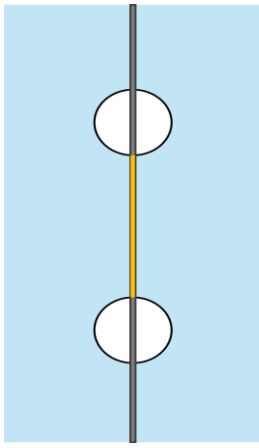
Міністерство освіти і науки України
Національний центр «Мала академія наук України»
LIX Всеукраїнська учнівська олімпіада з фізики, м. Львів, 2025
Теоретичний тур, 8-й клас

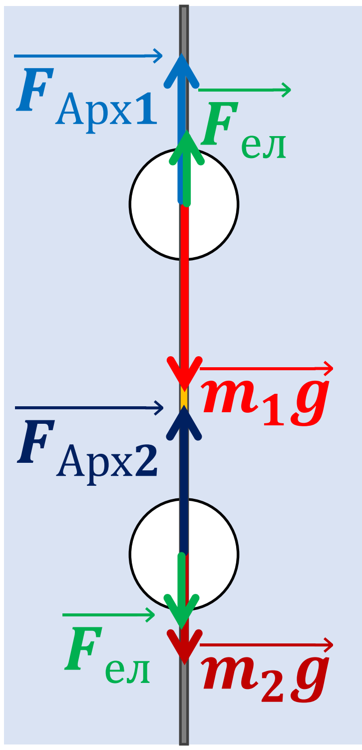
Умови та розв'язки

1.«Нашестя кульок»



Дві кульки мають тонкий наскрізний отвір по діаметру, за допомогою якого їх можна насадити на дуже довгий гладенький непровідний стрижень. Перша кулька виготовлена з матеріалу з густиною 1200 кг/м^3 і має заряд 40 нКл. Друга кулька виготовлена з матеріалу з густиною 240 кг/м^3 і має заряд 60 мкКл. Кульки зв'язали тонкою непровідною ниткою, насадили на стрижень і усю конструкцію помістили у вертикальному положенні у непровідну рідину (дивись рисунок). Після того, як у системі встановилась рівновага, нитку перерізали. На диво, після цього кульки не змінили своє положення. Визначте відношення об'ємів кульок. Густина рідини дорівнює 1000 кг/м^3, а сама рідина зменшує силу електростатичної взаємодії між кульками в 81 раз. **Зверніть увагу на те, що рисунок наведений без урахування масштабів кульок.**

Розв'язання.



З огляду на те, що після перерізання нитки положення кульок не змінилось, сила натягу цієї нитки у положенні рівноваги була рівна 0 (нитка була не натягнута). Отже кожна кулька утримувалась у положенні рівноваги дією сил тяжіння, Архімеда та кулонівської взаємодії. З урахуванням того, що кулькам було надано однойменних зарядів, вони мають відштовхуватись, отже кулька, що має меншу густину мала бути насаджена на стрижень нижче, ніж та, яка має більшу густину

З умови рівноваги кожної кульки:

$$\boldsymbol{m_1 g = F_{\text{ел}} + F_{\text{Арх}1}} \qquad \boldsymbol{m_2 g + F_{\text{ел}} = F_{\text{Арх}2}}$$

Додавши два рівняння, отримаємо:

$$\boldsymbol{\rho_p g V_1 - m_1 g + \rho_p g V_2 - m_2 g = 0}$$

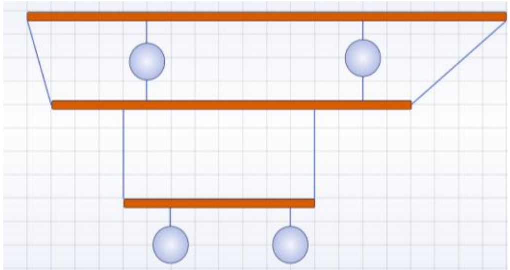
Ділимо обидві частини рівняння на gV_2:

$$\boldsymbol{\rho_p \frac{V_1}{V_2} - \rho_1 \frac{V_1}{V_2} + \rho_p - \rho_2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{V_1}{V_2}(\rho_p - \rho_1) = \rho_2 - \rho_p}$$

$$\boldsymbol{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_p - \rho_2}{\rho_1 - \rho_p} = \frac{1000 - 240}{1200 - 1000} = \frac{760}{200} = 3.8}$$

