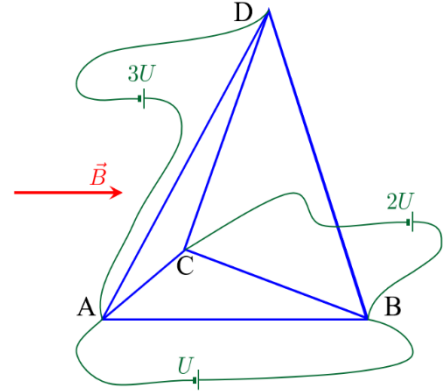


Міністерство освіти і науки України
Національний центр «Мала академія наук України»
LIX Всеукраїнська учнівська олімпіада з фізики, м. Львів, 2025
Теоретичний тур, 11-й клас
Умови та розв'язки

1. «Електромагнітна стереометрія»

Правильний тетраедр $ABCD$ з довжиною ребра l виготовлено з однорідного дроту так, що опір кожного ребра тетраедра R . Між точками A і B приєднують ідеальне джерело з напругою U , між точками B і C ще одне джерело з напругою $2U$, а між точками A і D - третє джерело з напругою $3U$. Тетраедр розташований у однорідному магнітному полі, вектор індукції якого \vec{B} направлений вздовж ребра AB .



А. Знайдіть електричний опір тетраедра між двома його вершинами.

Б. Знайдіть силу струму у кожному ребрі тетраедра.

В. Доведіть, що сила Ампера, яка діє на тетраедр, дорівнює силі Ампера, що діє на прямий провідник, що з'єднує точки підключення напруги.

Г. Знайдіть силу, яка діє на тетраедр з боку зовнішнього однорідного магнітного поля. Можете використати твердження з п.В, навіть якщо ви не змогли його довести.

Розв'язання.

А. Опір тетраедра між двома його вершинами, скажімо A та B , легко розрахувати, помітивши що потенціали точок C і D будуть при цьому однаковими. Тоді в еквівалентній схемі ребро CD можна вилучити, що не призведе до зміни загального опору, так що схема зводиться до послідовних і паралельних з'єднань, сумарний опір якої складає $R/2$. Внаслідок симетрії тетраедра опір не залежить від того, яку пару вершин розглядати як точки приєднання джерела живлення.

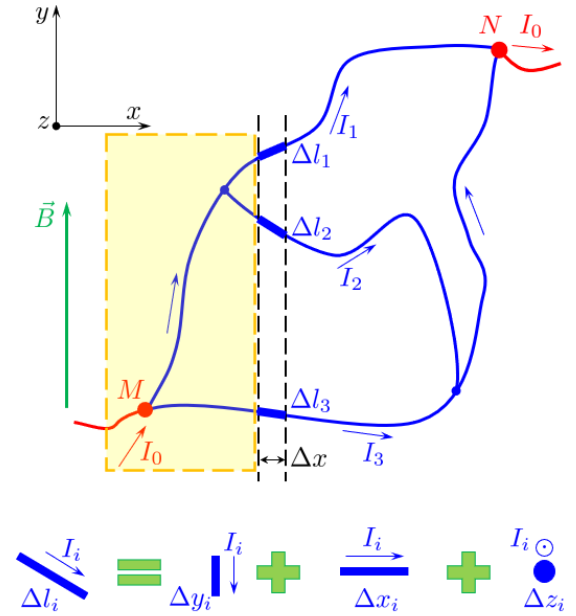
Б. Значення сил струмів, які протікають вздовж ребер тетраедра можна розрахувати різними методами: скласти й розв'язати систему рівнянь Кірхгофа, скористатися методом однакових потенціалів, методом контурних струмів, методом суперпозиції.

Результат розрахунку:

$$I_{AB} = -I_0, \text{ де } I_0 = U/R, \quad I_{AC} = I_0, \quad I_{BC} = 2I_0, \quad I_{AD} = 3I_0, \quad I_{BD} = 4I_0, \quad I_{CD} = 2I_0.$$

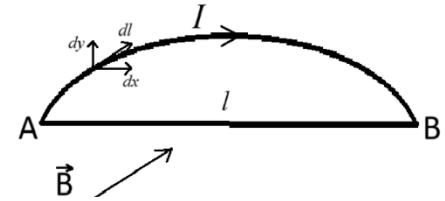
В. Доведемо це твердження в загальному випадку довільного розтікання струмів у тривимірному випадку (див. рис.). Введемо координати x , y та z так, щоб магнітне поле було спрямовано вздовж осі y , і знайдемо, наприклад, проекцію на вісь z сумарної сили з боку магнітного поля. Для цього розіб'ємо всю систему площинами, перпендикулярними до осі x (показані чорними штриховими лініями на рисунку). В одному такому шарі опинилася деяка кількість «шматків» дротів довжинами $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots$ Розглянемо силу з боку магнітного поля на один з таких шматків Δl_i (див. нижню частину рисунку). Її можна

