Міністерство освіти і науки України
Національний центр «Мала академія наук України»
LIX Всеукраїнська учнівська олімпіада з фізики, м. Львів, 2025
Теоретичний тур, 10-й клас

Умови та розв'язки

1. «Доплер-трамваї»

Два однакові швидкісні трамваї їдуть назустріч один одному і час від часу подають сигнали на однаковій частоті ν_0. Водії кожного з трамваїв вимірюють частоту прийнятих ними сигналів від іншого трамваю мобільними телефонами.

Коли трамваї зближувалися, водій першого трамваю фіксував частоту $\nu_1 = 2323.2$ Гц сигналу від другого. Коли ж трамваї вже роз'їхалися, частота звуку сигналу від другого трамваю суттєво впала з ν_1 до $\nu'_1 = 1694.0$ Гц. Водій другого трамваю в цей самий час побачив, що частота сигналів від першого трамваю склала $\nu'_2 = 1687.5$ Гц. Вважати, що в обох випадках відстань між трамваями була набагато більшою за відстань між коліями.

А. **Знайдіть частоту сигналів** ν_0

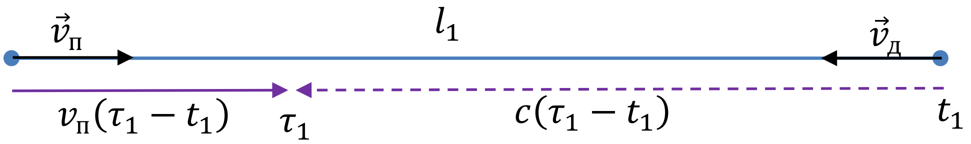
Б. Знайдіть швидкості трамваїв, уважаючи, що швидкість звуку у повітрі дорівнює 330 м/с.

В. **Дайте відповіді на питання А і Б,** врахувавши, що весь час в напрямку руху першого трамваю дув вітер зі швидкістю 4 м/с.

Підказка: Коли відстань між джерелом сигналів і приймачем зменшується, приймач реєструє коротший проміжок часу між сигналами, а коли збільшується – більший. Так само змінюється і період звукових хвиль.

Розв'язання.

А. Розглянемо джерело сигналів і приймач, які рухаються назустріч один одному зі швидкостями $v_д$ і $v_п$. Нехай відстань між ними в момент часу t_1 відправлення сигналу дорівнює l_1. В момент часу τ_1 приймач отримує сигнал. Тоді відстань l_1 приймач і сигнал подолали разом за час $\tau_1 - t_1$ (див. Рис.),тобто



$$l_1 = (v_п + c)(\tau_1 - t_1).$$

Для другого сигналу, який був відправлений джерелом у момент часу t_2, можна записати аналогічне рівняння

$$l_2 = (v_п + c)(\tau_2 - t_2).$$

За час $\Delta t = t_2 - t_1$ між відправленням першого і другого сигналів відстань між приймачем і джерелом скоротилася на $(v_п + v_д)(t_2 - t_1)$. Віднімаємо від $l_1 - l_2$ і отримуємо:

$$(v_п + c)(\Delta t - \Delta\tau) = (v_п + v_д)\Delta t.$$

З цього рівняння виражаємо інтервал часу $\Delta\tau$ між отриманням двох сигналів приймачем через інтервал часу між їх надсиланням джереломΔt.

$$\Delta\tau = \frac{c - v_д}{c + v_п}\Delta t.$$

Якщо під Δt і $\Delta\tau$ розуміти періоди звукової хвилі, то зв'язок частот, обернених до періоду величин, матиме вигляд:

$$\nu = \nu_0 \frac{c + v_п}{c - v_д}.$$

Зміну частоти внаслідок взаємного руху називають ефектом Доплера.

У нашому випадку ефект Доплера для всіх трьох випадків:

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{1 + v_1/c}{1 - v_2/c}, \quad \nu'_1 = \nu_0 \frac{1 - v_1/c}{1 + v_2/c}, \nu'_2 = \nu_0 \frac{1 - v_2/c}{1 + v_1/c}.$$

З першого і третього рівнянь відразу знаходимо $\nu_0 = \sqrt{\nu_1 \nu'_2} = 1980$ Гц.

Б. З першого і другого рівнянь з урахуванням ν_0 знаходимо швидкості трамваїв: $v_1 = 22$ м/с, $v_2 = 30$ м/с.

