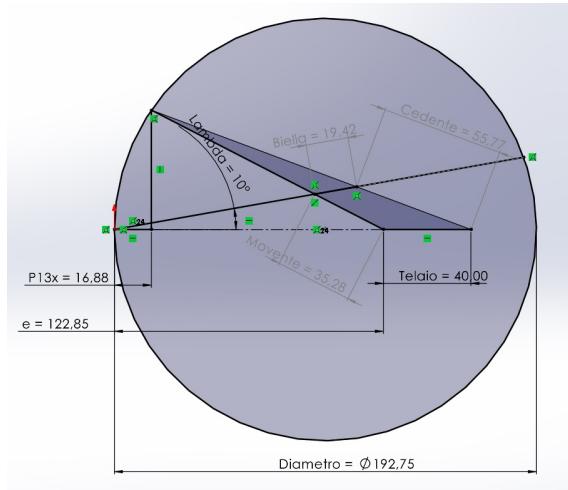


Figura 22: Quadrilatero Articolato con $\lambda = 10^\circ$.

4 Verifica Risultati

Per verificare la correttezza dei risultati, i quadrilateri articolati ottenuti sono successivamente stati analizzati utilizzando vari strumenti:

- Simulazione su **Solidworks**:
 - Funzioni generate;
 - Vantaggio meccanico;
 - Angolo di trasmissione;
- Risoluzione delle *Equazioni di Chiusura* su **MATLAB**:
 - Utilizzando il *Metodo di Newton-Raphson* per le posizioni angolari;
 - Risolvendo il sistema lineare per le velocità e accelerazioni angolari;

4.1 Confronto Funzioni

Il metodo utilizzato non è un metodo esatto, ma solo un'approssimazione. Le funzioni ottenute, quindi, saranno anch'esse delle approssimazioni della funzione nominale.

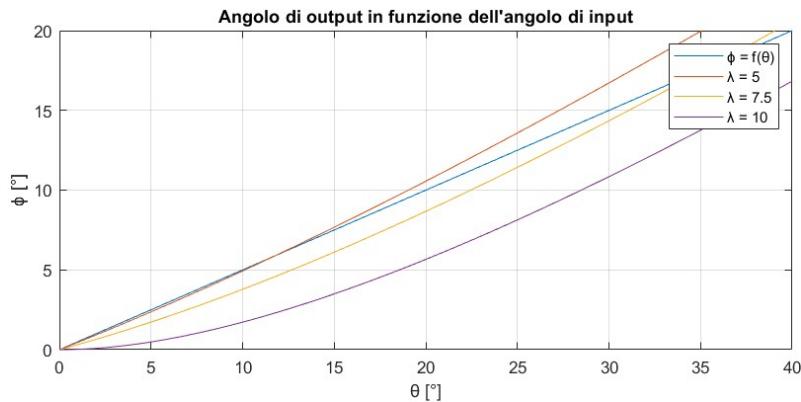


Figura 23: Confronto tra la funzione degli angoli da generare e quelle ottenute.

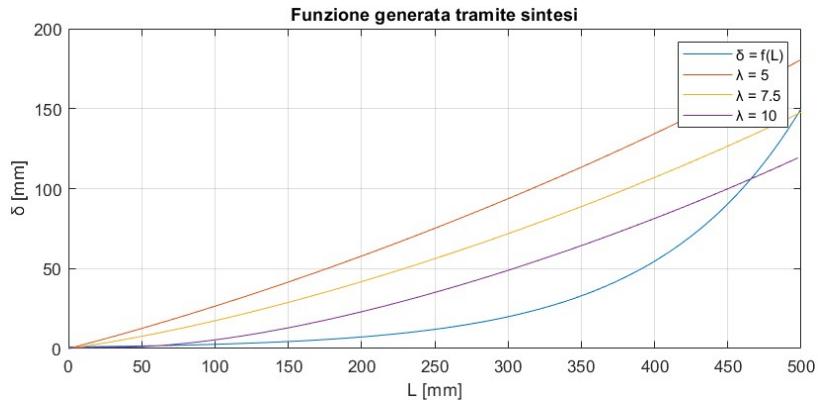


Figura 24: Confronto tra la funzione tra movente e molla da generare e quelle ottenute.

Tra i risultati ottenuti, quello che presenta più accuratezza è il quadrilatero articolato sintetizzato con $\lambda = 7.5[^{\circ}]$.

4.2 Coefficienti Differenziali

Per verificare che i quadrilateri articolati ottenuti siano corretti, bisogna verificare anche che i coefficienti differenziali sono gli stessi.

