# Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

## Тема 3.1. Невизначений інтеграл

### Первісна. Означення. Властивості

Відомо, як розв'язується така задача:
дана функція $F(x)$; знайти похідну $F'(x)=f(x)$.
Обернена задача:
Дана функція $f(x)$; знайти таку функцію $F(x)$, щоб $F'(x)=f(x)$.
Тобто, $(?)'=f(x)$.

**Приклад.** Нехай $f(x)=x^4$. Знайти $F(x)$.

$F(x)=\frac{x^5}{5}+C$, бо $\left(\frac{x^5}{5}+C\right)'=x^4$.

О. Функція $F(x)$ називається *первісною* («первообразной» рос.) для функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$, якщо

$F'(x)=f(x)$ для $\forall x\in(a,b)$

Мають місце властивості:

$1^0$. Якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$ на $(a,b)$, то $F(x)+C$ - також первісна для $f(x)$ на $(a,b)$.

$2^0$. Якщо $F_1(x), F_2(x)$ - дві первісні для функції $f(x)$ на $(a,b)$, то
$F_1(x)-F_2(x)=C$, тобто різниця двох первісних для функції $f(x)$ є константою.
Без доведення.

### Невизначений інтеграл. Означення. Властивості

О. *Невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$ називається сукупність первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ на цьому проміжку, де С – довільна стала, а функція $F(x)$ така, що $F'(x)=f(x)$.

Позначення невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$.

Отже, за означенням

$\int f(x)dx=F(x)+C$ (1), де $F'(x)=f(x)$. (2)

Тоді $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$, бо $\left(\frac{x^5}{5}\right)'=x^4$;

$\int \cos dx=\sin x+C$, бо $(\sin x)'=\cos x$;

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$, бо $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Мають місце *властивості*:

$1^0$. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Д. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$

$2^0$. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Д. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int fF(x)dx\right)' \cdot dx = f(x)\cdot dx$

$3^0$. $\int f'(x)dx = f(x)+C$

$4^0$. $\int d\left(f(x)\right) = \int f'(x)dx = f(x)+C$

$5^0$. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a$ □ число.

$6^0$. $\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

$7^0$. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C,$ (*)

де $F(ax)$ - первісна для $f(ax)$, $a$ □ деяке число.

Д. Візьмемо похідну від правої частини (*) і доведемо, що вона дорівнює підінтегральній функції $f(ax)$.

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)+C\right)'_x = \underbrace{\frac{1}{a}\left(F(ax)\right)'_{ax}\cdot(ax)'_x}_{\substack{\text{як похідна складної функції} \\ f(u(x))'_x = f'_u \cdot u'_x}} = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)'_{ax}\cdot a =$$

$=\left(F(ax)\right)'_x = f(ax)$, бо за умовою $F(ax)$ первісна для $f(ax)$.

Аналогічно:

$8^0$. $\int f(x+b)dx = F(x+b)+C,$

де $F(x+b)$ первісна для $f(x+b)$, $b$- деяке число.

$9^0$. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$

де $F(ax+b)$ первісна для $f(ax+b)$, $a,b$- деякі числа.

**Основна таблиця інтегралів**

Степенева і показникова функції

$$\text{I}\begin{cases} 1. \quad \int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha \neq -1 \\ 1.a) \ \int 1\cdot dx = \int dx = x + C \qquad (\alpha = 0 \text{ в формулі 1.}) \\ 2. \quad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \\ 3. \quad \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \\ 4. \quad \int e^x dx = e^x + C \end{cases}$$

Тригонометричні функції

$$\text{II}\begin{cases} 5.\ \int \sin x dx = -\cos x + C \\ 6.\ \int \cos x dx = \sin x + C \\ 7.\ \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \\ 8.\ \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \end{cases}$$

Гіперболічні функції

$$\text{III}\begin{cases} 9.\ \int shxdx = chx + C \\ 10.\ \int chxdx = shx + C \\ 11.\ \int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C \\ 12.\ \int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C \end{cases}$$

Обернені тригонометричні функції

$$\text{IV}\begin{cases} 13.\ \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ 14.\ \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C \\ 15.\ \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,tgx + C \\ 16.\ \int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\text{arc}\,tg\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$$

Деякі часто вживані інтеграли

$$\text{V}\begin{cases} 17.\ \int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C \\ 18.\ \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \\ 19.\ \int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \end{cases}$$

Деякі інтеграли від тригонометричних функцій

$$\text{VI}\begin{cases} 20.\ \int tgxdx = -\ln|\cos x| + C \\ 21.\ \int ctgxdx = \ln|\sin x| + C \\ 22.\ \int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tgx\dfrac{x}{2}\right| + C \\ 23.\ \int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C \end{cases}$$

Правильність формул можна перевірити диференціюванням лівої частини, тобто використовуючи означення.

Бажано запам’ятати перші 19 формул.

Можна користуватись формулами 20-23, не витрачаючи часу на інтегрування.

## Методи знаходження невизначених інтегралів

### Метод заміни змінної

Т. Нехай

а) функція $f(x)$ неперервна на $(a,b)$

б) функція $x=\varphi(t)$ неперервна і диференційовна на $(c,d)$

в) функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\phi(x)$, яка є диференційовною.

Тоді має місце формула:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \qquad (1)$$

в якій після взяття інтеграла справа покласти $t=\phi(x)$.

Д. Візьмемо похідні по $x$ від лівої та правої частини формули (1)

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x)$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot t'_x=\left|t'_x=\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{\varphi'(t)}\right|=$$

$$=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=\begin{vmatrix}t=\phi(x)\\x=\varphi(t)\end{vmatrix}=f(x).$$

Праві частини однакові, отже і ліві рівні.

Це означає, що формула (1) вірна з точністю до довільної сталої.

Формула заміни змінної застосовується у вигляді:

$$\int f(x)dx=\begin{vmatrix}x=\varphi(t)\\dx=\phi'(t)dt\end{vmatrix}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Після взяття інтеграла покласти $t=\phi(x)$, тобто повернутись до старої змінної.

**Приклад**. Знайти інтеграл, використовуючи заміну змінної

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\begin{vmatrix}x=a\cdot t\\dx=adt\\t=\dfrac{x}{a}\end{vmatrix}=\int\frac{adt}{a^2+a^2t^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arctgt+C=$$

$$=\left|t=\frac{x}{a}\right|=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

### Метод підведення під знак диференціала

Метод є частинним випадком методу заміни змінної і базується на властивості інваріантності (незмінності) формули інтегрування відносно змінної інтегрування. На прикладах це виглядає так:

$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$; $\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$; $\int \ln^2 d(\ln x)=\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

Формула застосована одна й таж, а змінні різні.
Формула для методу підведення під знак диференціала:

$$\int f[\varphi(x)]d(\varphi(x))=F[\varphi(x)]+C, \qquad (3)$$

де $F[\varphi(x)]$ - первісна для функції $f[\varphi(x)]$.
Переваги методу: після взяття інтеграла не треба переходити до старої змінної.

**Приклади.**

1. $\int \sin^4 x\cos x dx=\left|d(\sin x)=\cos x dx\right|=\int \sin^4 x\, d(\sin x)=\frac{\sin^5 x}{5}+C$

2. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx=\left|d(\ln x)=\frac{dx}{x}\right|=\int \ln^3 x\, d(\ln x)=\frac{\ln^4 x}{4}+C$

3. $\int \frac{x}{x^2+1}dx=\left|\begin{array}{l} d(x^2+1)=2xdx \\ xdx=\dfrac{d(x^2+1)}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

4. $\int x(5x^2+7)^6dx=\left|\begin{array}{l} d(5x^2+7)=10xdx \\ xdx=\dfrac{d(5x^2+7)}{10}\end{array}\right|=\frac{1}{10}\int(5x^2+7)^6 d(5x^2+7)=$

$=\frac{1}{10}\cdot\frac{(5x^2+7)^7}{7}+C$.

## Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

Т. Нехай функція $u=u(x)$ та $v=v(x)$ диференційовні, тоді має місце формула:

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu. \quad (1)$$

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами.
Доведення. Відомо, що

$$d(u\cdot v)=vdu+udv.$$

Проінтегруємо ліву та праву частину:

$$\int d(u\cdot v)=\int vdu+\int udv$$

$$\int d(u\cdot v)\Rightarrow u\cdot v+C=\int vdu+\int udv$$

$$\int udv=uv+C-\int vdu$$

Константу $C$ опускаємо, тобто приймає $C=0$, бо довільна стала буде присутня після взяття інтеграла справа $\int vdu$.

Маємо: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$. (1)

Зауваження. Труднощі в застосуванні формули (1) полягають у тому, що як правило задається інтеграл для обчислення у вигляді $\int f(x) dx$, а не $\int u dv$.

Тому виникає дві задачі:

1. Звести $\int f(x) dx$ до вигляду $\int u dv$

2. Обчислити $\int u dv$ за формулою. (1)

Розв'язання задачі 1 полягає в тому, щоб визначитись, що прийняти за $u$, а що за $dv$. Як правило, за $u$ приймається множник, який спрощується від диференціювання.
Існують рекомендації щодо такого вибору.
Існують спеціальні класи інтегралів, для яких застосовують вказаний метод.
Наведемо деякі такі класи функцій з вказанням, що приймається за $u$ та $dv$.

1) $\int \underbrace{P_n(x)}_{u}\,\underbrace{\cos mx\,dx}_{dv}$, $\int \underbrace{P_n(x)}_{u}\,\underbrace{\sin mx\,dx}_{dv}$, $\int \underbrace{P_n(x)}_{u}\,\underbrace{e^{mx}\,dx}_{dv}$

Тут $P_n(x)$ - многочлен степеня $n$, $n, m$ - задані числа.

