

Sintesi dei quadrilateri articolati generatori di funzione

Progettazione cinematica di sospensioni

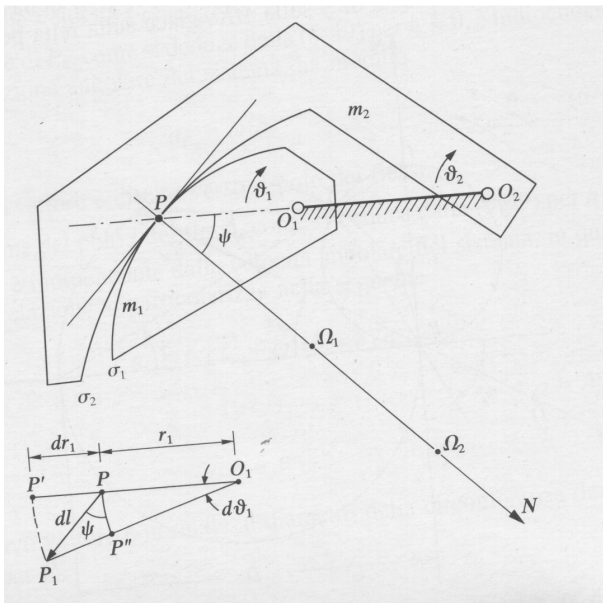
Prof. Ettore Pennestrì
Università di Roma Tor Vergata

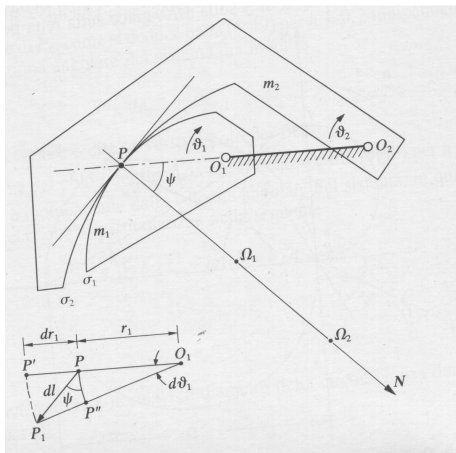
April 8, 2023

Riferimento bibliografico

- ▶ E. Pennestrì, Engineering Kinematics: Curvature Theory of Plane Motion, p. 21-24, 87-114, 191-200, 206-210.

Curvatura delle polari

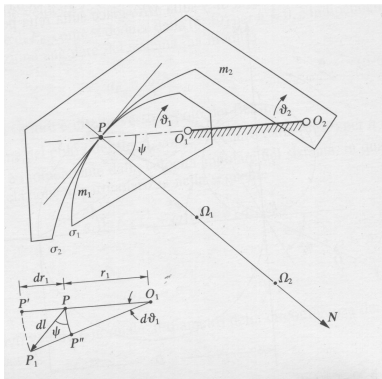




- $r_1 = PO_1$, $r_2 = PO_2$,
 $f = O_1O_2 = r_2 - r_1$;
- Ω_1 , Ω_2 : centri di curvatura delle polari;
- $\rho_1 = \Omega_1P$, $\rho_2 = \Omega_2P$: raggi di curvatura delle polari;
- dl : arco infinitesimo PP_1 delle polari.

Nomenclatura

- θ_2, θ_1 : angoli di rotazione dei profili misurati in senso orario;



I coefficienti

$$R = \frac{d\theta_2}{d\theta_1},$$

$$R' = \frac{d^2\theta_2}{d\theta_1^2},$$

$$R'' = \frac{d^3\theta_2}{d\theta_1^3},$$

rappresentano i coefficienti
 differenziali dello sviluppo in serie
 di Taylor della funzione

$$\theta_2 = F(\theta_1)$$

$$r_1 = f \frac{R}{1 - R}$$

$$r_2 = \frac{f}{1 - R}$$

$$\frac{dr_1}{d\theta_1} = f \frac{R'}{(1 - R)^2}$$

$$\frac{dr_2}{d\theta_2} = f \frac{R'}{R(1 - R)^2}$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\theta_1^2} = f \frac{R''(1 - R) + 2R'^2}{(1 - R)^3}$$

$$\frac{d^2 r_2}{d\theta_2^2} = f \frac{R''R(1 - R) + R'^2(1 - R) + 2RR'^2}{R^3(1 - R)^3}$$

La formula che fornisce la curvatura della traiettoria di un punto
(Punto P tracciante le polari)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h^2 + 2 \left(\frac{dh}{d\theta} \right)^2 - h \frac{d^2h}{d\theta^2}}{\left[h^2 + \left(\frac{dh}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Raggi di curvatura delle polari

Se poniamo $h \equiv r_1$ e $\theta = \theta_1$ la precedente relazione diventa

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{(1-R)^3}{f} \frac{R^2(1-R) + 2R'^2 - RR''}{\left[R^2(1-R)^2 + R'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Raggi di curvatura delle polari

