Розділ 2. Аналітична геометрія

2.1. Прямі лінії та площини

I. Різні типи рівнянь площини

1. Рівняння площини, яка задана точкою і нормальним вектором.

Площина $Q \subset R^3$.

<u>Дано</u>: $M_0(x_0, y_0, z_0) \in Q$, $\vec{n}$ - нормальний вектор, $\vec{n} \perp пл.Q$, $\vec{n} = (A, B, C)$

Треба записати рівняння площини Q.

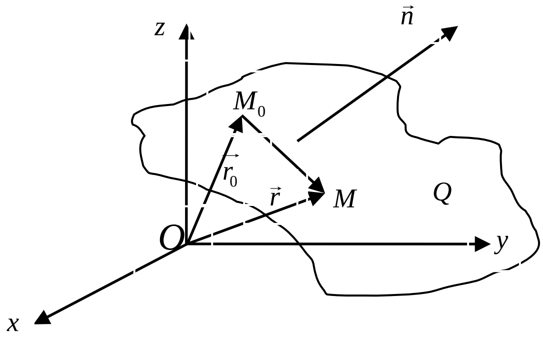
Коротко Q : ?

<u>Розв'язання:</u>

$M(x, y, z) \in пл.Q$ - це точка з поточними координатами

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$ (*)

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$, бо вектор різниці з'єднує кінці векторів і напрямлений в бік зменшуваного.



З (*) випливає: $\left(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}\right) = 0$

$\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$ - це радіуси-вектори точок M і M_0.

$\vec{r}-\vec{r_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(A,B,C)=0$

$Q:\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (1)

Це рівняння площини, заданої точкою і нормальним вектором.

2. Загальне рівняння площини.

О. Загальним рівняння площини називається рівняння вигляду:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (2)$$

де A,B,C,D - задані числа, $A,B,C\neq 0$ одночасно.

Шляхом простих перетворень з рівняння (1) отримується рівняння (2):

(1) $\Rightarrow Ax+By+Cz+\underbrace{(-Ax_0-By_0-Cz_0)}_{D}=0$.

Отримали рівняння вигляду (2).

Отже, в (2) $\vec{n}=(A,B,C)$, вільний член D не має геометричного змісту.

3. Рівняння площини у відрізках.

Перетворимо рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ (2), де $A,B,C,D\neq 0$:

$$Ax+By+Cz=-D \quad /:-D\neq 0$$

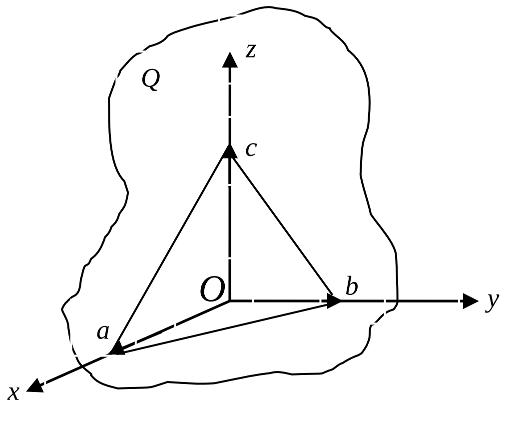
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Позначимо: $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$

$$Q:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (3)$$

– рівняння площини у відрізках.

Числа a,b,c з точністю до знака дають довжини відрізків, що відтинаються площиною на осях координат.



$A_1(a,0,0)\in Q$

$B_1(0,b,0)\in Q$

$C_1(0,0,c)\in Q$.

4. Рівняння площини, що проходить через три точки.

<u>Дано</u>: $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right) \in Q$

$M_2\left(x_2, y_2, z_2\right) \in Q$

$M_3\left(x_3, y_3, z_3\right) \in Q$.

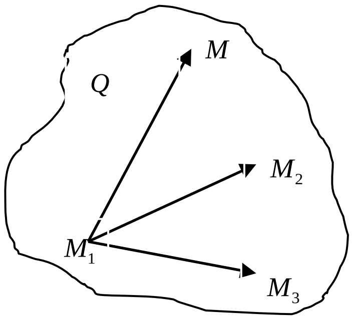
Знайти рівняння площини Q : ?

<u>Розв'язання</u>:

Задамо $M\left(x, y, z\right) \in Q$, точка з поточними координатами.

З'єднаємо M_1 з M, M_2, M_3.

За побудовою отримані три вектори компланарні.



Умова компланарності:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0.$$

Звідси:

$$Q: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

–це рівняння площини, що проходить через 3 точки.

На практиці складають рівняння (4) за умови задання 3-х точок, визначник зліва розкривають, роблять перетворення до одержання вигляду:

$Ax + By + Cz + D = 0$.

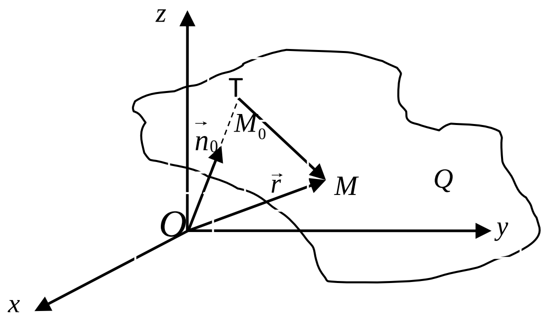
5. Нормальне рівняння площини

Дано: одиничний нормальний вектор $\overrightarrow{n_0}$, напрямлений в бік площини Q,

$\overrightarrow{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\left|\overrightarrow{n_0}\right| = 1$, відстань від початку координат O до площини Q :

$\rho(O, Q) = p \geq 0$.

Знайти: рівняння площини Q : ?



Розв'язання:

$M\left(x,y,z\right)\in пл.Q$ - це точка з поточними координатами. Проекція радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ на $\overrightarrow{n_0}$ дорівнює $пр_{\overrightarrow{n_0}}\overrightarrow{OM}=OT=p$.

$пр_{\overrightarrow{n_0}}\overrightarrow{OM}=\dfrac{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{n_0})}{\left|\overrightarrow{n_0}\right|}=(\vec{r},\overrightarrow{n_0})=p$, бо $\left|\overrightarrow{n_0}\right|=1$ за умовою.

$Q:\ (\vec{r},\overrightarrow{n_0})-p=0$ - нормальне рівняння площини у векторній формі.

$\vec{r}=(x,y,z)$, точка $M(x,y,z)\in Q$, $\overrightarrow{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ за умовою. Тоді

$Q:\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,\ p\geq 0$ (5)

- нормальне рівняння площини у координатній формі.

Для розпізнавання, чи є рівняння нормальним, а не просто загальним, треба перевірити такі умови:

1) сума квадратів коефіцієнтів при x,y,z дорівнює одиниці.

2) $p\geq 0$.

В рівнянні (5) зміст вільного члена такий: p - відстань $\rho(O,Q)$.

