Міністерство освіти і науки України
Національний центр «Мала академія наук України»
LIX Всеукраїнська учнівська олімпіада з фізики, м. Львів, 2025
Теоретичний тур, 9-й клас

Умови та розв'язки

1. «Полювання»

По колу радіуса $\boldsymbol{R}$ бігає мураха з постійною за модулем швидкістю $\boldsymbol{\upsilon}$. В деякій точці цього кола знаходиться ящірка. Вона дуже полюбляє бігати за мурахами, але її швидкість $\boldsymbol{u}$ менша за $\boldsymbol{\upsilon}$ та спрямована завжди на мураху. Згодом виявилося, що **відстань** між ними перестала змінюватися. **Якою вона стала**? Мураху та ящірку вважайте матеріальними точками.

Розв'язання.

Оскільки швидкість ящірки менша від швидкості мурахи, то вона (ящірка) не буде встигати за мурахою і зійде з колової траєкторії в його середину, Далі ящірка буде рухатись по спіралі, до тих пір, поки не досягне такої колової траєкторії, що періоди обертання обох комах не зрівняються.

Період руху мурахи

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v}$$

Період руху ящірки

$$T_2 = \frac{2\pi r}{u}$$

За умови незмінної відстані між тілами $x = const$ періоди $T_1 = T_2$.

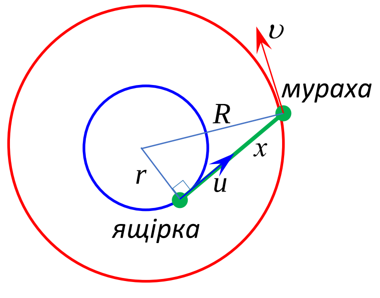
Звідси

$$\frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi r}{u}$$

Відповідно радіус кола руху ящірки $r = Ru/v$.

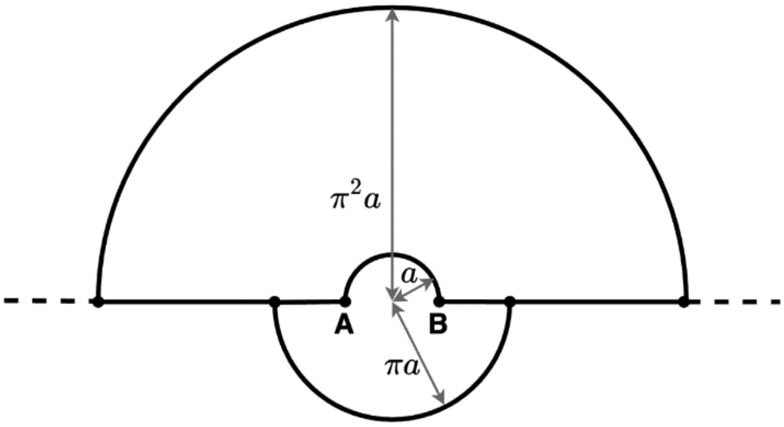
З малюнку відстань

$$x = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{u^2}{v^2}R^2} = R\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}$$



2. «***Нескінченні π-вкола»***

З мідного дроту діаметром 0.1 мм зібрали нескінченну схему, як показано на рисунку. Вона складається з півкіл та з'єднань між ними вздовж діаметру. Кожне наступне півколо має радіус в $\boldsymbol{\pi}$ разів більший за попередній. Радіус найменшого півкола $\boldsymbol{a} = 50$ см. **Знайдіть опір** такої нескінченної схеми між точками A та B. Питомий опір міді $\boldsymbol{\rho} = 0.017 \frac{\text{Ом}\cdot\text{мм}^2}{\text{м}}$. Уважайте π = 3.14.



Розв'язання.

Позначимо опір найменшого півкола як R_1. З формули для опору провідника можна знайти цей опір $R_1 = \rho \cdot l/S$, де $l = \pi a$ – довжина півкола, а $S = \pi d^2/4$ – площа поперечного перерізу дроту. Тоді

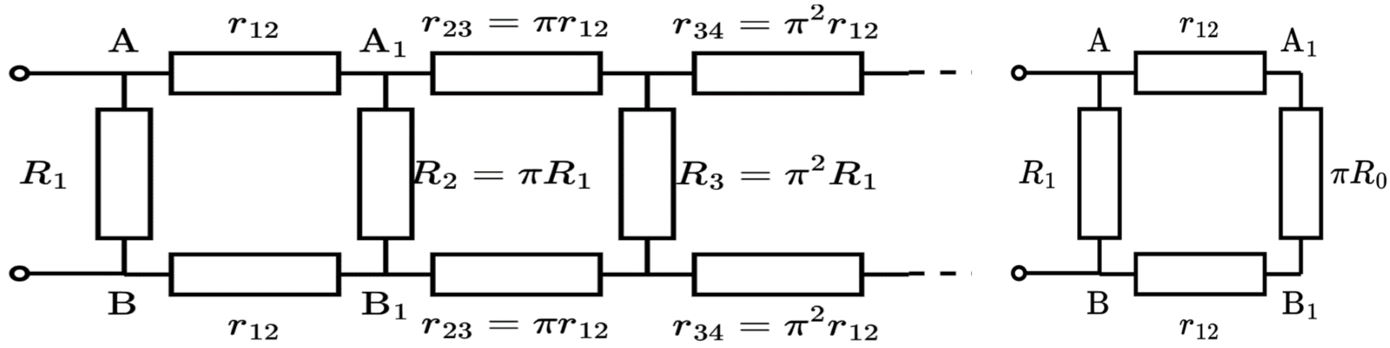
$$R_1 = \rho \cdot \frac{\pi a}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\rho a}{d^2} = 3.40 \text{ Ом}.$$