Se poniamo $h \equiv r_1$ e $\theta = \theta_1$ la precedente relazione diventa

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{(1-R)^3}{f} \frac{R^2(1-R) + 2R'^2 - RR''}{\left[R^2(1-R)^2 + R'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Analogamente, per $h \equiv r_2$ e $\theta = \theta_2$ si ha

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{(1-R)^3}{f} \frac{R^3(1-R) + R'^2 - RR''}{\left[R^2(1-R)^2 + R'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Diametro della circonferenza dei flessi

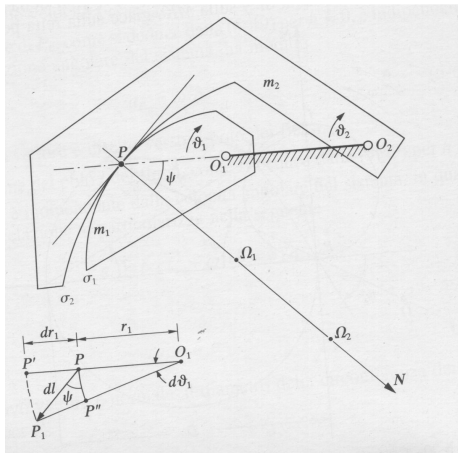
$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$$

Diametro della circonferenza dei flessi

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$$

$$\therefore \delta = f \frac{\sqrt{R^2 (1 - R)^2 + R'^2}}{(1 - R)^3} \quad (4)$$

Calcolo angolo ψ



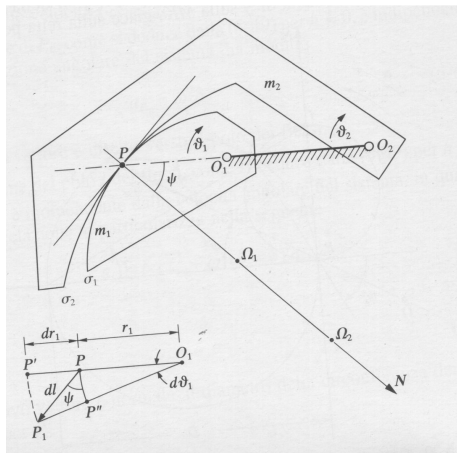
Dalla geometria della figura
segue:

$$\sin \psi = \frac{dr_1}{dl} = \frac{dr_2}{dl}$$

$$\cos \psi = r_1 \frac{d\theta_1}{dl} = r_2 \frac{d\theta_2}{dl}$$

$$\tan \psi = \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\theta_1}$$

Calcolo angolo ψ



Dalla geometria della figura
segue:

$$\sin \psi = \frac{dr_1}{dl} = \frac{dr_2}{dl}$$

$$\cos \psi = r_1 \frac{d\theta_1}{dl} = r_2 \frac{d\theta_2}{dl}$$

$$\tan \psi = \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\theta_1}$$

$$\tan \psi = \frac{R'}{R(1-R)} \quad (5)$$

Procedimento di sintesi cinematica di un quadrilatero generatore di funzione. Precisione del primo ordine

Si vuole eseguire la sintesi di un quadrilatero generatore della funzione in maniera che sia $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = R$, dove R è una quantità numerica prescritta.

Ad esempio, se imponiamo sia $R = 0.45340$, $f = 1$ potremo solo calcolare la distanza dei centri delle cerniere fisse dal centro P di istantanea rotazione:

$$r_1 = f \frac{R}{1 - R} = 0.829 \quad (6)$$

$$r_2 = \frac{f}{1 - R} = 1.829 \quad (7)$$

con f distanza tra i centri delle cerniere fisse.

Le cerniere mobili potranno essere scelte in qualsiasi punto della retta passante per P .

Procedimento di sintesi cinematica di un quadrilatero generatore di funzione. Precisione del secondo ordine

Si vuole eseguire la sintesi di un quadrilatero generatore della funzione in maniera che sia $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = R$, e $\frac{d^2\theta_2}{d\theta_1^2} = R'$ con R ed R' quantità prescritte.

La definizione delle cerniere fisse e le relative distanze dal c.i.r. procede come nel caso precedente. Con i dati in nostro possesso potremo calcolare l'angolo ψ ed il diametro δ della circonferenza dei flessi del moto del membro 1 rispetto al membro 2.

In particolare, avremo

$$\psi = \operatorname{atan}\left(\frac{R'}{R(1-R)}\right) = 54.62^\circ \quad (8)$$

$$\delta = f \frac{\sqrt{R^2(1-R)^2 + R'^2}}{(1-R)^3} = 2.622 \quad (9)$$

Procedimento di sintesi cinematica di un quadrilatero generatore di funzione. Precisione del secondo ordine (cont.)

In definitiva la procedura si sviluppa nelle seguenti fasi:

- ▶ Si calcolino $r_1 = PA_0$, $r_2 = PB_0$, ψ e δ .
- ▶ Restano così definite le posizioni A_0 ed B_0 delle cerniere fisse.
- ▶ Si tracci la normale N alle polari, quest'ultima dovrà avere origine in P ed essere inclinata dell'angolo ψ rispetto al segmento A_0B_0 .
- ▶ Si tracci la circonferenza dei flessi \mathcal{F} che dovrà avere il centro sulla suddetta normale.
- ▶ Si individuino i centri A e B delle cerniere mobili su un'arbitraria semiretta q in modo che risulti soddisfatta l'uguaglianza $PA^2 = BA \cdot A'A$, essendo A' l'intersezione della \mathcal{F} con q . Quest'ultima relazione si giustifica osservando che, nel moto relativo del membro 1 (A_0A) rispetto al 2, B è il centro di curvatura della traiettoria di A .