Зауважимо, що від загального рівняння (2) можна перейти до нормального (5), вводячи нормувальний множник $\mu=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, де знак перед коренем вибирається протилежним до знаку вільного члена D. Тоді будуть виконуватись умови 1) та 2), зазначені вище.

Доведення:

$Ax+By+Cz+D=0\ /\cdot\mu$

$(A\mu)x+(B\mu)y+(C\mu)z+D\mu=0$.

1) $(A\mu)^2+(B\mu)^2+(C\mu)^2=\dfrac{A^2+B^2+C^2}{A^2+B^2+C^2}=1$.

2) $D\mu=-p,\ \ p\geq 0,-p\leq 0$. $D\mu\leq 0$, якщо знаки D та μ протилежні.

Деякі типи рівнянь прямої на площині.

Позначимо пряму на площині l. Вважаємо $l\subset R^2$.

Відповідні рівняння l отримаємо з наведених вище рівнянь (1-5) площин Q $\left(Q\subset R^3\right)$ вилученням координати z:

1. $l:\quad A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$ ($1'$) – рівняння прямої, заданої точкою $M\left(x_0,y_0\right)$ і нормальним вектором $\vec{n}=\left(A,B\right)$;
2. $l:\quad Ax+By+C=0$ ($2'$) – загальне рівняння $\vec{n}=\left(A,B\right)$;

3. $l:\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (3′) – рівняння прямої у відрізках;

4. $l:\ \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (4′) – рівняння прямої, що проходить через 2 точки, або

$l:\ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ (4′), за властивостями визначників.

5. $l:\ x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,\ p\ge 0$ (5′) - нормальне рівняння прямої на площині.

Крім того, запишемо ще одне рівняння відоме з шкільного курсу.

З рівняння (2') $\Rightarrow By=-Ax-C,\quad B\neq 0$. Далі звідси

$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}\Rightarrow$

6. $l:\ \ y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

<u>Приклад 1.</u> Написати рівняння площини Q, що проходить через точку $M(1,2,0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(3,4,5)$.

Розв'язання:

Підставляємо данні в рівняння $Q:\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

$$Q:\ 3(x-1)+4(y-2)+5(z-0)=0.$$

Розкриваємо дужки, отримуємо

$$Q:\ 3x+4y+5z-11=0.$$

<u>Приклад 2.</u> Написати рівняння площини Q, що проходить через три точки $M_1(1,0,1)$, $M_2(-1,2,0)$, $M_3(2,1,3)$.

Розв'язання:

Підставляємо координати точок в рівняння $Q:\ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -1-1 & 2-0 & 0-1 \\ 2-1 & 1-0 & 3-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)\cdot 5-y\cdot(-3)+(z-1)\cdot(-4)=5x+3y-4z-1.$$

Отримали $\qquad Q:\ 5x+3y-4z-1=0.$

II. Різні типи рівнянь прямої у просторі

Позначимо пряму у просторі L. Будемо писати $L \subset R^3$.

1. *Загальні рівняння прямої у просторі.*

Пряма у просторі може бути задана як лінія перетину двох непаралельних площин Q_1 і Q_2; $Q_1 \nparallel Q_2$. Тому рівняння можна задати у вигляді:

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$ (1) – це загальні рівняння прямої у просторі.

У формулі (1) перше рівняння – рівняння площини Q_1; друге – рівняння площини Q_2.

2. *Параметричні рівняння прямої у просторі.*

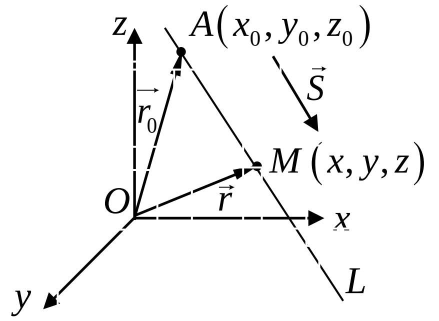
Дано: точка $A(x_0,y_0,z_0)\in L$, вектор $\vec{S}$ - напрямний вектор прямої;

$\vec{S} \parallel L,\ \vec{S}=(m,n,p)$.

Треба написати рівняння прямої L. Коротко L: ?.

<u>Розв’язання:</u>

Наносимо рисунок:



На рисунку точка $M(x,y,z)\in L$, це точка з поточними координатами.

Згідно умови $\vec{S} \parallel \overrightarrow{AM}$, де $\overrightarrow{AM}=\vec{r}-\vec{r_0}$.

Умову колінеарності записуємо у вигляді: $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{S}$, λ - параметр (число).

Звідси $\vec{r}-\vec{r_0}=\lambda\vec{S}$

L: $\vec{r}=\vec{r_0}+\lambda\vec{S}$ - параметричне рівняння прямої у просторі.

Переходимо до координатної форми, враховуючи, що $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{S}=(m,n,p)$.

Тоді $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(m,n,p)$

$$L:\ \begin{cases} x=x_0+\lambda m \\ y=y_0+\lambda n \\ z=z_0+\lambda p \end{cases}$$ (2) – параметричні рівняння прямої L в координатній формі.

У подальшому точку $A(x_0,y_0,z_0)\in L$ будемо називати **базовую**.

3. *Канонічні рівняння прямої у просторі.*

З (2) випливає:

$\lambda = \dfrac{x - x_0}{m}$, $\lambda = \dfrac{y - y_0}{n}$, $\lambda = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Тоді $L:\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ (3) – канонічні рівняння прямої.

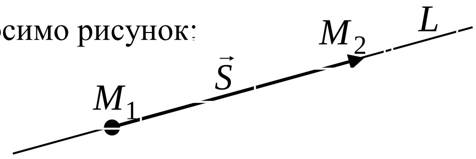
Тут $A(x_0, y_0, z_0) \in L$ базова точка, $\vec{S} = (m, n, p)$ напрямний вектор прямої.

4. ***Рівняння прямої, що проходить через 2 точки.***

Дано: $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$.

$L:?$

Наносимо рисунок:



Розв'язання:

Скористаємось канонічними рівняннями прямої (3). Враховуючи задану інформацію, покладемо $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, $M_1(x, y, z) \in L$. Це базова точка.

Тоді $L:\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. (4)

Деякі рівняння прямої на площині.

Відповідні рівняння l отримаємо з наведених вище рівнянь (2-4) прямих $L \subset R^3$ вилученням координати z:

1. $l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \end{cases}$ (2') – параметричні рівняння; $A(x_0, y_0) \in l$, $\vec{S} = (m, n)$.

2. $l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ (3') – канонічне рівняння прямої на площині.