представити у вигляді векторної суми сил, що діють на шматочки $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, по яким тече струм такої ж сили (в цьому можна впевнитись прямим розрахунком сили на Δl_i і проектуванням її на осі координат). Отже, проекція на вісь z дорівнює $I_i B \Delta x_i$. Тепер розрахуємо сумарну проекцію сили для всіх шматочків у шарі, що розглядається. Вона буде дорівнювати $\sum I_i B \Delta x_i = B \Delta x \sum I_i$, оскільки всі Δx_i для одного шару однакові. Сума ж струмів, яка фігурує в цьому виразі, дорівнює струму через клеми I_0 , оскільки, якщо розглянути виділену жовтим область, то сума всіх струмів, що з неї витікають, повинна дорівнювати струму, що затікає. Тепер залишилося взяти суму таких сил, що діють на всі шари: $F_z = \sum I_0 B \Delta x = I_0 B (x_N - x_M)$. Таким чином, ми довели твердження для компоненти F_z . Аналогічно доводимо і для проекції F_x , розбивши тепер на шари, перпендикулярні до осі z . Проекція на вісь y дорівнює, очевидно нулю. Отже, таким чином можна отримати силу, що дія на будь-яку систему струмів.



Г. Сила Ампера, що діє на тетраедр може бути знайдена як сума сил, що діють на його ребра. При цьому, як і у п. В, замінимо кожне з ребер на три взаємно перпендикулярні відрізки. Вводячи координату y вздовж AB , координату x перпендикулярно їй у площині ABC і координату z перпендикулярно площині ABC вгору, маємо, наприклад, таке представлення ділянки AC :

$(-\frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}, 0)$, або ділянки BD : $(-\frac{l}{2\sqrt{3}}, -\frac{l}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}l)$. Тепер знайдемо силу з боку магнітного поля на кожну з трьох компонент кожного з ребер тетраедру: на y -компоненти сила не діятиме, на x -компоненти сили будуть направлені вздовж осі z і на z -компоненти сили будуть діяти вздовж осі x . Таким чином отримуємо такі вектори сил, що діють на кожне з ребер тетраедра:



$$\vec{F}_{AB} = (0,0,0), \vec{F}_{AC} = (0,0,-\frac{\sqrt{3}}{2}) I_0 B l, \vec{F}_{BC} = (0,0,-\sqrt{3}) I_0 B l,$$

$$\vec{F}_{AD} = (-\sqrt{6}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}) I_0 B l, \vec{F}_{BD} = (-4\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}) I_0 B l, \vec{F}_{CD} = (-2\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}) I_0 B l,$$

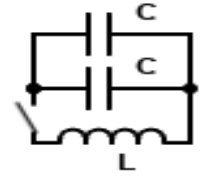
Тепер додамо ці вектори сил і розрахуємо модуль результуючої сили, що діє на тетраедр:

$$F = \sqrt{66} I_0 B l = \sqrt{66} U B l / R.$$

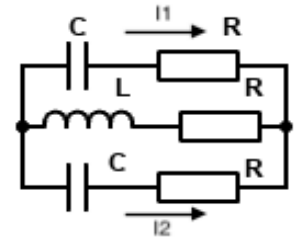
Зазначимо, що розрахунок можна спростити, виключивши з нього контурні струми, тоді він зводиться до лише двох ребер.

2. «Схематозне безумство»

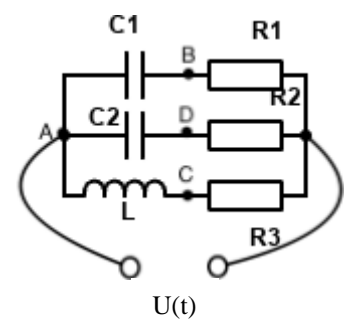
А. Коливний контур, зображений на рисунку, складається з двох конденсаторів $C = 1000 \text{ мкФ}$, котушки індуктивності $L = 0,1 \text{ Гн}$ та ключа. Спочатку ключ був розімкнутий, а заряд на кожному конденсаторі дорівнював $q = 1 \text{ мкКл.}$ Знайти **максимальний струм** через котушку I_{\max} після замикання ключа.



Б. Змінимо контур. Приєднаємо до кожного елемента коливного контуру резистор опором $R = 10 \text{ Ом}$ (дивись рисунок). У певний момент часу виконуються умови: $\frac{dI_L}{dt} = 0$, $I_1 = 10 \text{ А}$ та $I_2 = 12 \text{ А}$. Обчислити яка максимальна **кількість теплоти** Q може виділитися в системі починаючи з цього моменту часу.



В. Додатково модифікуємо контур. Замінімо резистори опором $R = 10 \text{ Ом}$ на резистори різного опору та під'єднаємо контур до джерела змінної напруги з відомим амплітудним значенням U_0 та циклічною частотою ω (дивись третій рисунок). Відомо, що параметри системи зв'язані між собою співвідношенням $\frac{1}{C_1 \omega R_1} = \frac{\omega L}{R_3} = \sqrt{3}$. Виразити **амплітудні значення** U_{CA} та U_{BA} через U_0 після встановлення коливань.



Розв'язання.