В. Знайдені у п. **Б.** швидкості є насправді швидкостями відносно систему відліку «повітря», яка рухається вздовж напрямку руху першого трамваю з $v = 4$ м/с. Тоді відносно землі перший трамвай мав рухатись зі швидкістю $u_1 = v_1 + v = 26$ м/с, а другий йому назустріч зі швидкістю $u_2 = v_2 - v = 26$ м/с. Отже, виходить, що трамваї рухались з однаковими швидкостями.

Відповідь на питання **А** залишиться без змін $\nu_0 = \sqrt{\nu_1 \nu'_2} = 1980$ Гц.

2. «Клубок ~~нервів~~ резисторів»

Учениця знайшла клубок резисторів, з якого стирчать три контакти. Позначимо їх A, B, C. Щоб дослідити цей клубок вона увімкнула джерело невідомої постійної напруги між контактами AB та амперметр між контактами AC. Амперметр показав струм $\boldsymbol{I_1}$. Не відключаючи джерело, учениця увімкнула цей самий амперметр між контактами BC, і він показав такий самий струм $\boldsymbol{I_1}$. Нарешті, вона увімкнула цей амперметр послідовно з джерелом між контактами AB. Тепер амперметр показав інший струм $\boldsymbol{I_2}$.

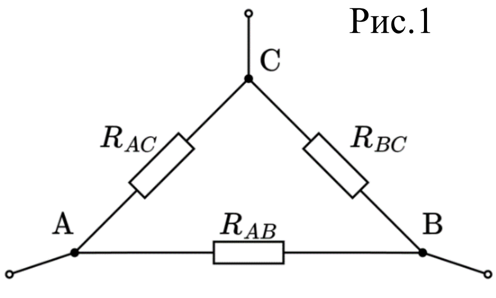
Уважаючи амперметр та джерело ідеальними, знайдіть **силу струму,** який протікатиме через амперметр, якщо його увімкнути послідовно з джерелом між контактами BC.

Підказка*. Можна змоделювати клубок резисторів схемою з мінімально можливою їх кількістю.*

Розв'язання.

Для будь-якої комбінації резисторів, що має два виходи (позначимо їх X та Y), можна порахувати загальний опір між виходами XY – R_{XY}. Тоді в усіх експериментах, де використовуються тільки ці два виходи XY, комбінація резисторів буде вести себе як один резистор з опором R_{XY}.[1]

Рис.1



---

[1]Це допомогою законів Кірхгофа. Рівняння Кірхгофа для резисторів – лінійні, в ході розв'язку цих рівнянь, лінійність можна довести, наприклад, за залишиться і кінцевий результат теж виявиться лінійним. Більше того, вийде, що загальна напруга між точками XY, пропорційна повному струму з коефіцієнтом R_{XY}. Це і означає, що комбінація резисторів еквівалентна одному резистору з опором R_{XY}.

Аналогічні міркування можна провести і для будь-якої комбінації (клубка) резисторів, що має три виходи – A, B, C. Але тепер підключитись можна трьома різними способами (AB, BC, AC), тому замінити все на один резистор не вийде, але вийде замінити на еквівалентні три резистори. Їх можна, наприклад, з'єднати у вигляді трикутника або зірки. Як добре відомо, існує зв'язок між трикутником та зіркою, тому можна обрати будь-яку конфігурацію, в цій задачі з'єднання у вигляді трикутника буде зручнішим.

Тобто клубок, який знайшла учениця в загальному випадку можна замінити на трикутник резисторів, як зображено на рисунку 1 – з трьох невідомих резисторів R_{AB}, R_{BC}, R_{AC}.

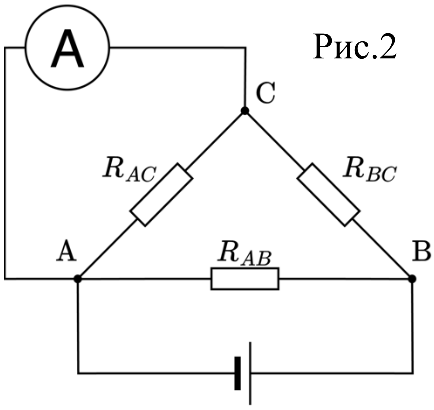


Рис.2

Тепер розглянемо випадки підключень джерела та амперметра які дослідила учениця.

На рисунку 2 зображений перший випадок – джерело до контактів AB, та амперметр до контактів AC. Оскільки амперметр ідеальний – його опір дорівнює нулю, тому через резистор R_{AC} струм текти не буде. Тоді легко побачити, що струм через амперметр дорівнює струму через резистор R_{BC}, та дорівнює

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{BC}},$$

де U_0 – невідома напруга ідеального джерела.

