משוואות דיפרנציאליות חלקיות – pde

במתמטיקה נהוג לחלק בין משוואות היפרבוליות, פרבוליות ואליפטיות:

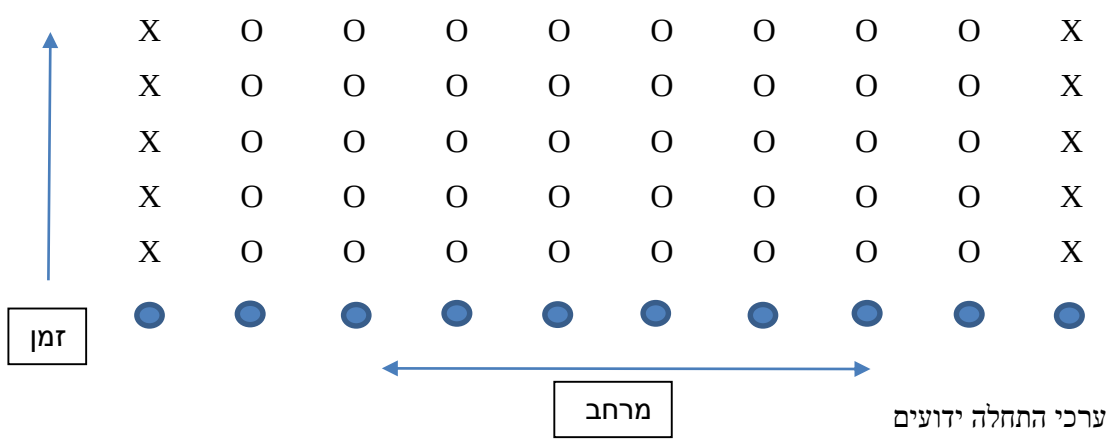
במשוואות היפרבוליות הנגזרות החלקיות הן מסדר שני ולהן סימנים הפוכים. דוגמה פיזיקאלית היא משוואת גלים חד ממדית: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

במשוואות פרבוליות נגזרת חלקית אחת היא מסדר ראשון והאחרות מסדר שני. דוגמה פיזיקאלית היא משוואת הדיפוזיה: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial u}{\partial x}\right)$

במשוואות אליפטיות הנגזרות החלקיות הן מסדר שני ולהן סימנים זהים. דוגמה פיזיקאלית היא משוואת פואסון: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$

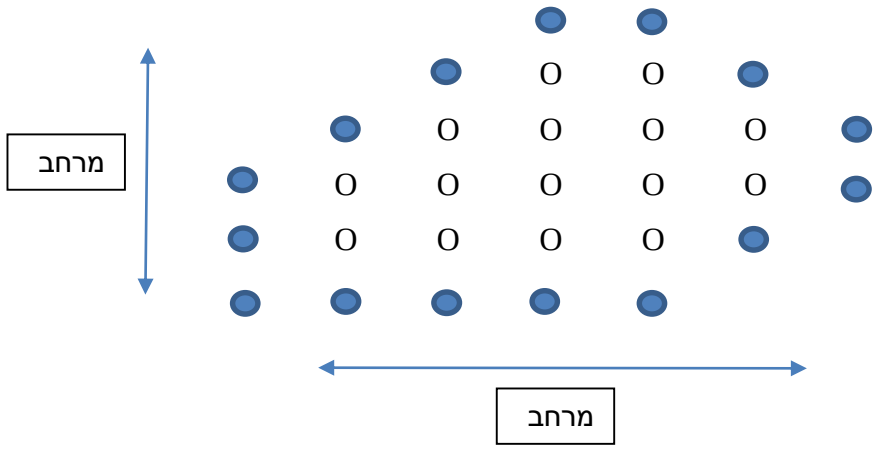
חלוקה אחרת היא בין בעיות ערכי התחלה (initial value problems) לבעיות ערכי שפה (boundary value problems).