У наступного півкола радіус в π разів більший, тому і довжина півкола в π разів більша – а значить і опір в π разів більший $R_2 = \pi R_1$. У третього півкола опір в π разів більший ніж у другого $R_3 = \pi R_2 = \pi^2 R_1$ і так далі.

Тепер аналогічно розглянемо опір з'єднання між першим і другим півколом r_{12}. Довжина цього з'єднання дорівнює $l = (\pi - 1)a$, а опір дорівнює $r_{12} = \rho \frac{(\pi-1)a}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\rho a(\pi-1)}{\pi d^2} = 2.32$ Ом.

Довжина з'єднання між другим і третім півколом дорівнює $\pi^2 a - \pi a = \pi(\pi - 1)a$, тобто в π разів довше і має в π разів більший опір $r_{23} = \pi r_{12}$. І так далі, кожне наступне з'єднання має в π разів більший опір ніж попереднє.

Порахувавши опори всіх елементів схеми давайте перемалюємо її на еквівалентну схему з резисторів. Вертикальні резистори R відповідають півколам, а горизонтальні r – з’єднанням між ними



Виходить стандартний нескінчений ланцюг в якому кожна наступна ланка (одна ланка складається з резистора R та двох резисторів r справа від нього) має опір в π разів більший. Щоб знайти опір такого ланцюга скористаємось стандартним прийомом – уявно приберемо першу ланку та розглянемо опір системи між точками A_1 та B_1. Легко помітити, що схема виглядає так само як початкова, єдина різниця – всі опори в π разів більші. Отже і повний опір такої схеми буде просто в π разів більшим за повний опір початкової схеми між точками A, B. Тепер повернемось до початкової схеми і замінимо частину між A_1 та B_1 на πR_0, де R_0 – повний опір схеми між A та B. Виразимо опір повної схеми через опір елементів на рисунку. Він складається з паралельного з’єднання R_1 та $2r_{12} + \pi R_0$. Тоді

$$R_0 = \frac{R_1(2r_{12} + \pi R_0)}{R_1 + 2r_{12} + \pi R_0}$$

В цьому рівнянні нам невідомий лише повний опір R_0. Якщо привести доданки до спільного знаменника – отримаємо квадратне рівняння яке можна розв’язати відносно R_0:

$$R_0 = \frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{12}}{\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{12}}{\pi}\right)^2 + \frac{2R_1 r_{12}}{\pi}}.$$

Єдиний додатній розв’язок – з плюсом, тому обираємо його і підставляємо обраховані значення R_1 та r_{12}:

$$R_0 = \frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{12}}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{12}}{\pi}\right)^2 + \frac{2R_1 r_{12}}{\pi}} = 2.7 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $R_0 = 2.7$ Ом.

3. «Не стій – стрибай!»

Гумову кульку відпускають без початкової швидкості з певної висоти над горизонтальною рівною підлогою так, що кулька увесь час рухається вертикально і поступально. На рисунку наведено скріншот аудіозапису перших 6 ударів кульки об підлогу, для зручності на рисунку додано більш детальну шкалу часу у вигляді клітинок. Дослідник не встиг увімкнути аудіозапис синхронно з моментом відпускання кульки.
Важливою характеристикою пружного зіткнення двох тіл є коефіцієнт відновлення, який визначається як відношення швидкостей тіл після та до пружного удару.
А. Користуючись рисунком, знайдіть **коефіцієнт відновлення.**
Б. Визначте **початкову висоту**, з якої відпустили кульку.
В. Визначте **шлях**, пройдений кулькою до моменту п’ятого удару.
Опором повітря під час польоту кульки знехтувати. Уважати $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Розв’язання.

Момент удару кульки об підлогу визначаємо на аудіозаписі як пікове значення на початку ділянки.
Для перших 6 ударів кульки об підлогу ці моменти часу наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Удар	1	2	3	4	5	6
Момент часу, с	0,10	0,52	0,86	1,14	1,37	1,56

З цих даних можна визначити час польоту між сусідніми зіткненнями. У процесі польоту між ударами втратами енергії за умовою задачі можна знехтувати, отже рух кульки між двома послідовними ударами можна розглядати як вільне падіння – рівноприскорений рух з постійним прискоренням $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

Можна побачити, що проміжок часу між двома послідовними ударами після кожного удару зменшується. Це пов’язано із втратами енергії при зіткненнях з підлогою, адже удари є не абсолютно пружними.