Аналогічно буде для випадку, коли амперметр підключений до контактів BC:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{AC}}.$$

Звідси випливає, що опори між точками AC та BC – однакові, позначимо їх як R:

$$R_{AC} = R_{BC} = R = \frac{U_0}{I_1}. \qquad (1)$$

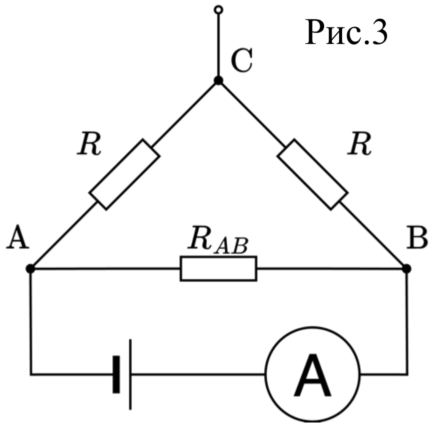


Рис.3

Тепер розглянемо третій випадок – коли амперметр послідовно з джерелом підключений до точок AB (див. рисунок 3). Із законів послідовного та паралельного з'єднань легко знайти струм через амперметр. Виходить

$$I_2 = \frac{U_0(2R + R_{AB})}{2RR_{AB}}.$$

На майбутнє виразимо з цього рівняння R_{AB}:

$$R_{AB} = \frac{U_0 2R}{2RI_2 - U_0},$$

підставляючи $R = \frac{U_0}{I_1}$, отримаємо

$$R_{AB} = \frac{2U_0}{2I_2 - I_1}. \qquad (2)$$

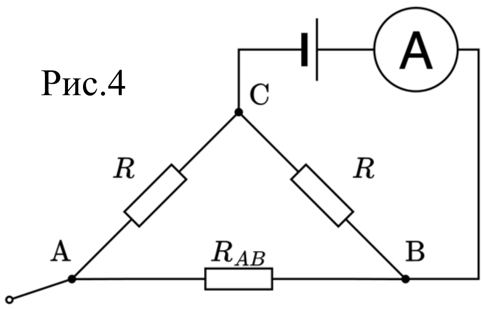
Разом рівняння (1) та (2) виражають всі три опори через напругу U_0 та струми I_1, I_2.

Тепер розглянемо останній випадок, в якому нам треба порахувати струм – коли амперметр послідовно з батарейкою підключений до контактів BC (див. рисунок 4).

Використовуючи закони послідовного та паралельного з’єднання легко знайти формулу для струму через опори резисторів та напругу джерела:

$$I = \frac{U_0(2R + R_{AB})}{R(R + R_{AB})}.$$

Рис.4



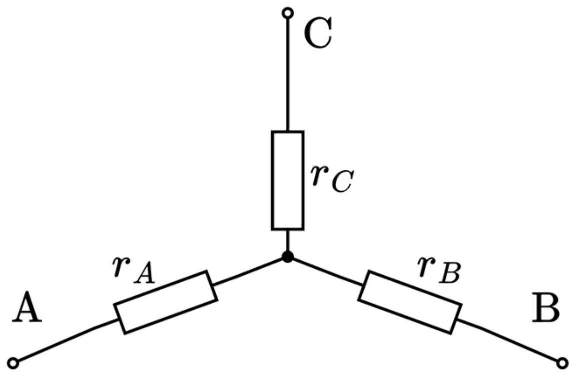
Підставимо в цю формулу, рівняння (1) та (2), отримаємо

$$I = \frac{U_0\left(2\frac{U_0}{I_1} + \frac{2U_0}{2I_2 - I_1}\right)}{\frac{U_0}{I_1}\left(\frac{U_0}{I_1} + \frac{2U_0}{2I_2 - I_1}\right)} = I_1\frac{2(2I_2 - I_1) + 2I_1}{2I_2 - I_1 + 2I_1} = \frac{4I_1I_2}{2I_2 + I_1}.$$

Відповідь: амперметр покаже струм $I = \frac{4I_1I_2}{2I_2+I_1}$, якщо його послідовно з джерелом підключити до контактів BC.

Другий спосіб

Клубок резисторів можна також замінити на зірку з резисторів. Позначимо їх r_A, r_B, r_C, відповідно до контактів до яких кожен резистор підключений (див. рисунок 5). З перших двох вимірів ми знаємо, що коли джерело підключене до контактів AB, амперметр підключений до контактів AC та BC дає однакові покази. Це означає, що вся схема симетрична відносно контактів A та B, отже і опори біля цих контактів мають бути однаковими $r_A = r_B = r$.