2) $\int \underbrace{P_n(x)\,dx}_{dv}\,\underbrace{arctg\,mx}_{u}$, $\int \underbrace{P_n(x)\,dx}_{dv}\,\underbrace{\arcsin mx}_{u}$, $\int \underbrace{P_n(x)\,dx}_{dv}\,\underbrace{\ln x}_{u}$

3) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$.

Тут немає значення, що приймати за $u$, двічі застосовується метод інтегрування частинами, в результаті чого приходимо до рівняння відносно шуканого інтеграла.
Метод інтегрування частинами може застосовуватись повторно, наприклад для інтегралів $\int x^2 e^x dx$, $\int x^3 \sin x dx$ та інших.

Розглянемо приклади, на яких проілюструємо схему застосування методу, що розглядається.

**Приклади.**

1. $$\int x e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \qquad du = dx \\ dv = e^{5x} dx; \; v = \int e^{5x} dx = \left| d(5x) = 5dx \right| = \\ = \frac{1}{5}\int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + \text{©} \end{array} \right| = \left| \int u dv = u \cdot v - \int v du \right| =$$

$= 0$ (завжди, бо шукаємо одну функцію $v$, а не сукупність)

$$= x \cdot \frac{1}{5} e^{5^x} - \frac{1}{5}\int e^{5^x} dx = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + C$$

2. $$I = \int arctgx \; dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx; & du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx; & v = \int dx = x \end{array} \right| = \left| \int u dv = u \cdot v - \int v du \right| =$$

$$= arctgx \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} d\left(1+x^2\right) = 2xdx \\ xdx = \dfrac{d\left(1+x^2\right)}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

$$I = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C .$$

## Деякі вибрані питання

## Комплексні числа

### Основні поняття

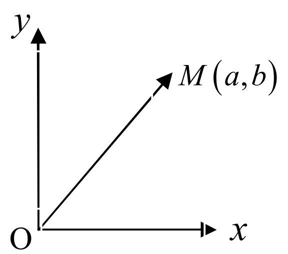
<u>О.1.</u> <u>*Комплексним числом*</u> називається вираз вигляду $z = a + bi$ , де $a$ та $b$ - дійсні числа, $i$ - уявна одиниця, яка задовольняє умову $i^2 = -1$. Число $a$ називається дійсною частиною комплексного числа. Пишуть $a = \operatorname{Re} z$ (перші дві літери Real - дійсний франц.). Число $b$ називають уявною частиною комплексного числа. Пишуть $b = \operatorname{Im} z$ (перші дві літери Imaginaire – уявний франц.).

Кажуть, що комплексне число

$$z = a + bi \quad (1)$$

записане в алгебраїчній формі.

На площині комплексне число зображується точкою або вектором



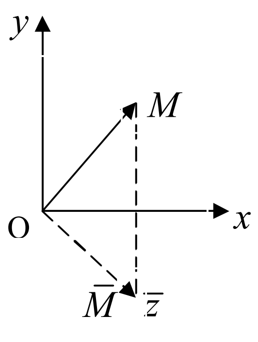

$z \Leftrightarrow M(a,b)$

Числу $z$ відповідає т. $M(a,b)$ або вектору $\overline{OM}$ і , $\qquad z \Leftrightarrow \overline{OM}$

навпаки, точці або вектору відповідає число $z$ .

<u>О.2.</u> Число $z = a - bi$ називається спряженим по відношенню до числа $z = a + bi$

<u>Геометрично:</u>




$M(a,b)$

$\overline{M}(a,-b)$

## Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $\quad z_2 = x_2 + iy_2$.

1. $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i\left(y_1 + y_2\right)$
2. $z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right)$
3. $z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) \cdot \left(x_2 + iy_2\right) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1y_2$

$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)$.

4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{z_2}{z_2} = \dfrac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{\left(x_2 + iy_2\right)\left(x_2 - iy_2\right)} = \dfrac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 - \underbrace{i^2}_{-1} y_2^2} =$

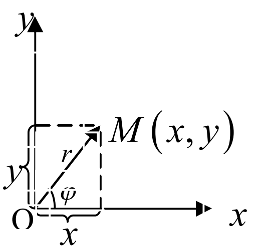
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i\left(x_2y_1 - x_1y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практиці формули не запам’ятовують, а запам’ятовують ідею їх отримання.

## Тригонометрична форма комплексного числа

Зобразимо комплексне число $z = x + iy$ (1) на площині $xOy$.




$r, \varphi$ - полярні координати точки $M$

$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$

$\varphi = \left(Ox, ^\wedge \overrightarrow{OM}\right)$

З рисунку:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (2)$$

Числа $r$ і $\varphi$ називаються модулем і аргументом комплексного числа.

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (3) $\qquad tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ (4)

Значення аргументу $\varphi$ визначається з формули (4) з урахуванням того, в якій чверті знаходиться точка М. Аргумент визначається з точністю до доданка $2k\pi, k \in z$. Якщо $-\pi < \varphi \le \pi$, то значення $\varphi$ називають головними значеннями аргументу і позначають $\varphi = \arg z$.

Підставимо (2) в (1) і отримаємо:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \quad (3)$$

Формула (3) задає комплексне число z в тригонометричній формі.

**<u>Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі</u>**

Нехай $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$

$z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$

$$= r_1 \cdot r_2 = \Big[\underbrace{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}_{\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)} + i\underbrace{\left(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2\right)}_{\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}\Big]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right]$$

(при множині модулі перемножуються, а аргументи додаються)

2. $z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z;\ n \in N$

$$z^n = \left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n$$

$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$ - формула Муавра (Муавр – англ. математик).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1\right)}{\underbrace{\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2}_{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 = 1}};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right].$$

При ділені $\dfrac{z_1}{z_2}$ модулі діляться, аргументи віднімаються.

4. $\sqrt[n]{z};\ \ n \in N$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$$

Де $\rho, \psi$ □ треба визначити.

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right).$$

Піднесемо до $n$ □го степеня ліву та праву частини

$$r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right).$$

Маємо рівність двох комплексних чисел, з чого випливає рівність їх модулів, аргументи відрізняються на $2k\pi$ .

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in Z \end{cases}.$$

Отже

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ \ k = \overline{0, n-1}\,.$$

Тут покладено $k=\overline{0,n-1}$, бо доведено, що тільки при цих значеннях $k$ отримуємо $n$ різних значень кореня. При інших значеннях $k$ значення коренів повторюється за рахунок присутності доданку $2k\pi$ .

## <u>Показникова форма комплексного числа</u>

$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$.

Має місце формула <u>Ейлера:</u>

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Без доведення.

Тоді

$z=r\cdot e^{i\varphi}$ □ показникова форма комплексного числа.

Тоді нехай $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ :

1. $z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
3. $z^n=r^ne^{in\varphi}$
4. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{z}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ , $k=\overline{0,n-1}$.

<u>Зауваження</u>

Комплексні числа виникають, наприклад, при розв’язанні алгебраїчних рівнянь.

**<u>Приклад 1</u>**. Знайти корені рівняння.

$x^2+1=0$

$x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=x \quad x_{1,2}=\pm i$

**<u>Приклад 2</u>**. Знайти корені рівняння:

$x^3-1=0$

$\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=0$

$x-1=0\Rightarrow x_1=1$

$x^2+x+1=0$

$D=b^2-4ac=1-4=-3;\quad \sqrt{D}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}=i\sqrt{3}$

$x_{2,3}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Зауважимо:</u>

1. Рівняння має стільки коренів, дійсних або комплексних, який степень цього рівняння;
2. Комплексні корені рівняння є комплексно спряженими.
   у прикладі 1: $x_1=i,\ x_2=-i$

у прикладі 2: $x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тобто маємо пари комплексноспряженів коренів.

3. Задані рівняння є рівняннями з <u>дійсними </u>коефіцієнтами, а серед коренів є комплексні:
4. Розкладання відповідних многочленів на множники, враховуючи відому формулу: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, де $x_1, x_2$ — корені відповідного рівняння, виглядає так:

$$x^2 + 1 = \left(x - i\right)\left(x - \left(-i\right)\right) = \left(x - i\right)\left(x + i\right)$$

$$x^3 - 1 = \left(x - i\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(x - i\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

## Розкладання многочлена на множники

Нехай задано многочлен $n$ —го степеня

$P_n\left(x\right) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n$.

Розглядаємо відповідне рівняння

$$P_n\left(x\right) = 0.$$

Воно має $n$ —коренів. Нехай ці корені $a_1, a_2, ..., a_n$.

Якщо всі корені дійсні, різні, то вони називаються простими або такими, що мають кратність $k = 1$.

Якщо серед цих коренів є однакові, то вони називаються кратними, їх кратність $k_i$.

Якщо серед цих коренів є комплексні, то вони в цю множину коренів входять парами, наприклад $a_1 = \alpha + i\beta, \quad a_2 = \alpha - i\beta$.

У розкладанні цього многочлена на множники будуть присутні множники $\left(x - a_1\right)$ та $\left(x - a_2\right)$.