Максимальну висоту, на яку зможе піднятись кулька у процесі польоту, можна визначити:

$$h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g}.$$

Початкову швидкість, знаючи час польоту, можна визначити:

$$v_0 = \frac{gt}{2}.$$

Таким чином, за даними, отриманими з аудіозапису, можна визначити початкову швидкість кульки після кожного удару, максимальну висоту підйому кульки на кожному інтервалі між ударами та коефіцієнт відновлення.

Результати наведено у таблиці 2 та таблиці 3.

Таблиця 2

Удар	1	2	3	4	5	6
Швидкість кульки після удару, м/с	2,10	1,70	1,40	1,15	0,95	неможливо визначити
Коефіцієнт відновлення	неможливо визначити	0,81	0,82	0,82	0,83	неможливо визначити-

Таблиця 3

Інтервал	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
Тривалість польоту, с	неможливо визначити	0,42	0,34	0,28	0,23	0,19	неможливо визначити
Максимальна висота підйому, м	неможливо визначити	0,22	0,1445	0,098	0,066	0,045	неможливо визначити

Як видно з таблиці 2, коефіцієнт відновлення, в умовах реального експерименту має певний розкид.

Середнє значення коефіцієнту відновлення у рамках нашої задачі:

$$k \approx 0{,}82.$$

Знаючи швидкість кульки після першого удару і середнє значення коефіцієнту відновлення, визначимо швидкість кульки до першого удару:

$$v_{01} = \frac{v_{11}}{k} \approx 2{,}56\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тоді висота відпускання кульки до першого удару:

$$H_0 = \frac{v_{01}^2}{2g} \approx 0{,}33 \text{ м}.$$

Для знаходження шляху, пройденого кулькою до моменту п’ятого удару об підлогу, скористаємось наступною залежністю:

$$L = H_0 + 2H_1 + 2H_2 + 2H_3 + 2H_4 \approx 1{,}39 \text{ м}.$$

4. «Спливаємо?»

У велику порожню посудину кладуть симетричне відносно вертикальної осі тіло складної форми з плоскою нижньою поверхнею площею $\boldsymbol{S}$, що прилягає до дна, і починають обережно повільно наливати воду таким чином, що вода зверху безпосередньо не ллється на тіло. Вода вільно підтікає під тіло. На графіку (дивись рисунок) показана залежність тиску тіла на дно (відношення сили тиску до площі $\boldsymbol{S}$) від висоти рівня рідини. Воду припиняють наливати в посудину, коли рівень води доходить до верхньої точки тіла.

А. Яка густина цього тіла?

Далі це тіло кладуть в точно таку ж порожню посудину, але з мулистим дном (таким, що вода не підтікає під тіло) і знову аналогічним чином обережно повільно наливають воду до верхньої точки тіла.

Б. Чи зможе спливти тіло в цьому випадку?

В. Знайдіть рівень води, за якого тиск тіла на мулисте дно є найменшим.

Уважайте, що $\boldsymbol{g}$ =10 м/с^2, густина води $\boldsymbol{\rho}_\text{в} = 1000\ \text{кг/м}^3$. Для відповіді на питання задачі ви можете робити побудови на рисунку. Тоді він буде частиною розв’язку, і його необхідно вкласти в роботу. **УВАГА! В жодному разі НЕ підписуйте цей аркуш!**

Розв’язання.

А) Коли вода доходить до верхньої межі тіла, то, судячи із графіка (при h=20 см тиск тіла на дно рівний нулю), сила тяжіння дорівнює силі Архімеда, що діє на повністю занурене тіло. Це значить, що густина тіла рівна густині води.

Б) Якщо дно є мулистим, то вода не підтікає під пласке дно тіла, а значить на тіло вже не може діяти сила тиску води на нижню поверхню тіла , що спрямована вертикально вгору і рівна $\rho_\text{в} g h S$, де S – площа поверхні, що дотикається до дна. Отже, при повному зануренні вода буде додатково притискати тіло до дна, а не створювати виштовхувальну силу. А значить тіло не спливе за жодних обставин.

В) Розпишемо тиск з боку тіла на дно у випадку підтікання води.