Per effettuare tale verifica, è possibile riutilizzare il codice dell'analisi sui risultati della sintesi ed invertire la formula dei fattori di scala per trovare il punto di precisione angolare θ_m :

$$\theta_m = \theta - K_\theta(x - x_m) = 30[^\circ] \quad (42)$$

4.2.1 Applicazione per $\lambda = 5$

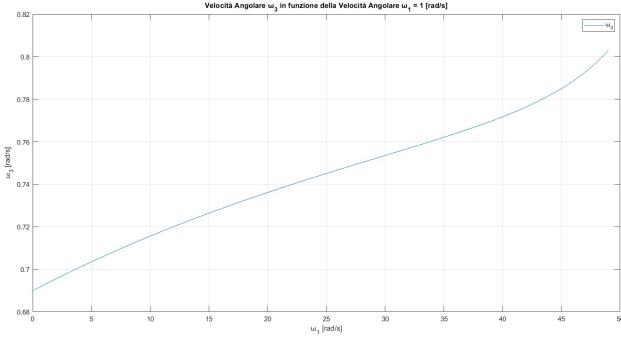


Figura 25: Grafico della velocità angolare del cedente.

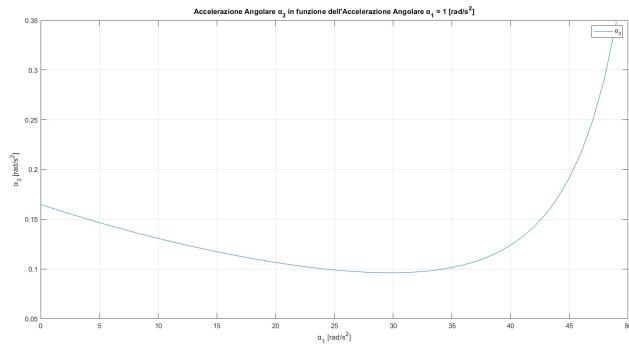


Figura 26: Grafico dell'accelerazione angolare del cedente.

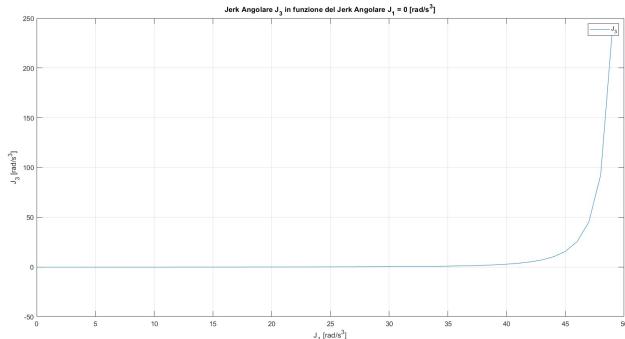


Figura 27: Grafico del jerk angolare del cedente.

Calcolando tali derivate nel punto di precisione angolare, otteniamo:

$$R = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.7519 \quad (43)$$

$$R' = \left. \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.0962 \quad (44)$$

$$R'' = \left. \frac{d^3\phi}{d\theta^3} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.2756 \quad (45)$$

$$(46)$$

Poiché i coefficienti differenziali di progetto sono $R = 0.7544$, $R' = 0.0953$ ed $R'' = 0.0120$, otteniamo rispettivamente un errore del 0.003%, del 0.009% e del 21%.

4.2.2 Applicazione per $\lambda = 7.5$

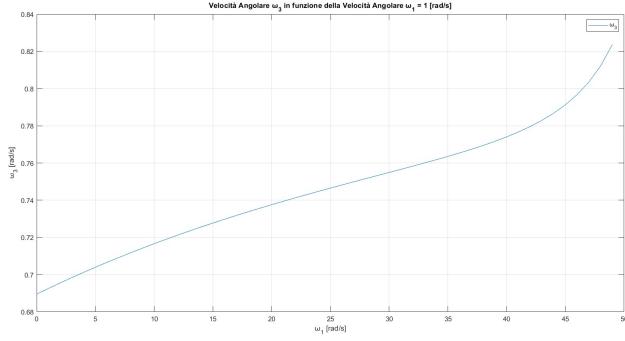


Figura 28: Grafico della velocità angolare del cedente.

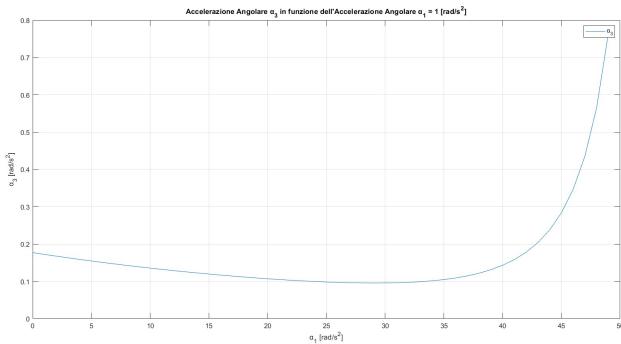


Figura 29: Grafico dell'accelerazione angolare del cedente.

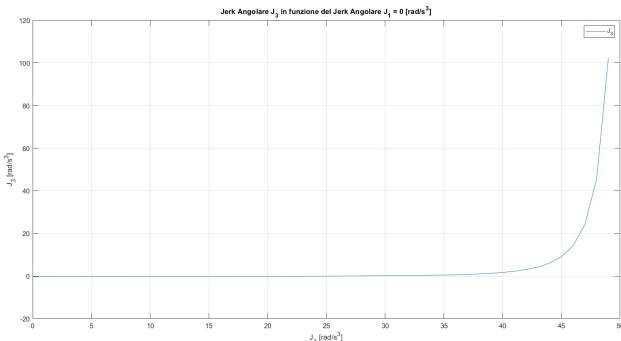


Figura 30: Grafico del jerk angolare del cedente.