Знайдемо вираз для добутку

$$\left(x - a_1\right)\left(x - a_2\right) = \left(x - \left(\alpha + i\beta\right)\right) \cdot \left(x - \left(\alpha - i\beta\right)\right) = \left(\left(x - \alpha\right) - i\beta\right) \cdot \left(\left(x - \alpha\right) + i\beta\right) =$$

$$= \left(x - \alpha\right)^2 - \left(i\beta\right)^2 = \left(x - \alpha\right)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 =$$

$$-i^2 = 1$$

$$= \begin{vmatrix} -2\alpha = p \\ \alpha^2 + \beta^2 = q \end{vmatrix} = x^2 + px + q.$$

Зазначимо тепер, що в розкладанні многочлена на множники, залежно від характеру коренів многочлена, присутні такі вирази:

а) $\left(x - a_1\right)$, якщо $a_1$ — дійсний корінь кратності $k = 1$(простий);

б) $\left(x - a_1\right)^{\alpha_1}$, якщо $a_1$ — дійсний корінь кратності $k = \alpha_1$;

в) $\left(x^2 + px + q\right)$, якщо $a_1, a_2$ — комплексно спряжені корені кратності $k = 1$ (кратності)

г) $\left(x^2 + px + q\right)^{\beta_1}$, якщо $a_1, a_2$ — комплесно спряжені корені кратності $k = \beta_1$.

Для визначеності покладемо в формулі (1) $b_0 = 1$

$$P_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n .$$

Розкладання многочлена на множники виглядає так:

$$P_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{\alpha_k} \times$$
$$\times \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\beta_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{\beta_s}, \quad (1)$$

де $a_i, p_j, q_j,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,s}$ □ дійсні числа;

$\alpha_j, \beta_j,\ \ j = \overline{1,s}$ □ натуральні числа, які вказують на кратність відповідних коренів многочлена;

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + a_k + 2\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + 2\beta_s = n$,

$n$ □ степінь многочлена.

Формула (1) означає, що многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на лінійні та квадратичні множники.

Лінійні множники відповідають дійсним кореням рівняння, квадратичні – комплексним.

## Раціональні дроби (дробово□раціональні функції)

<u>О.</u> *Раціональним дробом* називається функція вигляду $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x)$ та $P_n(x)$ многочлени степенів $m$ та $n$ відповідно.

Якщо $m < n$, то раціональний дріб називається *правильним*.

Якщо $m \ge n$, то раціональний дріб називається *неправильним*.

Якщо раціональний дріб неправильний, то шляхом ділення можна виділити цілу та дробову частини.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \underbrace{R_{m-n}(x)}_{\substack{\text{ціла частина} \\ \text{(многочлен)}}} + \underbrace{\frac{T_{m_1}(x)}{P_n(x)}}_{\substack{\text{правильний} \\ \text{раціональний дріб}}}, \quad m_1 < n .$$

Нехай $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ □ правильний раціональний дріб.

Серед цих дробів виділяються 4 типи дробів, які називаються <u>*найпростішими*</u>.

I тип: $\dfrac{A}{x-a}$, II тип: $\dfrac{A}{(x-a)^k},\ k > 1$,

III тип: $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, IV тип: $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}, \quad k > 1$.

$B, C, p, q$ □ дійсні числа;

многочлен $x^2 + px + q$ □ має комплексні корені, тобто $D = p^2 - 4q = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$.

## Розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів

<u>Т.</u> Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $m < n$ може бути представлений у вигляді суми найпростіших дробів.
Без доведення.
<u>Пояснення.</u>
Нехай $P_n(x)$ подано у вигляді (1).
Тоді

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_m(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\beta_s}} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha_{1-1}}} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \frac{B_2}{(x-a_k)^{\alpha_{k-1}}} + \ldots + \frac{B_{\alpha_k}}{(x-a_k)} +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_{1-1}}} + \ldots + \frac{C_{\beta_1}x+D_{\beta_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{E_1x+F_1}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\beta_s}} + \frac{E_2x+F_2}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\beta_{s-1}}} + \ldots + \frac{E_{\beta_s}x+F_{\beta_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)}. \qquad (3)$$

Тут $A_i,\ldots,B_i,C_i,D_i,\ldots,E_i,F_i$ — деякі числа (коефіцієнти, які треба визначити).
Знаходження вказаних коефіцієнтів засноване на зведенні (3) до <u>*рівності*</u> двох многочленів, яку отримаємо звівши вираз в (3) справа до спільного знаменника, та опустивши цей знаменник (спільним знаменником є $P_n(x)$)

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{T_{m_1}(x)}{P_n(x)} \Rightarrow Q_m(x) = T_{m_1}(x), \quad (4)$$

опустили
знаменник

тут $Q_m(x)$ має задані коефіцієнти,
$T_{m_1}(x)$ має вказані коефіцієнти, які треба визначити.
Для знаходження невідомих коефіцієнтів використовують методи:

1. *Метод задання частинних значень.*
У співвідношенні (4) надаємо $x$ деякі числові значення (як правило це дійсні корені многочлена $P_n(x)$ — знаменника дробу).
Розв'язавши рівняння (4) відносно невідомих коефіцієнтів, отримаємо їх значення.

2. *Метод невизначених коефіцієнтів.*
У рівності многочленів (4) прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях $x$. У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Розв'язуємо її відомими методами.

3. *Комбінація методів задання частинних значень та методу невизначених коефіцієнтів.*
Спочатку використовують метод 1, потім метод 2.
Найчастіше використовується саме комбінація методів 1 і 2.

**<u>Приклад 1</u>**. Розкласти заданий правильний раціональний дріб на суму найпростіших дробів: $\dfrac{Q_1(x)}{P_3(x)}=\dfrac{x+3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$.

<u>Розв'язання</u>.

$$\frac{x+3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Записано з урахуванням аналізу коренів знаменника:

$x-1=0 \quad x=1$ □ корені дійсні

$x^2+1=0 \quad D=0-4<0$ □ корені комплексні.

Далі зводимо вираз справа до спільного знаменника.
Опустивши знаменник, отримаємо:

$$\frac{x+3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$$

$$x+3=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x-1)$$

Далі використаємо комбінацію методів 1 і 2.

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 4=A\cdot 2\Rightarrow A=2 \\ x^2 & 0=A+B\Rightarrow B=-A\Rightarrow B=-2 \\ x^1 & 1=-B+C\Rightarrow C=1+B\Rightarrow C=-1 \end{array}$$

Тоді

$$\frac{x+3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2x-1}{x^2+1}.$$

**<u>Приклад 2</u>**. Розкласти задані раціональні дроби на суму найпростіших дробів, не знаходячи коефіцієнтів.

а)

$$\frac{x^2+5x+2}{(x-1)^3\cdot x^2\cdot\left(x^2+2\right)^2}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)}+\frac{B_1}{x^2}+\frac{B_2}{x}+\frac{C_1x+D_1}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{C_2x+D_2}{x^2+2}$$

б) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{x}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-2}$.

знаменник розклали на
множники; $x^2-5x+6=0$; $x_1=3,\ x_2=2$.

## Інтегрування раціональних дробів

1. *Інтегрування найпростіших дробів.*

а) І тип: $\dfrac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

б) ІІ тип: $\dfrac{A}{(x-a)k}$, $k>1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

в) ІІІ тип: $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q < 0 \Rightarrow \dfrac{p^2}{4} - q < 0$,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \begin{vmatrix} q-\dfrac{p^2}{4}>0 \\ q-\dfrac{p^2}{4}=a^2 \end{vmatrix} =$$

знаменник має комплексні корені

виділяємо повний квадрат

позначення

$$= \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx = \begin{vmatrix} x+\dfrac{p}{2}=t \\ x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt =$$

заміна

розкрили дужки і на суму двох інтегралів

$$= A\int \frac{t}{t^2+a^2}dt + \left(B - A\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(B-A\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(B-A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C = \begin{vmatrix} t = x+\dfrac{p}{2} \\ t^2+a^2 = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2 = \\ = x^2+px+q \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(B-A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C,\ a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

г) IV тип

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$$

$k>1,\ p^2-4q<0$ □ не наводимо через громіздкість виведення. Див. літературу.

*2. Інтегрування правильного раціонального дробу.*

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m<n\,.$$

Раціональний дріб розкладається на суму найпростіших дробів, кожний з яких інтегрується за наведеними в п 1. правилами.

*3. Інтегрування неправильного раціонального дробу.*

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m\geq n\,.$$

Підінтегральна функція $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \underbrace{R_{m-n}}_{\text{многочлен}} + \underbrace{\dfrac{T_{m_1}(x)}{P_n(x)}}_{\text{правильний раціональний дріб}},\ m_1<n\,.$

і тоді інтегрування зводиться до інтегрування многочлена та правильного раціонального дробу.

**<u>Приклад.</u>**

$$I=\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{x}{(x-3)(x-2)}dx=\int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}\right)dx$$

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

$$x=A(x-2)+B(x-3)$$

$$\begin{array}{l|l} x=3 & 3=A\cdot 1; \qquad A=3 \\ x=2 & 2=B\cdot(-1); \quad B=-2 \end{array}$$

$$I=\int\left(\frac{3}{x-3}+\frac{-2}{x-2}\right)dx=3\int\frac{dx}{x-3}-2\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3\int\frac{d(x-3)}{x-3}-2\int\frac{d(x-2)}{x-2}=3\ln|x-3|-2\ln|x-2|+C\,.$$

<u>Зауваження.</u>

Запис вигляду $R(x,y)$ означає, що задана функція, над аргументами якої $x$ та $y$ виконуються операції +, □, ×, /. Тобто, $R(x,y)$ означає раціональну функцію змінних $x$ та $y$.

$R\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right)$ □ раціональна функція трьох змінних $x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$. Наприклад,

$$R\left(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{x + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

## <u>Інтегрування деяких ірраціональних функцій</u>

Розглянемо інтеграли виглядів:

1. $\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$

де $\frac{r_i}{s_i}$ □ задані числа□дроби, $i = \overline{1,n}$.

Нехай $k$ □ <u>спільний</u> знаменник дробів $\frac{r_i}{s_i}$.