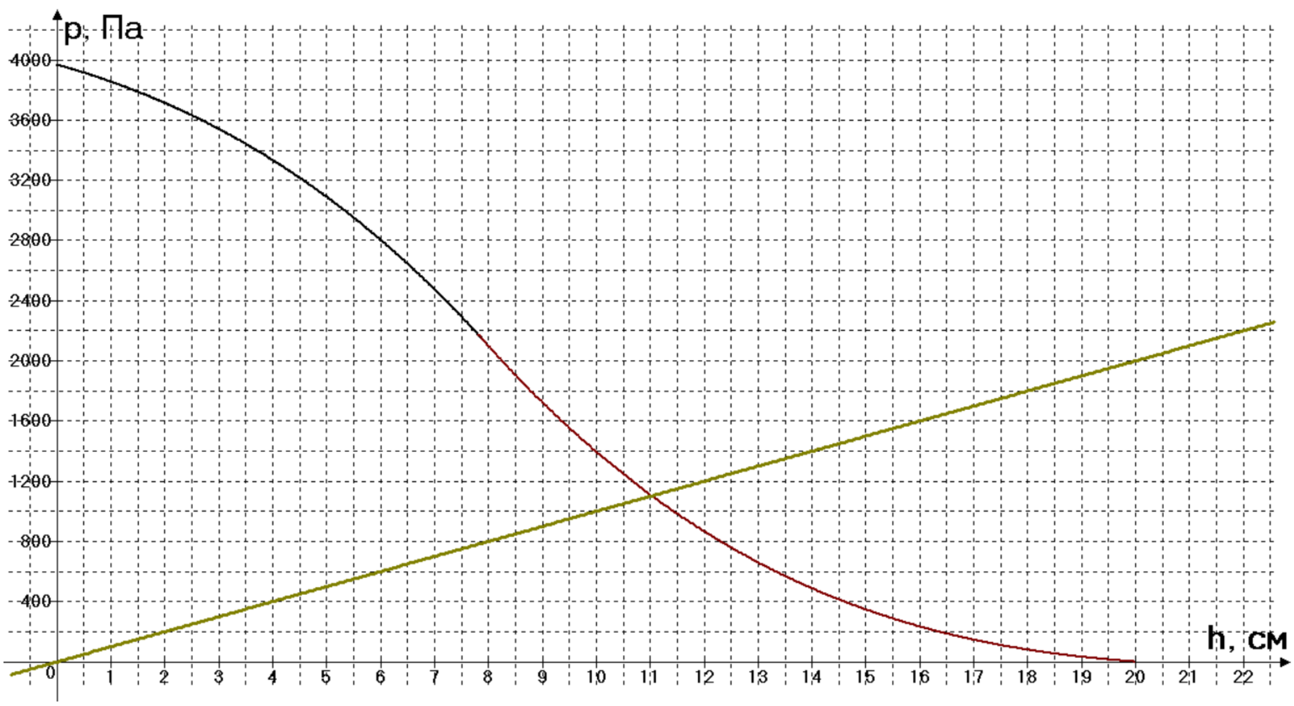
$$p(h) = \frac{mg - F_A(h)}{S} = \frac{mg - (F_\text{знизу}(h) + F_\text{інше}(h))}{S}$$

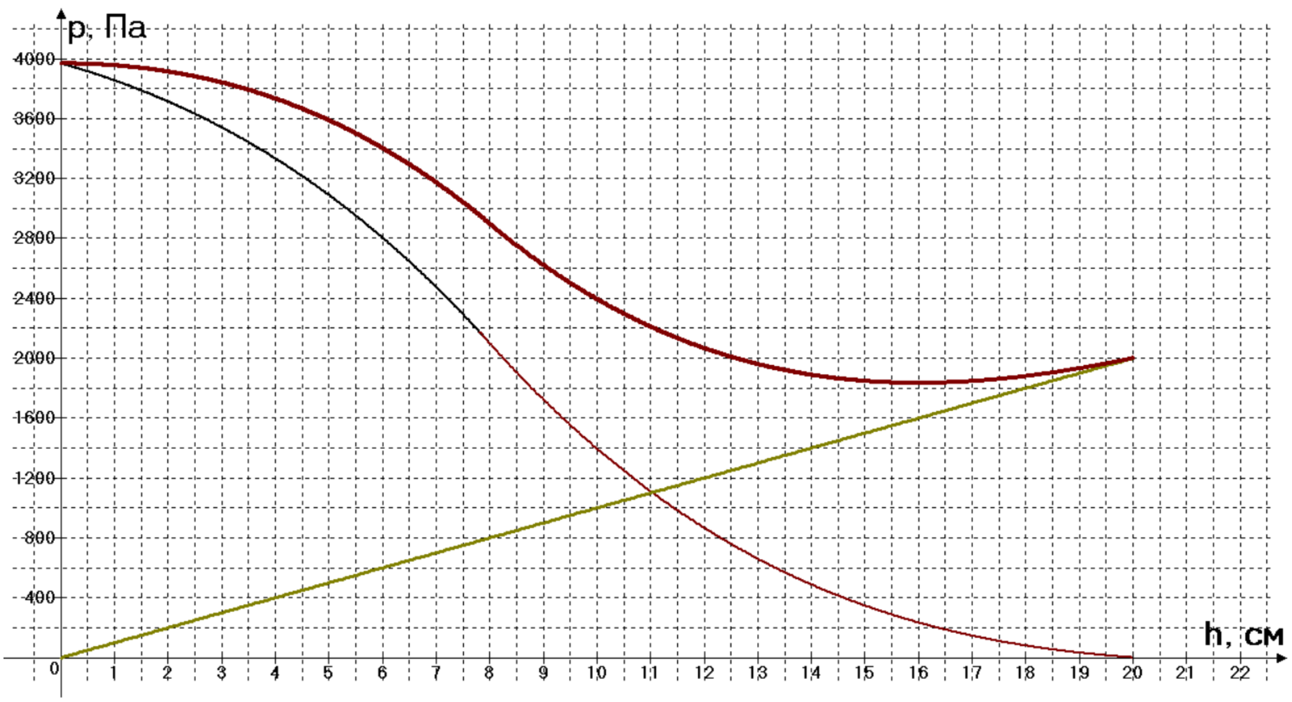
Сила Архімеда є результуючою силою тиску води на тіло, тобто розкладається на 2 сили: $F_\text{знизу} = \rho_\text{в} g h S$ - сила гідростатичного тиску, що діє на нижню поверхню тіла, яка прилягає до дна, і $F_\text{інше}$ - сумарна сила, що діє на всю іншу поверхню тіла.