3. $l: \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (4') – рівняння прямої, що проходить через 2 точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

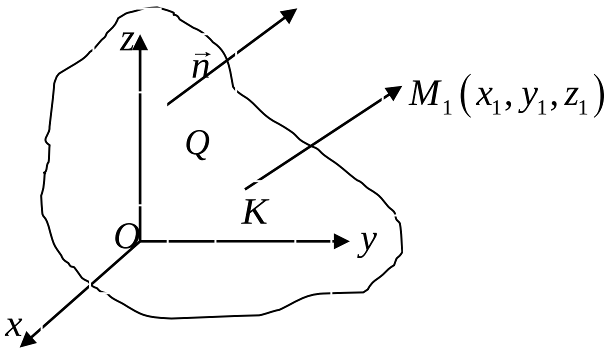
Зауважимо, що загальних рівнянь прямої на площині тут немає, бо перетин двох непаралельних прямих дає точку, а не пряму.

III. Деякі задачі на пряму та площину

1. ***Відстань від точки до площини.***

Дано: $Q: Ax + By + Cz + D = 0$; $M_1(x_1, y_1, z_1)$

Знайти: відстань від точки M_1 до площини Q. Коротко $\rho(M_1, Q)$ –?



На рисунку $K = np_Q M_1$; $\left|\overrightarrow{KM_1}\right| = \rho(M_1, Q)$.

$K(x_0, y_0, z_0) \in Q \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (*)

$\vec{n} \,||\, \overrightarrow{KM_1} \Rightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{KM_1}) = \pm|\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{KM_1}\right| = \pm|\vec{n}| \cdot \rho(M_1, Q)$.

"$\pm$", бо $(\vec{n},^\wedge \overrightarrow{KM_1}) = 0, \pi$.

$$\rho(M_1, Q) = \frac{\left|(\vec{n}, \overrightarrow{KM_1})\right|}{|\vec{n}|}.$$

$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$,

$$(\vec{n}, \overrightarrow{KM_1}) = (A, B, C) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) =$$
$$= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (\underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_{=0\ (*)}) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Тоді: $\rho(M_1, Q) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. (1)

Алгоритм: в ліву частину заданого рівняння площини підставляємо координати т. M_1, що дає чисельник; знаменник $|\vec{n}|$, $\vec{n}$ - нормальний вектор площини.

<u>Приклад.</u> Знайти відстань від точки $M_1(1,2,3)$ до площини Q: $4x - 5y + z + 1 = 0$.

Розв'язання: $\rho(M_1, Q) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$\rho(M_1, Q) = \frac{|4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{|4 - 10 + 3 + 1|}{\sqrt{16 + 25 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

2. *Кут між двома площинами.*

<u>Дано</u>:

$Q_1 : \vec{n}_1 = (A, B, C)$; $Q_2 : \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$; $\varphi = \left(Q_1,^\wedge Q_2\right)$ –?

Розв'язання:

$\varphi = \left(Q_1,^\wedge Q_2\right) = \left(\vec{n}_1,^\wedge \vec{n}_2\right)$. Тоді $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

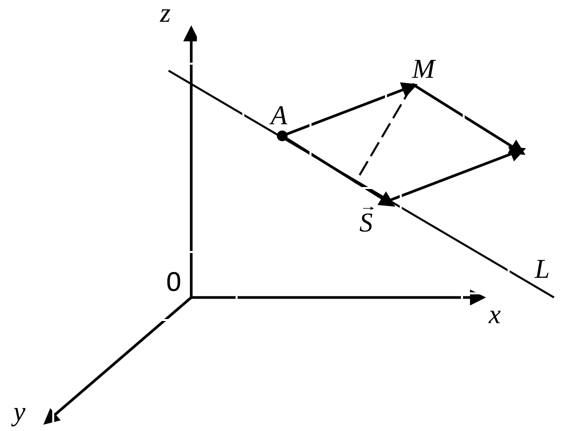
$Q_1 \parallel Q_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$ або $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

$Q_1 \perp Q_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ або $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3. *Відстань від точки до прямої у просторі.*

Дано:

$L: \ A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{S} = (m, n, p)$, $M(x_1, y_1, z_1)$. $\rho(M, L)$-?



На рисунок наносимо L, точки A, M та $\vec{S}$ і добудовуємо до паралелограма.

$\rho(M, L)$ - дорівнює висоті паралелограма.

$$\begin{cases} S_{парал} = \left|\overrightarrow{AM} \times \vec{S}\right| \\ S_{парал} = \left|\vec{S}\right| \cdot \rho(M, L) \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AM} \times \vec{S}\right| = \left|\vec{S}\right| \cdot \rho(M, L) \Rightarrow \rho(M, L) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \times \vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}. \qquad (2)$$

4. *Кут між двома прямими у просторі.*

Дано:

$L_1 : \vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$; $L_2 : \vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$; $\varphi = \left(L_1,^\wedge L_2\right)$ - ?

Розв'язання:

$\varphi = \left(L_1,^\wedge L_2\right) = \left(\vec{S}_1,^\wedge \vec{S}_2\right)$.

Тоді $\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right)}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|}$

Далі умови паралельності та перпендикулярності прямих.

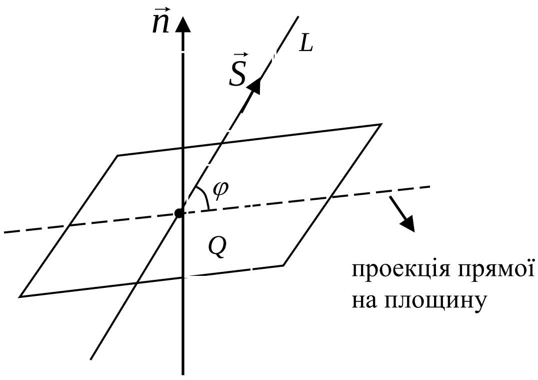
$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = 0$ або $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

$L_1 \perp L_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow \left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right) = 0$ або $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

5. ***Кут між прямою та площиною.***

Дано:

$L:\vec{S}=(m,n,p)$, $Q:\vec{n}=(A,B,C)$. $\varphi=(L,^\wedge Q)$ - ?



Введемо кут між прямою та площиною:

$\varphi=(L,^\wedge Q)=(L,^\wedge np_Q L),\quad 0\le\varphi<\pi$.

Формулу наводимо <u>без доведення</u>:

$$\sin\varphi=\frac{\left|(\vec{n},\vec{S})\right|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{S}|}\quad (\sin\varphi\ge 0,\ \text{бо}\ \ 0\le\varphi<\pi).$$

Далі умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

$L\parallel Q\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{S}\Rightarrow(\vec{n},\vec{S})=0$ або $Am+Bn+Cp=0$

$L\perp Q\Rightarrow\vec{n}\parallel\vec{S}\Rightarrow\vec{n}\times\vec{S}=0$ або $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

<u>**Приклад 1**</u>. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точки $A(2,1,-3)$, $B(3,2,4)$.