Тоді, якщо ввести заміну $x = t^k$, то

$x^{\frac{r_i}{s_i}} = \left(t^k\right)^{\frac{r_i}{s_i}} = t^{\frac{k \cdot r_i}{s_i}} = t^{k_i}$, $k_i \in Z$, бо $k$ ділиться на $s_i$ ($k$ □ спільний знаменник, $s_i$ □ один із знаменників).

Отже,

$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx = \left| \begin{array}{c} x = t^k \\ dx = kt^{k-1}dt \\ x^{\frac{r_i}{s_i}} = t^{k_i} \\ t = x^{\frac{1}{k}} \end{array} \right| = \int \underbrace{R\left(t^k, t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_n}\right) kt^{k-1}dt}_{\substack{\text{це раціональна функція} \\ \text{однієї змінної } t: r(t)}} = \int r(t)\,dt,$$

після взяття інтеграла треба повернутись до старої змінної, поклавши $t = x^{\frac{1}{k}}$.

2. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$,

де $a, b, c, d$ □ задані дійсні числа,

$\frac{r_i}{s_i}$ □ задані числа дроби.

Нехай $k$ □ спільний знаменник дробів $\frac{r_i}{s_i}$.

Тоді, якщо ввести заміну $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, то очевидно, що $x=r(t)$ □ раціональна функція від $t$.

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_i}{s_i}}=t^{k_i},\ k_i\in Z.$$

Отже $$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx=\left|\begin{array}{l}\frac{ax+b}{cx+d}=t^k\\ x=r(t)\\ dx=r'(t)dt\\ t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}\end{array}\right|=$$

$$=\int\underbrace{R\left(r(t),t^{k_1},t^{k_2},..,t^{k_n}\right)r'(t)dt}_{\substack{\text{раціональна функція}\\ \text{однієї змінної } t: r_1(t)}}=\int r_1(t)dt,$$

після взяття інтеграла треба повернутись до старої змінної, наклавши $t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$.

**<u>Приклад</u>.** Обчислити інтеграл:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\left|\begin{array}{l}x=t^6\\ dx=6t^5dt\\ \sqrt[3]{x}=t^2\\ \sqrt{x}=t^3\\ t=x^{\frac{1}{6}}\end{array}\right|=\int\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt=6\int\frac{t^8}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+arctgt\right)+C,\text{ де } t=x^{\frac{1}{6}}.$$

$$\frac{t^8}{t^2+1}=t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}.$$

Для отримання цього виразу виконуємо ділення «кутом».

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} t^8 \\ \underline{t^8+t^6} \end{array} & \begin{array}{l} t^2+1 \\ \hline t^6-t^4+t^2-1 \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} -t^6 \\ \underline{-t^6-t^4} \end{array} & \\
\qquad -\begin{array}{l} t^4 \\ \underline{t^4+t^2} \end{array} & \\
\qquad\quad -\begin{array}{l} -t^2 \\ \underline{-t^2-1} \end{array} & \\
\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

Зауважимо, що підстановка, яка зводить ірраціональну підінтегральну функцію до раціональної, називається раціоналізуючою.

Зауваження. Інтеграли, що «не беруться».
Як було видно з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить з класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування. Доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або «не беруться».
Доведено, наприклад, що «не беруться» такі інтеграли:

1. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ — інтегральний синус
2. $\int \frac{\cos x}{x} dx$ — інтегральний косинус
3. $\int \frac{dx}{\ln x}$ — інтегральний логарифм
4. $\int e^{-x^2} dx$ — інтеграл ймовірностей
5. $\int x^{\alpha} \sin x dx, \quad \int x^{\alpha} \cos x dx, \quad \int x^{\alpha} e^{x} dx, \quad (\alpha \neq 0,1,2,...)$

та ряд інших.
Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через *скінченне* число арифметичних операцій і супероперацій над основними елементарними функціями.
Інтеграли вказаного типу беруться за допомогою рядів. Розділ «Ряди» вивчатиметься у третьому семестрі.

## Інтегрування тригонометричних функцій

Будемо розглядати інтеграли, у яких підінтегральна функція є раціональною функцією змінних $\sin x$ та $\cos x$, тобто $R(\sin x, \cos x)$.

1. Універсальна підстановка.

Відомо, що функції $\sin x$ та $\cos x$ виражаються через $tg\frac{x}{2}$, а саме:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Тому універсальною підстановкою є підстановка $t = tg\frac{x}{2}$, за допомогою якої беруться інтеграли зазначеного нижче вигляду.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = arctgt \\ x = 2arctgt \\ dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = tg\frac{x}{2}$.

За допомогою вказаної підстановки беруться інтеграли вказаного вигляду, тому вона називається універсальною.
Але іноді ця підстановка призводить до громіздких викладок, тому застосовують інші підстановки, які враховують характер підінтегральної функції.

2. Нехай $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$, тобто підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$.
Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cdot \underbrace{\cos xdx}_{d(\sin x)} =$$

$$= \int R_1(\sin x, \cos^2 x)d(\sin x) = \int R_1(\sin x, 1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$

$$= |\sin x = t| = \int R_1(t, 1-t^2)dt = \int r(t)dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = \sin x$.

3. Нехай $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$

Тобто підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$.
Тоді, аналогічно попередньому:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \cdot \underbrace{\sin xdx}_{-d(\cos x)} =$$

$$=-\int R_1\left(\sin^2 x,\cos x\right)d\left(\cos x\right)=-\int R_1\left(1-\cos^2 x,\cos x\right)d\left(\cos x\right)=$$

$$=\left|\cos x=t\right|=-\int R_1\left(1-t^2,t\right)dt=\left|\begin{array}{l}-R_1\left(1-t^2,t\right)=\\=r\left(t\right)\end{array}\right|=\int r\left(t\right)dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t=\cos x$.

<u>Зауваження.</u> Далі будуть потрібні формули, що виражають $\cos^2 x$ та $\sin^2 x$ через $tgx$.

Відомо, що $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x\Rightarrow\cos^2 x=\dfrac{1}{1+tg^2x}$;

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2x=1+\frac{1}{tg^2x}=\frac{1+tg^2x}{tg^2x};\ \Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}.$$

4. Нехай $R\left(\sin x,\cos x\right)=R\left(-\sin x,-\cos x\right)$, тобто підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ присутні в парних степенях в підінтегральній функції.

$$\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx=\int R_1\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx=\left|\begin{array}{l}t=tg\dfrac{x}{2}\\ \dfrac{x}{2}=arctgt\\ dx=2\dfrac{1}{1+t^2}dt\\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt=\int r\left(t\right)dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t=tgx$.

5. Нехай підінтегральна функція є функцією від $tgx$, тобто $R\left(tgx\right)$

$$\int R\left(tgx\right)dx=\left|\begin{array}{l}tgx=t\\ x=arctgt\\ dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt\end{array}\right|==\int R\left(t\right)\frac{1}{1+t^2}dt=\int r\left(t\right)dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t=tgx$.

6. Нехай задано інтеграли вигляду

$$\int\sin\alpha x\cos\beta xdx,\quad\int\sin\alpha x\sin\beta xdx,\quad\int\cos\alpha x\cos\beta xdx.$$

У даному випадку підінтегральні функції перетворюються за допомогою відомих формул:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right).$$

Це зводить обчислення інтегралів до використання таблиці і інтегралів з методом підведення під знак диференціала.

**Приклади.**

1.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2}\\ \frac{x}{2}=arctgt\\ x=2arctgt\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\\ \sin x=\frac{2t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\left|t=tg\frac{x}{2}\right|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. $$\int\cos^3 xdx=\int\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\cdot\underbrace{\cos xdx}_{d(\sin x)}=\int\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)=$$

$$=\int d\left(\sin x\right)-\int\sin^2 x\ d\left(\sin x\right)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Тут підінтегральна функція була непарна відносно $\cos x$, відокремили $\cos x$ і далі підведення під знак диференціала і тригонометричні формули.

3. $$\int\cos^2 xdx=\left|\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\right|=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2xd\left(2x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

4. $$\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\int\left(\sin x\cdot\cos x\right)^2 cos^2 xdx=$$

$$=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd\left(\sin 2x\right)=\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4x\,d\left(4x\right)+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

## Тригонометричні підстановки

Тригонометричні підстановки застосовуються для інтегралів спеціального вигляду, а саме:

1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$

Підстановки підбираються таким чином, щоб добувався корінь квадратний з відповідних виразів.

$$\sqrt{a^2-x^2}=\left|x=a\cos t\right|=\sqrt{a^2\left(1-\cos^2 t\right)}=\sqrt{a^2\sin^2 t}=a\sin t$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\left|x=atgt\right|=\sqrt{a^2\left(1+tg^2t\right)}=\sqrt{a^2\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\left|x=\frac{a}{\cos t}\right|=\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}=\sqrt{a^2\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=atgt .$$

Тоді

1. $$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{l} x=a\cos t \\ dx=-a\sin tdt \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\sin t \end{array}\right|=-\int R\left(a\cos t,a\sin t\right)a\sin tdt=$$

$$=\int R_1\left(\sin t,\cos t\right)dt .$$

2. $$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{l} x=atgt \\ dx=a\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t} \end{array}\right|=\int R\left(atgt,\frac{a}{\cos t}\right)a\frac{1}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\int R_1\left(\sin t,\cos t\right)dt .$$

3. $$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{\cos t} \\ dx=-\dfrac{a}{\cos^2 t}\cdot\left(\sin t\right)dt \\ \sqrt{a^2+x^2}=atgt \end{array}\right|=\int R\left(\frac{a}{\cos t},atgt\right)\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\int R_1\left(\sin t,\cos t\right)dt .$$

**__Приклад__**. Обчислити заданий інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \left| \begin{array}{l} x=\cos t \\ dx=-\sin t dt \\ \sqrt{1-x^2}=\sin t \end{array} \right| = -\int \frac{\sin t}{\sin^3 t} dt = -\int \frac{1}{\sin^2 t} dt =$$

$$= ctgt + C = \frac{\cos t}{\sin t} + C = \frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} + C = \left|\cos t = x\right| = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

## Тема 3.2 Визначений інтеграл

### Основні поняття

1) Нехай задана функція $f\left(x\right)$ неперервна на відрізку $\left[a,b\right]$. Розіб'ємо цей відрізок на частинні («частичные» – рус.) відрізки точками $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$, довжини відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Кажуть, що виконано розбиття відрізку $\left[a,b\right]$.
Беремо точку $\xi_i$ (кси –гр.), $\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$, знаходимо $f\left(\xi_i\right)$; $f\left(\xi_i\right)\cdot\triangle x_i$ і формуємо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\triangle x_i .$$

Це *інтегральна сума* для функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$.
Позначимо $\lambda = \max \triangle x_i$.