2. «Гірлянда»

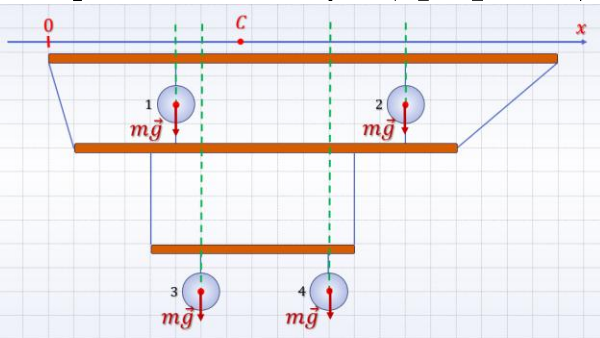


Учитель виготовив показану на рисунку систему для демонстрації деяких дослідів. Система складається з чотирьох однакових за масами та розмірами однорідних куль, трьох дуже **тонких і легких** стрижнів, та тонких невагомих ниток. Верхній стрижень може обертатися без тертя навколо осі (цвяху, що проходить через тонкий отвір у цьому стрижні), перпендикулярної до площини рисунку. На рисунку художник забув показати точку, через яку проходить ця вісь.

А. **Де саме** ця точка розташована, якщо в положенні рівноваги стрижні горизонтальні? **Б**. **Як зміниться відповідь до запитання А**, якщо всю систему занурити у воду? Густина матеріалу кульок утричі більша за густину води.

Розв'язання.

А. Позначимо масу кожної кулі m, довжину сторони клітинки l. Скористаємося умовою рівноваги: сума моментів усіх зовнішніх сил, які обертають важіль проти ходу годинникової стрілки, дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які обертають важіль за ходом годинникової стрілки (*було б ще зручніше прирівняти нулю алгебраїчну суму моментів*). Таких зовнішніх сил тут чотири: це сили тяжіння, що діють на кожну кулю. На рисунку вертикальними штриховими лініями показані *лінії дії* цих сил. Точка C (її координату x_C ми маємо знайти) показує, де саме проходить вісь обертання (цвях). Плече кожної сили тяжіння дорівнює модулю різниці координати x_C і координати центра відповідної кулі (x_1, x_2 тощо).



Умова рівноваги має вигляд:

$$mg(x_C - x_1) + mg(x_C - x_3) = mg(x_2 - x_C) + mg(x_4 - x_C).$$

Як бачимо з рисунку: $x_1 = 5l$, $x_2 = 14l$, $x_3 = 6l$, $x_4 = 11l$.

Отже, після підстановки отримуємо $\boldsymbol{x_C = 9l}$.

Саме таку координату має вісь обертання системи (тобто отвір і цвях). Вони розташовані на відстані 9 клітинок від лівого кінця верхнього стрижня (чи на відстані 11 клітинок від правого кінця).

Легко переконатися, що спроба розташувати вісь обертання десь на іншій частині верхнього стрижня (не між x_3 і x_4) буде невдалою.

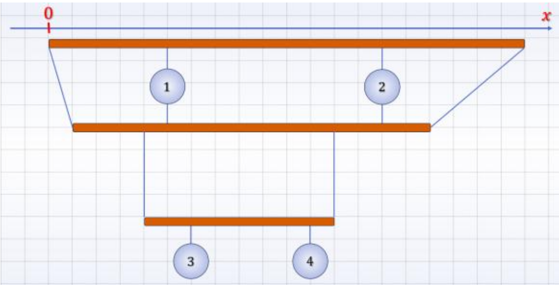
Також невдалою буде спроба визначити сили натягу ниток, розташованих між верхнім і середнім стрижнями (для цього потрібні дані, відсутні в умові задачі).