З простих правил послідовного та паралельного з’єднання можна виразити струм I_1 через опори r, r_C та невідому напругу джерела U_0:

$$I_1 = \frac{U_0}{2r_C + r}.$$

Аналогічно, розглянувши третій вимір – випадок коли амперметр послідовно з джерелом підключений до точок AB, вийде:

$$I_2 = \frac{U_0}{2r}.$$

З цього рівняння ми можемо виразити опір r:

$$r = \frac{U_0}{2I_2},$$

підставивши це у рівняння на I_1, можна виразити також опір r_C:

$$r_C = \frac{U_0}{2I_1} - \frac{U_0}{4I_2}.$$

Тепер, виразивши невідомі опори через напругу та струми, перейдемо до останнього випадку: амперметр послідовно з батарейкою підключений до контактів BC. В цьому випадку струм виходить

$$I = \frac{U_0}{r + r_C},$$

або підставляючи r та r_C:

$$I = \frac{U_0}{\frac{U_0}{2I_2} + \frac{U_0}{2I_1} - \frac{U_0}{4I_2}} = \frac{1}{\frac{1}{4I_2} + \frac{1}{2I_1}} = \frac{4I_1I_2}{I_1 + 2I_2}.$$

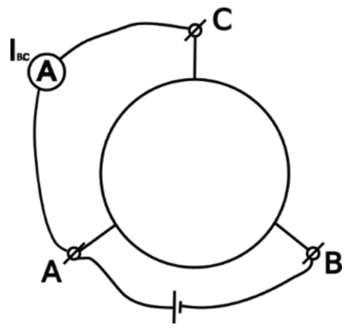
Тобто, як і очікувалось, відповідь не залежить від того, як розглядати клубок: як еквівалентний трикутнику чи зірці.

Частинний випадок, запропонований учасником олімпіади

Під час розв'язування цієї задачі один з учасників олімпіади інтерпретував підказку в умові як необхідність мінімізації можливої кількості резисторів і зумів змоделювати клубок навіть двома резисторами.

Це був Микола Ніколенко з Дніпра. Зазначимо, що його розв'язання не є загальним для довільних струмів I_1 та I_2, значення яких не було задане в умові. Учень знайшов окремий розв'язок для співвідношення струмів $I_1 = 2I_2$, що формально міститься в авторському. Що стосується кількості резисторів, то за цієї умови в авторському розв'язку для трикутнику $R_{AB} \to \infty$, а нескінченний опір інтерпретується як розрив ділянки, тобто відсутність третього резистора.

Наведемо цей адаптований розв'язок.

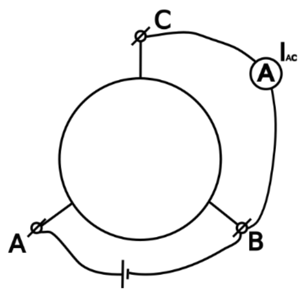


Розглянемо, як дівчина приєднувала джерело напруги та амперметр до клубка:

1) Оскільки амперметр ідеальний і має нульовий опір, він показуватиме струм через ділянку BC.

$$I_{BC} = I_1 = \frac{U}{r_{BC}}.$$

2) У другому випадку аналогічно

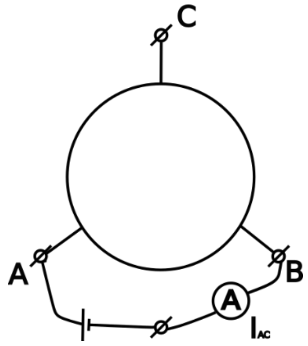


$$I_{AC} = I_1 = \frac{U}{r_{AC}},$$

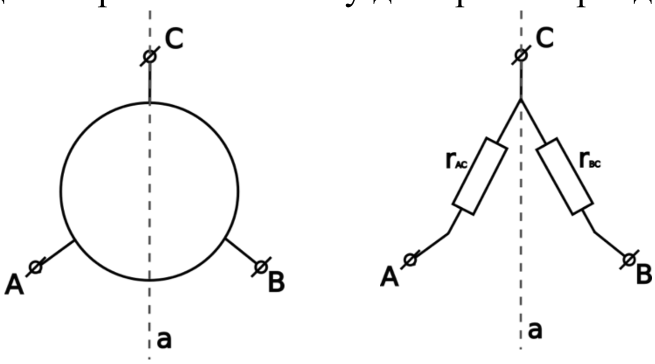
робимо висновок, що $r_{AC} = r_{BC}$. Отже опори клубка резисторів між точками A і C та B і C однакові.

3) Третє підключення має вигляд як на рисунку справа.