Calcolando tali derivate nel punto di precisione angolare, otteniamo:

$$R = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.7533 \quad (47)$$

$$R' = \left. \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.0956 \quad (48)$$

$$R'' = \left. \frac{d^3\phi}{d\theta^3} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.1167 \quad (49)$$

$$(50)$$

Poiché i coefficienti differenziali di progetto sono $R = 0.7544$, $R' = 0.0953$ ed $R'' = 0.0120$, otteniamo rispettivamente un errore del 0.001%, del 0.003% e del 8%.

4.2.3 Applicazione per $\lambda = 10$

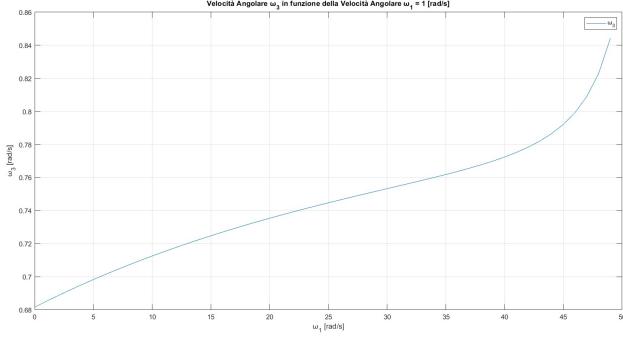


Figura 31: Grafico della velocità angolare del cedente.

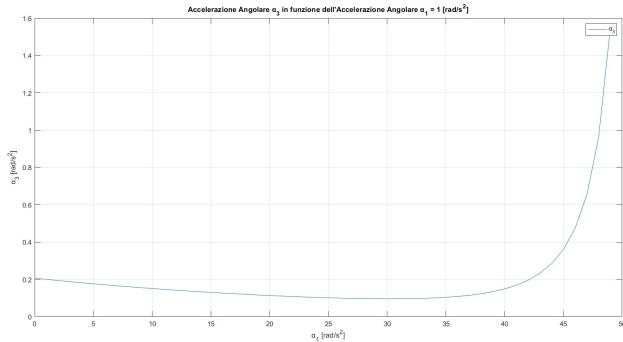


Figura 32: Grafico dell'accelerazione angolare del cedente.

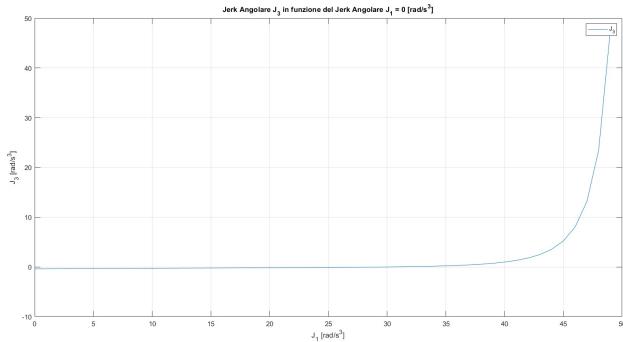


Figura 33: Grafico del jerk angolare del cedente.

Calcolando tali derivate nel punto di precisione angolare, otteniamo:

$$R = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.7516 \quad (51)$$

$$R' = \left. \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.0963 \quad (52)$$

$$R'' = \left. \frac{d^3\phi}{d\theta^3} \right|_{\theta=\theta_m} = 0.006 \quad (53)$$

$$(54)$$

Poiché i coefficienti differenziali di progetto sono $R = 0.7544$, $R' = 0.0953$ ed $R'' = 0.0120$, otteniamo rispettivamente un errore del 0.003%, del 0.01% e del 50%.

4.3 Confronto Vantaggio Meccanico

Una caratteristica importante nella progettazione della classe di meccanismi destinati alle sospensioni è quella di presentare una variazione del rapporto tra la forza F_1 , esercitata dall'elemento smorzante, e quella F , scambiata tra la ruota posteriore e la strada.

In condizioni ideali e trascurando gli effetti dell'inerzia, il lavoro compiuto dalla forza F_1 deve essere uguale a quello compiuto dalla forza F .

Utilizzando il *Principio dei Lavori Virtuali*:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{\delta L} + \vec{F} \cdot \vec{\delta d} = 0 \quad (55)$$

dove δd è la deformazione infinitesima dell'elemento elastico e δL la distanza infinitesima verticale percorsa dal centro del forcellone.