Б. Тепер до зовнішніх сил, що діють на систему, додаються сили Архімеда, що діють на кожну кулю (виштовхувальною силою, що діє на стрижні, нехтуємо, оскільки за умовою задачі вони дуже тонкі). Очевидно, що кожна сила Архімеда за модулем втричі менша від сили тяжіння кожної кулі. Отже, умовно все зводиться до зменшення ваги кожної кулі на величину архімедової сили. Головне – ці сили залишаються *однаковими* та лінії дії цих сил *не змінюються*. Таким чином, отримана в пункті А відповідь залишиться справедливою.

Другий спосіб розв'язання пункту А

Позначимо масу кожної кулі m, довжину сторони клітинки l. Пригадаємо, що в положенні рівноваги (стійкої) центр ваги системи (точка C) займає найнижче з усіх можливих положень. Якщо система може обертатися навколо нерухомої осі, то в рівновазі центр ваги обов'язково має бути на вертикалі, що проходить через вісь обертання.

У нашому випадку знайти положення центра ваги дуже легко (тим більше, що нас цікавить тільки горизонтальна координата цієї точки). Не будемо навіть застосовувати загальні формули.



Центр ваги *однакових* куль 1 і 2 має координату

$$x_{C12} = \frac{x_{C1}+x_{C2}}{2} = \frac{5l+14l}{2} = 9.5l.$$

Аналогічно знаходимо центр ваги куль 3 і 4:

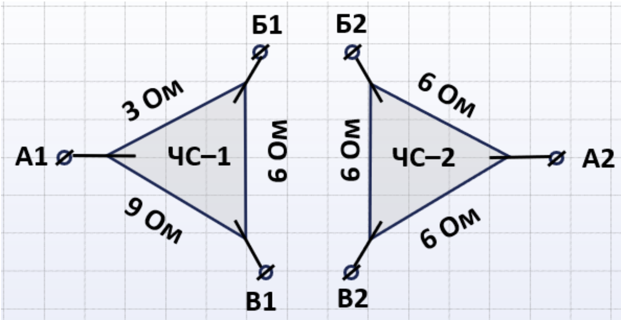
$$x_{C34} = \frac{x_{C3}+x_{C4}}{2} = \frac{6l+11l}{2} = 8.5l.$$

Оскільки «тіла» 1-2 і 3-4 мають однакові маси, легко знайти координату центра ваги всієї системи:

$$x_C = \frac{x_{C12}+x_{C34}}{2} = \frac{9{,}5l+8{,}5l}{2} = 9l.$$

Саме таку координату має вісь обертання системи (тобто отвір і цвях). Вони розташовані на відстані 9 клітинок від лівого кінця верхнього стрижня (чи на відстані 11 клітинок від правого кінця).

3. «Електрична комбінаторика»



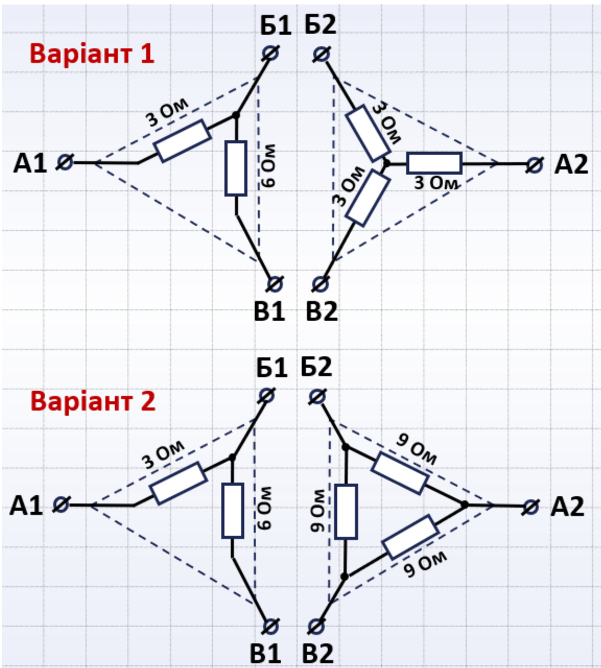
Вам пропонують дослідити «чорні скриньки» ЧС-1 і ЧС-2, кожна з яких має три клеми, а всередині містить тільки резистори. Виміряні опори між відповідними клемами зазначені на рисунку.