Тепер запишемо тиск для ситуації із мулистим дном, враховуючи, що $F_\text{знизу}$ вже діяти не може:

$$p_{\text{м}}(h) = \frac{mg - F_{\text{інше}}(h)}{S} = p(h) + \frac{F_{\text{знизу}}}{S} = p(h) + \rho_{\text{в}} g h.$$

Отже, з даного в задачі графіка можна отримати залежність тиску від висоти $p_{\text{м}}(h)$ провівши додатково на графіку лінійну залежність $\rho_{\text{в}} g h$ (див. на графіку нижче) та додавши $p(h)$ та $\rho_{\text{в}} g h$ для однакових h.



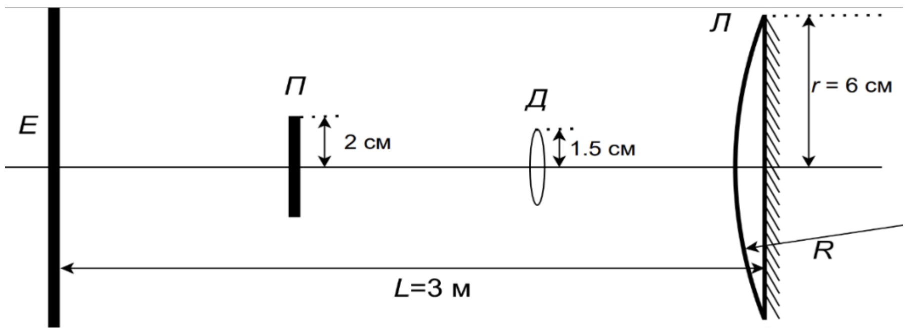


Тоді, з фінального графіка $p_{\text{м}}(h)$ видно, що тиск буде найменший коли $h \approx 16$ см.

5. «Оптична лава»

Оптична система складається з великого екрану *Е*, непрозорої пластини *П* у формі диску, радіус якого 2 см, джерела світла *Д* у формі тонкого кільця, радіус якого 1.5 см, та плоско-опуклої тонкої лінзи *Л* з радіусом оправи ***r*** = 6 см, послідовно розташованих вздовж осі системи (дивитися рисунок). Плоска поверхня лінзи вкрита сріблом і віддзеркалює світло. Показник заломлення речовини лінзи ***n*** = 1.35. Всі елементи розташовані в площинах, перпендикулярних до спільної головної оптичної осі системи, а їхні центри лежать на цій осі. Відстань від екрану до лінзи дорівнює ***L*** = 3 м.

Пластину встановили на деякій відстані ***x*** від екрану, після чого почали пересувати джерело світла вздовж оптичної осі. При цьому виявилось, що повна тінь на екрані зникає **повністю** лише тоді, коли джерело знаходиться в одному єдиному положенні на відстані ***l*** від екрану. **За якого максимального значення радіусу *R* кривизни** опуклої поверхні лінзи це можливо?



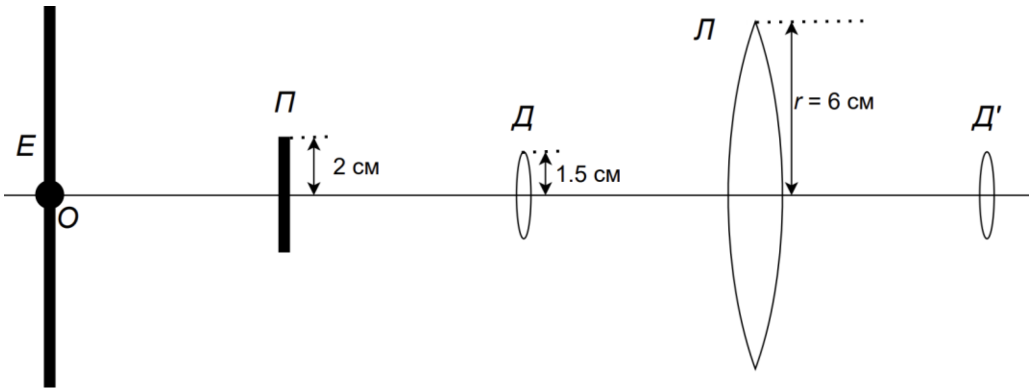
Уважайте розміри всіх елементів набагато меншими за відстань ***L***.