Розв’язання:

$$L:\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}.$$

$$L:\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z+3}{4-(-3)};\ L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{7}.$$

<u>2.2. Криві другого порядку</u>

До кривих другого порядку відноситься відома зі шкільного курсу крива, рівняння якої

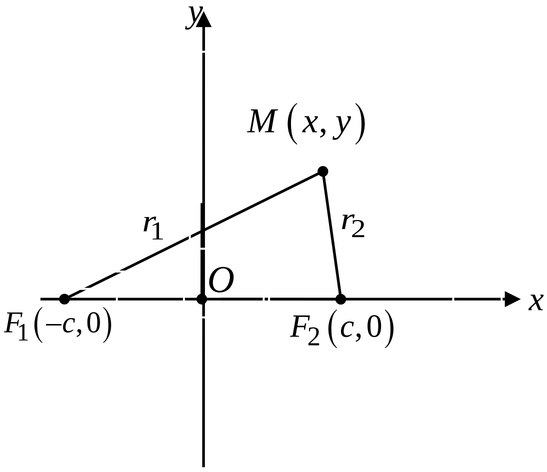
$$x^2+y^2=R^2$$

що є колом з центром в т. $O(0,0)$ радіуса R.

Будемо розглядати інші криві другого порядку, а саме: еліпс, гіперболу, параболу.

<u>I. Еліпс</u>

О. ***Еліпсом*** називається геометричне місце точок $M(x, y)$, сума відстаней від яких до двох даних точок F_1, F_2, що називаються фокусами, є величина стала (ця стала величина додатна і більше відстані між фокусами).
Позначення: стала величина – 2а;
Відстань між фокусами $\rho(F_1, F_2) = 2c$
$2a > 0 \Rightarrow a > 0$
$2a > 2c \Rightarrow a > c \Rightarrow a^2 > c^2;\ a^2 - c^2 > 0$
Тоді можна позначити $b^2 = a^2 - c^2$.
Виберемо систему координат так, щоб фокуси $F_1, F_2 \in осі\ Ox$, а точка O ділила F_1F_2 навпіл.



Точка $M(x, y) \in$ еліпсу, це точка з поточними координатами.
Згідно означення

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Запишемо вирази r_1 та r_2 як відстань між двома точками.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Далі, відокремивши корінь зліва і підносячи двічі до квадрата, отримуємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Скористаємось позначенням: $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

– канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$, $0 < b \le a$ (a і b називаються великою та малою піввіссю еліпса).
Якщо $b = a$, маємо з (1) $x^2 + y^2 = a^2$ - рівняння кола.

<u>**Дослідження форми еліпса**</u>

1. Графік еліпса симетричний відносно осей координат (бо x та y у парному степені).

2. Точки перетину з осями координат

$y=0,\ x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a; \qquad A_1(-a,0),\ A_2(a,0)$

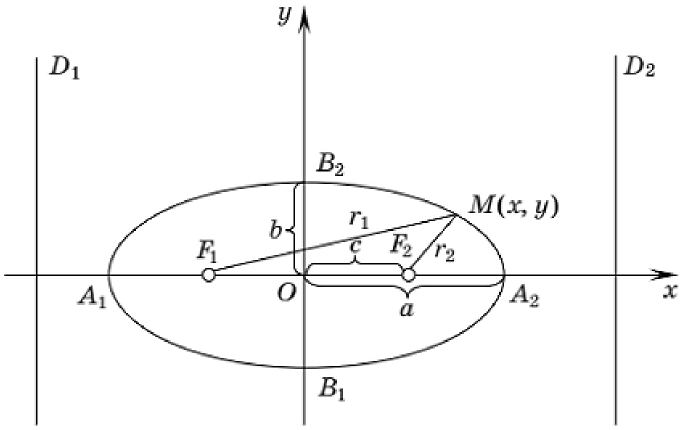
$x=0,\ y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b; \qquad B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$.

$A_1A_2=2a$ - велика вісь еліпса, $B_1B_2=2b$ - мала вісь.

Розв'язавши (1) відносно y, та знайшовши похідну y', побачимо, що $y'<0$ в першій чверті при $x>0$, тобто графік функції спадає.

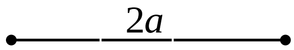
3. Далі будуємо графік еліпса в I чверті і, враховуючи симетрію, продовжуємо в інші чверті.

Починаємо побудову з побудови вершин та графіка в першій чверті.

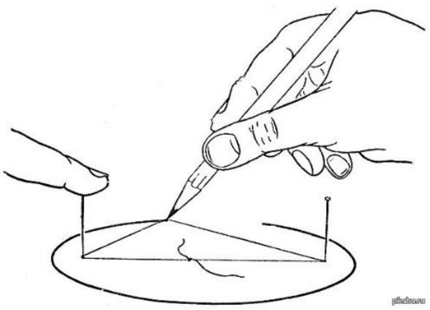


Існує механічний спосіб побудови еліпса.

Беремо нитку довжиною $2a$, кінці її закріплюємо в точках F_1, F_2. Натягуємо нитку олівцем і проводимо еліпс.



Тут використано те, що $r_1+r_2=2a$, де б не взяти точку $M(x,y)$, що належить еліпсу.



4. Важливою характеристикою еліпса є ексцентриситет та директриси.

<u>О.1.</u> Ексцентриситетом еліпса називається величина $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, де c - півфокусна відстань, a - величина великої півосі.

Враховуючи, що $a>c$, $\varepsilon<1$; при $c=0$, тобто $b=a$, маємо коло; $\varepsilon=0$.

Ексцетриситет вказує на степінь відхилення еліпса від кола: чим більше ексцентриситет, тим більше еліпс витягується вздовж осі Ox.

О.2. Директрисами еліпса називається пара прямих, перпендикулярних великій осі, рівняння яких $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$

Директриси розташовані правіше правої вершини і лівіше лівої вершини відповідно.

II. Гіпербола

О. ***Гіперболою*** називається геометричне місце точок $M(x, y)$, різниця відстаней від яких до двох даних точок F_1, F_2, що називаються фокусами, є величина стала. (Ця стала величина додатна і менше відстані між фокусами).

Позначення: стала величина $2a$,

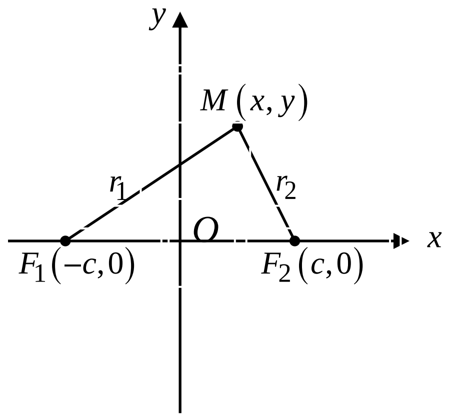
$$\rho(F_1, F_2) = 2c$$

$$2a > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$2a < 2c \Rightarrow a < c \Rightarrow \underline{c > a} \Rightarrow c^2 > a^2, \quad c^2 - a^2 > 0 .$$

Тоді можна позначити: $b^2 = c^2 - a^2$.

