Розділ 1. Границі. Неперервність

Функція. Способи задання функцій

О. Якщо кожному значенню $x,\ x \in X$ ставиться у відповідність за деяким законом значення $y,\ y \in Y$, то кажуть, що на множині X задана функція $y = f\left(x\right)$.
Множина X - область визначення функції,
Множина Y - область значень функції.
Існують такі способи задання функції:
1. *Аналітичний* спосіб
а) функція задається в ***явному*** виді за допомогою однієї або декількох формул.

Приклад:

Функція $\text{sign}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (sign - «сигнум»).

Функція Діріхле (німецький математик)

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x - \text{раціональне} \\ 0, & x - \text{ірраціональне} \end{cases}.$$

б) функція $y\left(x\right)$ задається в ***неявному*** вигляді рівнянням $F\left(x, y\right) = 0$.
Наприклад,

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a, b - const$, x - аргумент, y - функція.

в) функція $y\left(x\right)$ задана в ***параметричному*** вигляді:

$\begin{cases} x = x\left(t\right) \\ y = y\left(t\right) \end{cases}$, де t - параметр, $t \in \left[t_0, t_1\right]$.

Приклад:

Функція $y\left(x\right)$ задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = cost \\ y = \sin t, \ t \in \left[0; 2\pi\right] \end{cases}.$$

Якщо піднести до квадрата обидві частини обох рівнянь та додати їх, отримаємо

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$x^2 + y^2 = 1$ - рівняння кола з центром в точці $\left(0, 0\right)$ радіуса $R = 1$ (саме через це тригонометричні функції іноді називають круговими).

г) функція $y\left(x\right)$ задається у вигляді ***суперпозиції*** функцій, тобто

$$y = F\left(u\right), \ \ u = \varphi\left(x\right) \ \ y = F\left[\varphi\left(x\right)\right].$$

Отримана функція називається складною.

2. *Табличний* спосіб (у вигляді таблиць).

3. *Графічний* спосіб (у вигляді графіків).

4. *Програмний* спосіб (у вигляді комп'ютерних програм).

Класифікація функцій

1. Многочлен або поліном (ціла раціональна функція).
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$
(використані операції +, -, ×, піднесення до цілого додатного степеня).
2. Дробово-раціональна функція (раціональний дріб)
$\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x)$, $P_n(x)$ - многочлени степенів m і n відповідно.
3. Ірраціональні функції.
(використовуються операції +, -, ×, піднесення до раціонального степеня).
Типи функцій 1-3 називаються ***алгебраїчними***.
4. Трансцендентні функції – це ті функції, що **не є *алгебраїчними.***

Основні елементарні функції

Це функції: $y = const$; степенева; показникова; логарифмічна; тригонометричні; обернені тригонометричні.

Елементарні функції

О. Елементарною функцією називається функція, яка подається у вигляді $y = f(x)$, де $f(x)$ - є єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та суперпозицій.

Гіперболічні функції

Косинус гіперболічний: $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Синус гіперболічний: $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Тангенс гіперболічний: $thx = \dfrac{shx}{chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Котангенс гіперболічний: $cthx = \dfrac{chx}{shx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0$.

Це елементарні функції.
Назва «гіперболічні» випливає з того, що параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases}$$

задають гіперболу.
Піднесемо обидві частини обох рівнянь до квадрата і віднімемо від першого друге.

$x^2 - y^2 = \underbrace{ch^2t - sh^2t}_{1}$ (перевіряється безпосередньо підстановкою).

$x^2 - y^2 = 1$ - рівняння гіперболи.

Для гіперболічних функцій мають місце формули:

Для порівняння:

1. $ch^2x - sh^2x = 1$	1. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
2. $ch^2x + sh^2x = ch2x$	2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3. $2shx \cdot chx = sh2x$	3. $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$
4. $ch\left(x+y\right) = chx \cdot chx + shx \cdot shy$	4. $\cos\left(x+y\right) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
5. $sh\left(x+y\right) = shx \cdot chx + chx \cdot shy$	5. $\sin\left(x+y\right) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
(формули перевіряються безпосередньо).	(для кругових тригонометричних функцій).