А. Яка **мінімальна** кількість резисторів може міститися в кожній «чорній скриньці»? Запропонуйте можливі схеми, які відповідають такій кількості резисторів.

Б. Провідниками з нехтовно малим опором з'єднують клему Б1 з клемою Б2, а клему В1 — з клемою В2. Визначте **опір** між клемами А1 і А2.

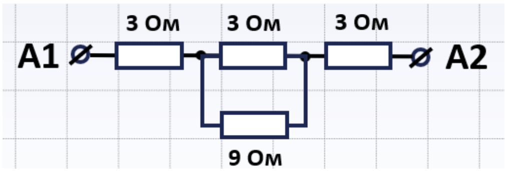
Розв'язання.

А. Підбір можливих варіантів для вмісту ЧС-1 стає дуже легким, якщо звернути увагу: опір між клемами А1 і В1 дорівнює сумі двох інших опорів між клемами. Тому «найекономніша» схема складається тільки з двох резисторів опорами 3 і 6 Ом. Що ж до вмісту ЧС-2, то достатньо звернути увагу на однакові значення всіх опорів між клемами. Тут можливі два варіанти стандартних схем, показані на рисунку: «зірка» або трикутник. Легко переконатися: обійтися *меншою* кількістю резисторів *неможливо*.



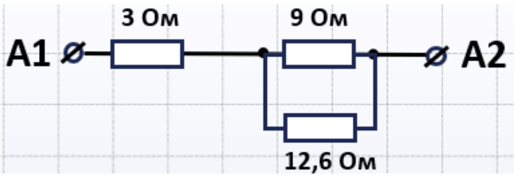
Таким чином, найменша можлива кількість застосованих резисторів: **2 резистори в ЧС-1 і 3 резистори в ЧС-2**.

Б. Для визначення опору «об'єднаного» кола між клемами А1 і А2 варіант 1 є дещо зручнішим. Еквівалентну схему можна отримати відразу.



З наведеної схеми легко отримати повний опір кола: $\boldsymbol{R = 8,25}$ Ом.

Наведемо розрахунок, що спирається на варіант 2. Після з'єднання клем Б1 і Б2, В1 і В2 резистори з опорами 6 і 9 Ом з'єднані паралельно, їх можна замінити одним резистором опором 3,6 Ом. Послідовно з цим резистором у колі стоїть резистор опором 9 Ом. Тому «остаточна» еквівалентна схема має такий вигляд:



Повний опір такого кола: $\boldsymbol{R = 3 + \frac{9 \cdot 12,6}{9+12,6} = 8,25}$ Ом.

4. *«Балістична гіпотеза»*

Колись існувала ідея, що світло від рухомого джерела поширюється у вакуумі зі швидкістю $c \approx 3 \cdot 10^5$ км/с, але лише відносно самого джерела світла, а не відносно інших тіл. Зокрема, якщо світло випромінюється в бік руху джерела, його швидкість збільшується на величину швидкості джерела. Якщо ж джерело рухається у протилежному напрямку, швидкість світла зменшується на таку саму величину. На основі цієї ідеї розглянемо гіпотетичні результати деяких спостережень за рухом планети, яка обертається по коловій орбіті радіусу $\boldsymbol{R}$ навколо зорі, нерухомої відносно земних астрономів. Земля розташована в площині орбіти цієї планети. Відстань між Землею та зорею дорівнює $\boldsymbol{10^5 \cdot R}$. Швидкість руху планети по орбіті не перевищує ***c/100.***