I fattori di scala

Sia

$$y = y(x)$$

la funzione da generare, con la condizione che risulti

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

$$y_1 \leq y \leq y_2$$

La relazione tra gli angoli del quadrilatero sarà

$$\phi = \phi(\theta)$$

per cui

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$$

Sia x_m il punto di precisione, ovvero quel punto nel cui intorno si sviluppa la serie di Taylor

$$y = y_m + y'(x_m)(x - x_m) + \frac{y''(x_m)}{2!}(x - x_m)^2 + \dots$$

Analogamente, sia θ_m la posizione angolare dell'asta movente, così da avere

$$\phi = \phi(\theta_m) + \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} (\theta - \theta_m) + \left. \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} (\theta - \theta_m)^2 + \dots$$

Se poniamo

$$K_\theta = \frac{\theta - \theta_m}{x - x_m}, \quad K_\phi = \frac{\phi - \phi_m}{y - y_m}$$

Risulterà

$$R = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} = \frac{K_\phi}{K_\theta} y'(x_m)$$

$$R' = \left. \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} = \frac{K_\phi}{K_\theta^2} y''(x_m)$$

$$R'' = \left. \frac{d^3\phi}{d\theta^3} \right|_{\theta=\theta_m} = \frac{K_\phi}{K_\theta^3} y'''(x_m)$$

Il brevetto US 4,440,413 si riferisce ad una sospensione posteriore per motocicletta.

In questa fase della progettazione vengono trascurati gli effetti dinamici e gli attriti.

L'adozione del meccanismo a quadrilatero consente di ottenere un *vantaggio meccanico* variabile con la configurazione che lo stesso meccanismo assume.

Per vantaggio meccanico si può intendere il rapporto tra la forza F_1 esercitata dal mozzo della ruota e quella F , applicata dall'elemento elastico sulle due aste del telaio in grado di equilibrare la prima, ovvero

$$VM = \frac{F_1}{F} \quad (10)$$

FIG. 7

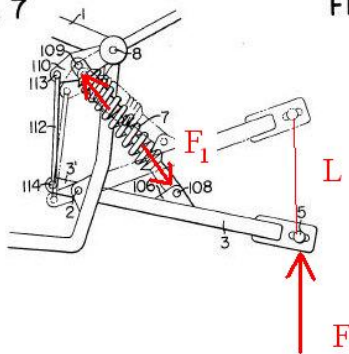
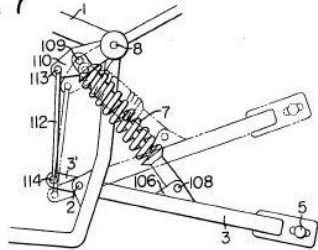


FIG. 7



In condizioni ideali e trascurando gli effetti dell'inerzia, il lavoro compiuto dalla forza F_1 deve essere uguale a quello compiuto dalla forza F . Pertanto, se si indica con δd la deformata infinitesima dell'elemento elastico e con δL la distanza infinitesima verticale percorsa dal centro del mozzo, dovrà essere¹

$$F_1 \cdot \delta L + F \cdot \delta d = 0$$

ovvero,

$$VM = \frac{\dot{d}}{\dot{L}} = \frac{dd}{dL} \quad (11)$$

¹La forza F_1 si ipotizza sempre verticale.

In generale si vuole ottenere una sospensione più *rigida* all'aumentare dell'escursione angolare $\Delta\theta$ del forcellone. Per riprodurre tale effetto si dovrà fare in modo che la funzione VM .vs. $\Delta\theta$ sia monotona crescente, ovvero che la forza F in grado di equilibrare la F_1 sia sempre più piccola all'aumentare di $\Delta\theta$. In tal modo la sospensione risulta *morbida* per piccole oscillazione e più *rigida* man mano che l'oscillazione del forcellone aumenta. Confrontando le (10) e (11), concluderemo che anche la funzione $d = d(L)$ dovrà essere monotona crescente, così come suggerito dalla Figura 5 del menzionato brevetto.

Il progettista della sospensione dovrà quindi partire da un'assegnata curva della funzione analitica $d = d(L)$. Dalle proprietà di tale curva dipenderanno sensibilmente le prestazioni dell'intera sospensione. Successivamente, sulla base della scelta dei punti di collegamento dell'elemento elastico alle aste del quadrilatero, si dovrà tradurre tale funzione in quella $\phi = \phi(\theta)$. Il calcolo delle dimensioni del quadrilatero potrà infine essere condotto sulla base del procedimento di sintesi esposto così da garantire un'accurata generazione della $\phi = \phi(\theta)$.