Підказка. Залежність оптичної сили плоско-опуклої тонкої лінзи від радіусу кривизни її опуклої поверхні та показника заломлення задається формулою

$$D = \frac{n-1}{R}.$$

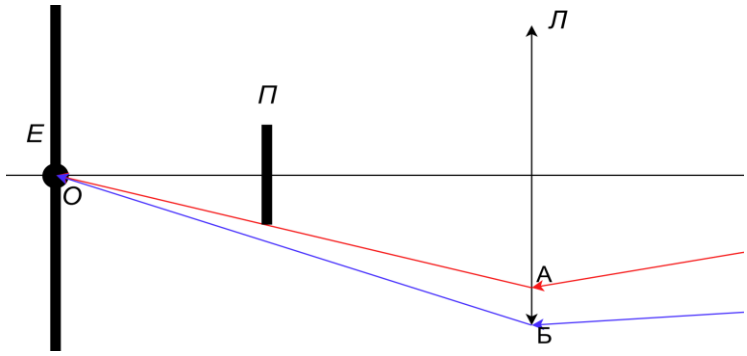
Розв'язання.

По-перше, джерело напряму ніколи не може освітити екран за перегородкою, особливо в точці О. Світло попадає туди від лінзи, тобто освічується зображенням джерела. Ми можемо добудувати другу половину лінзи та побудувати зображення *Д'* в дзеркалі.



Складніше усього позбавитись тіні в т. О. Щоб цю точку взагалі можна було освітити, треба, щоб перегородка не закривала повністю лінзу. Тобто кутовий розмір перегородки має бути не більше за кутовий розмір лінзи.

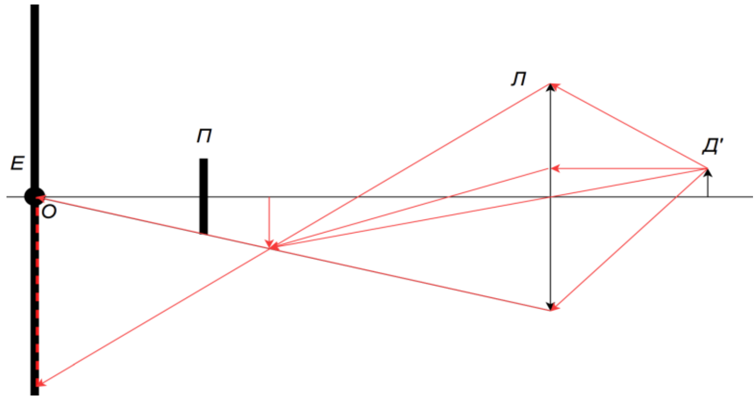
Нехай кутовий розмір перегородки менше, ніж лінзи. Тоді існує багато точок на лінзи, з яких промінь приходять в О. На малюнку це точки між А та Б.



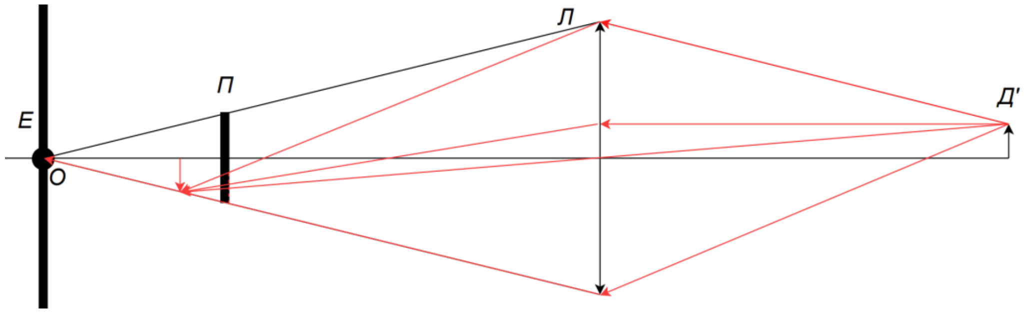
Відомо, що тінь зникає лише при одному положенні джерела. Це значить, що в точку О промінь може попасти лише в одній ситуації – отже, точки А та Б мають збігатись. Кутовий розмір перешкоди та лінзи мають бути однаковими, звідси x = L * (2 см/6 см) = L / 3.

Побудуємо зображення та проведемо граничні промені від лінзи до нього, щоб зрозуміти, як підсвічується екран. Зображення має знаходитись на прямій ОА (чи ОА'), щоб промінь міг влучити в точку О.

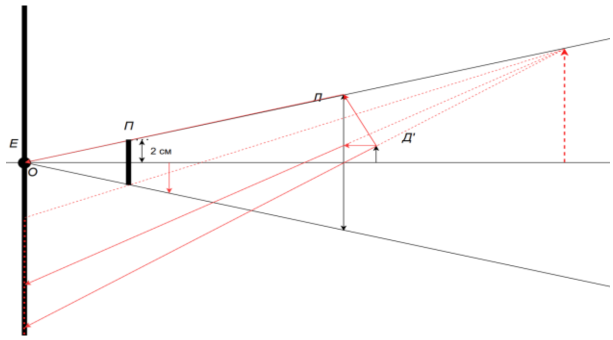
- Дійсне зображення за перегородкою: тінь повністю прибирається - **підходить**