О. Якщо існує границя інтегральної суми $\lim\limits_{\lambda\to 0} I_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\triangle x_i$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $\left[a,b\right]$ і вибору точок $\xi_i$, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$.

Позначення: $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

Отже, за означенням: $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\triangle x_i$ (1).

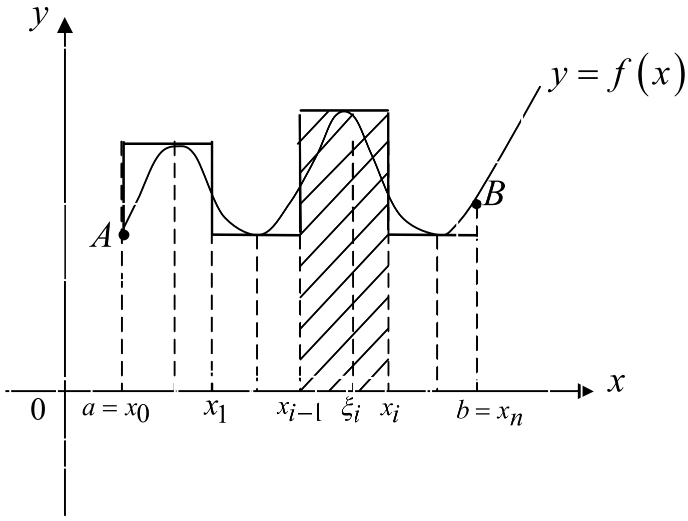
Якщо існує границя справа в (1), то кажуть, що функція $f\left(x\right)$ інтегровна на відрізку $\left[a,b\right]$.

2) Геометрично: фігура обмежена кривою $y = f\left(x\right)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю $Oy$ називається криволінійною трапецією.
Виконуємо розбиття відрізку $\left[a,b\right]$.
Тоді $f\left(\xi_i\right)\cdot\triangle x_i = S_i$ – площа $i$ –го прямокутника з висотою $f\left(\xi_i\right)$, основою $\triangle x_i$,
$\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\triangle x_i = S_{\text{сх.ф.}}$ – площа східчатої фігури, складеної з вказаних прямокутників,

$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \triangle x_i \approx S_{aABb}$ — площа криволінійної трапеції.

Переходячи до границі (1) $\lambda = \max \triangle_i \to 0$ отримаємо, що

$$S_{\text{кр.трап.}} = \int_a^b f\left(x\right) dx$$




3) Деякі задачі, що зводяться до обчислення визначеного інтеграла:

1. Обчислити шлях, пройдений точкою за проміжок часу від $\alpha$ до $\beta$, якщо швидкість руху $V\left(t\right)$.

Виконуємо розбиття відрізку $\left[\alpha, \beta\right]$: $\alpha = t_0, t_1, ..., t_n = \beta$.

Складаємо суму

$$\sum_{i=1}^{n} V\left(\xi_i\right) \triangle t_i \approx S,$$

де $S$ — шлях, пройдений точкою за проміжок часу від $\alpha$ до $\beta$.

Переходячи до границі $\left(\lambda = \max \triangle t_i \to 0\right)$, маємо

$$S = \int_\alpha^\beta V\left(t\right) dt.$$

2. Обчислити масу лінійного однорідного стрижня («стержня» — рус.), який розташовано на відрізку $\left[a, b\right]$, в кожній точці якого задана густина $\rho = \rho\left(x\right)$.

Виконуємо розбиття відрізку $\left[a, b\right]$:

$a = x_0, x_1, ..., x_n = b$.

Складаємо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\xi_1\right) \triangle x_i \approx m \text{ — маса стрижня.}$$

Переходячи до границі $\left(\lambda = \max \triangle x_i \to 0\right)$, отримаємо

$$m = \int_a^b \rho\left(x\right) dx.$$

4) Існують *класи інтегрованих функцій*, а саме:
Теорема1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.
Теорема2. Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ і має на ньому скінчену кількість точок розриву I􀀀го роду, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Приклад інтегровної функції: $f(x)=c$ на $[a,b]$, $c=const$.
Інтегральна сума:
$$\underline{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\triangle x_i} = \sum_{i=1}^{n} c\triangle x_i = c\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i = \underline{c(b-a)}.$$
Переходячи до границі, маємо: $\int_a^b cdx = c(b-a)$.

Приклад неінтегровної функції:
Функція Діріхле
$$f(x)=\begin{cases} 1, & x - \text{раціональне}, x\in[a,b] \\ 0, & x - \text{ірраціональне}, x\in[a,b]. \end{cases}$$
Інтегральна сума:
а) $x$ 􀀀 раціональне: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\triangle x_i = b-a$,
б) $x$ 􀀀 ірраціональне: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\triangle x_i = 0$.
Тут границя інтегральної суми не існує, бо вона залежить від вибору точок $\xi_i$. Функція неінтегровна.

*Властивості визначеного інтеграла*

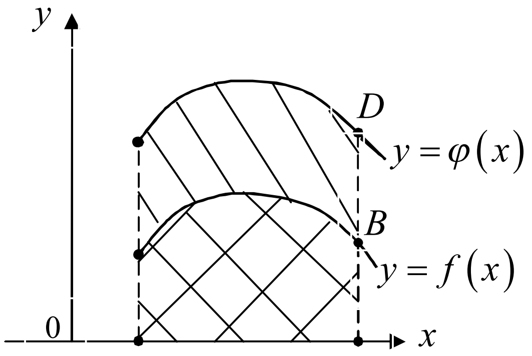
$\underline{1^0}$. $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\underline{2^0}$. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, бо зліва $\triangle x_i < 0$

$\underline{3^0}$. $\int_a^b f(x)dx \ge 0$, якщо $f(x)\ge 0$

$\underline{4^0}$. $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, якщо $f(x)\le\varphi(x)$ на $[a,b]$.

Геометрично:
для $f(x)\ge 0$, $\varphi(x)\ge 0$



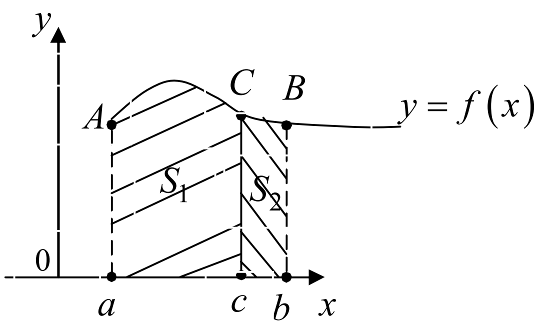

$S_{aABb} \le S_{aCDb}$

$5^0$. Властивість адитивності відносно проміжку інтегрування.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall a,b,c .$$

Геометрично:

для $a<c<b, \;\; f(x)\ge 0$.




$S_{aABb} = S_1 + S_2$

$6^0$. Властивість лінійності.

$$\int_a^b \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx, \quad c_1, c_2 = const .$$

Без доведення.

$7^0$. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \;\; a<b$.

Модуль інтеграла $\le$ інтегралу від модуля функції.

Без доведення.

$8^0$. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.

Якщо функція $f(x)$ на $[a,b]$ має найбільше та найменше значення $M$ та $m$ відповідно, то має місце співвідношення:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad (1)$$

Д. Згідно з умовою

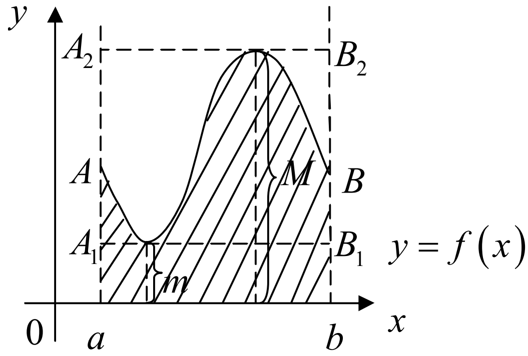
$$m \le f(x) \le M .$$

Проінтегруємо кожну частину нерівності на відрізку $[a,b]$.

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x) dx \le M(b-a).$$

<u>Геометрично:</u> для $f(x) \ge 0$




$S_{aA_1B_1b} \le S_{aABb} \le S_{aA_2B_2b}$

$S_{aA_1B_1b}$ – площа прямокутника з висотою $m$;

$S_{aABb}$ – площа криволінійної трапеції;

$S_{aA_2B_2b}$ – площа прямокутника з висотою $M$ .

<u>$9^0$</u>. <u>Теорема про середнє значення функції</u>.

Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то існує така точка $\xi \in [a,b]$, що має місце співвідношення:ї

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)\cdot(b-a). \quad (2)$$

<u>Д.</u> Враховуючи, що $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, вона приймає *всі значення* між її найменшим та найбільшим значенням, тобто

$$m \le f(x) \le M. \quad (3)$$

Згідно з властивістю $8^0$

$$m(b-a) = \int_a^b f(x) dx \le M(b-a). \quad (1)$$

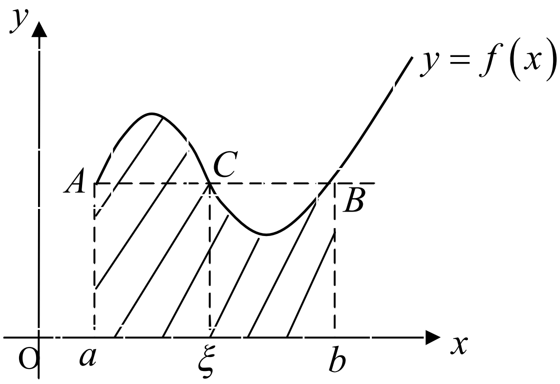
Ділимо всі частини нерівності на $(b-a)$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \le M. \quad (4)$$

Порівнюємо (3) і (4). Знайдеться така точка $\xi \in [a,b]$, що

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Геометрично: для $f(x) \ge 0$




$$S_{\text{прям.}aABb} = S_{\text{кр.тр}aABb}$$

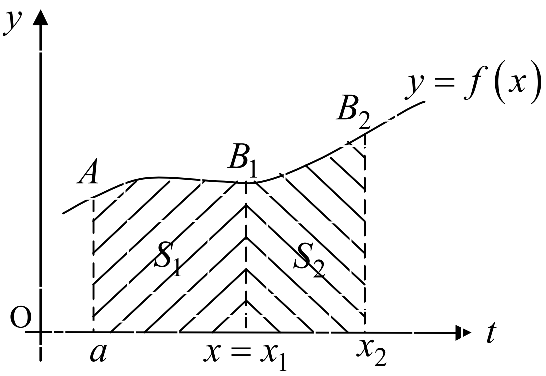
Площі криволінійної трапеції та прямокутника, з основою довжини $b-a$ і висотою $f\left(\xi\right)$, рівновеликі.

**<u>Інтеграл зі змінною верхнею межою</u>**

*Вигляд* інтеграла:

$$\int_a^x f\left(t\right)dt = \Phi\left(x\right). \quad (1)$$

Геометрично: $\int_a^x f\left(t\right)dt$ □ змінна площа криволінійної трапеції (для $f\left(x\right) \geq 0$).




$$\int_a^{x_1} f\left(t\right)dt = S_1,$$

$$\int_a^{x_2} f\left(t\right)dt = S_2.$$

<u>Т</u>. Нехай функція $f\left(x\right)$ неперервна і має місце співвідношення:

$$\Phi\left(x\right) = \int_a^x f\left(t\right)dt, \quad (1)$$

то $\Phi'\left(x\right) = \left(\int_a^x f\left(t\right)dt\right)'_x = f\left(x\right). \quad (2)$

<u>Д</u>. $\Phi'\left(x\right) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle\Phi}{\triangle x}$; (*)

$$\triangle\Phi = \Phi\left(x+\triangle x\right) - \Phi\left(x\right) = \int_a^{x+\triangle x} f\left(t\right)dt - \int_a^x f\left(t\right)dt =$$

$$=\int_a^x \cancel{f(t)dt}+\int_x^{\triangle x} f(t)dt-\int_a^x \cancel{f(t)dt}=f(\xi)(x+\triangle x-x)=f(\xi)\cdot\triangle x.$$

властивість $9^0$

Підставимо в (*)

$$\Phi'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\xi)\cancel{\triangle x}}{\cancel{\triangle x}}=\lim_{\triangle x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x).$$

Отже, $\Phi'(x)=f(x)$ (3), що й треба було довести.

Наслідок.

З (3) $\Phi'(x)=f(x)$ випливає, що $\Phi(x)$ є первісною для функції $f(x)$, причому

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ (4).

## Формула Ньютона–Лейбніца

Т. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \quad (5)$$

де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

Д. Нехай $F(x)$ і $\Phi(x)$ дві первісні для функції $f(x)$. Відомо, що вони відрізняються на довільну сталу:

$F(x)=\Phi(x)+C$.

Врахуємо (4), що $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Тоді $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$. (6)

Покладемо в (6) $x=a$ та $x=b$.

$$x=a;\ F(a)=\int_a^a f(t)dt+C=C\Rightarrow C=F(a)$$

$$x=b;\ F(b)=\int_a^b f(t)dt+C=\int_a^b f(t)dt+F(a).$$

Звідси $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$, що й треба було довести.

Зауваження: на практиці формула (5) записується у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \quad (6)$$

де $F(x)$ – первісна для $f(x)$, $F(x)\Big|_a^b$ – читається так: подвійна підстановка від $a$ до $b$.

## **Методи обчислення визначних інтегралів**

*Заміна змінної у визначному інтегралі*

Т. Нехай:

1) функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$;
2) функція $x=\varphi(t)$ неперервна і має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$;
3) $\forall t\in[\alpha,\beta]$ відповідні значення $x\in[a,b]$, причому $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$.

Тоді має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Д.

Нехай $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$. Випишемо невизначені інтеграли, що відповідають лівій та правій частинам:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(t)\right]+C.$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta=F\underbrace{\Bigg[\underbrace{\varphi(\beta)}_{b}-\underbrace{\varphi(\alpha)}_{a}\Bigg]}_{\text{за умовою}}=F(b)-F(a).$$

Праві частини рівні, отже рівні і ліві, тобто маємо формулу (1).
При обчисленні інтегралів, формула (1) записується у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{l} \quad x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ x=a\Rightarrow t=\alpha \\ x=b\Rightarrow t=\beta \end{array}\right|=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt.$$

*Інтегрування частинами у визначеному інтегралі*

Т. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на $[a,b]$, то

$$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \quad (2)$$

Д.

Відомо, що $d(u\cdot v)=vdu+udv$.

Інтегруємо ліву та праву частини на відрізку $[a,b]$

$$\int_a^b d(u\cdot v)=\int_a^b vdu+\int_a^b udv$$

$$\int_a^b udv=\int_a^b d(u\cdot v)-\int_a^b vdu$$

$$\int_a^b udv=(u\cdot v+c)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

що й треба було довести.
Докладніше:
Тут $(u\cdot v+c)\Big|_a^b=u\cdot v\Big|_{x=b}+c-u\cdot v\Big|_{x=a}-c=u\cdot v\Big|_a^b$.

## <u>**Інтеграли від функцій з симетричними межами інтегрування**</u>

<u>Т.</u> Має місце формула $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, \text{ функція } f(x) \text{ непарна},\\ 2\int_0^a f(x)dx, \text{ функція } f(x) \text{ парна.}\end{cases}$

<u>Д.</u>

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx \quad (*)$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\begin{vmatrix} x=-t\\ dx=-dt\\ x=-a,\ t=a\\ x=0,\ t=0\end{vmatrix}=\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx.$$

(поміняли формально літеру $t$ на літеру $x$).
Підставимо в формулу з (*)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx. \quad (**)$$

1) Нехай $f(x)$ непарна: $f(-x)=-f(x)$.

Підставимо в (**)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$$

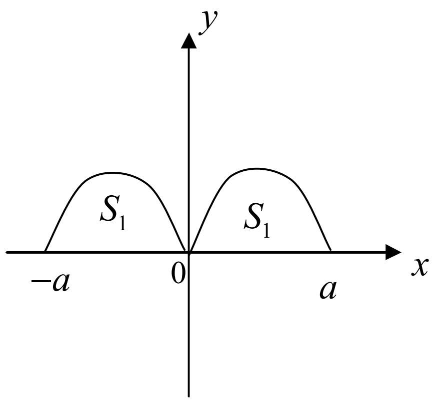
2) Нехай $f(x)$ парна: $f(-x)=f(x)$.

Підставимо в (**)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

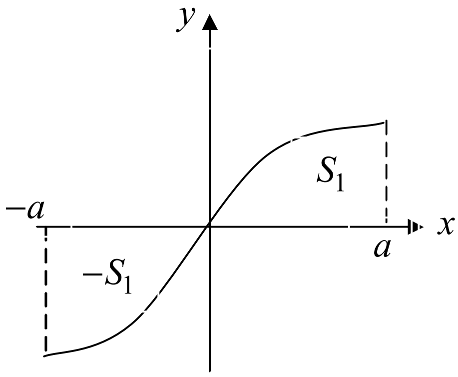
<u>Геометрично</u>:

$f(x)$ – парна; $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = S_1 + S_2 = 2S_1 = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.




$f(x)$ – непарна; $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = S_1 - S_1 = 0$

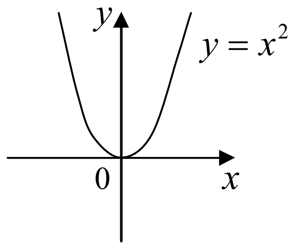
$S_1$ – площа відповідних областей.




Використовується для спрощення обчислень.

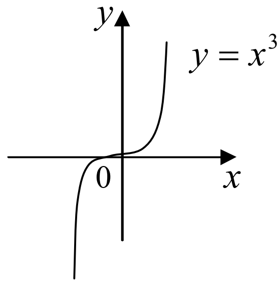
1. $\int\limits_{-5}^{5} x^2 dx = 2\int\limits_{0}^{5} x^2 dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5 = 2\cdot\frac{5^3}{3}$.

