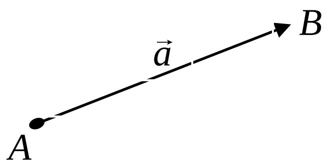
Розділ 1. Векторна алгебра

Основні поняття

I. Розкладання вектора за базисом

О.1. ***Вектором*** (геометричним вектором) називається сукупність напрямлених відрізків, що мають однакову довжину і напрямок.

Позначення: $\vec{a},\ \overrightarrow{AB}$.



З означення випливає, що вектори можуть переміщуватись паралельно самим собі у просторі, тобто розглядаються так звані *вільні* вектори.

О.2. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних.

Позначення: $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

О.3. Три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називаються ***компланарними***, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах. Спеціального позначення немає.

О.4. ***Базисом* у просторі** називається упорядкована трійка некомпланарних векторів $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$; **базисом на площині** – упорядкована пара неколінеарних векторів $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$; ***базисом* на прямій** - будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$, що належить прямій.
Вектори, що складають базис, називаються ***базисними*.**

В подальшому будемо позначати: простір R^3; площина R^2; пряма R.

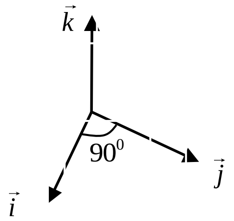
Т. Будь-який вектор $\vec{a}\in R^3$, може бути поданий у вигляді:

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\overrightarrow{e_i}\,,\quad (1)$$

де $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ - базис; a_i - деякі числа – координати вектора в даному базисі.

Коротко: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

О.5. Базис $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ називається ***ортонормованим***, якщо складаючи його вектори ортогональні (взаємно перпендикулярні) та нормовані (мають одиничну довжину).
У цьому випадку прийнято позначення базисних векторів: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Ці базисні вектори називаються ***ортами*.** (орт $\vec{i}$, орт $\vec{j}$, орт $\vec{k}$). Їх координати такі:
$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$.



Якщо $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right),\ \vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, то

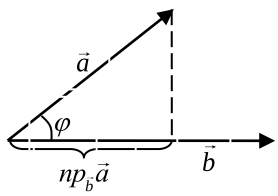
$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\right)$$

$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right),\ \lambda\in R.$$

II. Проекція вектора на вектор

<u>О.6.</u> Проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається число $np_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi,\ \varphi=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$.

Аналогічно $np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$.



III. Орієнтація системи векторів

Введемо поняття орієнтації системи векторів.
Нехай задано 3 некомпланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, зведені до одного початку.

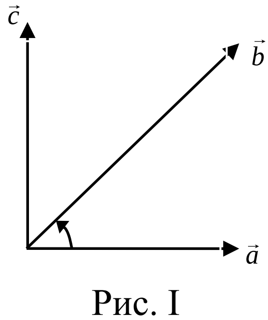


Рис. I

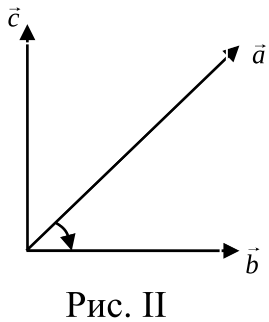


Рис. II

<u>О.7.</u> Кажуть, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ***праву трійку***, якщо ***найкоротший поворот*** від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки, коли дивитися з кінця вектора $\vec{c}$. В противному разі – **ліву**.
Згідно з означенням: на рис. I – права трійка, на рис. II – ліва.

IV. Лінійна залежність векторів.

О.1. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються ***лінійно залежними***, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не всі рівні нулю, що виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{a_i} = 0. \qquad (1)$$

Якщо співвідношення (1) виконується, коли всі $\alpha_i = 0$, то вектори називаються ***лінійно незалежними***.

Доведено, що у випадку лінійної залежності векторів хоча б один з них подається у вигляді лінійної комбінації інших.