Границя функції в точці

Будемо вважати, що функція $f\left(x\right)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, за виключенням можливо самої точки $x = a$.

О. Число A називається **границею** функції $f\left(x\right)$ в точці $x = a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову: $0 < \left|x - a\right| < \delta$ (1) виконується умова $\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$ (2).

Коротко: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \forall x : 0 < \left|x - a\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

Пояснення: $\underbrace{0 < \left|x - a\right|}_{x \neq a} < \delta$ (1)

Розкриємо модуль: $-\delta < x - a < \delta$

$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow x \in O\left(a, \delta\right)$ - окіл точки a радіусу δ, при цьому $x \neq a$.

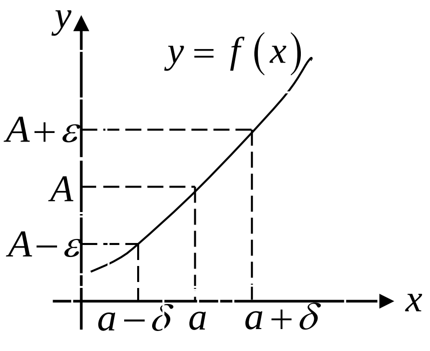
$\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$ (2)

$-\varepsilon < f\left(x\right) - A < \varepsilon$

$A - \varepsilon < f\left(x\right) < A + \varepsilon \Rightarrow f\left(x\right) \in O\left(A, \varepsilon\right)$.

Геометрична інтерпретація.

Задаємо ε; знаходимо δ.

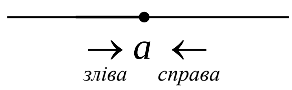


Для $x \in O\left(a, \delta\right)$ відповідні значення $f\left(x\right) \in O\left(A, \varepsilon\right)$.

Коротко: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Односторонні границі

В наведеному означенні границі не вказувалось, з якого боку x прагне до a - зліва, чи справа. Тобто розглядалась так звана двостороння границя

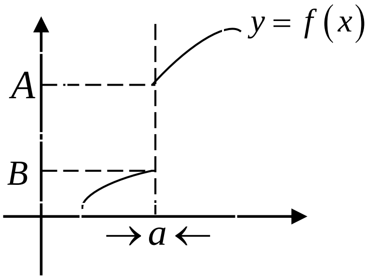


Якщо ж вказується, з якого боку x прямує до a, то мають місце односторонні границі. Цей факт записується так:

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = A$ - **границя функції в т. $x = a$ справа.**

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = B$ - **границя функції в т. $x = a$ зліва.**

Якщо $A = B$, то в точці $x = a$ існує двостороння границя.



Тут $A \neq B$.

Нескінченно малі та нескінченно великі функції

<u>О.1.</u> Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

<u>О.2.</u> Функція $f(x)$ називається нескінченно великою в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Якщо $f(x)$ приймає тільки додатні значення, то пишуть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Якщо $f(x)$ приймає тільки від'ємні значення, то пишуть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

<u>Т.</u> Якщо функція $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці $x = a$, то функції $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою в точці $x = a$.
Вірно і обернене.

Неперервність функції в точці

У цьому пункті будемо вважати, що функція $f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$ і в самій точці $x = a$.

<u>О.1.</u> Функція $f(x)$ **неперервна** в т. $x = a$, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

З формули (1) випливає:

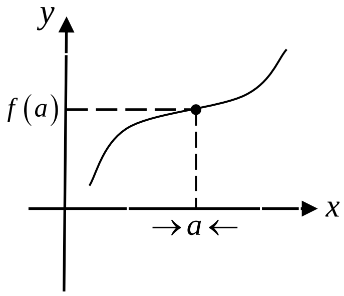
$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a) \quad (1`)$$

(1`) означає, що для неперервної функції можна міняти знак границі ($\lim$) і знак функції (f) місцями.