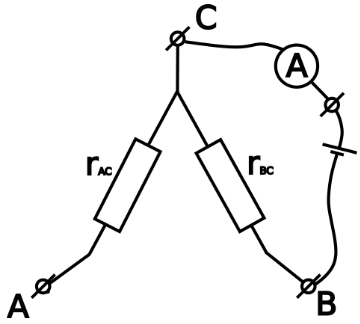
З цих трьох дослідів виходить, що система має вісь симетрії – a, вона проходить між точками A та B, та через точку C.



В підказці до завдання вказано, що потрібно використати мінімальну кількість резисторів. З одного резистора зробити модель не вийде, оскільки у нього всього дві точки, а в завданні три контакти. А у двох резисторів достатньо ніжок, щоб побудувати



таку схему. Розташуємо їх, дотримуючись симетрії:
Підключимо до схеми джерело та амперметр, як про це сказано в умові, дивись рисунок справа.

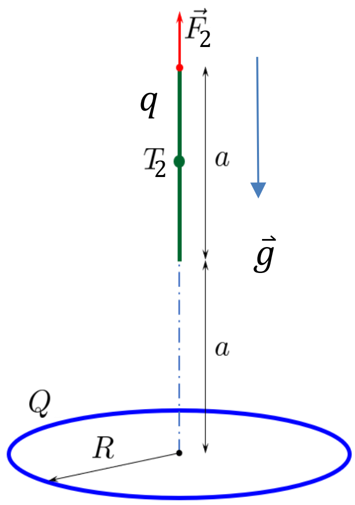


Тоді амперметр покаже струм $I' = \frac{U}{r_{BC}} = I_1$.

Відповідь: $I' = I_1$.

<u>3. «Гумова електростатика»</u>

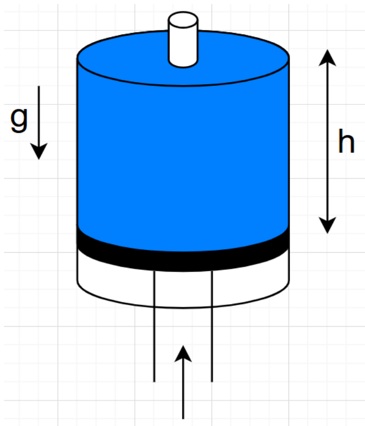
Гумове кільце радіуса ***R***, рівномірно заряджене зарядом ***Q***, зафіксоване в горизонтальній площині. Діелектричний важкий стрижень довжини ***a***, рівномірно заряджений по довжині зарядом ***q*** протилежного знаку, знаходиться на осі кільця на великій відстані від нього. Щоб утримувати стрижень в рівновазі, до його верхнього кінця прикладають силу $\boldsymbol{F_1}$, а сила натягу в його середині дорівнює $\boldsymbol{T_1}$. У другому експерименті стрижень пересунули так, що його нижній кінець опинився на висоті ***a*** від кільця. При цьому необхідна для утримання сила, прикладена до верхнього кінця стрижня, становила $\boldsymbol{F_2}$, а сила натягу в середині стрижня дорівнювала $\boldsymbol{T_2}$ (див. рис.). У третьому експерименті стрижень ще додатково піднімають на відстань ***a*** вгору, а гумове кільце розтягають удвічі. **Якою силою** можна тепер утримувати стрижень в рівновазі? Поляризацією матеріалу стрижня та його деформацією знехтуйте.



Розв'язання.

В першій ситуації сила, якою ми утримуємо стрижень, дорівнює силі тяжіння, що діє на стрижень, $F_1 = mg$. Розглянемо тепер умову рівноваги нижньої половинки стрижня: на неї діє вдвічі менша сила тяжіння, сила відштовхування F_e від верхньої половинки стрижня, направлена вниз, і сила натягу, направлена вгору. Отже, $T_1 = \frac{F_1}{2} + F_e$. В другій ситуації сила натягу в середній точці відрізняється від T_1 на величину сили притягання F_r нижньої половини стрижня до кільця, $T_2 = T_1 + F_r$. Для аналізу третьої ситуації скористаємось методом подібності. Хоча ми і не можемо написати у явному вигляді вираз для сили взаємодії кільця зі стрижнем (це можна зробити лише інтегруванням по довжині стрижня!), але ми все ж можемо порівняти цю силу у другій та третій конфігурації. Коли ми збільшили відстань від стрижня до кільця і радіус кільця удвічі, вся система *майже* залишилася подібно збільшеною удвічі: незмінною залишилася лише довжина стрижня. Але можна уявити, що його наростили до вдвічі більшої довжини (і заряду!), так що сам він є половинкою такого вдвічі збільшеного стрижня. При збільшенні всіх розмірів системи вдвічі сила взаємодії зменшиться в чотири рази. Окрім того, заряд вдвічі збільшеного стрижня вдвічі більший, тому сила взаємодії з ним буде лише у два рази меншою, а значить сила притягання між кільцем і самим стрижнем буде $F_r/2$. Це означає, що сила натягу в середині стрижня з другої ситуації дозволяє знайти повну силу, що діє на весь стрижень в третій. Тобто шукана сила становить $\boldsymbol{F_3 = F_1 + \frac{F_r}{2} = F_1 + \frac{T_2 - T_1}{2}}$.