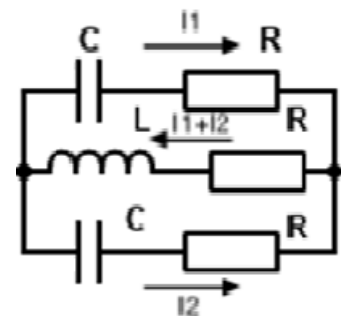
А. Так як заряди на конденсаторах однакові, то у початковий момент не буде миттєвого перерозподілу зарядів. Так як конденсатори з'єднані паралельно, то можна їх замінити на один ємності $2C$ та початковим зарядом на обкладинках $2q$. Таким чином ми отримуємо новий коливальний контур і знаючи що струм через котушку максимальний коли заряд на конденсаторі 0, з закону збереження енергії маємо:

$$\frac{(2q)^2}{2 * 2C} = \frac{LI_{\max}^2}{2} \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{2q^2}{LC}} = 0,14 \text{ мА}$$

Б. Так як в даний момент часу струм через котушку $I_L = I_1 + I_2$ (перше правило Кірхгофа) максимальний, то маємо:

$$\frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{\text{інд}} = -L \frac{dI_L}{dt} = 0$$

Таким чином стає зрозуміло що в даний момент часу заряди на конденсаторах не нульові, бо інакше 2-ге правило Кірхгофа не буде виконуватись. **Отже за наявності активного опору в колі в момент часу коли струм через котушку максимальний, заряд конденсаторів не нульовий.** Таким чином приймаючи заряд на першому конденсаторі за q_1 , а на другому за q_2 записуємо наступні рівняння Кірхгофа та після нескладних



алгебраїчних перетворень отримуємо:

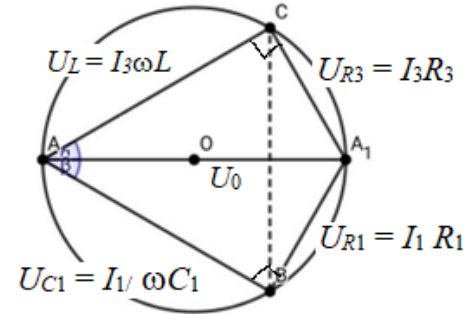
$$\begin{aligned} \frac{q_1}{C} &= -(I_2 + I_1)R - I_1 R = -R(I_2 + 2I_1) \\ \frac{q_2}{C} &= -(I_2 + I_1)R - I_2 R = -R(2I_2 + I_1) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} W_1 &= \frac{q_1^2}{2C} = \frac{R^2 C}{2} (2I_1 + I_2)^2 \\ W_2 &= \frac{q_2^2}{2C} = \frac{R^2 C}{2} (2I_2 + I_1)^2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$W_{\text{заг}} = W_1 + W_2 + \frac{LI^2}{2} = \frac{R^2 C}{2} (2I_1 + I_2)^2 + \frac{R^2 C}{2} (2I_2 + I_1)^2 + \frac{L(I_1 + I_2)^2}{2} \approx 133 \text{ Дж.}$$

Це і є шукана кількість теплоти Q .

В. Враховуючи умови задачі з векторної діаграми для напруги видно, що $\operatorname{tg} \beta = C_1 \omega R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R_3}{\omega L} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \beta = 30^\circ$.

Також під час побудови векторної діаграми було використано той факт, що зсув фаз між коливанням рівний 90° . З цього ми отримуємо що трикутник ABC рівносторонній. Тоді з прямокутних трикутників ACA_1 та ABA_1 отримуємо що $U_{CA} = U_{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_0$.



3. «Інопланетний диск»

Космічна станція інопланетян, що має форму тонкого плаского диску, готується до подорожі деякою галактикою.

А. Штучна гравітація. Маючи великі запаси енергії, інопланетяни вирішили проблему відсутності гравітації, розганяючи свою станцію так, щоб на ній відчувалось прискорення $a = 15 \text{ м/с}^2$. Вважаючи, що станція стартує біля центру галактики, знайти **яку швидкість** вона набере відносно цього центру галактики, коли за галактичним годинником пройде $t = 2 \times 10^7 \text{ с}$? Швидкість світла у вакуумі $c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$.

Б. Зіткнення. Безпосередньо перед стартом, коли станція ще не оберталась, інопланетяни помічають поблизу астероїд маси m , що летить в їхній бік. Уважаючи, що удар астероїда був абсолютно непружним, а безпосередньо перед зіткненням астероїд знаходився на відстані b від центру станції і мав невелику швидкість v , спрямовану перпендикулярно площині її диску, знайдіть, **в яких місцях** на станції не відчувалось прискорення від удару. Маса станції M . Момент інерції однорідного диску відносно осі, що проходить крізь центр мас і лежить в площині диску, дорівнює $MR^2/4$.

Примітка. Вам може знадобитись інтеграл $\int (1 - x^2)^{-3/2} dx = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$.

Розв'язання.

А. За тривіальним розрахунком $v_{\text{кінц.}} = at = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$, що є швидкістю світла. Необхідно врахувати ефекти Спеціальної теорії відносності.