Спираючись на таку теорію, можна було б зіткнутися з доволі дивними висновками. Наприклад, земні астрономи в деякий момент могли б <u>одночасно</u> побачити в телескоп зображення цієї планети, розташовані у різних точках орбіти на найбільшій видимій із Землі відстані від зорі. Розрахуйте, якими тоді могли би бути **періоди обертання** планети.

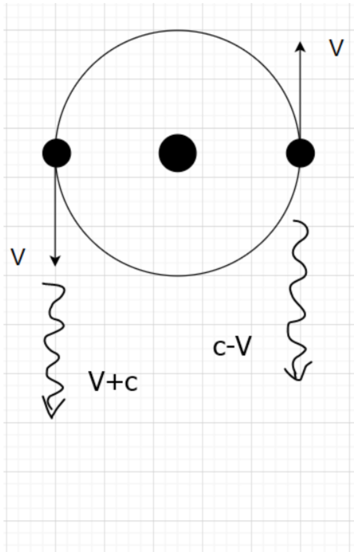
Примітки:

1) Вважати планету джерелом відбитого світла зорі.

2) Оскільки Земля знаходиться дуже далеко від зорі, то всі промені, які йдуть від планети до Землі, можна вважати паралельними.

Розв'язання.

А. Для того щоб ми могли спостерігати одну планету в двох діаметрально протилежних точках, як показано на рисунку, то світло випущене в цих двох точках має приходити до спостерігача одночасно, тобто



$$\frac{l}{c-V} = \frac{l}{c+V} + T\left(\frac{1}{2} + n\right),$$

де T – період обертання планети. Другий доданок справа це час між випусканням світла з правої та лівої точок, який має бути рівним половині періоду плюс певній цілій кількості обертів n. Звідси,

$$T = \frac{4lV}{(1+2n)(c^2 - V^2)} = \frac{2\pi R}{V}.$$

Здійснимо перетворення

$$\frac{4lV}{(1+2n)(c^2 - V^2)} = \frac{2\pi R}{V},$$

$$\frac{4lV^2}{(1+2n)(c^2 - V^2)} = 2\pi R,$$

$$4lV^2 = 2\pi R(1+2n)c^2 - 2\pi R(1+2n)V^2,$$

$$4lV^2 + 2\pi R(1+2n)V^2 = 2\pi R(1+2n)c^2,$$

$$V^2(4l + 2\pi R(1+2n)) = 2\pi R(1+2n)c^2,$$

$$V = \sqrt{\frac{2\pi R(1+2n)c^2}{4l + 2\pi R(1+2n)}},$$

$$V = \mathrm{c} \cdot \sqrt{\frac{2\pi R(1+2n)}{4l + 2\pi R(1+2n)}},$$

$$V = \mathrm{c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1}}$$

За умовою задачі

$$V \le \frac{c}{100}.$$

Звідси

$$\mathrm{c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1}} \le \frac{c}{100}.$$

$$\frac{c}{\sqrt{\frac{2l}{(1+2n)\pi R}+1}} \leq \frac{c}{100}.$$

$$\sqrt{\frac{2l}{(1+2n)\pi R}+1} \geq 100$$

Врахуємо, що $\frac{l}{R} = 10^5$. Прямою перевіркою можна отримати, що ця умова задовольняється при лише n=0,1,2.

Тоді можливі періоди,

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{c} \cdot \sqrt{\frac{2l}{(1+2n)\pi R}+1} = \frac{2\pi R}{c} \cdot \sqrt{1+\frac{2\cdot 10^5}{(1+2n)\pi}} \approx \frac{2\pi R}{c} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot 10^5}{(1+2n)\pi}},$$

де n=0,1,2.