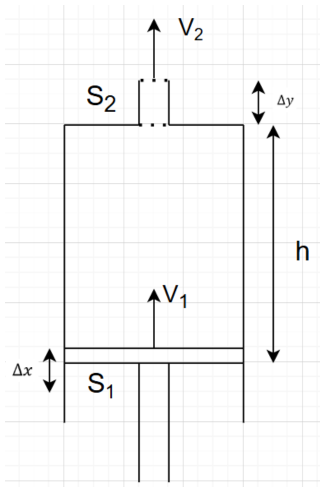
4. «Прискорений шприц»



Шприц з маленьким «носиком» повністю заповнили водою і утримують у вертикальному положенні з отвором від «носику» вгору, підтримуючи поршень шприца так, щоб вода не витікала. Висота води в шприці дорівнює $\boldsymbol{h}$, «носик» при цьому незаповнений, площа поперечного перерізу шприца дорівнює $\boldsymbol{S_1}$, площа перерізу «носика» $\boldsymbol{S_2}$ ($\boldsymbol{S_2}$ можна вважати набагато меншою за $\boldsymbol{S_1}$). На поршень почала діяти сила $\boldsymbol{F}$, спрямована вертикально вгору і більша за силу, потрібну для утримання його в нерухомому стані. Через деякий короткий час під її дією поршень починає рухатися з невеликим прискоренням. **Знайдіть величину цього прискорення, уважаючи його сталим.**

Поверхневими явищами, в'язкістю води та тертям між поршнем та стінками шприца знехтувати.

Розв’язання.



Застосуємо закон зміни енергії для води в шприці при зміщені поршня на невелику відстань Δx.

$$A_{\text{зовн}} = \Delta W_{\text{мех}},$$

де $A_{\text{зовн}} = F\Delta x$, а $\Delta W_{\text{мех}}$ – зміна механічної енергії води, яка складається із зміни потенціальної енергії води при підйомі води, та зміни кінетичної енергії внаслідок появи прискорення.

Закон зміни енергії вже для випадку, коли поршень підіймається в гору із певною швидкістю v_1 (при висоті стовпа рідини в шприці h´).

$$F\Delta x = \Delta x S_1 \rho h' g + \frac{\Delta x S_1 \rho v_2^2}{2} + \frac{(h' - \Delta x) S_1 \rho (v_1 + a\Delta t)^2}{2} - \frac{h' S_1 \rho v_1^2}{2}.$$

Перший доданок це зміна потенціальної енергії в полі сили тяжіння, другий доданок – кінетична енергія води в носику при витисканні в нього води зі шприца. Третій та четвертий доданки це різниця енергій всієї води у тубусі при зміщенні поршня на Δx. Будемо лишати лише доданки із першою ступінню малості. Тоді використаємо, що $\Delta x \approx v_1 \Delta t$.

$$Fv_1\Delta t = v_1\Delta t S_1\rho h' g + \frac{v_1\Delta t S_1\rho v_2^2}{2} + h' S_1\rho v_1 a\Delta t - \frac{v_1\Delta t S_1\rho v_1^2}{2}.$$

Останній доданок в правій частині значно менший за другий ($v_1^2 \ll v_2^2$). Ним можна знехтувати. Скоротимо на $v_1\Delta t$.

$$F = S_1\rho h' g + \frac{S_1\rho v_2^2}{2} + h' S_1\rho a.$$

Використовуючи рівняння нерозривності $S_1v_1 = S_2v_2$, отримаємо

$$v_1^2 = \frac{2S_2^2}{S_1^2}\left(\frac{F}{\rho S_1} - h'(g+a)\right). \qquad (1)$$