Розглянемо прискорення станції в системі відліку, яка моментально має таку саму швидкість, як і сама станція – v . Тоді гамма-фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Нехай за годинником в цій системі відліку пройшов малий час $d\tau$. За цей час станція прискориться на $du = a_{\text{станції}} \cdot d\tau$. Таку саму швидкість отримає і будь-який предмет, нерухомий відносно неї. Відповідно, $a_{\text{станції}}$ і є прискоренням, що буде відчуватись, тобто $a_{\text{станції}} = a$. Знайдемо нову швидкість станції відносно нерухомого спостерігача за релятивістською формулою додавання швидкостей:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v + du}{1 + v \cdot du/c^2} = (v + du) \cdot \left(1 + \frac{v du}{c^2}\right)^{-1} \approx (v + du) \cdot \left(1 - \frac{v du}{c^2}\right) \\ &= v + du - \frac{v^2 du}{c^2} - \frac{v du^2}{c^2} \\ &\approx v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) du = v + \frac{du}{\gamma^2} = v + \frac{a d\tau}{\gamma^2} \end{aligned}$$

$$\text{Зміна швидкості } dv = v' - v = \frac{a d\tau}{\gamma^2}$$

Нерухомий відносно галактики спостерігач виміряє час $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma d\tau$ (релятивістське уповільнення часу – будь-який рухомий годинник ходить повільніше за такий самий нерухомий, у γ разів). Тоді прискорення, виміряне в СВ галактики, це

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a d\tau}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\gamma d\tau} = \frac{a}{\gamma^3} = a \cdot (1 - v^2/c^2)^{3/2}.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = a dt$$

Зробивши заміну $v = \beta \cdot c$, цей вираз можна проінтегрувати.

$$\int_0^{\beta_{\text{кінц.}}} \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{a}{c} \int_0^{t_{\text{кінц.}}} dt$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{0}{\sqrt{1 - 0^2}} = \frac{a}{c} (t - 0)$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{at}{c}$$

$$\beta^2 = (at/c)^2 \cdot (1 - \beta^2)$$

$$\beta^2 \cdot (1 + (at/c)^2) = (at/c)^2$$

$$\beta = \frac{at/c}{\sqrt{1 + (at/c)^2}}$$

$$v_{\text{кінц.}} = \beta \cdot c = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}$$

$$v_{\text{кінц.}} \approx 2.12 \times 10^8 \text{ м/с}$$

Це становить близько 71% швидкості світла.

Б) Прискорення від удару не буде відчуватись в таких точках станції, які не змінюють своєї швидкості. Проаналізуємо удар і знайдемо їх. Найпростіше перейти в систему відліку центра мас.

Відстань центру мас від центру станції:

$$r_c = \frac{m}{m+M} b$$

Швидкість центру мас:

$$u = \frac{m}{m+M} v$$

В системі відліку центра мас до удару мас станція і астероїд рухаються один на одного зі швидкостями $u = \frac{m}{m+M} v$ і $v - u = \frac{M}{m+M} v$ відповідно, при чому лінійний імпульс кожного з них $p = Mu = m(v - u) = \frac{mM}{m+M} v$.

Тоді момент імпульсу системи відносно центру мас:

$$L = L_{\text{ст.}} + L_{\text{аст.}} = pr_c + p(b - r_c) = \frac{m^2 M + mM^2}{(m+M)^2} bv = \frac{mM}{m+M} bv$$

На відміну від енергії, він зберігається: $L = L'$. Після удару планета і астероїд будуть обертатись як одне ціле навколо свого центра мас.

$$L' = I' \cdot \omega$$

Момент інерції станції відносно центру мас (теорема Штейнера):

$$I'_{\text{ст.}} = \frac{1}{4} MR^2 + Mr_c^2 = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{mM^2}{(m+M)^2} b^2$$

Астероїда:

$$I'_{\text{аст.}} = m(b - r_c)^2 = \frac{m^2 M}{(m+M)^2} b^2$$

Загальний момент інерції після удару:

$$I' = I'_{\text{ст.}} + I'_{\text{аст.}} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{m^2M + mM^2}{(m+M)^2}b^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{mM}{m+M}b^2$$

Ми шукаємо таку точку, яка відразу після удару обертається навколо центру мас з такою самою швидкістю, яка була у неї до удару (x – відстань від точки обертання (центру мас)).

$$\omega x = u$$

$$x = \frac{uI'}{L} = \frac{mv}{m+M} \frac{m+M}{mMbv} \cdot \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{mM}{m+M}b^2 \right) = \frac{R^2}{4b} + \frac{m}{m+M}b$$

Ця точка лежить по інший бік від сторони падіння астероїда. Відстань від неї до центру диску тоді:

$$x' = x - r_c = \frac{R^2}{4b} + \frac{m}{m+M}b - \frac{m}{m+M}b = \frac{R^2}{4b}$$

Всі такі точки утворюють смужку на поверхні станції.

4. «Від гвинта!»

На рисунку зображений жорсткий дріт у вигляді фрагменту гвинтової лінії з розпрямленими вертикальними кінцями. На дріт надіті дві кульки, шарнірно з'єднані легким стержнем максимально можливої довжини, що дозволяє цій «гантелі» рухатись вздовж гвинтової лінії. У початковому положенні нижня кулька (більша на рис.) утримувалась на рівні верхніх частин витків дроту. Кульки відпускають. Силами тертя, опору повітря, розміром кульок знехтувати. Прискорення вільного падіння $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, радіус гвинтової лінії $R = 20 \text{ см}$. Наведений рисунок є схематичним, але кількість витків на ньому вказана точно.