<u>О.2.</u> Функція $f(x)$ **неперервна** в т. $x = a$, якщо

$$\underbrace{f(a+0)}_{\substack{\text{границя функції} \\ \text{в т.а справа}}} = \underbrace{f(a-0)}_{\substack{\text{границя функції} \\ \text{в т.а зліва}}} = \underset{\substack{\text{значення} \\ \text{функції} \\ \text{в т.}x=a}}{f(a)}. \quad (2)$$

Геометрично:



<u>0.3.</u> Функція $f(x)$ **неперервна** в т. $x = x_0$, якщо

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0, \quad (3)$$

тобто нескінченно малому приросту аргументу в т. $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції.

<u>Точки розриву функції та їх класифікація</u>

Точки, в яких порушуються умови неперервності функцій, називаються точками розриву. За основу беремо означення 2:

$$f(a+0) = f(a-0) = f(a). \quad (2)$$

Розрізняють точки розриву 1-го і 2-го роду.
Точки розриву I роду двох типів: точки усувного розриву (устранимого - рос.) та точки розриву типу «стрибок».

***Для точок розриву I роду*:** $\exists f(a+0), \quad f(a-0)$.

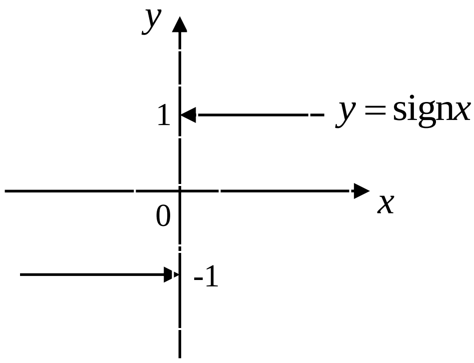
а) ***усувний* розрив:** $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$;

б) **розрив типу «стрибок»:** $f(a+0) \neq f(a-0)$. В цьому випадку підраховують величину стрибка: $\Delta f = f(a+0) - f(a-0)$.

***Для точок розриву II роду*:** хоча б одне з значень $f(a+0)$ чи $f(a-0)$ нескінченне або не існує.

<u>Приклади.</u>

1. $y = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

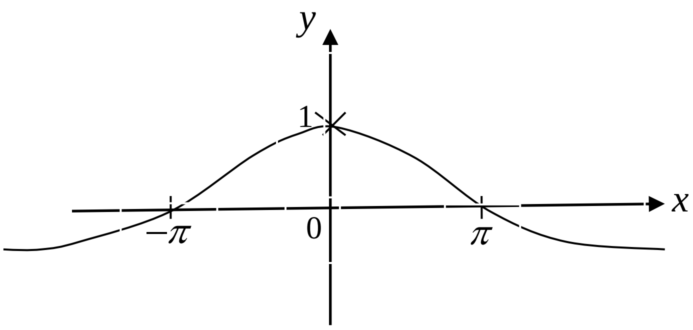


Точка $x=0$ - точка розриву I роду типу «стрибок».

$f\left(a+0\right)=1,\ f\left(a-0\right)=-1,\ f\left(a+0\right)\neq f\left(a-0\right)$

$\Delta f\ =\ f\left(0+0\right)-\ f\left(0-0\right)=1-\left(-1\right)=2$.

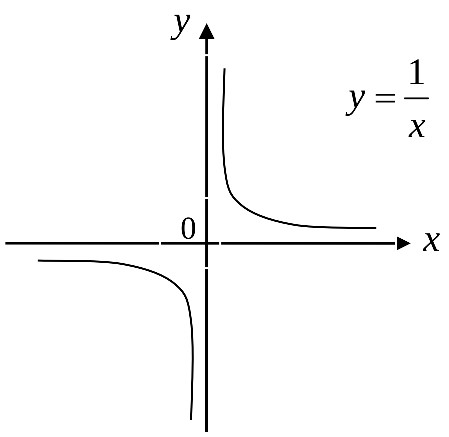
2. $y=\dfrac{sinx}{x},\ x\neq 0$.