Виберемо систему координат так, щоб фокуси $F_1, F_2 \in$ осі Ox, точка O ділила F_1F_2 навпіл.



Точка $M(x, y)$ належить гіперболі.

Згідно означення $r_1 - r_2 = \pm 2a$ («+», якщо $r_1 > r_2$; «-», якщо $r_1 < r_2$).

Запишемо r_1 і r_2 як відстані між двома точками:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Далі, відокремивши корінь зліва і підносячи двічі до квадрата, отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 .$$

Скориставшись позначенням $c^2 - a^2 = b^2$ отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (1)$$

– канонічне рівняння гіперболи, де a і b називають дійсною та уявною піввіссю відповідно.

При $b = a$ маємо: $x^2 - y^2 = a^2$ - рівняння рівносторонньої гіперболи.

Дослідження форми гіперболи

1. Графік гіперболи симетричний відносно осей координат.
2. Точки перетину з осями координат

$y = 0$ $x^2 = a^2,\ x = \pm a$ $A_1(-a,0),\ A_2(a,0)$ - дійсні вершини гіперболи,

$x = 0$ $\underbrace{y^2 = -b^2}_{\text{гіпербола не перетинає вісь Oy}} \Rightarrow y = \pm\sqrt{-b^2} = b\underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{уявна одиниця}} = \pm bi$.

Вводимо точки: $B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$ - уявні вершини гіперболи.

$A_1A_2 = 2a$ - дійсна вісь (вісь Ox - також дійсна вісь);

$B_1B_2 = 2b$ - уявна вісь (вісь Oy - уявна вісь).

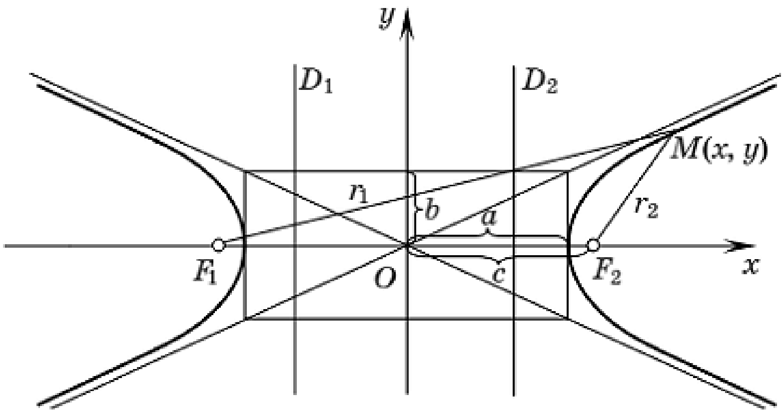
3. Розв'язавши (1) відносно y, та знайшовши похідну y', побачимо, що $y' > 0$ в I чверті при $x > a$, тобто функція зростає при $x > a$.

4. Можна довести, що графік функції має дві асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Далі будуємо графік за такими етапами:

1) наносимо вершини;
2) будуємо допоміжний прямокутник;
3) проводимо діагоналі прямокутника, та продовживши їх, отримуємо асимптоти;
4) наносимо графік в I чверті і продовжуємо на всю площину, враховуючи симетрію.

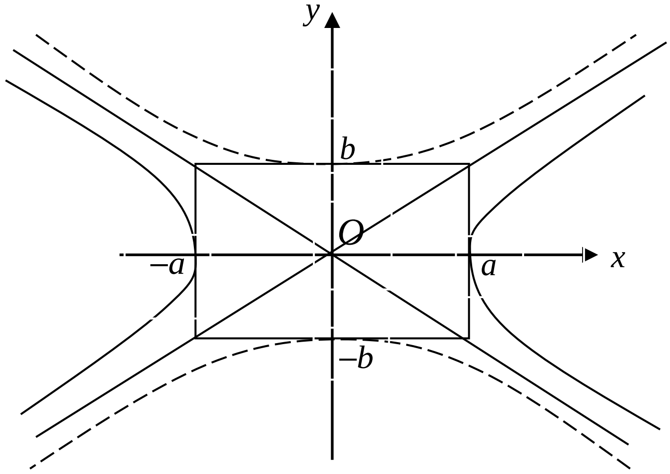
Графік проведемо суцільною лінією.



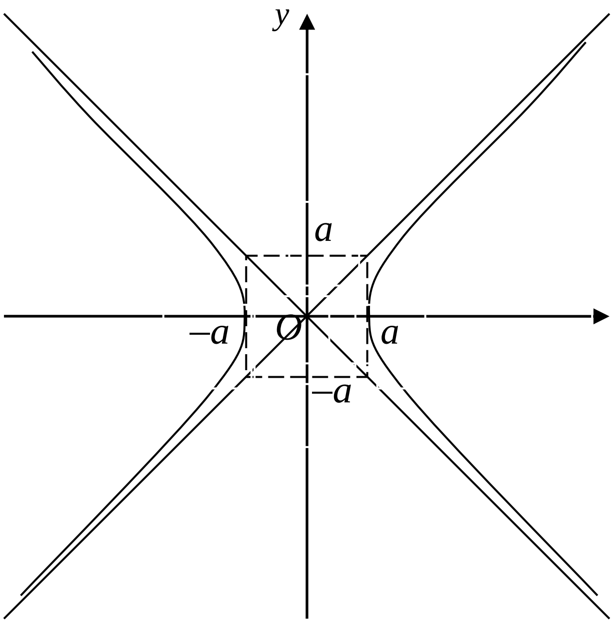
5. Рівняння вигляду $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ визначає гіперболу, спряжену до гіперболи

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

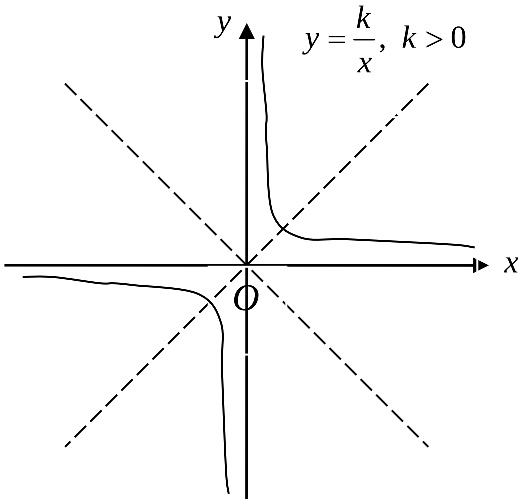
На рисунку ця гіпербола нанесена пунктиром. У неї дійсна вісь Oy.



6. Зауважимо, що графік гіперболи $y=\frac{1}{x}$ отримуємо з графіка рівносторонньої (вивчалась в школі) гіперболи $x^2-y^2=a^2$ (допоміжний прямокутник – квадрат) шляхом повороту її на кут 45^0.