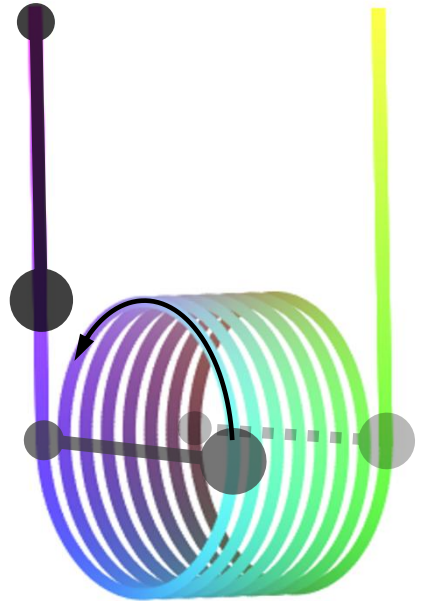
А. Знайдіть час руху цієї «гантелі» вздовж дуг гвинтової лінії, тобто від одного крайнього горизонтального положення стержня до іншого (див. рис.). Уважайте, що маси кульок однакові, а відстань між витками гвинтової лінії набагато менша за її радіус.

Далі розглядаємо випадки, коли більша за розміром кулька має втричі більшу масу, а відстань між витками $h = 18 \text{ см}$. Не забудьте врахувати відповідну зміну довжини «гантелі».

Б. На яку максимальну висоту підніметься більша кулька після проходження гвинтової лінії?

В. Внаслідок малих сил тертя й опору рух кульок поступово сповільнюється. Визначте період малих коливань кульок через великий проміжок часу.

Зазначимо, що відстань між витками $h = 18 \text{ см}$ вимірюється вздовж осі симетрії гвинтової лінії, а радіус R – у перпендикулярному напрямку.



Розв'язання.

А. Довжина стержня $2R$. З закону збереження енергії $4mgR = 2\frac{mv^2}{2}$ (рівень відліку потенціальної енергії проходить через вісь симетрії гвинтової лінії, m – маса малої кульки) знаходимо швидкість руху кульок $v = 2\sqrt{gR}$. З рисунку видно, що кульки проходять $N = 7$ повних обертів, отже повний шлях кожної $2\pi RN = 14\pi R$. Тоді час руху

$$t = \frac{14\pi R}{2\sqrt{gR}} = 7\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \pi \text{ с} \approx 3,14 \text{ с}.$$

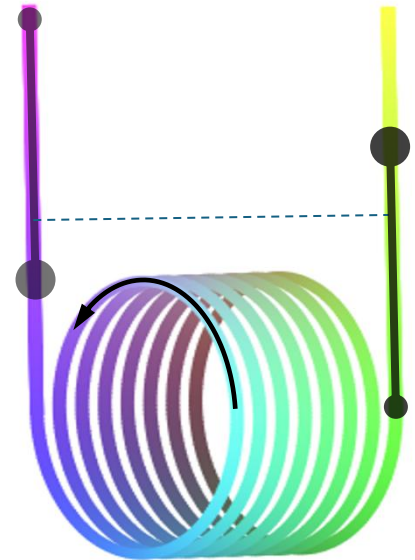
Б. З закону збереження енергії центр мас системи (ділить стержень у співвідношенні 1:3 або $L/4 : 3L/4$) у момент зупинки підніметься на початкову висоту, тоді більша кулька підніметься на $L/2$ над рівнем верхніх частин витків якщо припустити, що гантель вертикальна (див. рис.).

Довжина стержня L тепер більша за $2R$ (розмірами кульок за умовою нехтуємо). Її можна отримати з теореми Піфагора розглянувши пів витка, в крайніх точках якого перебувають з'єднані стержнем кульки:

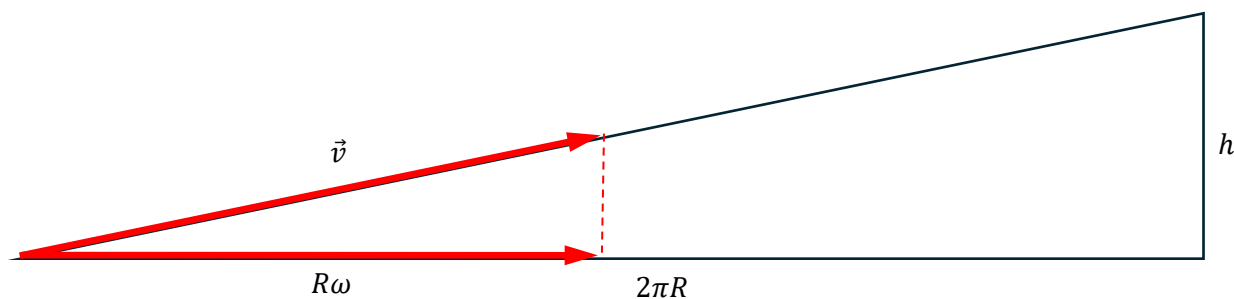
$L = \sqrt{(2R)^2 + (h/2)^2} = 41 \text{ см}$. Отже, більша кулька підніметься на $41/2 \text{ см} = 20,5 \text{ см}$ на рівнем верхніх частин витків. Але тоді менша кулька має опинитися на $20,5 \text{ см}$ нижче рівня верхніх частин витків, або на $0,5 \text{ см}$ нижче прямолінійної частини дроту. За умови $R = 20 \text{ см}$, це відповідає куту в радіанах $\beta = \frac{0,5}{20} = 0,025$. За такого кута відхилення від вертикалі стержня буде $R(1 - \cos\beta) \approx R\frac{\beta^2}{2} = 62,5 \text{ мкм}$. За довжини стержня 41 см такою величиною можна знехтувати і вважати максимальною висотою підняття більшої кульки $20,5 \text{ см}$ над рівнем верхніх частин витків.