Наприклад,

$$\overrightarrow{a_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \overrightarrow{a_i} = \gamma_1 \overrightarrow{a_1} + \gamma_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \gamma_{k-1} \overrightarrow{a_{k-1}}, \qquad (2)$$

де γ_i - деякі числа. Ліва частина співвідношення (2) є лінійною комбінацією вказаних векторів

<u>Приклад 1</u>. Довести, що колінеарні вектори $\overrightarrow{a_1}$ та $\overrightarrow{a_2}$ лінійно залежні.

Доведення. З умови колінеарності векторів випливає відоме співвідношення для колінеарних векторів:

$$\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2} \Rightarrow \overrightarrow{a_2} = \gamma_1 \overrightarrow{a_1}.$$

Це є виразом (2) для двох векторів. Отже, колінеарні вектори – лінійно залежні.

<u>Приклад 2.</u> Довести, що базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ лінійно незалежні.

Доведення.

Скористаємось співвідношенням (1) для заданих в умові векторів:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overrightarrow{a_i} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} = 0. \qquad (3)$$

Доведемо, що співвідношення (3) виконується, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = 0.$$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = 0.$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 = (0,0,0).$$

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0.$$

Отже, доведено, що базисні вектори лінійно незалежні.

За означенням у просторі R^3 базисні вектори некомпланарні.

<u>Висновок:</u> Маємо рівносильність тверджень:

«базисні вектори» $\Leftrightarrow$ «лінійно незалежні вектори» $\Leftrightarrow$ «некомпланарні вектори».

Добутки векторів

І. Скалярний добуток векторів

<u>О</u>. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \quad (1)$$

де $\varphi=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$.

Інші позначення: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

З формули (1) $\Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$. (2)

Враховуючи, що $np_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi$

$np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$,

маємо $\left.\begin{array}{l}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}\\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}\\ np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|}\end{array}$. (3)

Властивості скалярного добутку векторів

1^0. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ - комутативний закон.

2^0. $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right),\ \alpha\in R$ - асоціативний закон.

3^0. $\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ - дистрибутивний закон.

4^0. Скалярний добуток ортів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \qquad \left(\vec{i}\cdot\vec{i}=\underbrace{\left|\vec{i}\right|}_{1}\cdot\underbrace{\left|\vec{i}\right|}_{1}\cdot\cos 0=1\right)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0 \qquad \left(\vec{i}\cdot\vec{j}=\underbrace{\left|\vec{i}\right|}_{1}\cdot\underbrace{\left|\vec{j}\right|}_{1}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0\right).$$

5^0. Скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами:

$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right),\ \ \vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)$.

Перемноживши за правилами множення многочлена на многочлен, та враховуючи властивість 4^0, отримаємо:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \quad (4)$$

6^0. Вираження довжини вектора через скалярний добуток.

Покладемо в (4) $\vec{b}=\vec{a}$:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2\\&\left(\vec{a},\vec{a}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \quad (5)$$

7^0. Умова перпендикулярності векторів.

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ або

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

(справедливо, бо $\cos 90^0=0$).

Застосування скалярного добутку

1. Знаходження $\cos\varphi$ - формула (2), $np_{\vec{b}}\vec{a},\ np_{\vec{a}}\vec{b}$ - формула (3), довжини вектора - формула (5).
2. Знаходження напрямку вектора $\vec{a}$. Напрямок вектора характеризується напрямними косинусами: $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$, $\alpha=\left(\vec{a},\widehat{\ }\ \vec{i}\right)$, $\beta=\left(\vec{a},\widehat{\ }\ \vec{j}\right)$, $\gamma=\left(\vec{a},\widehat{\ }\ \vec{k}\right)$.

   Нехай $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$; $\vec{i}=\left(1,0,0\right)$, $\vec{j}=\left(0,1,0\right)$, $\vec{k}=\left(0,0,1\right)$.

   Скористаємося формулою (2): $\cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$;

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{i}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{x}{|\vec{a}|};\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|};\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

   Можна перевірити, що $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

<u>Приклад.</u> Обчислити скалярний добуток векторів. $\vec{a}=\left(3,2,0\right)$, $\vec{b}=\left(6,5,4\right)$.