Si definisce quindi il vantaggio meccanico:

$$VM = \frac{F_1}{F} = \frac{\delta d}{\delta L} \quad (56)$$

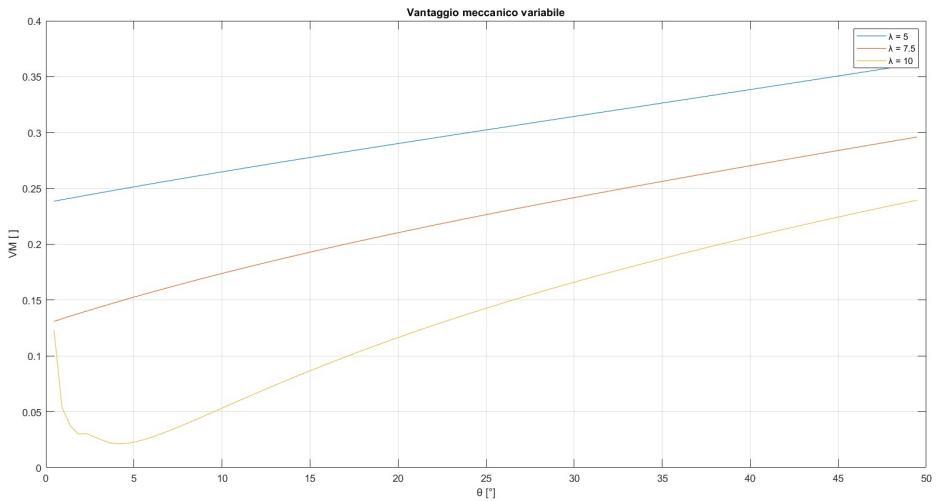


Figura 34: Confronto tra i vantaggi meccanici dei quadrilateri articolati ottenuti.

Il quadrilatero articolato sintetizzato con $\lambda = 10[^{\circ}]$ si comporta in modo anomalo per $\theta \in [0[^{\circ}], 5[^{\circ}]]$ poiché in quell'intervallo passa per il punto morto interno.

I punti morti sono punti di singolarità da evitare, poiché il meccanismo passa da 1 grado di libertà a 2 gradi di libertà, quindi le altre 2 soluzioni sono da preferire.

4.4 Confronto Angolo di Trasmissione

Poiché le soluzioni ottenute tramite la sintesi cinematica non sono uniche, è possibile valutare tali soluzioni utilizzando degli indici di merito, come ad esempio gli angoli di trasmissione (angolo formato tra la biella ed il cedente).

Durante la progettazione, bisogna fare in modo che la deviazione dell'angolo di trasmissione dal valore ottimale sia minima, quindi bisogna risolvere un problema di ottimizzazione del tipo:

$$\min(90^\circ - \mu) \quad (57)$$

Il valore ottimale dell'angolo di trasmissione è 90° , cosicché tutta la forza fornita alla biella dal movente contribuisca al movimento della biella stessa.

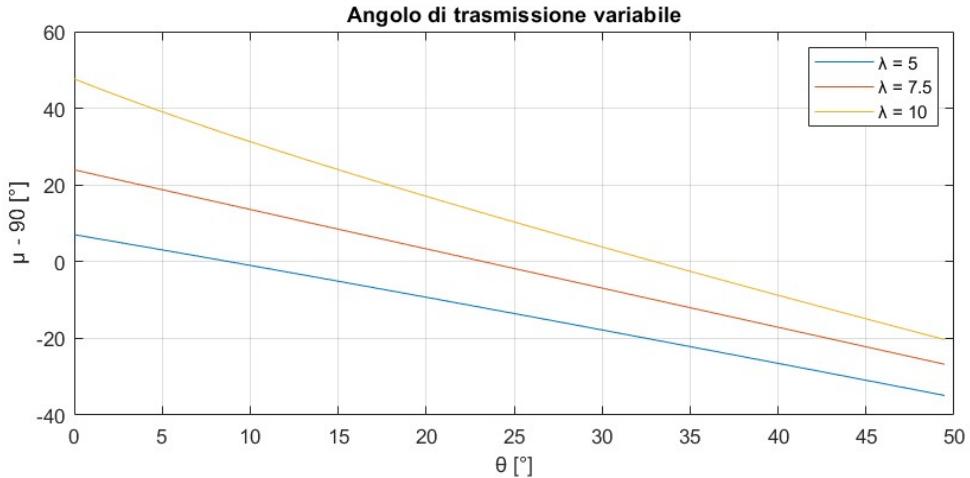


Figura 35: Confronto tra i vantaggi meccanici dei quadrilateri articolati ottenuti.

Tra i risultati ottenuti, quello che presenta meno deviazione dal valore ottimale è il quadrilatero articolato sintetizzato con $\lambda = 7.5^\circ$.

4.5 Regola di Grashof

4.5.1 Applicazione per $\lambda = 5$

Poiché il membro più corto è il movente ed il membro più lungo è il telaio, otteniamo:

$$16.57[cm] + 40[cm] \geq 29.31[cm] + 27.18[cm] \quad (58)$$

ovvero:

$$56.57[cm] \geq 56.49[cm] \quad (59)$$

e tale disequazione è verificata, quindi il quadrilatero articolato è di Grashof.

Infine, dato che il telaio è il lato adiacente a l_1 , il quadrilatero articolato è di tipo Manovella-Bilanciere.

