דוגמה נוספת לבעיית בנאי שפה בממד אחד – פתרון משוואות המבנה של כוכב

לצורך כך משתמשים במספר קירובים שמאפשרים מידול טוב למבנה של כוכבים רבים ברוב שלבי התפתחותם. הקירוב הראשון הוא שלכוכב יש סימטריה כדורית מלאה (בקרוב זה מזניחים את סיבוב הכוכב סביב עצמו וכן כוחות מגנטיים). הקירוב השני מתבטא בהנחה שהוא נמצא בשיווי משקל הידרוסטטי (התאוצה מתאפסת בכל מקום) ובשיווי משקל תרמי.

משוואת ההידרוסטטיקה מתקבלת אם נתבונן בנקודה בכוכב הנמצאת במרחק (=רדיוס) r מהמרכז. נסמן את הצפיפות החומרית בנקודה זו ב-$\rho(r)$, ואת הלחץ בנקודה זו ב-$p(r)$. משמעות שיווי משקל הידרוסטטי היא שהכבידה הנוצרת על ידי השפעת המסה הנמצאת ברדיוסים נמוכים יותר והמושכת את החומר פנימה, מאוזנת על ידי גרדיאנט הלחץ הדוחף החוצה (כלומר הלחץ גדל מבחוץ פנימה). כך מקבלים:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{dr}} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

כאשר $m(r)$ היא המסה הנצברת ממרכז הכוכב עד רדיוס r, כלומר הגדרת המסה הנצברת מספקת את הקשר הבא לצפיפות ולרדיוס:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{dr}} = 4\pi r^2\rho(r)$$

כלומר, המסה dm הנמצאת בשכבה בעובי קטן dr הנמצאת ברדיוס r שווה לנפח $4\pi r^2 dr$ מוכפל בצפיפות $\rho(r)$.

שיווי משקל תרמי מתבטא בכך שהאנרגיה הנוצרת בכוכב על ידי ריאקציות תרמוגרעיניות יוצאת החוצה דרך שטף אנרגיה אלקטרומגנטית הנוצר על ידי גרדיאנט טמפרטורה תואם בכוכב. כך מקבלים את משוואת יצור האנרגיה:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dr}} = 4\pi r^2\rho(r)q(r)$$

לפיה ההפרש dL בין הבהיקות הנכנסת והיוצאת משכבה בעובי קטן dr הנמצאת ברדיוס r שווה לאנרגיה ליחידת זמן הנוצרת בשכבה זו כלומר המסה בשכבה כפול קצב יצור האנרגיה הסגולי $q(r)$, כאשר $L(r)$ זו הבהיקות (אנרגיה ליחידת זמן) ול-q יחידות של אנרגיה לזמן ולמסה.

יש מספר מנגנונים הגורמים לזרימת האנרגיה בכוכב. החשובים שבהם הם מעבר אנרגיה רדיאטיבי בו פוטונים נושאים את האנרגיה ומעבר אנרגיה קונבקטיבי בו יש זרמי הסעה חומריים הנושאים עימם את עודף החום מבפנים החוצה. כאשר מעבר האנרגיה הוא רדיאטיבי מקבלים את הקשר הבא:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}} = -D\frac{L}{4\pi r^2} \quad ; \quad D = \frac{3\kappa\rho}{16\sigma T^3}$$

לפיו שטף הקרינה משתווה לדיפוזית קרינה לפי גרדיאנט הטמפרטורה, כאשר T היא הטמפרטורה, κ היא האטימות של החומר לפוטונים (ביחידות של אחד חלקי צפיפות) ו-σ הוא קבוע סטפן-בולצמן.

(כאשר מעבר החום הוא קונבקטיבי מקבלים ביטוי אחר עבור גרדיאנט הטמפרטורה: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dr}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\ \frac{T}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{dr}}$ כאשר γ הוא המקדם האדיאבטי של החומר. התנאים החומריים והמבנה המקומי בכוכב קובעים האם מעבר החום הוא רדיאטיבי או קונבקטיבי).

בסך הכול מקבלים ארבע משוואות עבור הגרדיאנטים של: הלחץ p, המסה m, הבהיקות L והטמפרטורה T כפונקציה של הרדיוס r.