5. ***«Практика проти теорії»***

Учень почав самостійно вивчати тему «Теплові явища» і вирішив розв'язати задачу з підручника: *«Знайдіть, яку кількість теплоти має передати нагрівач* ***постійної потужності*** *твердому тілу масою 400 г, що виготовлене з криптоніту та має температуру -40 ^{0}C, щоб перевести його у рідкий стан і нагріти до температури +30 ^{0}C у посудині з теплоємністю 200 Дж/^{0}C. Втратами теплоти та випаровуванням в навколишнє середовище знехтуйте. Побудуйте графік залежності температури посудини з речовиною від часу, якщо тривалість всього процесу 15 хв».*

Усі результати своїх обчислень (довідникові дані були в підручнику) учень записав у таблицю, що наведена нижче, побудував графік з трьох прямолінійних ділянок і побіг до батька в гараж перевіряти все на практиці, чомусь запам'ятавши, що рідкий криптоніт має питому теплоємність **утричі більшу** за твердий. Підібравши відповідне обладнання, учень почав експеримент та з сумом побачив, що все йде не за планом:

-внаслідок теплообміну з повітрям всі процеси тривають зовсім інший час, ніж планувалося;

-ділянки нагрівання, які на графіку були прямими, виявилися викривленими;

-скільки учень не нагрівав посудину з криптонітом, вище за 28 ^{0}C нагріти її не вдавалося.

τ, хв	...	…	6	9	12	15
t, ^{0}C	…	…	10	10	15	30

Учень у розпачі вимкнув нагрівач, поспостерігав за процесами охолодження та кристалізації криптоніту, випадково розлив рідину на таблицю з експериментальними даними і пішов геть. З усіх записів залишилася частина теоретично розрахованої таблиці та тривалість процесів плавлення та кристалізації в реальних умовах - 10 та 15 хвилин відповідно.

А. Використовуючи данні реальних вимірювань, визначте **скільки часу тривав процес плавлення** згідно теоретичних розрахунків учня для ідеалізованих умов задачі з підручнику.

Б. За залишками теоретичної таблиці розв'яжіть задачу з підручника: **побудуйте теоретичний графік залежності температури від часу та знайдіть необхідну на весь процес кількість теплоти.**
В. **Знайдіть температуру повітря** в гаражі, уважаючи її постійною протягом всього експерименту.
Г. **Схематично зобразіть** залежність температури від часу (*координатна сітка теоретичного і схематичного графіків повинна збігатись*) для реального процесу нагрівання криптоніту в гаражі **й обґрунтуйте** вигляд викривлених ділянок.
Вказівка. *Уважати, що теплова потужність теплообміну між посудиною з криптонітом та повітрям прямо пропорційна до різниці температур між ними з постійним коефіцієнтом пропорційності.*

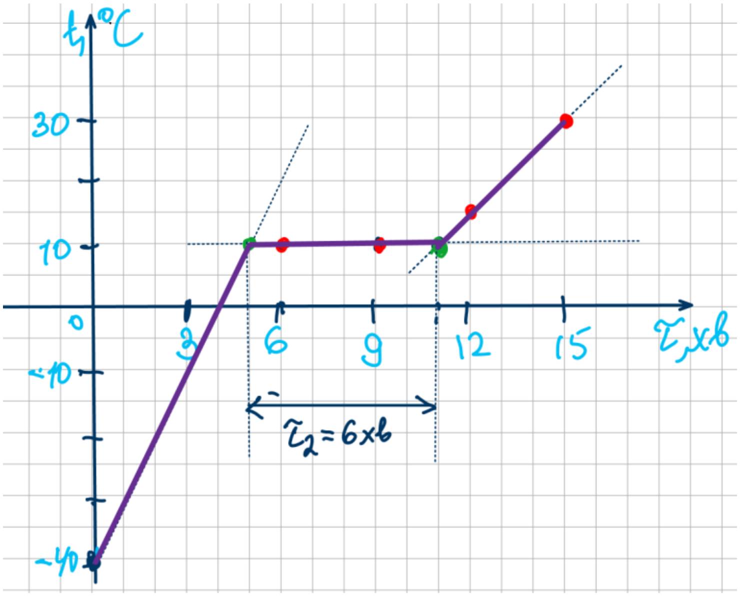
Розв'язання.