функція парна



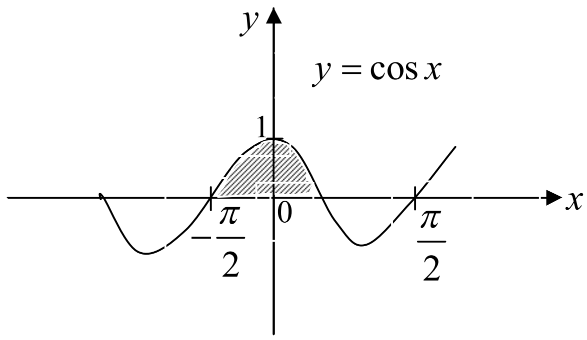

2. $\int\limits_{-7}^{7} x^3 dx = 0$

функція непарна



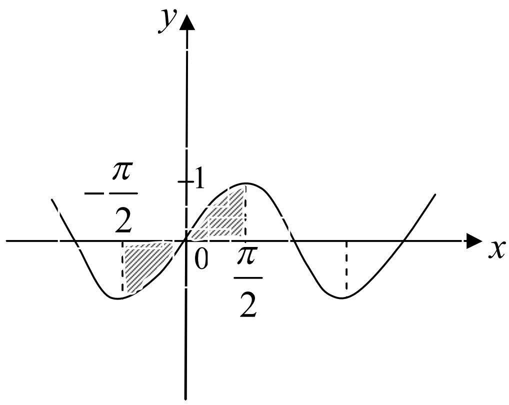
3. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

функція парна




4. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$

функція непарна




## Тема 3.3 Невласні інтеграли

### Невласні інтеграли I□го роду

*1) Основні поняття*

До невласних інтегралів I□го роду відносяться інтеграли, у яких одна чи обидві межі інтегрування є $+\infty$ або $-\infty$, а саме:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad ,\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

<u>О.1.</u> Невласний інтеграл вигляду

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx, \quad (1)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, A]$.

Якщо існує границя справа в (1), то кажуть, що інтеграл збігається; в противному разі – розбігається.

<u>О.2.</u> Невласний інтеграл вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^{b} f(x)dx, \quad (2)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[B, b]$.

Якщо існує границя справа в (2), то інтеграл збігається; в противному разі – розбігається.

<u>О.3.</u> Невласний інтеграл вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad (3)$$

де $c \in R$.

Вважається, що інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ збігається, коли <u>обидва</u> інтеграли справа в (3) збігаються; в противному разі – розбігається.

Зауважимо, що інтеграл типу (2) зводиться до типу (1) заміною змінної. Надалі детальніше будемо розглядати саме інтеграл типу (1).

2) *Зв'язок з первісною* (аналог формули Ньютона – Лейбніца).

Вважаємо, що $F(x)$ первісна для функції $f(x)$ на $[a, A]$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{a}^{A} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} F(x)\Big|_a^A = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

Отже, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$. (1')

Інтеграл зліва збігається, коли $\exists$ скінчена границя $F(+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty). \quad (2')$$

Інтеграл зліва збігається, коли $\exists$ скінчена границя $F(-\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = F(c) - F(-\infty) + F(+\infty) -$$

$$-F(c) = F(-\infty) + F(+\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \quad (3')$$

Інтеграл зліва збігається тоді і тільки тоді, коли існують скінченні обидві границі $F(+\infty)$ і $F(-\infty)$.

3) *Геометрична інтерпретація.*

$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = S$ – площа необмеженої області.

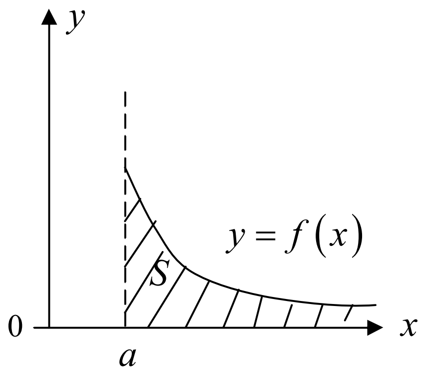



рис. 1

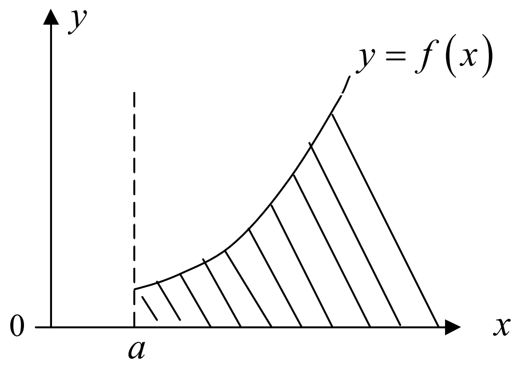
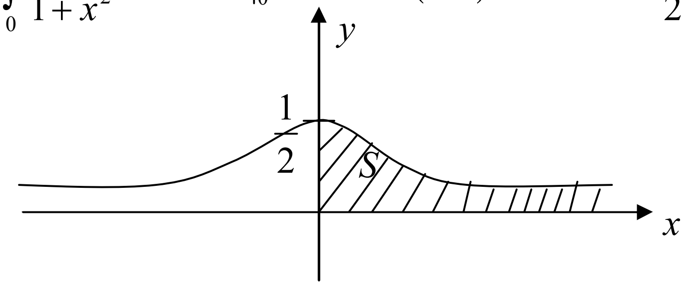



рис. 2

Згідно рис. 1 інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ збігається, на рис. 2 – розбігається.

**<u>Приклад</u>**. Дослідити на збіжність заданий інтеграл.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^{+\infty} = arctg\left(+\infty\right) - arctg0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$




$$S = \frac{\pi}{2}$$

4) *Дослідження на збіжність інтеграла спеціального вигляду.*

Розглядаємо $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p},\ p \in R$.

Нехай $p = 1$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln\left|x\right|\Big|_1^{+\infty} = \ln\left(+\infty\right) - \ln 1 = \infty - 0 = \infty \Rightarrow$$ інтеграл розбігається.

Нехай $p \neq 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int\limits_0^{+\infty} x^{-p}dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{-p+1}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right] = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \Rightarrow \text{інтеграл збігається} \\ \infty, & p < 1 \Rightarrow \text{інтеграл розбігається} \end{array}\right.$$

$0,\ p > 1$

$+\infty,\ p < 1$

<u>Висновок.</u> $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ □ $\left[\begin{array}{ll} \frac{1}{p-1}, & \text{збігається, } p > 1 \\ \infty, & \text{розбігається } p \leq 1 \end{array}\right.$

Вказаний інтеграл є *еталонним* при дослідженні інтегралів на збіжність при використані ознак збіжності, які називаються ознаками порівняння.

5) *Ознаки порівняння для дослідження на збіжність невласних інтегралів.*

<u>Т.1. (перша теорема порівняння).</u>

Нехай задано два інтеграли:

$\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ (1), $\int\limits_a^{+\infty} \varphi\left(x\right)dx$ (2)

і $0 \leq f\left(x\right) \leq \varphi\left(x\right)$ (3)

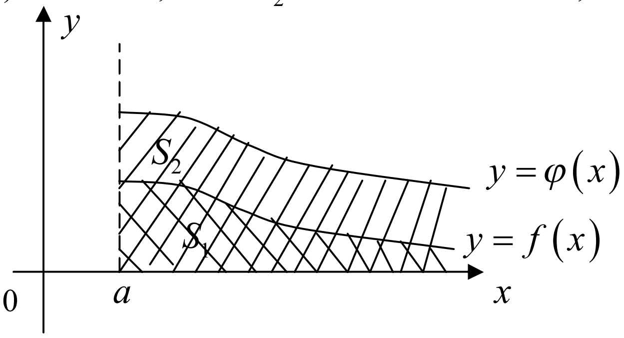
тоді:

1. Якщо інтеграл (2) збігається, то інтеграл і (1) збігається;
2. Якщо інтеграл (1) розбігається, то інтеграл і (2) розбігається.

<u>Пояснення.</u>

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = S_1$; $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx = S_2$; $S_1 \le S_2$ (за умовою, бо має місце (3)).

1. (2) збігається, отже $S_2$ — скінчена величина, але $S_1 \le S_2 \Rightarrow S_1$ — скінчена величина.




3. (1) розбігається, $S_1 = +\infty$;

але $S_1 \le S_2 \Rightarrow S_2 = +\infty \Rightarrow$ (2) – розбігається.

<u>Т.2. (гранична ознака порівняння).</u>

Нехай задано два інтеграли: (1), (2):

$f(x) \ge 0,\ \varphi(x) \ge 0$. (3)

Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A \ne 0$, (4)

то інтеграли (1), (2) обидва або збігаються, або розбігаються.

Без доведення.

Теорема 2 зручна для застосування у випадку, коли $A = 1$, тобто $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to +\infty$.

<u>**Приклад.**</u> Дослідити на збіжність заданий інтеграл.

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4 - 3x^3 + x}$. (1)

Застосуємо теорему 2.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 3x^3 + x} \sim \frac{1}{x^4} = \varphi(x)$$

$x \to +\infty$.

Інтеграл для порівняння:

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$. (2)

Інтеграл (2) еталонний $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$, $p = 4 > 1 \Rightarrow$ інтеграл (2) збігається. Згідно теореми 2, інтеграл (1) збігається.

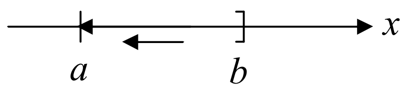
У випадку, коли підінтегральна функція $f\left(x\right)$ знакозмінна, розглядається інтеграл

$\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ (1), а також $\int\limits_a^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right|dx$ (2).