$x^2-y^2=a^2$



7. Важливі характеристики. Ексцентриситет та директриси.

О.1. ***Ексцентриситетом*** гіперболи називається величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$, де c - півфокусна відстань, a - величина дійсної півосі.

$$\varepsilon>1, \text{ бо } c>a.$$

О.2. ***Директрисами*** гіперболи називається пара прямих, перпендикулярних дійсній осі, рівняння яких $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

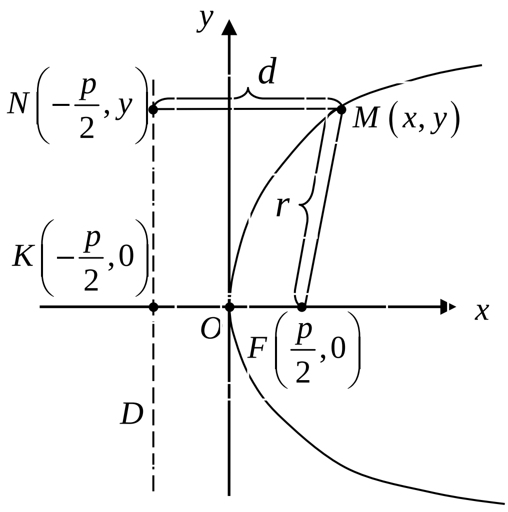
Директриси гіперболи розташовані лівіше правої вершини і правіше лівої вершини відповідно, тобто між гілками гіперболи.

III. Парабола

О. ***Параболою*** називається геометричне місце точок $M(x,y)$, однаково віддалених від точки F, яка називається фокусом і прямої D, яка називається директрисою.

Позначення: відстань $\rho(F,D)=p>0$ - параметр параболи.

Виберемо систему координат так, щоб $F\in$ осі Ox, $D\perp$ осі Ox, точка O ділила відстань між F і D навпіл.



Точка $M(x, y) \in$ параболі.

Згідно означення $r = d$.

Запишемо r і d як відстані між двома точками

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Піднісши до квадрата, маємо:

$$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$$

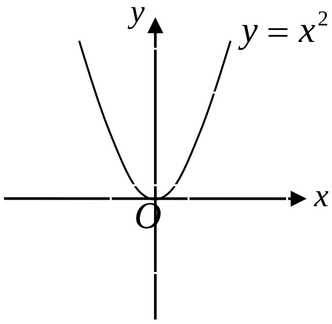
$y^2 = 2px$ (1), $p > 0$ - канонічне рівняння параболи

Дослідження форми параболи

1. Графік симетричний відносно осі Ox (бо y в парному степені).
2. Т. $O(0,0) \in$ графіку (це вершина параболи).
3. З рівняння $y^2 = 2px$ випливає, що $x \geq 0$, бо $y^2 \geq 0, p > 0$.
4. Розв'язавши рівняння $y^2 = 2px$ відносно y, та знайшовши похідну, побачимо, що в І чверті, при $x > 0$ функція зростає ($y' > 0$).
5. Наносимо графік в І чверті і по симетрії переносимо в IV чверть.
6. Рівняння параболи може задаватись у вигляді: $x^2 = 2py$ (2).

Графік симетричний відносно осі Oy.

З (2) $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2p}x^2$, $p > 0$ (ця функція вивчалась в школі).



7. Ексцентриситет параболи $\varepsilon = \dfrac{r}{d} = 1$. Парабола має одну директрису $x = -\dfrac{p}{2}$.

Отже, для вивчених кривих значення ексцентриситету таке:

$0 \le \varepsilon < 1$ - еліпс, $\varepsilon = 0$ - коло.

$\varepsilon > 1$ - гіпербола

$\varepsilon = 1$ - парабола.

По цій характеристиці, якщо вона задана, можна розпізнавати, яка крива розглядається.

IV. Загальне рівняння кривої другого порядку.

Вигляд рівняння:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \qquad (1)$$

де A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

За виглядом рівняння (1) визначають тип кривої 2-го порядку, а саме складають визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \ .$$

Якщо $\Delta > 0$ - крива еліптичного типу;

$\Delta < 0$ - крива гіперболічного типу;

$\Delta = 0$ - крива параболічного типу.

Відомо що, якщо виконати поворот на деякий кут (спеціально підібраний), то можна в рівнянні (1) позбавитися доданку з добутком xy. Тоді рівняння прийме вигляд:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ . \qquad (2)$$

Від рівняння (2) за допомогою паралельного перенесення системи координат можна перейти до одного з дев'яти вказаних нижче рівнянь (це робиться за допомогою виділення повних квадратів у рівнянні (2), заміною змінних):

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{еліпс})\\&2)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\ (\text{точка } O(0,0))\\&3)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1\ (\varnothing, \text{уявний еліпс})\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\text{це фігури еліптичного типу,}\\ \Delta>0\end{matrix};$$

$$\left.\begin{aligned}&4)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \text{або}\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\ (\text{гіпербола})\\&5)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\ (\text{пара прямих, які перетинаються})\\&\ \ \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\text{це фігури гіперболічного типу,}\\ \Delta<0\end{matrix}$$

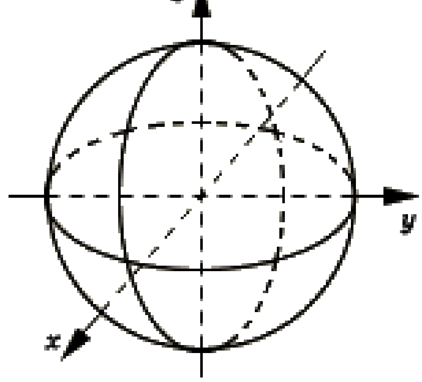
$$\left.\begin{aligned}&6)\ y^2=2px\ \text{або}\ x^2=2py\ (\text{парабола})\\&7)\ y^2=a^2\Rightarrow y=\pm a\ (\text{паралельні прямі})\\&8)\ y^2=0\Rightarrow y=0\ (\text{співпавші прямі})\\&9)\ y^2=-a^2,\ \varnothing\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\text{це фігури параболічного типу,}\\ \Delta=0\end{matrix}.$$

Отже, рівняння (1) подається у вигляді дев'яти вказаних типів рівнянь, в яких задіяні вказані канонічні рівняння кривих другого порядку. Це дало можливість ввести вказану класифікацію.

2.3. Поверхні другого порядку

Ідея розглядання поверхні другого порядку полягає у тому, що задається рівняння поверхні і для її зображення використовується метод перерізів. Згідно з цим методом робиться переріз поверхні координатними площинами і площинами, паралельними координатним. На основі цього робиться зображення поверхні.

Сфера



Рівняння сфери: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, де R – радіус сфери.

