

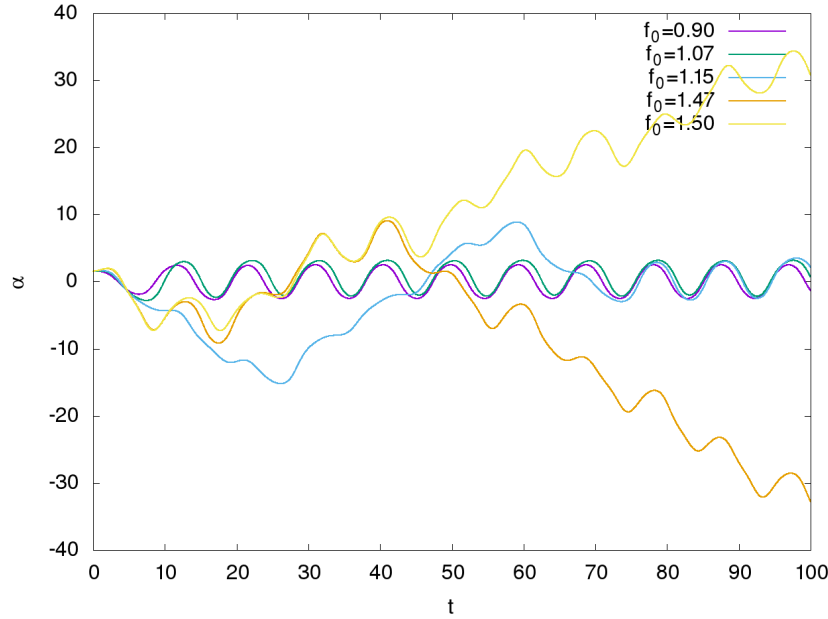
Consideriamo l'equazione del moto:

$$\ddot{\alpha} = -\gamma\dot{\alpha} - \omega^2 \sin(\alpha) + f_0 \cos(\bar{\omega}t)$$

con parametri

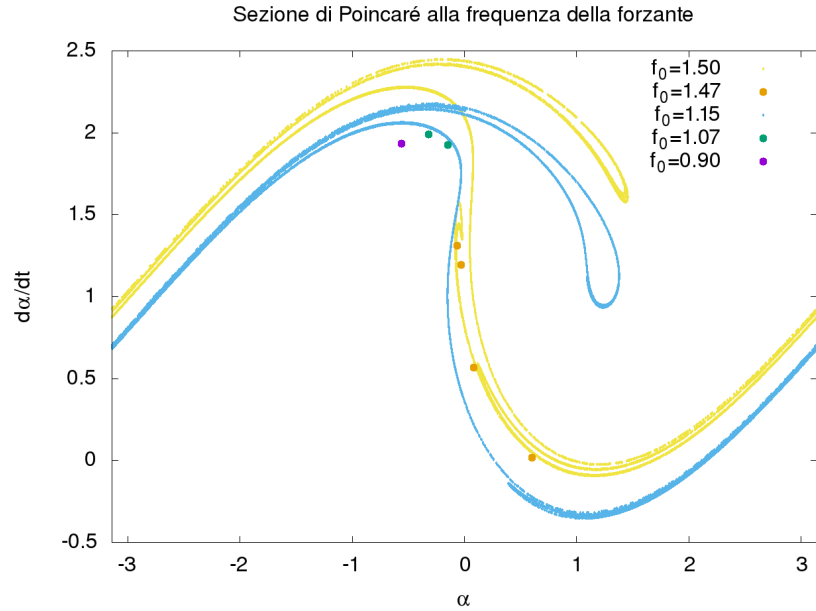
$$f_0 \in [0.90, 1.50], \quad \omega = 1, \quad \gamma = 0.5, \quad \bar{\omega} = 2/3.$$

Le seguenti traiettorie sono state ottenute integrando l'equazione con il metodo di Runge-Kutta del IV ordine, con  $\Delta t = 0.001$  e con dati iniziali  $\alpha(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ . L'angolo  $\alpha$  non è stato ricondotto all'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .



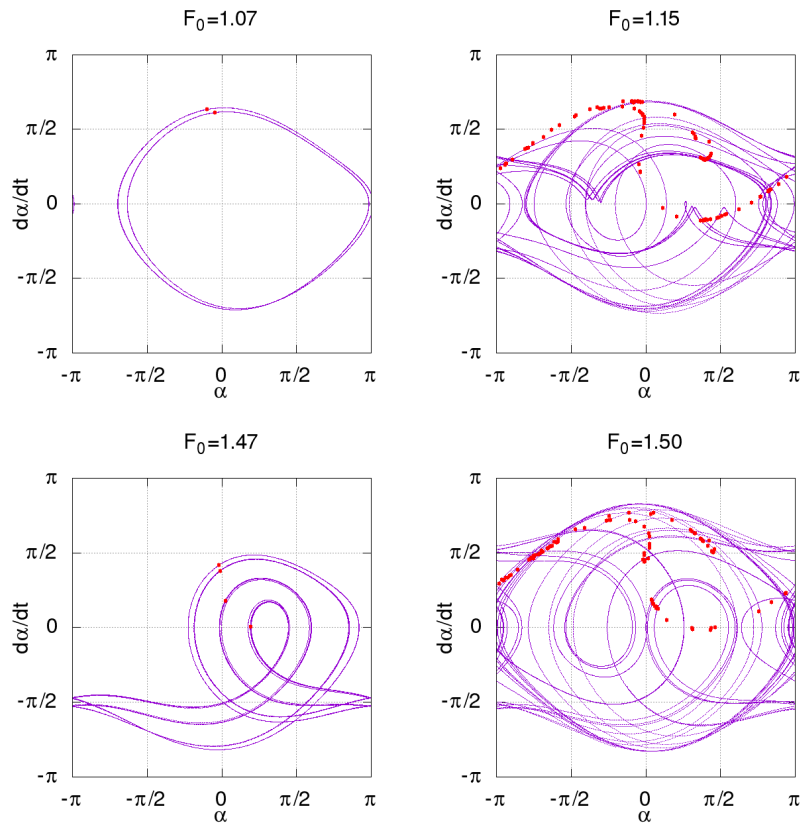
Per fare in modo di campionare con accuratezza la sezione di Poincaré (e quindi anche il diagramma di biforcazione e i bacini di attrazione), occorre ricordarsi che *per contare fino a 10 non si può contare di tre in tre*. Detto in altro modo, per ottenere un valore delle variabili dinamiche al tempo  $t = \tau$  a partire dal tempo  $t = 0$ , o per fare in modo di registrare lo stato  $(\alpha, \dot{\alpha})$  del sistema ad intervalli di  $\tau$  qualunque, bisogna scegliere un passo di integrazione che sia un *sottomultiplo intero* di  $\tau$ . Ciò garantisce che, a parte errori dovuti alla precisione finita del calcolo in virgola mobile, ogni  $n$  passi di integrazione copriamo esattamente un intervallo di tempo pari a  $\tau$ . *Questo va considerato con particolare attenzione quando si usano metodi di ordine elevato, il che di solito comporta l'adozione di passi di integrazione più grandi*, e quindi sono soggetti a discrepanze maggiori laddove il passo di integrazione non sia un sottomultiplo intero dell'intervallo considerato.

Il seguente grafico riporta le sezioni di Poincaré ottenute a intervalli di  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$  (periodo della forzante), per alcuni valori di  $f_0$  e con condizioni iniziali  $\alpha(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ . Per ottenere questo grafico bisogna ridurre gli angoli all'intervallo  $[-\pi, \pi]$ ; per ogni  $f_0$  la sezione consiste di circa 30000 punti. Runge-Kutta IV ordine con passo d'integrazione  $\Delta t = \bar{T}/1000$ .



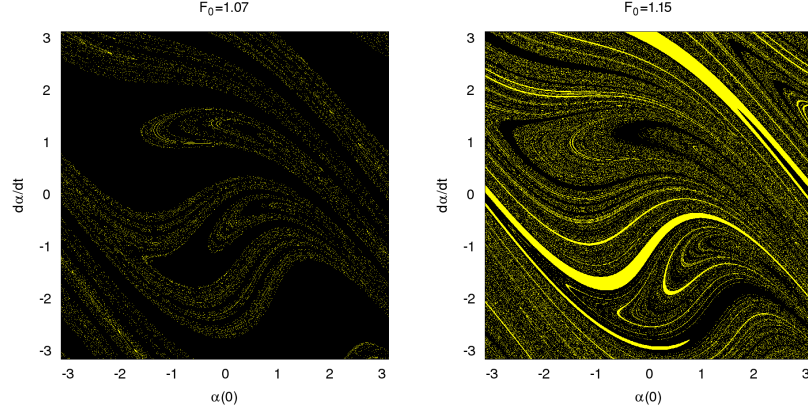
Si noti che per il moto con  $f_0 = 0.90$  la sezione insiste in un solo punto; infatti il moto asintotico è periodico di periodo  $\bar{T}$ . Per  $f_0 = 1.07$  si ottiene un raddoppio del periodo, e la sezione mostra due punti. Un ulteriore raddoppio c'è a  $f_0 = 1.47$ .