4.5.2 Applicazione per $\lambda = 7.5$

Poiché il membro più corto è la biella ed il membro più lungo è il cedente, otteniamo:

$$24.24[cm] + 41.30[cm] \geq 25.63[cm] + 40[cm] \quad (60)$$

ovvero:

$$65.54[cm] \geq 65.63[cm] \quad (61)$$

e tale disequazione non è verificata, quindi il quadrilatero articolato è un doppio bilanciere non di Grashof.

4.5.3 Applicazione per $\lambda = 10$

Poiché il membro più corto è la biella ed il membro più lungo è il cedente, otteniamo:

$$19.42[cm] + 55.77[cm] \geq 35.28[cm] + 40[cm] \quad (62)$$

ovvero:

$$75.19[cm] \geq 75.28[cm] \quad (63)$$

e tale disequazione non è verificata, quindi il quadrilatero articolato è un doppio bilanciere non di Grashof.

5 Conclusioni

La sintesi proposta è un metodo del terzo ordine, infatti i risultati ottenuti sono buoni, nonostante vi siano comunque degli errori di approssimazione.

Il fatto che tale metodo abbia dei parametri liberi è una cosa positiva, perché permette di ottenere più soluzioni per la stessa funzione di progetto ed usando degli indici di merito, come ad esempio l'angolo di trasmissione, è possibile scegliere la soluzione migliore.

5.1 Soluzione Migliore

In questo caso, la soluzione migliore è quella ottenuta per $\lambda = 7.5$, dato che:

- Approssima bene la funzione degli angoli in tutto il range di lavoro;
- Approssima bene la funzione relativa all'escursione del forcellone e la compressione della molla, ottenendo un valore finale molto simile;
- Approssima bene i coefficienti differenziali, con errori in % minori delle altre soluzioni proposte: 0.001%, 0.003% e 8%;
- Presenta l'angolo di trasmissione migliore: $|\mu - 90[^{\circ}]| \leq 25[^{\circ}]$;

6 Riferimenti Bibliografici

- **Fondamenti di Meccanica Applicata alle Macchine**, *Pennestrì E., Belfiore N. P., Di Benedetto A.*, Casa Editrice Ambrosiana;
- **Introduzione alla Cinematica dei Meccanismi Vol.1**, *Pennestrì E., Di Benedetto A.*, Casa Editrice Ambrosiana;
- **Introduzione alla Cinematica dei Meccanismi Vol.2**, *Pennestrì E., Di Benedetto A.*, Casa Editrice Ambrosiana;
- **Introduzione alla Cinematica dei Meccanismi Vol.3**, *Pennestrì E., Di Benedetto A.*, Casa Editrice Ambrosiana;
- **Engineering Kinematics**, *Pennestrì E., Cera M.*, Casa Editrice Ambrosiana;

7 Programmi di Calcolo

7.1 MATLAB

7.1.1 Equazioni di Chiusura del Quadrilatero Articolato

```
function [obj, jacob] = FourBarLinkage(L1,L2,L3,L4)

    if (nargin < 4)
        error('Too few input arguments');
    end

    if (nargout < 2)
        error('Too few output arguments');
    end

    if (L1 < 0 || L2 < 0 || L3 < 0 || L4 < 0)
        error('Lengths must be positive numbers')
    end
```

Figura 36: Codice 1 Equazioni di Chiusura del quadrilatero articolato.

```
function f = funct(x)
    if (size(x) ~= 4)
        error('The input argument has wrong dimension');
    end
    f = zeros(2,1);
    f(1) = L1*cos(x(1)) + L2*cos(x(2)) + L3*cos(x(3)) + L4*cos(x(4));
    f(2) = L1*sin(x(1)) + L2*sin(x(2)) + L3*sin(x(3)) + L4*sin(x(4));
end
obj = @funct;

function j = jacobian(x)
    if (size(x,1) ~= 4)
        error('The input argument has wrong dimension');
    end

    j = zeros(2,2);
    j(1,1) = -L2*sin(x(2));
    j(1,2) = -L3*sin(x(3));
    j(2,1) = L2*cos(x(2));
    j(2,2) = L3*cos(x(3));
end
jacob = @jacobian;
end
```

Figura 37: Codice 2 Equazioni di Chiusura del quadrilatero articolato.

7.1.2 Metodo di Netwon-Raphson

```
function [theta_est, i] = MethodNewtonRaphson(theta_est, epsilon, max_iterations, f, j)

if (nargin < 4)
    error('Too few input arguments');
end

if (nargout < 2)
    error('Too few output arguments');
end

if (epsilon < 0 || max_iterations < 0)
    error('Lengths must be positive numbers')
end
```

Figura 38: Codice 1 Metodo di Newton-Raphson.

```
i = 0;

while 1
    f_i = f(theta_est);
    j_i = j(theta_est);
    if (rank(j_i) ~= size(j_i,1))
        error("The jacobian can not be inverted");
    end

    delta_theta = -j_i\f_i;
    if (norm(delta_theta, 2) <= epsilon || i >= max_iterations)
        break;
    end
    theta_est(2) = theta_est(2) + delta_theta(1);
    theta_est(3) = theta_est(3) + delta_theta(2);

    i = i + 1;
end
end
```

Figura 39: Codice 2 Metodo di Newton-Raphson.