Скористаємось співвідношенням $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x}=1$.

Точка $x=0$ точка усувного розриву, бо $f\left(0+0\right)=\ f\left(0-0\right)=1\neq\ f\left(0\right)$, в точці $x=0$ функція взагалі невизначена.

3. $y=\dfrac{1}{x}$



$x=0$ - точка розриву II роду, бо $f\left(0+0\right)=+\infty$.

Деякі важливі границі

Перша важлива границя та наслідки з неї

Т. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (1) – перша важлива границя.

Без доведення.

Наслідки.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ (2)

Д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ (3)

Д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{array}{l}\arcsin x\\ x=\sin y\\ x\to 0,\ y\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin y}{y}}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc}\,tgx}{x}=1$ (4)

Доведення аналогічно.

Як бачимо, всі границі (1) - (4) дорівнюють 1.

О. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ нескінченно малі при $x\to a$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, то вони називаються **еквівалентними** при $x\to a$.

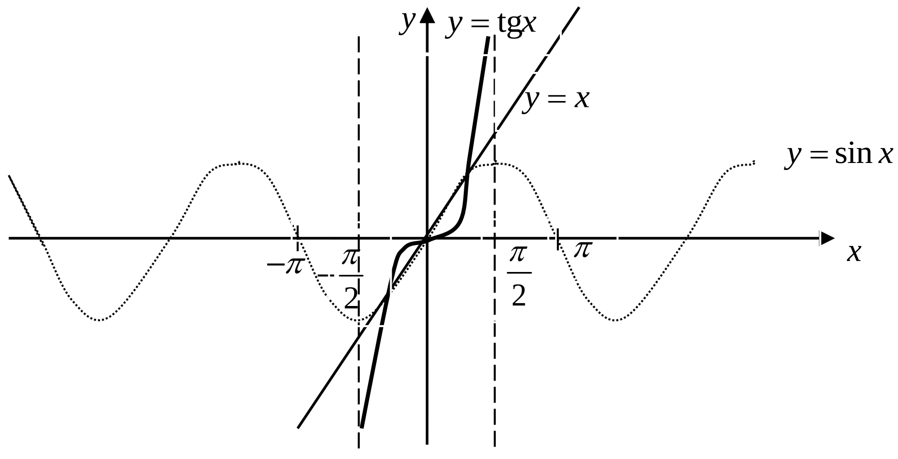
Позначення: $f(x)\sim\varphi(x)$ при $x\to a$.

Тоді з формул (1) - (4) випливає:

$\sin x\sim x,\ \ tgx\sim x,\ \ \arcsin x\sim x,\ \ \mathrm{arc}\,tgx\sim x,\ \ x\to 0$ або

$x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim\mathrm{arc}\,tgx,\ \ x\to 0$ **(5).**

Геометрично:



Видно, що при $x \to 0$ функції теж прямують до нуля $x \sim f(x)$.

Зауваження. Число e.

Розглянемо числову послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, тобто поклавши $n = 1, 2, 3, \ldots$ (тут $n \in N$). Маємо $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$n = 1 \quad x_1 = (1+1) = 2$

$n = 2 \quad x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$

$n = 3 \quad x_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$

і т. д.

Доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = 2,718284\ldots$

Доведено також, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (тут $x \in R$).

Друга важлива границя і її наслідки

Т. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. (1)

Без доведення. (1) – друга важлива границя.

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. (2) – інша форма другої важливої границі.

$$\text{Д. } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x} = y \\ x = \frac{1}{y} \\ x \to 0,\ y \to \infty \end{array} \right| = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$. (3)

$$\text{Д. } \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a \underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Покладемо в (3) $a = e$. $\ln e = 1$. Тоді $\log_e(1+x) = \ln(1+x)$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \quad (4)$$

<u>3.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$. (5)

<u>Д.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c} a^x-1=y \\ a^x=1+y \\ x=\log_a(1+y) \\ x\to 0,\ y\to 0 \end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a.$$

формула (3)

Покладемо в (5) $a=e,\ \ln e=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (6).