<u>Т.3. (достатня ознака збіжності).</u>
Якщо збігається інтеграл (2), то збігається і інтеграл (1).
Без доведення.
Невласний інтеграл (1) називається <u>абсолютно збіжним</u>, якщо збігається інтеграл (2).
Невласний інтеграл (1) називається <u>умовно збіжним</u>, якщо він збігається, а інтеграл (2) розбігається.

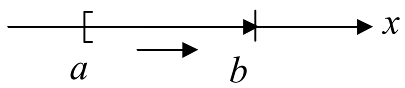
<u>Зауваження.</u> Поняття особливої точки функції.
Будемо казати, що точка $x = a$ особлива точка функції $f\left(x\right)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$, тобто функція $f\left(x\right)$ необмежена в околі точки $x = a$.
Будемо розглядати відрізок $\left[a, b\right]$, на якому задана функція $f\left(x\right)$.

<u>1.</u> Нехай $x = a$ — особлива точка функції $f\left(x\right)$.
Тоді $x \in (a, b]$, $\lim\limits_{x \to a+0} f\left(x\right) = \infty$.
Геометрично:



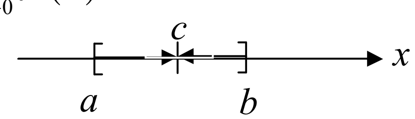

$x \to a + 0$

<u>2.</u> Нехай $x = b$ — особлива точка функції $f\left(x\right)$.
Тоді $x \in [a, b)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f\left(x\right) = \infty$.
Геометрично:




$x \to b - 0$

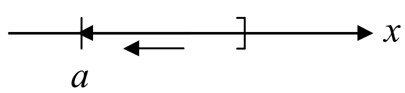
<u>3.</u> Нехай $x = c$ — особлива точка функції $f\left(x\right)$
$a < c < b$.
Тоді $x \in [a, c)$, $\lim\limits_{x \to c-0} f\left(x\right) = \infty$
$x \in (c, b]$, $\lim\limits_{x \to c+0} f\left(x\right) = \infty$
Геометрично:




$x \to c - 0$
$x \to c + 0$

**Невласні інтеграли II роду**

1) *Основні поняття.*
До невласних інтегралів II роду відносяться інтеграли від необмежених функцій.
Вигляд цих інтегралів такий же, як вигляд визначених інтегралів і для їх розпізнавання треба досліджувати, чи є функція $f\left(x\right)$ необмеженою в точках відрізку інтегрування.
<u>О.1.</u> Нехай функція $f\left(x\right)$ визначена на проміжку $(a, b]$, точка $x = a$ — особлива точка функції $f\left(x\right)$.
Тоді невласний інтеграл II роду



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \quad (1)$$

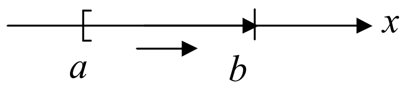
$b$

Якщо існує скінчена границя справа в (1), то невласний інтеграл збігається, в противному разі – розбігається.

<u>О.2.</u> Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,b)$, точка $x=b$ – особлива точка функції $f(x)$.

Тоді невласний інтеграл II роду

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \quad (2)$$




Якщо $\exists$ границя справа в (2), то інтеграл збігається, в противному разі – розбігається.

<u>О.3.</u> Нехай точка $x=c$, $a<c<b$ – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Тоді невласний інтеграл II роду

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad (3)$$

причому невласний інтеграл збігається тоді і тільки тоді, коли обидва інтеграли справа в (3) збігаються.

Можна довести, що невласний інтеграл типу (2) зводиться заміною змінної до вигляду (1), тому в основному будемо розглядати інтеграли вигляду (1).

2) *Зв'язок з первісною* (аналог формули Ньютона–Лейбніца).

Нехай точка $x=a$ особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(a,b]$ і має первісну $F(x)$ на цьому проміжку.

Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a+0}^{b} = F(b)-F(a+0). \quad (1')$$

Тут $F(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$. Якщо $x=b$ – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = F(b-0)-F(a)$.

Тут $F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$.

У випадку $x=c$ особлива точка функції $f(x)$, $a<c<b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{c-0} + F(x)\Big|_{c+0}^{b} =$$

$$= F(c-0)-F(a)+F(b)-F(c+0) = F(b)-F(a)-\left[F(c+0)-F(c-0)\right]. \quad (3')$$

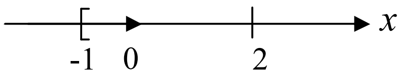
Інтеграл справа в (3') збігається, якщо $\exists$ скінчені границі $F(c+0)$, $F(c-0)$ обидві.

<u>Зауваження.</u> При обчисленні інтегралів треба провести аналіз підінтегральної функції на наявність особливих точок на проміжку інтегрування. Якщо таких точок немає, то маємо визначений інтеграл, якщо вони є – невласний інтеграл. Якщо такого аналізу не провести, то можемо отримати помилковий результат.

**<u>Приклад.</u>** Дослідити на збіжність заданий невласний інтеграл II роду.

$$I=\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2}=\left|x=0\right|=\underbrace{\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2}}_{I_2}$$

особлива точка




$$I_1=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-1}^{0}x^{-2}dx=\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{0-0}=-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{0-0}=-\Bigg[\underbrace{\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}}_{+\infty}+1\Bigg]=-\infty .$$

Інтеграл $I_1$ розбігається, отже інтеграл $I$ — розбігається ($I_2$ не розглядали, бо $I_1$ — розбігається).

!<u>Помилковий розв’язок.</u>

Не проведено аналізу на особливу точку

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-1}^{2}x^{-2}dx=-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{2}=-\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2}<0,$$

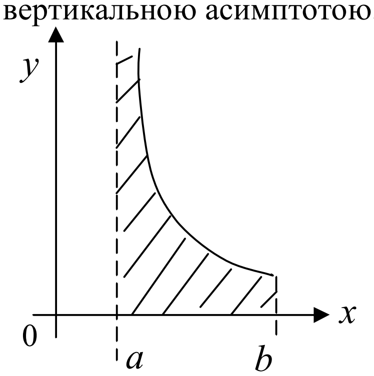
в той же час підінтегральна функція $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}>0$.

Отримали протиріччя.

3) *Геометрична інтерпретація.*

$f\left(x\right)\geq 0$ т. $x=a$ — особлива точка функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$.

$\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx=S$ — площа фігури, що обмежена кривою $y=f\left(x\right)$, прямою $x=b$ та вертикальною асимптотою.




4) *Дослідження на збіжність інтеграла спеціального вигляду.*

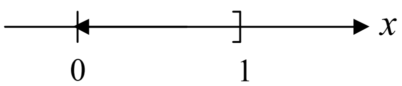
$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^p},\ \ p\in R .$$

При $p\leq 0$ маємо $\int\limits_{0}^{1}x^{-p}dx,\ -p\geq 0$, визначений інтеграл.

1. $p=1$.

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\left|x=0\right|=\ln\left|x\right|\Big|_{0+0}^{1}=\ln 1-\lim_{x\to 0+0}\ln x=0-\left(-\infty\right)=\infty$$ — інтеграл розбігається.

особлива точка



2. $p \neq 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = |x=0| = \int_0^1 x^{-p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_{0+0}^{1} = \left.\frac{1}{-p+1}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\right|_{0+0}^{1} = \frac{1}{-p+1}\left[1-\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^{p-1}}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \infty, & p>1 \text{ інтеграл розбігається} \\ \dfrac{1}{-p+1}, & p<1 \text{ інтеграл збігається.} \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^{p-1}} \Rightarrow \text{1) } p-1>0,\ p>1,\ x^{p-1}\to 0,\ \frac{1}{x^{p-1}}\to\infty$$

$$\text{2) } p-1<0,\ p<1,\ x^{p-1}\to\infty,\ \frac{1}{x^{p-1}}\to 0.$$

Висновок: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ □ $\left[\begin{array}{l} p\geq 1 \text{розбігається} \\ p<1 \text{збігається.} \end{array}\right.$

Наведений інтеграл є еталонним при застосуванні ознак порівняння при дослідженні невласних інтегралів II роду на збіжність.

4) *Ознаки порівняння для дослідження на збіжність невласних інтегралів.*
Ознаки аналогічні наведеним для невласних інтегралів I роду.
Т.1. (перша теорема порівняння).
Нехай задано два інтеграли:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (1)},\ \int_a^b \varphi(x)dx \text{ (2)},$$

причому т. $x=a$ □ особлива точка функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ і $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ (3) на $(a,b]$.

Тоді:

1. Якщо інтеграл (2) збігається, то і (1) збігається;
2. Якщо інтеграл (1) розбігається, то і (2) розбігається.

Без доведення.
Т.2. (гранична ознака порівняння).
Нехай задано інтеграли (1), (2) і $x=a$ □ особлива точка функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$; $f(x)>0,\ \varphi(x)>0$ (4) на проміжку $(a,b]$.

Тоді, якщо $\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0$, то обидва інтеграли або збігаються, або розбігаються одночасно.
Без доведення.

У випадку, коли функція $f(x)$ знакозмінна, то розглядаються інтеграли:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (1) і } \int_a^b |f(x)|dx \text{ (5)},\ x=a \text{ □ особлива точка функцій } f(x).$$

Т.3. Якщо інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ (5) збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Без доведення.
Існує така термінологія:
Якщо інтеграл (5) збігається, то інтеграл (1) абсолютно збіжний.
Якщо (1) збігається, а (5) розбігається, то (1) умовно збіжний.