7.1.3 Analisi

```

%% Data

% L1 = 1.1;
% L2 = 4.7;
% L3 = 2.6;
% L4 = 6.1;

L1 = 25.63;
L2 = 24.24;
L3 = 41.30;
L4 = 40;

theta_1min = 100*pi/180;
theta_1max = 150*pi/180;
theta_delta = 1*pi/180;
theta_i = [theta_1min; 1; -1; pi];

theta_1 = [theta_1min:theta_delta:theta_1max]';
size = length(theta_1);

epsilon = 1e-3;
max_iterations = 1e3;

[f, j] = FourBarLinkage(L1,L2,L3,L4);

```

Figura 40: Codice 1 Analisi: Dati.

```

%% Analysis of Angular Positions

theta_2 = zeros(size, 1);
theta_3 = zeros(size, 1);

i = 1;

while i <= size

    theta_i(1) = theta_1(i);
    [theta_est, iterations] = MethodNewtonRaphson(theta_i, epsilon, max_iterations, f, j);

    theta_2(i) = theta_est(2);
    theta_3(i) = theta_est(3);

    i = i + 1;

end

```

Figura 41: Codice 2 Analisi: Calcolo posizioni angolari.

```

%% Analysis of Angular Velocities

syms w2 w3

w_1 = ones(size, 1);
w_2 = zeros(size, 1);
w_3 = zeros(size, 1);

i = 1;

while i <= size

jacob = j([theta_1(i); theta_2(i); theta_3(i); pi]);
b = [L1*sin(theta_1(i)); -L2*cos(theta_1(i))];

w = solve(jacob*[w2; w3] == b*w_1(i));
w_2(i) = double(w.w2);
w_3(i) = double(w.w3);

i = i + 1;

end

```

Figura 42: Codice 3 Analisi: Calcolo velocità angolari.

```

%% Analysis of Angular Accelerations

syms alpha2 alpha3

alpha_1 = ones(size,1);
alpha_2 = zeros(size, 1);
alpha_3 = zeros(size, 1);

i = 1;

while i <= size

jacob = j([theta_1(i); theta_2(i); theta_3(i); pi]);
b = [L1*cos(theta_1(i))*w_1(i)^2 + L2*cos(theta_2(i))*w_2(i)^2 + L3*cos(theta_3(i))*w_3(i)^2;
     L1*sin(theta_1(i))*w_1(i)^2 + L2*sin(theta_2(i))*w_2(i)^2 + L3*sin(theta_3(i))*w_3(i)^2];

alpha = solve(jacob*[alpha2; alpha3] == b);
alpha_2(i) = double(alpha.alpha2);
alpha_3(i) = double(alpha.alpha3);

i = i + 1;

end

```

Figura 43: Codice 4 Analisi: Calcolo accelerazioni angolari.

```

%% Analysis of Angular Jerks

syms jerk2 jerk3

jerk_1 = zeros(size, 1);
jerk_2 = zeros(size, 1);
jerk_3 = zeros(size, 1);

i = 1;
while i <= size

    jacob = j([theta_1(i); theta_2(i); theta_3(i); pi]);
    b = [+L1*jerk_1(i)*sin(theta_1(i)) + 3*L1*alpha_1(i)*w_1(i)*cos(theta_1(i)) - L1*w_1(i)^3*sin(theta_1(i)) + 3*L2*.
        -L1*jerk_1(i)*cos(theta_1(i)) + 3*L1*alpha_1(i)*w_1(i)*sin(theta_1(i)) + L1*w_1(i)^3*cos(theta_1(i)) + 3*L2*.

    jerk = solve(jacob*[jerk2; jerk3] == b);
    jerk_2(i) = double(jerk.jerk2);
    jerk_3(i) = double(jerk.jerk3);

    i = i + 1;
end

```

Figura 44: Codice 5 Analisi: Calcolo jerk angolari.

```

% Plot of Angular Positions
figure(1);
subplot(1,2,1);
plot(theta_1, theta_2);
title("Angolo θ_2 in funzione dell'angolo θ_1");
xlabel("θ_1 [rad]");
ylabel("θ_2 [rad]");
legend("θ_2");
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(theta_1, theta_3);
title("Angolo θ_3 in funzione dell'angolo θ_1");
xlabel("θ_1 [rad]");
ylabel("θ_3 [rad]");
legend("θ_3");
grid on;

```

Figura 45: Codice 6 Analisi: Grafico posizioni angolari.

```

% Plot of Angular Velocities
figure(2);
subplot(1,2,1);
plot(0:1:size-1, w_2);
title("Velocità Angolare w_2 in funzione della Velocità Angolare w_1 = 1 [rad/s]");
xlabel("w_1 [rad/s]");
ylabel("w_2 [rad/s]");
legend("w_2");
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(0:1:size-1, w_3);
title("Velocità Angolare w_3 in funzione della Velocità Angolare w_1 = 1 [rad/s]");
xlabel("w_1 [rad/s]");
ylabel("w_3 [rad/s]");
legend("w_3");
grid on;