Еліпсоїд

Рівняння еліпсоїда: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1),
де a, b, c – задані додатні числа, півосі еліпсоїда.
Дослідження форми проводимо методом перерізів

1) z = 0 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – еліпс
2) y = 0 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – еліпс
3) x = 0 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – еліпс

4) z = h

(1) => $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ (2)

Випадок 1: $|h|>c;\ 1-\frac{h^2}{c^2}<0$

$(2) => \emptyset$

Випадок 2: $|h|<c;\ 1-\frac{h^2}{c^2}=k^2>0$

$(2) => \frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1$ – еліпс

$\tilde{a}=ka;\ \tilde{b}=kb;$

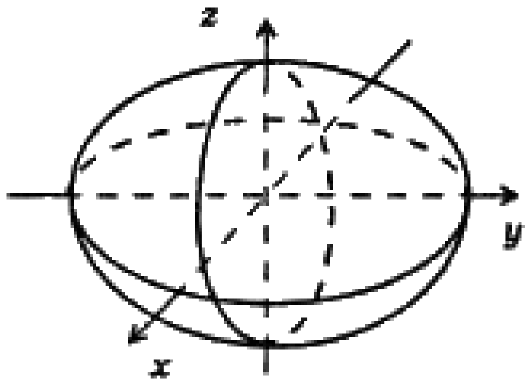
Випадок 3: $|h|=c$

$1-\frac{h^2}{c^2}=0$

$(2) => \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара точок: $(0;0;\pm c)$

5-6) Формули для $x=h,\ y=h$ виводяться аналогічно

7) Якщо $c=b=a$, то маємо $x^2+y^2+z^2=a^2-$ рівняння сфери



Гіперболоїди (Однопорожнинний; двопорожнинний)

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= 1$ (1)

(1) – рівняння **однопорожнинного гіперболоїда**.

a, b, c – задані додатні числа, півосі

1) z = 0 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}= 1$ - еліпс;

2) y = 0 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}= 1$ - гіпербола; (Ox – дійсна вісь)

3) x = 0 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= 1$ - гіпербола; (Oy – дійсна вісь)

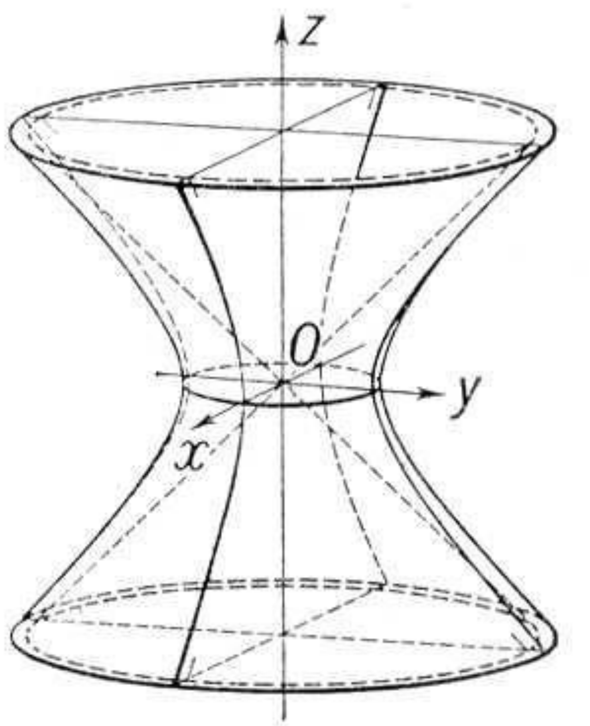
4) z = h

(1) => $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}= 1+\frac{h^2}{c^2}$ (2)

$1+\frac{h^2}{c^2}=k^2>0$

(2) => $\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1$ – еліпс

$\tilde{a}=ka$; $\tilde{b}=kb$;



Б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (1)

(1) – рівняння **двопорожнинного гіперболоїда**.

a, b, c – задані додатні числа, півосі

1) z = 0 $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ -\ \emptyset$

2) y = 0 $\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ - гіпербола; (Oz – дійсна вісь)

3) x = 0 $\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гіпербола; (Oz – дійсна вісь)

4) z = h $\quad$ (1) => $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$ (2)

Випадок 1: | h | > c $\quad \frac{h^2}{c^2}-1=k^2>0$

(2) => $\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1$ – еліпс

$\tilde{a}=ka$; $\tilde{b}=kb$;

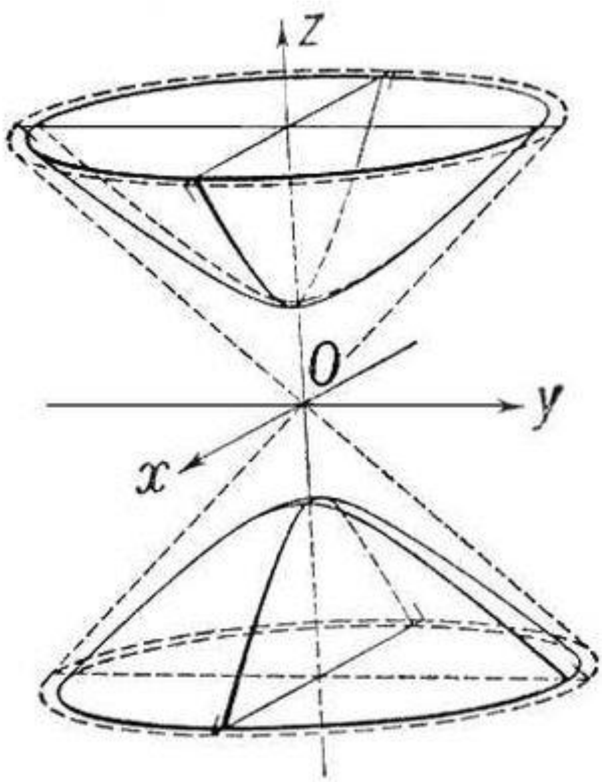
Випадок 2: h | < c $\quad \frac{h^2}{c^2}-1<0$

(2) => $\emptyset$

Випадок 3: | h | = c;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара точок: $(0;0;\pm c)$

5-6) Формули для $x=h,\ \ y=h$ виводяться аналогічно



Конус

Рівняння конуса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= 0$ (1)), де a, b, c – задані додатні числа півосі

1) z = 0

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}= 0$ – точка з координатами (0;0;0)

2) y = 0 $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}= 0$;

$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}$; $\quad z = \pm\frac{c}{a}x$ - пара прямих, які перетинаються у початку координат

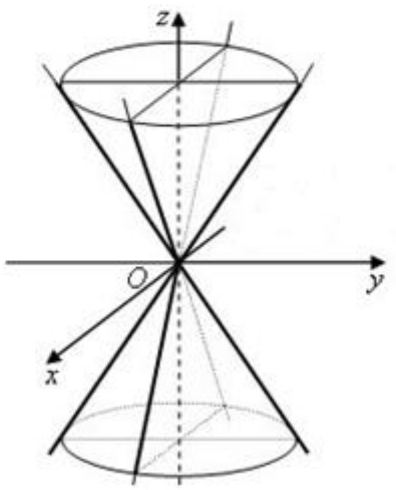
3) x = 0 $\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= 0$ - пара прямих

4) z = h (1) => $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}= \frac{h^2}{c^2}$ (2)

$\frac{h^2}{c^2} = k^2 > 0$

(2) => $\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}= 1$ – еліпс

5-6) Формули для $x = h, \;\; y = h$ виводяться аналогічно



Параболоїди (еліптичний; гіперболічний)

A) Еліптичний параболоїд

$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (1), де p, q – задані числа одного знака, тобто pq > 0

Для визначеності покладаємо p > 0; q > 0.