Швидкість при рівноприскореному русі і прискорення пов'язані кінематичним співвідношенням

$$v_1^2 = v_0^2 + 2a(H - h'). \qquad (2)$$

Тут H – це висота ствопчика води, при якій можна стверджувати, що прискорення а вже встановилось. А швидкість v_0 – початкова швидкість в рівноприскореному русі:

$$v_0^2 = \frac{2S_2^2}{S_1^2}\left(\frac{F}{\rho S_1} - h' g\right).$$

Рівняння (1) та (2) містять змінну невідому величину h′. Кожне з рівнянь можна представити у вигляді

$$v_1^2 = A_1 - B_1 \cdot h' \text{ та } v_1^2 = A_2 - B_2 \cdot h'$$

Прирівнюючи коефіцієнти B_1 та B_2 отримуємо

$$2a = \frac{2S_2^2}{S_1^2}(g+a).$$

А значить, $a = \frac{g}{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1} \approx g\frac{S_2^2}{S_1^2}$.

Примітка: Варто відмітити, що перехідний процес між прискоренням з першої частини задачі, яке було рівне $\frac{F}{m} - g$, до прискорення $g\frac{S_2^2}{S_1^2}$ відбувається певний короткий час, за який швидкість доростає до V_0. Але нам розгляд самого перехідного процесу в даній задачі не потрібен.

Зверніть також увагу на те, що пряме застосування рівняння Бернуллі в цій задачі було б недоцільним, адже Бернуллі використовується лише для стаціонарних потоків і не враховує, для прикладу, зміну енергії води в середині між двома крайніми перерізами внаслідок наявності прискорення. В даній задачі це грає ключову роль.

<u>5. «Титан»</u>

370 років тому, 25 березня 1655 року, нідерландський вчений Християн Гюйгенс відкрив супутник Сатурна Титан. Титан – єдиний супутник планет Сонячної системи, що має щільну атмосферу. Більш того, атмосферний тиск на його поверхні перевищує земний майже в 1,5 рази і дорівнює
$P = 146{,}7$ кПа.

А.У скільки разів маса атмосфери Титану менша за масу Титану без атмосфери?

Гравітаційна стала $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, прискорення вільного падіння на поверхні Титану 1,352 м/с^2.
20 років тому, 14 січня 2005 р. космічний зонд Гюйгенс Європейського космічного агентства здійснив м’яку посадку на поверхню Титану. На Рис. фрагмент відеоінтерпретації перших секунд після посадки зонду і падіння парашуту, розрахований на основі отриманих даних.
Б. Враховуючи, що сила опору повітря залежить від швидкості руху зонду, густини атмосфери і площі поперечного перерізу (безрозмірний коефіцієнт пропорційності у відповідному співвідношенні вважати рівним порядку одиниці), **оцініть швидкість зонду** перед зіткненням з поверхнею. Діаметр зонду $d = 1{,}3$ м, маса $m = 320$ кг. Атмосфера Титану (як і Землі) складається переважно з азоту N_2, але має температуру -180℃. Універсальна газова стала $R =$8,3 Дж/(моль·К). Азот вважати ідеальним газом.
В. Титан зі швидкістю 5,6 км/с за 16 діб робить оберт навколо Сатурна в тому ж напряму, в якому Сатурн зі швидкістю 9,7 км/с за 29 років обертається навколо Сонця. Вважаючи, що орбіта Титану лежить в площині орбіти Сатурну, зобразіть у системі відліку Сонця **фрагмент траєкторії** Титану і визначте **мінімальний та максимальний радіуси** її кривизни.

Розв’язання.
А. Масу атмосфери знайдемо з $m_a g = P_a \cdot 4\pi R^2$, масу Титану без атмосфери з виразу для прискорення вільного падіння на поверхні $g = \frac{Gm}{R^2}$. Звідси

$$\frac{m}{m_a} = \frac{g^2}{4\pi G P} \approx 14900.$$

Б. З розмірних міркувань сила опору повітря $F = k\rho S v^2$, де k – безрозмірний коефіцієнт, S– площа парашуту, діаметр якого згідно з рисунком удвічі більший за діаметр d самого зонду, а, отже, вважатимемо, що радіус парашуту дорівнює d.
Під час довгого падіння швидкість тіла встановлюється такою, що сила опору повітря компенсує силу тяжіння. Отже з $k\rho S v^2 = mg$ знаходимо

$$v \approx \sqrt{\frac{mg}{\rho S}}.$$

З рівняння стану ідеального газу знайдемо густину атмосфери поблизу поверхні. Навіть не знаючи цього рівняння, з аналізу розмірностей можна отримати