<u>Розв'язання</u>:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot6+2\cdot5+0\cdot4=18+10+0=28.$$

II. Векторний добуток векторів

<u>О.</u> ***Векторним добутком*** векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

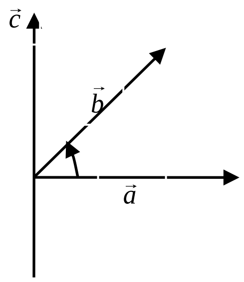
1) Довжина вектора $\vec{c}$ $\quad |\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ (1), $\varphi=\left(\vec{a},\widehat{\ }\ \vec{b}\right)$.

2) Вектор $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$.

3) Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Позначення: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

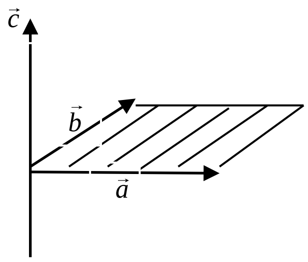
Геометрична інтерпретація:



Аналізуємо:

2) виконано; 3) виконано.

1) з шкільного курсу відомо, що $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = S_{парал.}$ - площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.



Отже, $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{пар.}$ (2).

Очевидно, що $S_{тр.} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ (3).

<u>Властивості векторного добутку</u>

1^0. $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$ (антикомутативність).

Доведення випливає з того, що вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ і вектор $\vec{c}_1 = \vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові довжини та різні напрямки.

2^0. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}, \vec{b}\right],\ \alpha \in R$ - асоціативний закон.

3^0. $\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$ - дистрибутивний закон.

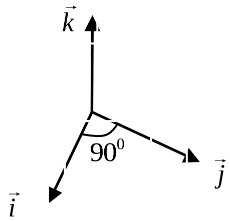
4^0. Векторний добуток ортів.

З означення випливає:

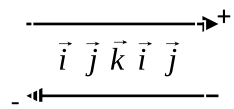
$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$, (бо $\sin 0=0$)

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ (за властивістю 1^0)



Правило для запам'ятовування:



5^0. Векторний добуток векторів, заданих своїми координатами:

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$\vec{a}\times\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$.

Перемножуємо за правилом множення многочлена на многочлен, далі враховуємо властивість 4^0. Після перетворень отримаємо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \quad (4)$$

Формула (4) – основна формула для обчислення векторного добутку.

6^0. **Умова колінеарності** векторів:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0 \quad \text{або} \quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

(справедливо, бо $\sin 0=\sin\pi=0$).

Зауважимо, що векторний добуток застосовується для обчислення площ паралелограма та трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (формули (2), (3)).

__**Приклад.**__ Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}=(3,2,0),\ \vec{b}=(6,5,4)$.

Розв'язання:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 0\\ 6 & 5 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot A_{11}+\vec{j}\cdot A_{12}+\vec{k}\cdot A_{13}=$$

$$=\vec{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix}+\vec{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=8\vec{i}-12\vec{j}+3\vec{k}=(8,\ -12,\ 3).$$

ІІІ. Мішаний добуток векторів

О. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається векторний добуток двох з них, помножений скалярно на третій, тобто $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Інші позначення: $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Мішаний добуток векторів – це число.

Нехай $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right),\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right),\vec{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\left(x_3,y_3,z_3\right)=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)\cdot\left(x_3,y_3,z_3\right)=$$

$$=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix};\ (*)$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.\ (1)$$

Якщо (1) розкласти за елементами 3-го рядка, то отримаємо вираз (*).

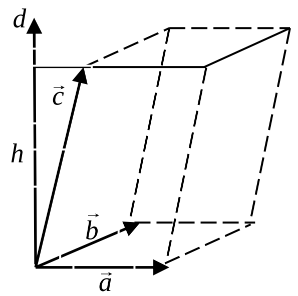
Геометричний зміст мішаного добутку векторів

Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарні. Зведемо їх до одного початку і побудуємо на них паралелепіпед.

Доведемо, що об’єм паралелепіпеда обчислюється за формулою:

$$V_{пар}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\right|$$

або в інших позначеннях: $V_{пар}=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.