1) z = 0

   $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$ –точка (0,0,0).
2) y = 0

   $x^2 = 2pz$ - парабола напрямлена гілками вгору.
3) x = 0

   y2 = 2qz - парабола напрямлена гілками вгору.
4) z = h

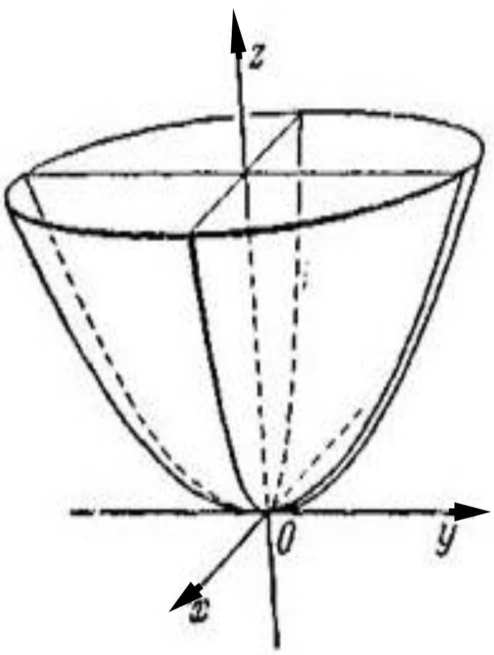
   $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h$ (2)

   Випадок 1: h > 0

   (2) => $\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1$ – еліпс

   Випадок 2: h < 0

   (2) => $\emptyset$



5-6) Формули для $x = h, \; y = h$ виводяться аналогічно

Б) **Гіперболічний параболоїд**

$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (1), де p, q – задані числа одного знака

Для визначенності покладаємо: p > 0, q > 0.

1) z = 0

$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ – пара прямих, що перетинаються у точці (0,0,0)

2) y = 0

$x^2 = 2pz$ – парабола, напрямлена вгору

3) x = 0

$y^2 = -2qz$ – парабола, напрямлена вниз

4) z = h

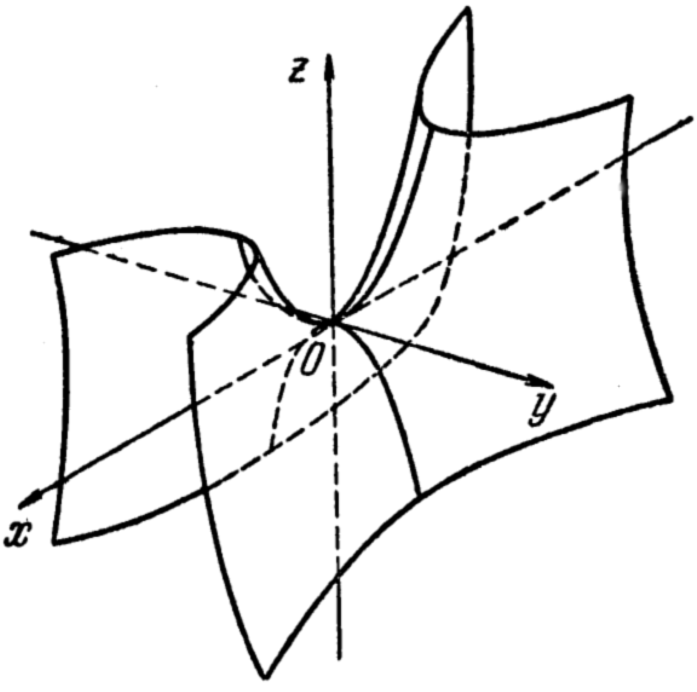
(1) => $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \;\; | : 2h \neq 0$

$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$ (2)

h > 0 – гіпербола, дійсна вісь паралельна Ox

h < 0 – гіпербола , дійсна вісь || Oy

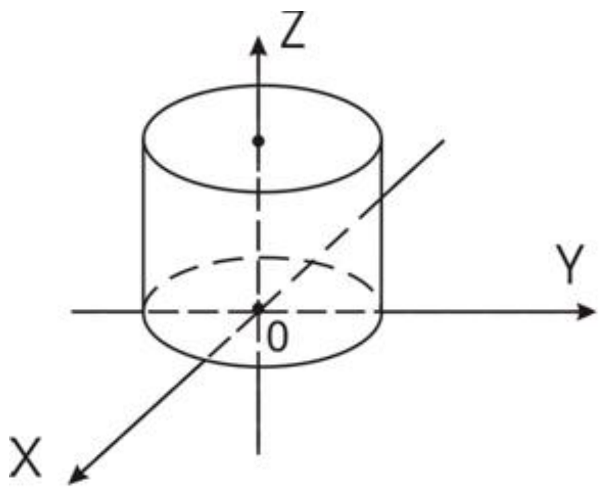
5-6) Формули для $x = h, \; y = h$ виводяться аналогічно



Циліндри

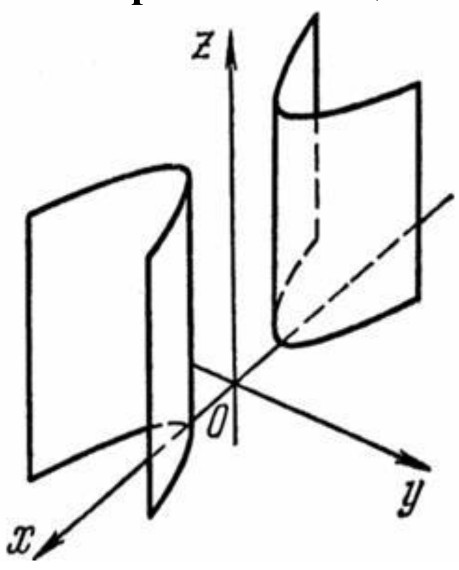
A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \forall z$ (1)

(1) – рівняння **еліптичного циліндра**



Б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \forall z$ (2)

(2) – рівняння **гіперболічного циліндра**



В) $y = 2px, \forall z$ (3)

(3) – рівняння **параболічного циліндра**