במשוואות מופיעה גם הצפיפות ρ וקיים קשר שהוא תכונה של החומר בין הצפיפות ללחץ ולטמפרטורה, כלומר זה אינו משתנה בלתי תלוי וניתן לרשום משוואת מצב כך ש: $\rho = \rho_{eos}(p,T)$

שני גדלים נוספים המופיעים במשוואות והם תכונות של החומר הם האטימות - $\kappa = \kappa_{op}(\rho,T)$ וקצב יצור האנרגיה התרמוגרעינית - $q = q_{nuc}(\rho,T)$. (כשמעבר האנרגיה הוא קונבקטיבי מופיע גם המקדם האדיאבטי שגם הוא כאמור לעיל הוא תכונה של החומר).

מקובל להחליף את המשתנה הבלתי תלוי להיות m ולא r ואז המשוואות הן:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{dm}} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dm}} = q$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dm}} = -\frac{3\kappa L}{16\sigma T^3 16\pi^2 r^4}\ (radiative)\ ;\ \ \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{dm}}\ \ (convective)$$

נניח שרוצים לקבוע את המבנה של כוכב במסה כוללת M (והרכב חומרי נתון – נרחיב על כך בהמשך).

אנו יודעים תנאי שפה במרכז:

$$r(m=0) = 0$$
$$L(m=0) = 0$$

כמו כן אנו יודעים שעל שפת הכוכב מתקיים בקירוב:

$$p(m=M) = 0$$

וכן קיים קשר (קרינת גוף שחור):

$$L(m=M) = 4\pi r^2(m=M)\sigma T^4(m=M)$$

כלומר, עבור ארבעת הנעלמים עבורם יש ארבע משוואות הדיפרנציאליות יש ארבעה תנאי שפה: שניים ב-$m=0$ ושניים ב-$m=M$.

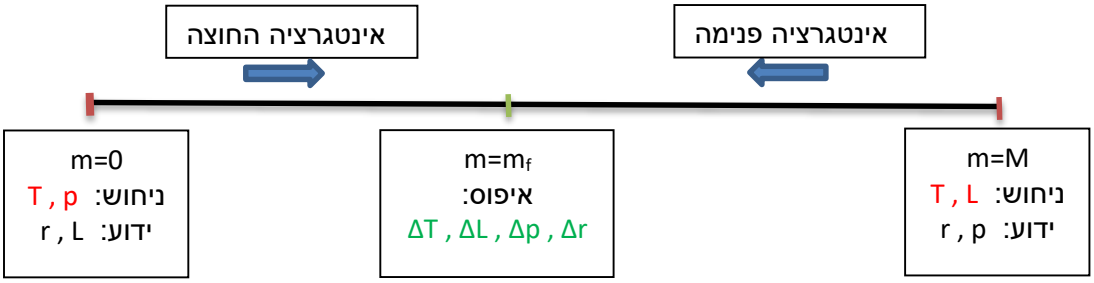
עבור מקרים פשוטים ניתן לפתור את המשוואות על ידי shooting to a fitting point:

ננחש $p(0)$ ו-$T(0)$ ובעזרת ידיעת $r(0)=0$ ו-$L(0)=0$ נבצע אינטגרציה החוצה של המשוואות הדיפרנציאליות עבור p, r, L ו-T מהמרכז $m=0$ עד נקודת התאמה כלשהי $m=m_f$.

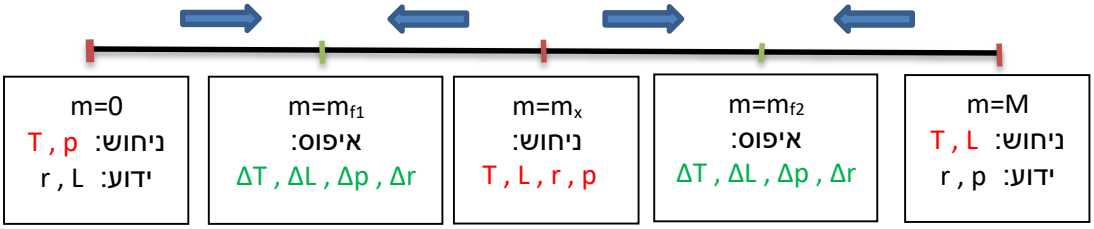
ננחש $T(M)$ ו-$L(M)$ ואז נדע את $r(M)$ ובעזרת $p(M)=0$ נבצע אינטגרציה פנימה של המשוואות הדיפרנציאליות מהשפה החיצונית $m=M$ עד נקודת ההתאמה $m=m_f$.