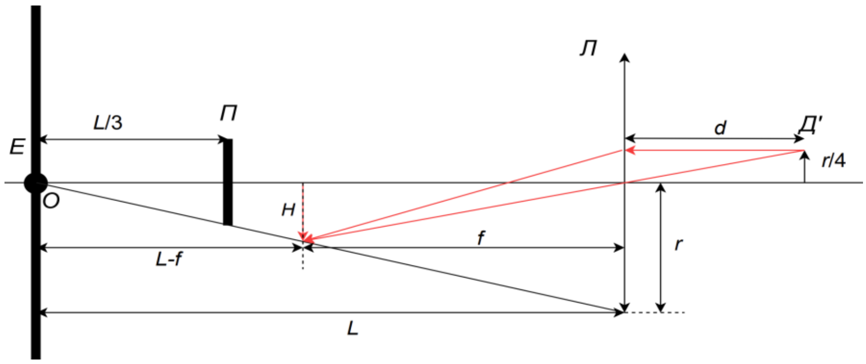
- Зображення перед перегородкою: усі промені від лінзи попадуть на перегородку - не підходить



- Уявне зображення: точка О підсвітиться, але навколо неї залишиться тінь – всі інші промені впадуть або на перегородку, або на екран, але на великій відстані від оптичної осі - не підходить



Позначимо відстані від лінзи до джерела *d* та від лінзи до зображення *f*. Нехай розмір зображення *H*



Маємо систему з трьох рівнянь: умова на збільшення лінзи (1), умова підсвітки т. O (2), та формула тонкої лінзи (3).

$$(1) \qquad \frac{H}{r/4} = \frac{f}{d}$$

$$(2) \qquad \frac{H}{L-f} = \frac{r}{L}$$

$$(3) \qquad \frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{2(n-1)}{R}$$

Виражаючи d з (3) та H з (2), отримуємо в рівнянні (1):

$$f(n-1) - \frac{R}{2} = \frac{2R}{L}(L-f)$$

$$f = \frac{2.5L}{2 + L(n-1)/R}$$

Чим більше *R*, тим більше *f*. Більше якогось значення радіуса, зображення просто утвориться перед перегородкою. З умови, що зображення створюється за перегородкою *f* < *2 L/3,* отримуємо.

$$\boxed{R < \frac{4L(n-1)}{7} = 60\,\text{см}}$$

Відповідь: $R_{max} = 0{,}6$ м.

Задачі запропонували: 1. Майзеліс З.О., 2. Рідкокаша І.П., 3. Мєшков О.Ю., 4. Олійник А.О., 5. Микуленко О.І.