```

Figura 46: Codice 7 Analisi: Grafico velocità angolari.

```
% Plot of Angular Accelerations
figure(3);
subplot(1,2,1);
plot(0:1:size-1, alpha_2);
title("Accelerazione Angolare  $\alpha_2$  in funzione dell'Accelerazione Angolare  $\alpha_1 = 1 \text{ [rad/s}^2]$ ");
xlabel("a_1 [rad/s^2]");
ylabel("a_2 [rad/s^2]");
legend("a_2");
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(0:1:size-1, alpha_3);
title("Accelerazione Angolare  $\alpha_3$  in funzione dell'Accelerazione Angolare  $\alpha_1 = 0 \text{ [rad/s}^2]$ ");
xlabel("a_1 [rad/s^2]");
ylabel("a_3 [rad/s^2]");
legend("a_3");
grid on;
```

Figura 47: Codice 8 Analisi: Grafico accelerazioni angolari.

```
% Plot of Angular Jerks
figure(4);
subplot(1,2,1);
plot(0:1:size-1, jerk_2);
title("Jerk Angolare  $J_2$  in funzione del Jerk Angolare  $J_1 = 0 \text{ [rad/s}^3]$ ");
xlabel("J_1 [rad/s^3]");
ylabel("J_2 [rad/s^3]");
legend("J_2");
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(0:1:size-1, jerk_3);
title("Jerk Angolare  $J_3$  in funzione del Jerk Angolare  $J_1 = 0 \text{ [rad/s}^3]$ ");
xlabel("J_1 [rad/s^3]");
ylabel("J_3 [rad/s^3]");
legend("J_3");
grid on;
```

Figura 48: Codice 9 Analisi: Grafico jerk angolari.

7.1.4 Sintesi

```

%% Quadrilatero Articolato Generatore di Funzione
% sintesi del terzo ordine con funzione di terzo grado

f = 40; % lunghezza telaio in cm
x_m = 380; % punto di precisione
size = 500; % dimensione array

delta_theta = 40; % escursione massima angolo input
delta_phi = 20; % escursione massima angolo output
theta = linspace(0, delta_theta, size);
phi = linspace(0, delta_phi, size);

figure(1);
plot(theta, phi);
title("Angolo di output in funzione dell'angolo di input");
xlabel("θ [°]");
ylabel("φ [°]");
legend("φ = f(θ)")
grid on;
set(gca, "xlim", [0 40]);
set(gca, "ylim", [0 20]);

```

Figura 49: Codice 1 Sintesi: Funzione degli angoli.

```

x = [0, 300, 500];
y = [0, 20, 150];
funct = fit(x',y', 'exp1');

%p = [funct.p1, funct.p2, funct.p3, funct.p4];
p = [funct.a, funct.b];

% grafico funzione da generare tramite sintesi
figure(2);
plot(funct, x, y);
title("Funzione da generare tramite sintesi")
xlabel("L [mm]");
ylabel("δ [mm]");
legend("δ_i = f(L_i)", "δ = f(L)");
grid on;
set(gca, "xlim", [0 500]);
set(gca, "ylim", [0 150]);

x_data = linspace(0, 500, size);
y_data = zeros(size,1);
for i=1:size
    y_data(i) = p(1)*exp(p(2)*x_data(i));
end

```

Figura 50: Codice 2 Sintesi: Funzione del forcellone-molla.

```

% calcolo fattori di scala
K_theta = delta_theta / x_data(size);
K_phi = delta_phi / (y_data(size) - y_data(1));

% calcolo R, R', R'' per sintesi del terzo ordineS
R = K_phi / K_theta * (p(1)*p(2)*exp(p(2)*x_data(x_m)));
R_1 = K_phi / (K_theta)^2 * (p(1)*p(2)*p(2)*exp(p(2)*x_data(x_m)));
R_2 = K_phi / (K_theta)^3 * (p(1)*p(2)*p(2)*p(2)*exp(p(2)*x_data(x_m)));

% lunghezza segmento e
e = -R*f/(R-1);

% diametro della circonferenza di Carter-Hall
d_c = 3*f*(R^2 * (1-R)^2 + R_1^2)/((1-R)*(R*(1-R)^3 + 2*R^2*(1-R)^2 + 3*R_1^2 + R_2*(1-R)));

% angoli per la procedura di sintesi del terzo ordine usando la
% circonferenza di Carter-Hall
psi = atan2(R*(1-R), R_1);
lambda = 10*pi/180;

% coordinate del centro di istantanea rotazione del moto relativo
P24x = d_c*(cos(lambda+psi))^2;
P24y = d_c/2*(sin(2*(lambda+psi)));