על ידי מציאת שורש בעולם ארבע ממדי נתאים את ערכי p, r, L ו-T בנקודת ההתאמה כשהמשתנים הם ערכי הניחוש $p(0)$, $T(0)$, $T(M)$ ו- $L(M)$. (כלומר יש ארבע פונקציות בארבע נעלמים כשהפונקציות הם ההפרש בערכי p, r, L ו-T בנקודת ההתאמה בין הערכים שהתקבלו מהאינטגרציה החוצה לערכים שהתקבלו מהאינטגרציה פנימה והנעלמים הם $T(0)$, $T(M)$ ו- $L(M)$).

באופן גרפי ניתן להציג זאת כך:



במקרים מסובכים יותר (מבנה כוכב עם יותר שכבות "בוערות" אך אין זה חשוב לצורך ההסבר) יכול להיות צורך בנקודות התאמה נוספות, כפי שמתואר לדוגמה בציור הבא (עבור שתי נקודות התאמה):



בדוגמה זו מנחשים בנוסף את ארבעת הגדלים בנקודה כלשהי בתוך הכוכב ומגדירים שתי נקודות התאמה. מבצעים שתי אינטגרציות פנימה ושתיים החוצה ופותרים שמונה משוואות בשמונה נעלמים.

בדומה לכך, ניתן להוסיף נקודות ניחוש נוספות ונקודות התאמה נוספות כאשר מגדילים כך את כמות הנעלמים וכמות המשוואות בבעיית השורש הרב ממדית המתקבלת (ניתן להמשיך בתהליך זה עד שהערכים בכול נקודות הדיסקרטיזציה בכוכב הם נעלמים וכך מקבלים את שיטת הרלקסציה שתוארה בתרגיל חישוב מבנה ננס לבן).

כאמור לעיל, המשוואות ותנאי השפה מתארים את המבנה של כוכב במסה כוללת M והרכב חומרי נתון. הכוונה בהרכב חומרי נתון היא ידיעת ההרכב של הכוכב בכל נקודה r. כאשר כוכב נוצר הרכב החומר בו הוא אחיד ונקבע בהתאם להרכב החומר ב"ענן" ממנו הוא נוצר. הרכב זה משתנה במידת מה בין גלקסיות "עתיקות" לגלקסיות "חדשות" אך ניתן לומר שהחומר בכוכב מורכב בכשלושה רבעים מימן כרבע הליום ואחוזים ספורים של אלמנטים כבדים יותר (פחמן ועוד – קרואים "מתכות" בעגה של האסטרופיזיקאים). הרכב החומר משפיע על תכונותיו כך שמשוואת המצב, קצבי הריאקציות והאטימות שנרשמו לעיל כתלויים במשתנים התרמודינמיים של החומר תלויים למעשה גם בהרכב המקומי, כלומר יש לרשום: $\rho_{eos}(p,T,\{X_i\})$, $\kappa_{op}(\rho,T,\{X_i\})$ ו-$q_{nuc}(\rho,T,\{X_i\})$ כש-$\{X_i\}$ מסמל את ההרכב החומרי (שבר אטומרי של אלמנט i, כלומר מה הכמות היחסית של אטומי i מתוך סך האטומים בחומר).

כאמור, כשכוכב נוצר הרכבו אחיד וניתן לחשב את מבנהו ההתחלתי (בהינתן מסתו והכמות המדויקת של המימן ההליום והמתכות). במצב היציב שנוצר מתקבל כוכב בו יש בעירה תרמוגרעינית של מימן במרכזו. בעירה זו מייצרת אנרגיה במרכז הכוכב ומאפשרת את האיזון ההידרוסטטי והתרמי בהתאם למשוואות המבנה שתוארו לעיל. יחד עם זאת, הבעירה התרמוגרעינית הופכת ארבעה גרעיני מימן לגרעין הליום וכך משתנה הרכב הכוכב. למעשה, כשרוצים לחשב את ההתפתחות של הכוכב מחשבים את מבנהו ההתחלתי ואחר כך "מתקדמים בזמן" על ידי חישוב שינוי ההרכב החומרי בשכבות השונות בכוכב על ידי הבעירה התרמוגרעינית השונה בכל רדיוס הפועלת במשך "צעד זמן" נתון. בשלב הבא מחשבים את המבנה העדכני של הכוכב כשההרכב החומרי הוא מעודכן (ולא אחיד) וחוזר חלילה.