В. Розглянемо малі коливання навколо положення стійкої рівноваги, коли гантель перебуває між якимись сусідніми витками гвинтової лінії (легша кулька вгорі, важча – внизу). Позначимо через φ кут відхилення від положення рівноваги проекції стержня на вертикальну площину, перпендикулярну осі симетрії гвинтової лінії. Нехтуючи втратами на одному коливанні, запишемо закон збереження повної механічної енергії:

$$E = \frac{4mv^2}{2} + (-2mgR\cos\varphi) = \text{Const},$$



де m – маса меншої кульки. Виразимо швидкість v через кут φ . Проекція швидкості v на площину кута φ дорівнює $R\omega$ і знаходиться з розгортки дуги гвинтової лінії:



$$\frac{v}{R\omega} = \frac{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}{2\pi R} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}.$$

Підставимо v в закон збереження енергії

$$2mR^2 \left(1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right) \omega^2 - 2mgR \cos\varphi = \text{Const.}$$

Таке ж рівняння (тільки коефіцієнти інші) отримували раніше для малих коливань нитяного маятника. Продиференціюємо рівняння за часом, врахувавши, що $\omega = \dot{\varphi}$ і після скорочення маємо:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2R \left(1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right)} \sin\varphi = 0.$$

Для малих кутів $\sin\varphi \approx \varphi$ маємо рівняння гармонічних коливань з періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g} \left(1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{gR} ((2\pi R)^2 + h^2)} \approx 1,28 \text{ с.}$$

Також можливо положення стійкої рівноваги не між сусідніми витками гвинтової лінії, а з краю, коли менша кулька знаходиться на вертикальній частині дроту, а більша – на дузі гвинтової лінії. Не зрозуміло, де саме зупиниться гантелька, тому взагалі можливими є 7 положень стійкої рівноваги, які ми вже розглянули, й ще одне на краю.

Цей випадок є доволі складним. Наведемо наступні фізичні міркування.

Позначимо через φ кут відхилення від вертикального положення проекції стержня l на вертикальну площину, перпендикулярну осі симетрії гвинтової лінії. Зазначимо, що l залежить від φ під час коливань внаслідок того, що нижня кулька зміщуватиметься вздовж гвинтової лінії в напрямку осі симетрії, а верхня – ні. Це зміщення пропорційне куту $\frac{\pi}{2} + \varphi$ (див. Рис.) і дорівнює

$$h_{\parallel} = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

З теореми Піфагора

$$l = \sqrt{L^2 - h_{\parallel}^2} = \sqrt{L^2 - h^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^2}.$$

Тепер закон збереження повної механічної енергії має вигляд:

$$E = \frac{mu^2}{2} + \frac{3m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{h}_{\parallel}^2)}{2} + U = \text{Const},$$

де u – швидкість кульки масою m (швидкість $u = \dot{y}$ є похідною за часом від вертикальної координати кульки $y = l \cos \alpha - R \cos \varphi$), U – потенціальна енергія, що відносно рівня осі симетрії гвинтової лінії дорівнює

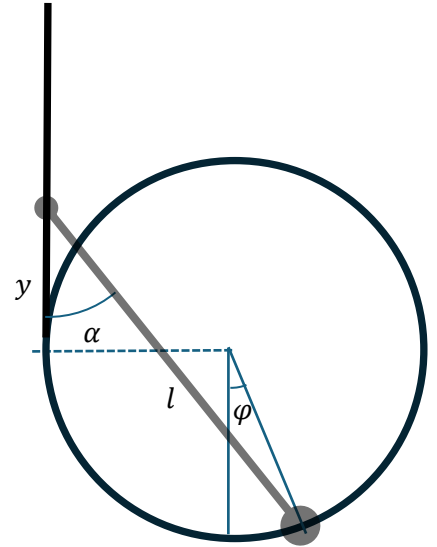
$$U = mgy - 3mgR \cos \varphi.$$

З рисунку знаходимо зв'язок кутів $l \sin \alpha = R(1 + \sin \varphi)$, звідки

$$l \cos \alpha = \sqrt{l^2 - R^2(1 + \sin \varphi)^2} \text{ і}$$

$$y = \sqrt{l^2 - R^2(1 + \sin \varphi)^2} - R \cos \varphi.$$

Як вже бачимо, точний розв'язок є математично складним і не очікувався від учасників олімпіади. Зазначимо, що рівноважний кут, навколо якого будуть спостерігатися у цьому випадку малі коливання, дорівнює $\varphi_0 \approx 0,18 \approx 10^\circ$. Враховуючи малість φ_0 , задачу можна розв'язати наближено.