А. Розглянемо процеси плавлення та кристалізації. Зрозуміло, що без врахування теплових втрат його тривалість τ_2 може бути знайдена через закон збереження енергії: $P\tau_2 = \lambda m.$ Так як температуру під час фазового переходу вважаємо постійною, а потужність теплових втрат пропорційна різниці температур з навколишнім середовищем, то запис закону збереження енергії під час плавлення та кристалізації дає систему рівнянь, що і дозволяє знайти значення τ_2 :

$$\begin{cases} P\tau_2' = \lambda m + k\,(t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau_2' \\ k\,(t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau_2'' = \lambda m \\ P\tau_2 = \lambda m. \end{cases}$$

, де τ_2' та τ_2'' - це час плавлення та кристалізації в реальних умовах. Розв'язуючи систему отримуємо: $\tau_2 = \frac{\tau_2'\tau_2''}{\tau_2'+\tau_2''} = 6$ хв.

Б. Цілком зрозуміло з таблиці, що температура плавлення криптоніту дорівнює 10 ^{0}C, тому легко (або аналітично, або графічно) знайти точку перетину ліній плавлення та нагрівання рідкої речовини та побачити, що плавлення скінчилося в 11-ту хвилину після початку спостереження, а тривалість третього етапу в ідеалізованих умовах складає τ_3=4 хвилини (що відповідає нагріву на 20 ^{0}C). В попередньому пункті ми розрахували тривалість ідеалізованого плавлення – τ_2=6 хвилин. Тобто нагрівання твердої фази тривало τ_1=5 хвилин (разом 15 хвилин за умовою), за які тіло нагрілося на 50 ^{0}C. Шуканий графік малюємо виходячи з цих міркувань у вигляді ломаної з трьох відрізків.



Запишемо баланс енергій для всіх трьох процесів у випадку відсутності теплообміну з повітрям:

$$\begin{cases} Q_1 = P\tau_1 = (C + c_{\text{тв}}\, m)\Delta t_1 \\ Q_2 = P\tau_2 = \lambda m \\ Q_3 = P\tau_3 = (C + c_{\text{рід}}\, m)\Delta t_3 \\ c_{\text{рід}} = 3c_{\text{тв}} \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо:

а) $c_{\text{тв}}$=500 Дж/(кг·^{0}С), $c_{\text{рід}}$=1500 Дж/(кг·^{0}С);

б) Q_1=Q/3; Q_2=2Q/5; Q_3=4Q/15, де Q=60 кДж – шукана кількість теплоти;

в) P=200/3 Вт – потужність нагрівача

г) λ=60 кДж/кг – питома теплота плавлення криптоніту.

В. Так як тривале нагрівання не дало можливості нагріти посудину з рідким криптонітом вище 28 ^{0}С, це означає, що за цієї температури вся потужність нагрівача йде на передачу теплоти зовнішньому середовищу:

$$P = k\,(t_{\text{макс}} - t_{\text{кімн}}).$$

Об'єднавши це рівняння з рівняннями:

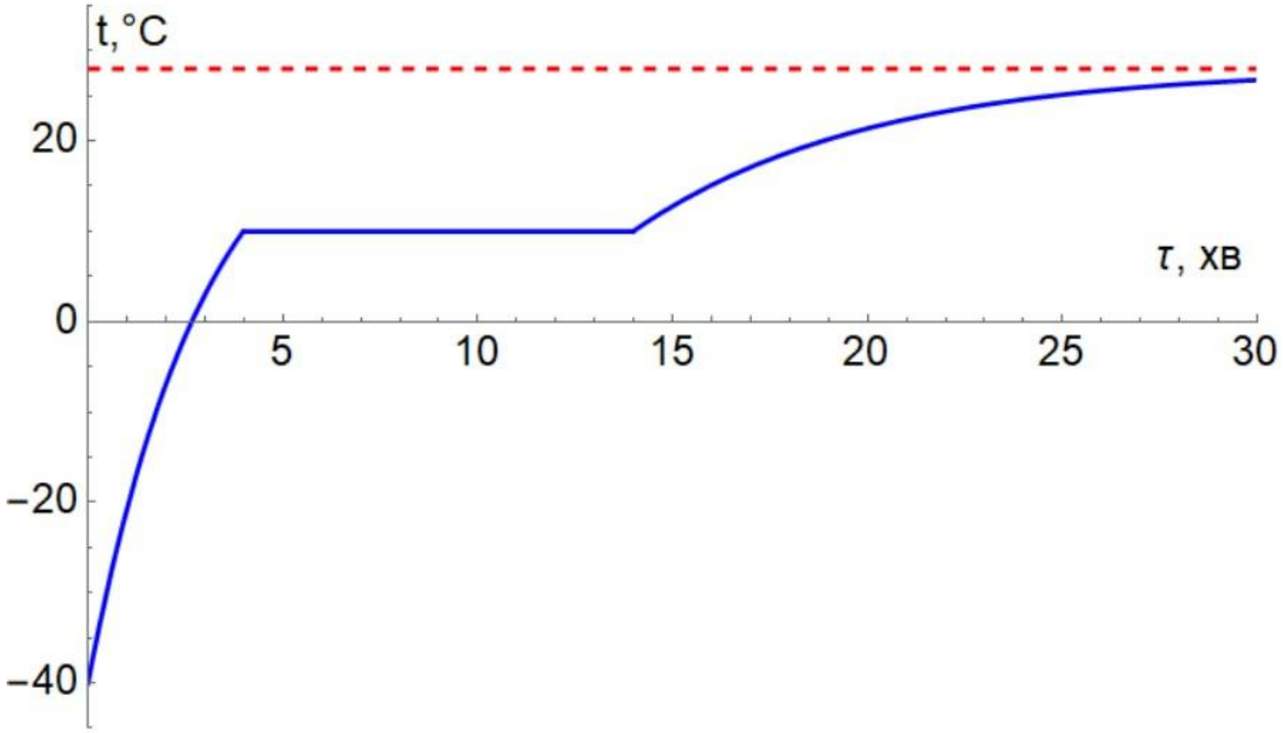
$$P\tau_2' = \lambda m + k\,(t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau'_2\,;$$

$$k\,(t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau_2'' = \lambda m;$$

З даних рівнянь отримуємо температуру в доволі холодному гаражі:

$$t_{\text{кімн}} = t_{\text{пл}} - (t_{\max} - t_{\text{пл}})\frac{\tau_2'}{\tau_2''} = -2^0\text{C}.$$

Г. Для побудови шуканого графіка врахуємо що потужність теплових втрат пропорційна до різниці температур криптоніту і навколишнього середовища. Тоді для інтервалу температур -40°С .. -2°С навколишнє середовище пришвидшує нагрівання, а від -2°С до 28°С навпаки сповільнює. Такий вплив призведе до того шо процес нагрівання твердої фази завершиться швидше, а процеси плавлення та нагрівання рідкої речовини тривають довше, причому після досягнення 28°С графік стає горизонтальним. Вплив теплообміну з навколишнім середовищем призводить до більш різкого зростання графіку при нагріванні до -2°C і повільного після -2°C, що призводить до викривлення графіку.



Задачі запропонували: 1. Мєшков О.Ю., 2-3. Гельфгат І.М., 4. Олійник А.О., 5. Пашко М.І.