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}.$$

Остаточно маємо

$$v \approx \sqrt{\frac{mgRT}{\pi d^2 \mu P}} \approx 3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Швидкість зонду перед посадкою згідно даних з зонду була 4,4 м/с.
В. В обох системах відліку і «Сатурн», і «Сонце» в однаковому положенні на Титан діють однакові сили гравітації і викликають однакове прискорення, нормальна складова якого $\frac{v_{\text{відн}}^2}{r_{\text{кр}}}$. Але внаслідок різної відносної швидкості $v_{\text{відн}}$ радіуси кривизни траєкторій

будуть різними. За умовою Титан рухається відносно Сатурна зі швидкістю $v = 5{,}6$ км/с, і його траєкторію у цій системі відліку можна вважати колом, радіус якого і є радіусом кривизни $r = \frac{v}{\omega} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi}$ траєкторії в системі відліку «Сатурн». У системі відліку «Сонце» з рівності прискорень маємо $r_{\text{кр}} = r\frac{v_{\text{відн}}^2}{v^2}$.

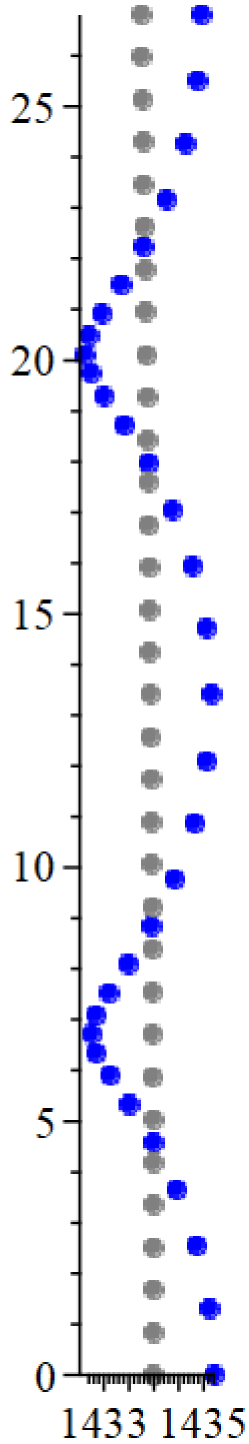
Тоді для найближчої і найвіддаленішої від Сонця точок

$$r_{min} = r\frac{(V-v)^2}{v^2} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi}\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2 = 660 \text{ тис. км.}$$

$$r_{max} = r\frac{(V+v)^2}{v^2} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi}\left(\frac{V}{v} + 1\right)^2 = 9{,}2 \text{ млн км.}$$

Насправді все дещо складніше, тому сприйматимемо це як деяке наближення. Зазначимо, що у системі відліку Сатурна траєкторія Титану дійсно може вважатися колом, оскільки сила, з якою Титан притягується до Сатурна більша за середню силу його притягання до Сонця приблизно в $\frac{GM_{\text{сат}}}{r^2}\Big/\frac{GM_{\text{сон}}}{R^2} = \frac{v^2}{r}\Big/\frac{V^2}{R} = \frac{v}{V}\frac{T_{\text{сат}}}{T_{\text{тит}}} \approx 380$ разів.

На рисунку з інтервалом в одну добу у пакеті комп'ютерної алгебри побудовані послідовні положення Сатурну (кружечки вздовж майже прямої вертикальної лінії) й Титану (кружечки вздовж звивистої лінії) відносно Сонця, яке знаходиться зліва на відстані ≈ 1434 млн.км. Всі відстані наведені у млн. км, по осі абсцис вказані два значення 1433 і 1435 млн.км – приблизно мінімальна й максимальна відстані від Титану до Сонця (що знаходиться далеко зліва). Якщо з'єднати відрізком відповідні зображення Сатурну і Титану, можна побачити, що цей відрізок рівномірно обертається і робить повний оберт навколо Сатурну за 16 діб.



З рисунку бачимо, що траєкторія Титану вигинається в бік Сатурну у крайніх по відношенню до Сонця положеннях, як і має бути згідно наших розрахунків. Тому обов'язково між цими положеннями відбудеться зміна опуклості на вгнутість траєкторії. У таких точках радіус кривизни траєкторії прямує до нескінченності, а рівнодійна сил тяжіння Титану до Сонця й Сатурну в цей момент спрямована вздовж дотичної до траєкторії і тому не викривляє її. Якщо рахувати, починаючи з нижніх точок графіку, то вперше на ньому це відбудеться приблизно на п'яту – шосту добу.

Отже, остаточно: $r_{min} = 660$ тис. км, $\;r_{max} \to \infty$.

Задачі запропонували:

1. Орлянський О.Ю., 2. Рідкокаша І.П. 3.Майзеліс З.О., 4. Олійник А.О., 5. Орлянський О.Ю.