Si può apprezzare la relazione tra la sezione di Poincaré e le orbite nello spazio delle fasi nella figura seguente. Sono evidenti le orbite nello spazio delle fasi, e i casi di moto periodico  $f_0 = \{1.07, 1.47\}$ . Per ogni  $f_0$  un sottoinsieme della sezione di Poincaré viene riportata sotto forma di punti rossi.

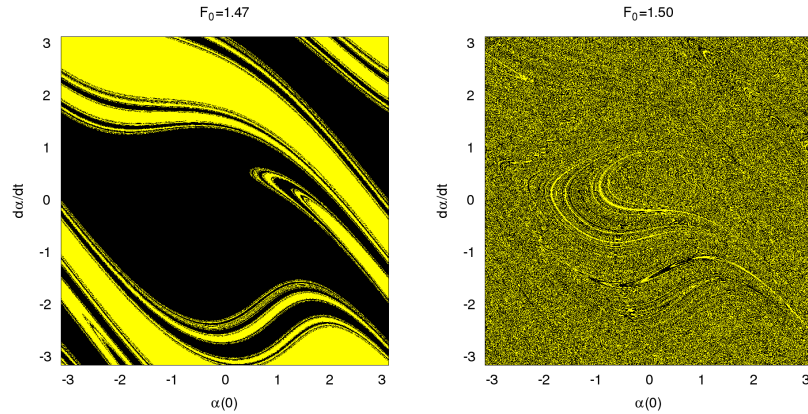


Al variare delle condizioni iniziali  $(\alpha(0), \dot{\alpha}(0)) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  possiamo controllare quale sia il segno di  $\dot{\alpha}(t^*)$  ad un dato istante  $t^*$ , e marcare diversamente nel piano  $(\alpha(0), \dot{\alpha}(0))$  le condizioni iniziali a seconda di tale segno.

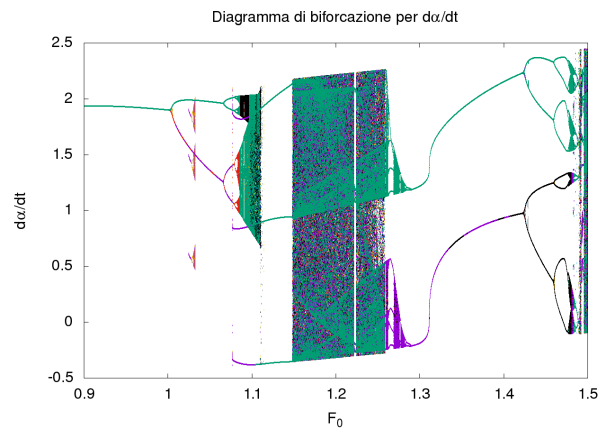
Mostriamo dunque i bacini di attrazione ottenuti per le velocità positive/negative per  $f_0 = 1.07, 1.15$ ,  $t^* = 100$ ,  $\Delta t = 0.01$  e variando le condizioni iniziali a intervalli di  $\Delta\alpha = \Delta\dot{\alpha} = \pi/500$  (griglia di  $1001 \times 1001$  punti).  $t^*$ .



Il risultato, per ogni  $f_0$ , dipende molto dalla scelta di  $t^*$ . Ecco cosa si ottiene con  $f_0 = 1.47, 1.50$  al tempo  $t^* = 93$ :



Infine, si riporta di seguito il diagramma di biforcazione (ottenuto come la sezione di Poincaré di  $\dot{\alpha}$  ad intervalli  $\bar{T}$  in funzione dell'ampiezza  $f_0$  della forzante), variando  $f_0 \in [0.90, 1.50]$  con un passo di  $\delta f = 10^{-4}$ , integrando l'equazione del moto con Runge-Kutta IV ordine, passo d'integrazione  $\Delta t = \bar{T}/100$  e le seguenti condizioni iniziali:  $\alpha(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\alpha}(0) = k\pi/10$  con  $k = 0, 1, \dots, 10$ . Ogni diversa condizione iniziale contribuisce con un set di punti al diagramma di biforcazione. Nel grafico, i dati corrispondenti a valori diversi della velocità iniziale sono rappresentati da punti di colore differente. Si noti la biforcazione vicino a  $f_0 = 1.07$ , che determina il raddoppiamento del periodo. Successive biforcazioni indicano ulteriori moltiplicazioni di periodo, fino a raggiungere il comportamento caotico. Risultano evidenti le regioni di  $f_0$  in cui il sistema è lontano dall'essere periodico.



Per completezza, di seguito anche il diagramma di biforcazione per l'angolo  $\alpha$ .