<u>Висновок</u>: з (4), (6) випливає, що

$\ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x,\ x\to 0$.

Тоді $x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,\ x\to 0$. (7)

<u>Порівняння нескінченно малих</u>

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x\to a$.

<u>О.1.</u> Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку малості, ніж $\beta(x)$.

Коротко: $\alpha(x)=o(\beta(x)),\ x\to a$

(o – мале від $\beta(x)$)

по іншому $\alpha(x)<<\beta(x)$ - $\alpha(x)$значно менше, ніж $\beta(x)$.

<u>О.2.</u> Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\mathrm{A}\neq 0$, то $\alpha(x)$і $\beta(x)$ одного порядку малості при $x\to a$.

Коротко $\alpha(x)=O(\beta(x)),\ \ x\to a$

(O - велике від $\beta(x)$).

Зокрема, якщо $A=1$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні нескінченно малі при $x\to a$.

Коротко $\alpha(x)\sim\beta(x),\quad x\to a$ (введено вже раніше при $x\to 0$).

Властивості еквівалентних нескінченно малих функцій

1^0. Якщо $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$,

$\beta(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to a$,

то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to a$.

Д. Треба довести, що $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=1$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to a}\underbrace{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}}_{=1}=1.$$

2^0. Якщо $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\alpha(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\beta(x)\quad(*)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\beta(x)}\quad(**).$$

Доведемо (*)

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\alpha(x)=\lim_{x\to a}f(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\beta(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\beta(x).$$

Висновок 1. З властивості 1^0 випливає справедливість введених раніше ланцюжків еквівалентностей (5) і (7). Тепер з (5) і (7) випливає такий ланцюжок еквівалентностей:

$$x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,\quad x\to 0.\quad(8)$$

Має місце і більш загальне співвідношення:

$$u(x)\sim\sin u(x)\sim tgu(x)\sim\arcsin u(x)\sim arctgu(x)\sim\ln\big(1+u(x)\big)\sim e^{u(x)}-1,$$
$$u(x)\to 0,\ x\to a.\quad(9)$$

Висновок 2. З властивості 2^0 випливає, що **в *добутку* і *частці*** можна заміняти функції на еквівалентні, більш прості (**але не в сумі і різниці**).

Приклад. Знайти границі:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 4x}{arctgx^2}=\left|\begin{array}{c}\sin 2x\sim 2x\\ \sin 4x\sim 4x\\ \mathrm{arctg}x^2\sim x^2\\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 4x}{x^2}=8.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\cdot\ln(1+x)}{\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c}e^x-1\sim x\\ \ln(1+x)\sim x\\ \sin^2 x\sim x^2\\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2}=1.$$

Еквівалентні нескінченно великі

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ ***нескінченно великі*** при $x \to a$. Для цих функцій поняття еквівалентних вводиться так само, як і для нескінченно малих.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1;$ коротко $f(x)\sim\varphi(x),\ x\to a$.

Теорема. Функції $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ і $\varphi(x)=a_0x^n$, $a_0\neq 0$, еквівалентні нескінченно великі при $x\to\infty$.

Коротко: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\sim a_0x^n,\ x\to\infty,\quad a_0\neq 0$ (10).

Д. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{a_0x^n}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=1.$$

Приклади. Знайти задані границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{2+5x+7x^2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{matrix}3x^2+4x+1\sim 3x^2\\ 2+5x+7x^2\sim 7x^2\\ x\to\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{7x^2}=\dfrac{3}{7}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x+1)^2\cdot(3-x)}{(2x-1)^3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{matrix}5x+1\sim 5x\\ 3-x\sim -x\\ 2x-1\sim 2x\\ x\to\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x)^2\cdot(-x)}{(2x)^3}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^2x^3}{2^3x^3}=-\dfrac{25}{8}.$