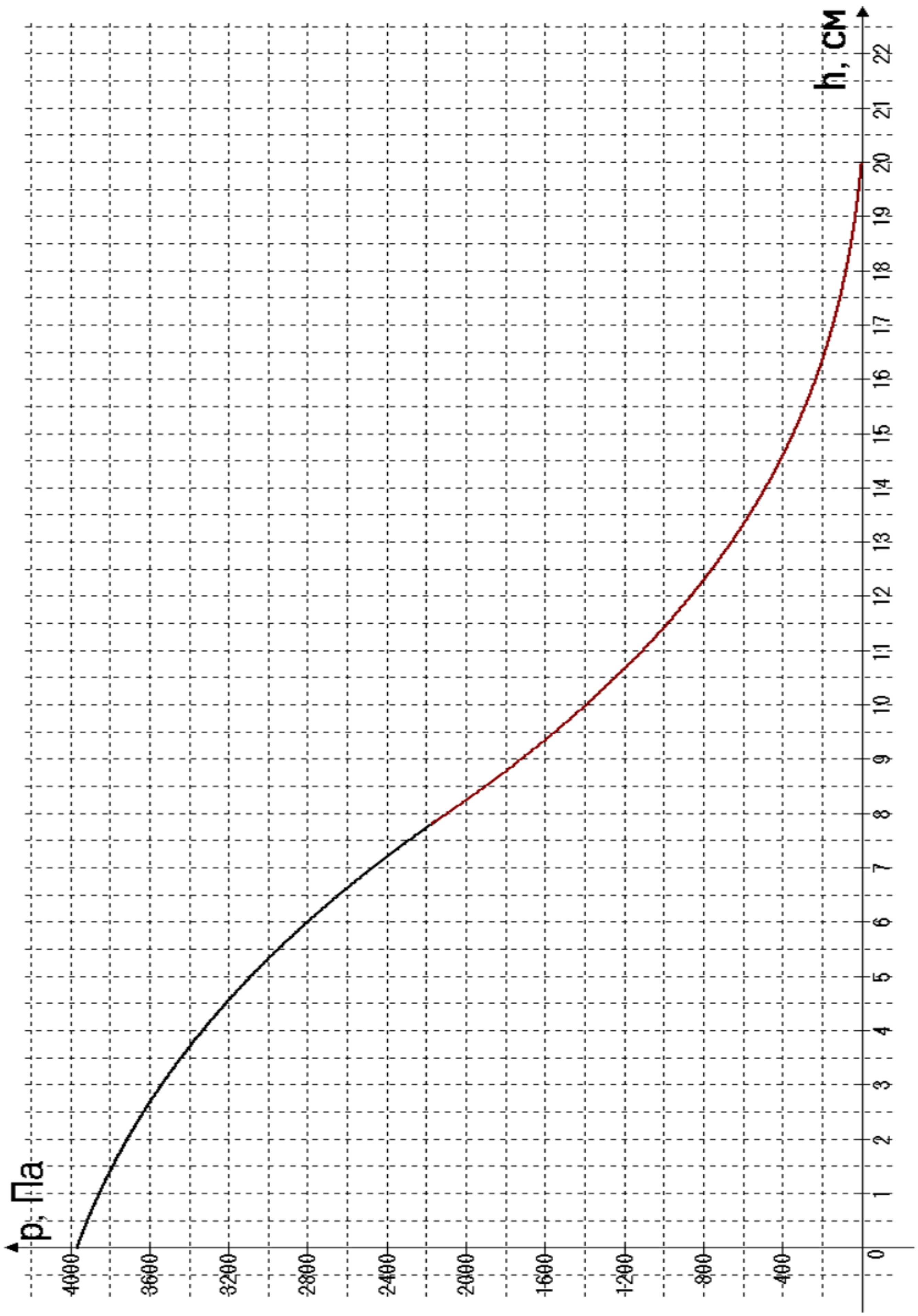


Рисунок до задачі «Спливаємо?»

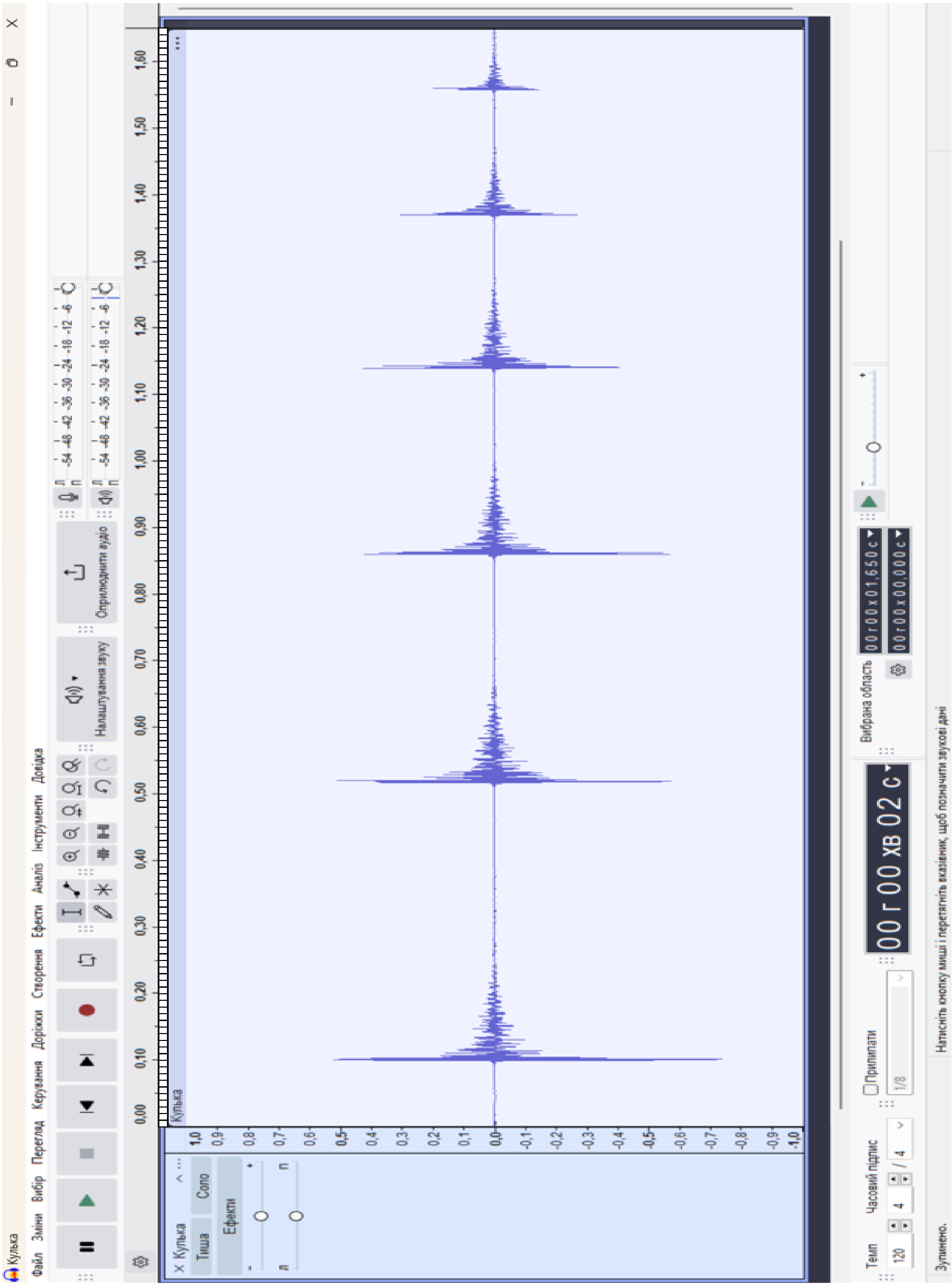


Рисунок до задачі «Не стій - стрибай!»