Доведення.

$$\underbrace{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}_{\vec{d}}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\underbrace{\left|\vec{d}\right|}_{S_{пар}}\cdot\underbrace{\left|\vec{c}\right|\cos(\vec{c},\hat{\ }\vec{d})}_{np_{\vec{d}}\vec{c}}=S_{пар}\cdot np_{\vec{d}}\vec{c}=S_{пар}\cdot\left(\pm h\right)=\pm S_{пар}\cdot h=\pm V_{парал},$$

«+», якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку; «-», якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ліву трійку.

Отже, $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\pm V$; $V_{пар}=\pm\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c$; $V_{парал}=\left|\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c\right|$;

$$V_{пір}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)\right|.$$

<u>Властивості мішаного добутку</u>

1^0. $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=-\left(\vec b\times\vec a\right)\cdot\vec c$ (випливає з антикомутативності векторного добутку).

2^0. $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\left(\vec b\times\vec c\right)\cdot\vec a$

$$\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=\left(\vec b\times\vec c\right)\cdot\vec a\,.$$

Висновок: кругова перестановка векторів вправо не змінює мішаного добутку.

3^0. $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\left(\vec b\times\vec c\right)\cdot\vec a=\vec a\cdot\left(\vec b\times\vec c\right)$

переставили $\vec a$, бо для скалярного
добутку має місце комутативний закон

Отже, $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\vec a\cdot\left(\vec b\times\vec c\right)$.

Висновок: знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями.

Саме із-за цього існує позначення: $\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)$.

4^0. Враховуючи наведені властивості, записуємо ланцюжок рівностей:

$$\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)=\left(\vec b,\vec c,\vec a\right)=\left(\vec c,\vec a,\vec b\right)=-\left(\vec b,\vec a,\vec c\right)=-\left(\vec c,\vec b,\vec a\right)=-\left(\vec a,\vec c,\vec b\right).$$

Правило для запам'ятовування:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad}\ + \\ \vec a\ \vec b\ \vec c\ \vec a\ \vec b \\ -\ \xleftarrow{\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

5^0. **Умова компланарності** векторів:

$\vec a,\vec b,\vec c$ - компланарні $\Leftrightarrow\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)=0$ або $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0$.

Випливає з того, що у випадку компланарності векторів – вони належать площині – об'єм паралелепіпеда =0.

6^0. Якщо вектори $\vec a,\vec b,\vec c$ утворюють базис, то $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\neq 0$,

бо за означенням ці вектори некомпланарні.

<u>Приклад.</u> Обчислити мішаний добуток векторів
$\vec{a}=(3,2,0)$, $\vec{b}=(6,5,4)$, $\vec{c}=(1,0,-1)$.

Розв'язання:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 5 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-15+0+8-0+12-0=5.$$

<u>IV. Подвійний векторний добуток.</u>

О. Подвійним векторним *добутком* векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається векторний добуток двох із них, помножений векторно на третій.

Наприклад, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$; $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Інші позначення: $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$; $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

Подвійний векторний добуток є вектором.

Доведено, що подвійний векторний добуток виражається за допомогою скалярного добутку таким чином:

$$\vec{f}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c}),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}).$$

Правило: подвійний векторний добуток дорівнює середньому вектору в дужках, помноженому скалярно на два інших, минус крайньому вектору в дужках, помноженому скалярно на два інших.

Враховуючи, що скалярні добутки це числа, видно, що кожний з наведених вище подвійних векторних добутків є вектором, поданим у вигляді різниці двох векторів.

Пояснення. Позначимо

$$\alpha=(\vec{b},\vec{c}),\ \beta=(\vec{a},\vec{c})$$

Тоді вектор $\vec{f}=\beta\vec{b}-\alpha\vec{a}$, тобто подається у вигляді різниці двох векторів, а отже вектори $\vec{f},\vec{a},\vec{b}$ належать одній площині.

При круговій перестановці векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ у подвійному векторному добутку приходимо до трьох різних векторів:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c}),$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=\vec{c}(\vec{b},\vec{a})-\vec{b}(\vec{c},\vec{a}),$$

$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}(\vec{c},\vec{b})-c(\vec{a},\vec{b}).$$