5. «День/ніч»

Космічна експедиція дісталася зоряної системи, що складається з центральної масивної зорі (З), однієї планети (П) та її супутника (С). Радіус планети дорівнює 6000 км, радіус супутника – 1000 км. Супутник рухається по коловій орбіті радіусом 400000 км. Середня густина планети та супутника однакова: $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$. Відстань від планети до зорі становить кілька сотень мільйонів кілометрів. Доба на планеті триває 12 земних годин, вісь доbowого обертання утворює прямий кут з площиною А орбіти планети навколо зорі.

Експедиція вимірює прискорення вільного падіння на планеті.

Гравітаційна стала дорівнює $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

А. На скільки відсотків відрізняються прискорення вільного падіння на полюсі та на екваторі внаслідок доbowого обертання планети?

Б. Оцініть, на скільки відсотків можуть відрізнятися прискорення вільного падіння в різних точках екватора внаслідок гравітаційного впливу супутника планети.

В. Супутник є кулею без атмосфери, кожна маленька ділянка поверхні якої поглинає 40 % енергії падаючого світла в будь-якому діапазоні довжин хвиль, а решту відбиває в усіх напрямках таким чином, що всі освітлені частини «диску» супутника здалеку виглядають однаково яскравими. Нехай кут α – це кут між напрямками «супутник–зоря» (С–З) і «супутник–планета» (С–П). Площина орбіти руху супутника навколо планети збігається з площиною А, можливість затемнень не враховуйте.

Експедиція також спостерігає за змінами освітленості E точки екватора планети протягом тривалого часу. **Визначте залежність** відношення $\frac{E_{\text{ніч}}}{E_{\text{день}}}$ від α ($E_{\text{ніч}}$, $E_{\text{день}}$ – освітленості відповідно опівночі та опівдні за однакового значення кута α), накресліть схематичний графік цієї залежності.

Розв'язання.

А. Сила тяжіння надає всім тілам біля поверхні планети прискорення $g_0 = G \frac{M_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho R_{\text{пл}} = 8,38 \text{ м/с}^2$. Спостерігач на полюсі отримає саме такий результат вимірювання.

А спостерігач на екваторі сам має доцентрове прискорення $a = \omega^2 R_{\text{пл}} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{\text{пл}} = 0,13 \text{ м/с}^2$. Тому він отримає менше значення прискорення вільного падіння: $g_1 = g_0 - a = 8,25 \text{ м/с}^2$.

Відносне зменшення становить $\frac{a}{g_0} = \frac{3\pi}{G\rho T^2} = 1,5 \cdot 10^{-2} = 1,5 \%$. Воно не залежить від радіуса планети.

Б. Гравітаційний вплив супутника зумовлює припливні прискорення, тобто векторну різницю «абсолютного» гравітаційного прискорення в певній точці та в центрі планети. «Абсолютним» ми називаємо тут прискорення відносно інерціальної системи відліку. З умови випливає, що траєкторія обертання супутника відносно планети лежить в площині екватора. У точках екватора, що лежать на прямій центр планети – центр супутника,

припливні прискорення напрямлені *від* центра планети, тобто *зменшують* значення g на величину

$$\Delta g_1 = G \frac{M_{\text{суп}}}{r^2} - G \frac{M_{\text{суп}}}{(r-R_{\text{пл}})^2} \approx -2G \frac{M_{\text{суп}} R_{\text{пл}}}{r^3}.$$

Ми вивели це значення для точки екватора, найближчої до супутника; для найдальшої це значення таке саме. Тут $r = 4 \cdot 10^8$ м; ми врахували, що $R_{\text{пл}} \ll r$. Звідси

$$\frac{\Delta g_1}{g_0} = -2 \frac{M_{\text{суп}} R_{\text{пл}}^3}{M_{\text{пл}} r^3} = -2 \frac{R_{\text{суп}}^3}{r^3} = -3,1 \cdot 10^{-8}.$$

Точки екватора планети, які лежать на діаметрі, перпендикулярному до лінії СП, розташовані на відстані $\sqrt{r^2 + R_{\text{пл}}^2}$ від центра супутника. У цих точках екватора на одиничну масу діє майже така сама сила тяжіння супутника, як на відстані r , тобто в центрі планети (у цьому легко переконатися). Але напрям цієї сили відрізняється на кут $\alpha = \frac{R_{\text{пл}}}{r}$.