```

Figura 51: Codice 3 Sintesi: Metodo di sintesi.

```

figure(3);
plot(theta, phi, SpostamentoAngolareForcellone1, SpostamentoAngolareCedente1,
title("Angolo di output in funzione dell'angolo di input"));
xlabel("θ [°]");
ylabel("φ [°]");
legend("φ = f(θ)", "λ = 5", "λ = 7.5", "λ = 10")
grid on;
set(gca, "xlim", [0 40]);
set(gca, "ylim", [0 20]);

```

Figura 52: Codice 4 Sintesi: Grafico funzione degli angoli ottenuta.

```

figure(4);
plot(x_data, y_data, SpostamentoForcellone1, CompressioneMolla1,
title("Funzione generata tramite sintesi"));
xlabel("L [mm]");
ylabel("δ [mm]");
legend("δ = f(L)", "λ = 5", "λ = 7.5", "λ = 10");
grid on;
set(gca, "xlim", [0 500]);
set(gca, "ylim", [0 200]);

```

Figura 53: Codice 5 Sintesi: Grafico funzione del forcellone-molla ottenuta.

```

VM1 = zeros(length(SpostamentoForcellone1),1);
VM2 = zeros(length(SpostamentoForcellone2),1);
VM3 = zeros(length(SpostamentoForcellone3),1);
for i=1:length(SpostamentoForcellone1)
    VM1(i) = CompressioneMolla1(i)/SpostamentoForcellone1(i);
    VM2(i) = CompressioneMolla2(i)/SpostamentoForcellone2(i);
    VM3(i) = CompressioneMolla3(i)/SpostamentoForcellone3(i);
end

figure(5);
plot(SpostamentoAngolareForcellone1, VM1, SpostamentoAngolareForcellone2, VM2, SpostamentoAngolareForcellone3, VM3);
title("Vantaggio meccanico variabile");
xlabel("θ [°]");
ylabel("VM [ ]");
legend("λ = 5", "λ = 7.5", "λ = 10");
grid on;

```

Figura 54: Codice 6 Sintesi: Grafico vantaggio meccanico.

```

figure(6);
plot(SpostamentoAngolareForcellone1, AngoloTrasmissione1,
title("Angolo di trasmissione variabile");
xlabel("θ [°]");
ylabel("μ - 90 [°]");
legend("λ = 5", "λ = 7.5", "λ = 10");
grid on;

```

Figura 55: Codice 7 Sintesi: Grafico angoli di trasmissione.

7.2 Solidworks

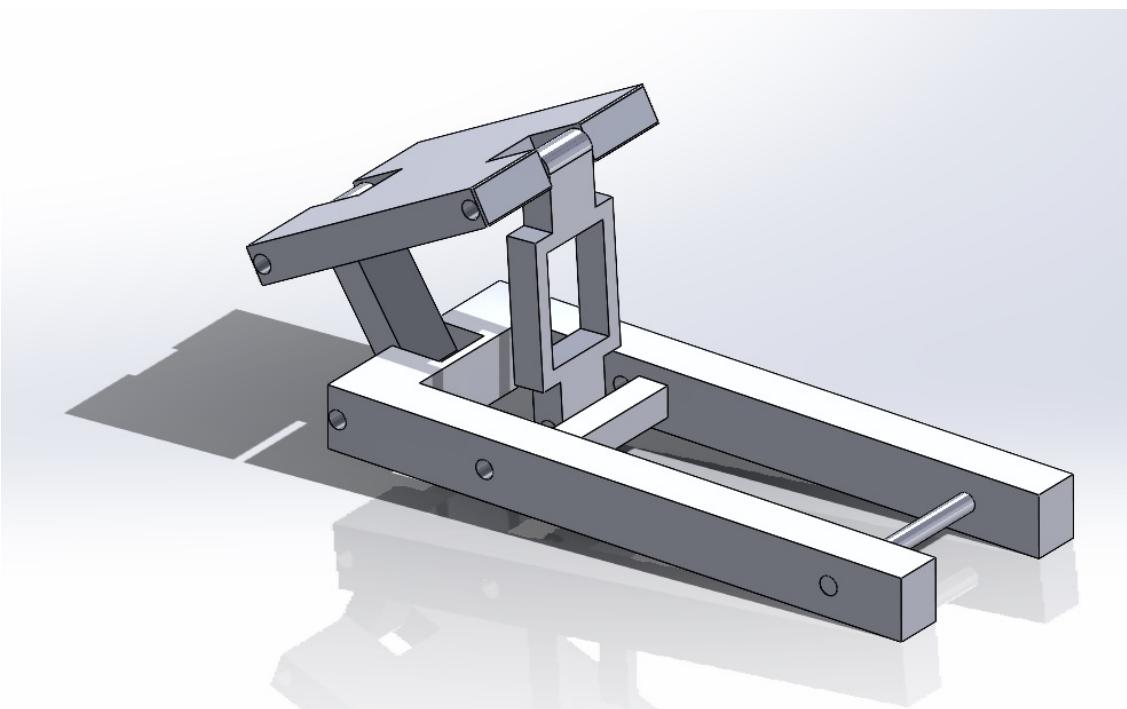


Figura 56: Modello 3D utilizzato per le simulazioni.