Через це виникає різниця векторів прискорень, модуль якої дорівнює

$$\Delta g_2 = \alpha a_{\text{пл}} = \frac{R_{\text{пл}}}{r} \cdot G \frac{M_{\text{суп}}}{r^2} = \frac{R_{\text{пл}}}{r} \cdot G \frac{M_{\text{пл}}}{r^2} \cdot \frac{R_{\text{суп}}^3}{R_{\text{пл}}^3} = g_0 \frac{R_{\text{суп}}^3}{r^3}.$$

Тут $a_{\text{пл}}$ – прискорення планети під дією притягання до супутника. Додаткове прискорення Δg_2 збільшує прискорення вільного падіння, відповідне відносне збільшення

$$\frac{\Delta g_2}{g_0} = \frac{R_{\text{суп}}^3}{r^3} = 1,6 \cdot 10^{-8}.$$

Отже: шукану **максимальну** відносну різницю можна вважати рівною

$$\frac{\Delta g_2 - \Delta g_1}{g_0} \approx 4,7 \cdot 10^{-8}, \text{ тобто } 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ \%.}$$

Планету розтягує в напрямку лінії С-П і стискає в перпендикулярному до цієї лінії напрямку. Як бачимо, отримане тут значення на 6 порядків менше від значення, отриманого в пункті А.

В. Очевидно, що опівночі освітленість зумовлена тільки світлом зорі, розсіяним поверхнею супутника. Легко переконатися, що ця освітленість набагато менша від освітленості E_0 , яку забезпечують прямі промені від зорі за нормального падіння. Оскільки світло від зорі йде практично паралельним пучком, ця величина однакова для планети та супутника. Тоді на супутник падає світловий потік $\Phi_{\text{суп}} = \pi E_0 r_{\text{суп}}^2$ (див. рис.1), а максимальна освітленість на поверхні планети від розсіювання цього потоку буде порядку $\frac{\Phi_{\text{суп}}}{R^2}$ або $E_0 \frac{r_{\text{суп}}^2}{R^2}$, де $R = 0,4$ млн км. Як бачимо, ця величина має порядок $10^{-5} E_0$. Тому немає сенсу враховувати її внесок у $E_{\text{день}}$, можна вважати $E_{\text{день}} = E_0$.

Розглядатимемо значення кута $0 \leq \alpha \leq \pi$. Очевидно, значення $E_{\text{ніч}}$ відмінне від нуля тільки за умови $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 2). На цьому рисунку жовтим зафарбовано частину

поверхні супутника, на яку падає світло від зорі; червоним – частину освітленої поверхні, розсіяне від якої світло спричиняє освітленість на планеті опівночі. Проекція «червоної» частини супутника на площину поперечного перерізу пучка світла від зорі складається (див. рис. 3) з півкола та півеліпса, мала піввісь якого становить $r_{\text{суп}} \cos \alpha$. Отже, площа цієї проєкції $\frac{\pi r_{\text{суп}}^2}{2} (1 + \cos \alpha)$, на неї падає світловий потік $\Phi_{\text{черв}} = E_0 \frac{\pi r_{\text{суп}}^2}{2} (1 + \cos \alpha)$; кожна маленька ділянка «червоної зони» рівномірно розсіює частину цього світла ($\eta = 60\%$) в півпростір. Врахуємо також, що кут падіння розсіяного світла на поверхню екватора планети опівночі дорівнює α .

Отримуємо формулу $E_{\text{ніч}} = \eta E_0 \frac{r_{\text{суп}}^2}{4R^2} \cos \alpha (1 + \cos \alpha)$,

тобто $\frac{E_{\text{ніч}}}{E_{\text{день}}} = \frac{\eta r_{\text{суп}}^2}{4R^2} \cos \alpha (1 + \cos \alpha)$. Відповідний графік показано на рис. 4.

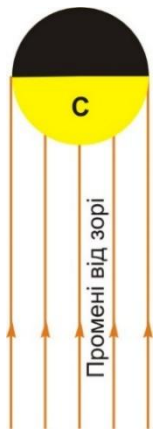


Рис. 1

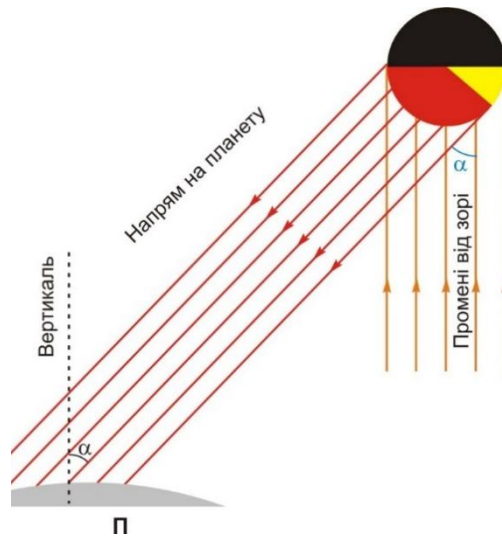


Рис. 2



Рис. 3

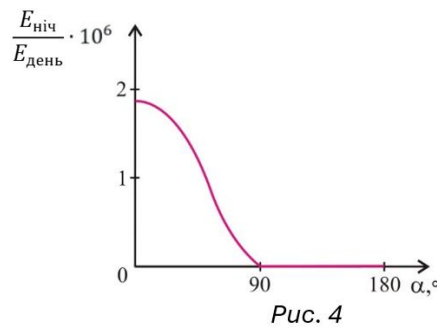


Рис. 4

Задачі запропонували:

1. Майзеліс З.О.,
2. Абдулханов А.М.,
3. Пашко М.І.,
4. Орлянський О.Ю.,
5. Гельфгат І.М.