בבעיות ערכי התחלה מעוניינים לדעת גדלים במרחב כפונקציה של הזמן. ערכי ההתחלה של הגדלים במרחב ידועים וכן ידועים תנאי השפה ורוצים לחשב את ההתפתחות הזמנית. דוגמאות לבעיות שכאלו הן משוואת הגלים ומשוואת הדיפוזיה שנרשמו לעיל. מצב שכזה מוצג בתרשים הבא:



- ערכי התחלה ידועים
X - תנאי שפה ידועים
O - המשתנים אותם יש לחשב

בבעיות ערכי שפה מעוניינים לדעת גדלים במרחב כאשר ידועים ערכי הגדלים על שפות המרחב (תנאי שפה של דירכלה – Dirichlet), או שידועה הנגזרת הניצבת של הגדלים על השפות (תנאי שפה מסוג ניומן – Neuman). דוגמה לבעיות שכאלו היא משוואת פואסון. מצב שכזה מוצג בתרשים הבא:



- ערכי התחלה ידועים
O - המשתנים אותם יש לחשב

נבחן כיצד ניתן לפתור את משוואת פואסון: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\rho(x,y)$ בתוך תחום במישור $[x,y]$. לשם נוחות ההסבר נניח שהתחום בו יש לפתור את המשוואה הוא ריבוע (מקביל לצירים). לצורך הפתרון נגדיר סריג דו-ממדי במישור כך שהמיקום של נקודה $[i,j]$ יהיה בקואורדינטות $[x=ih, y=jh]$.

נסמן $\rho_{i,j}=\rho(x_i,y_j)$; $u_{i,j}=u(x_i,y_j)$.

בעזרת הקירוב הסימטרי הפשוט לנגזרת שניה, נהפוך את המשוואה הדיפרנציאלית למשוואת הפרשים:

$$\frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}\right]=\rho_{i,j}$$

ומכאן מקבלים: $\left[u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}\right]=h^2\rho_{i,j}$ $(*)$

בתנאי שפה של דיריכלה $u_{i,j}$ ידוע על השפות $i,j=0,N$ ובתנאי שפה של ניומן הנגזרת הניצבת ידועה.

לדוגמה, בתנאי דיריכלה עבור $j=N$ אנו יודעים את $u_{i,N}$ ואז המשוואה עבור $j=N-1$ היא:

$$u_{i+1,N-1}+u_{i-1,N-1}+u_{i,N-2}-4u_{i,N-1}=h^2\rho_{i,N-1}-u_{i,N}$$

בתנאי ניומן אנו יודעים את הנגזרת הניצבת כלומר, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}|_{y=ymax}=g(x)$ ונביע את הנגזרת על ידי משוואת הפרשים פשוטה: $u_{i,N-1}-u_{i,N}=hg_i$. מכאן נקבל:

$$u_{i+1,N-1}+u_{i-1,N-1}+u_{i,N-2}-3u_{i,N-1}=h^2\rho_{i,N-1}-hg_i$$

ניתן לראות במשוואת ההפרשים שקיבלנו עבור הנקודות (i,j) שאינן ליד השפות $(*)$ שבאגף שמאל מופיע הנעלם בנקודה $u_{i,j}$ וגם הנעלמים בנקודות השכנות. בסך הכל יש סדר גודל של N^2 משוואות ליניאריות מצומדות. ניתן לפתור משוואות אלו על ידי כתיבתן באופן מטריציוני:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \vdots \\ \rho_k^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

כאשר בצורת הצגה זו רשמנו את הנעלמים בווקטור חד-ממדי, כלומר המרנו את המיקום הדו-ממדי (i,j) במיקום חד ממדי "רץ" כך שהנעלם עבור $k = N + 1$ הוא הנעלם הראשון בשורה השנייה וכולי. באגף ימין רשמנו ρ^* כדי להתחשב בשינויים באגף זה בנקודות המושפעות מתנאי השפה. חשוב לציין שהאברים המופיעים במטריצה מתאימים לתנאי דיריכלה בהם המקדם של האבר האלכסוני נשאר 4- גם עבור הנעלמים הסמוכים לערכי השפה הידועים. ניתן לראות שהאלכסון הראשי במטריצה שווה ל- 4- שכן זהו ערכו של המקדם של $u_{i,j}$ ב-$(*)$. שני האלכסונים הסמוכים במטריצה (זה שמימין וזה שמשמאל לאלכסון הראשי) מייצגים את המקדמים של $u_{i-1,j}$ ושל $u_{i+1,j}$ ולכן הם שווים ל- 1 שאר האברים בכל שורה שווים ל- 0 למעט שני אברים במרחק N (משמאל ומימין) השווים גם הם ל- 1 מכיוון שהם מייצגים את המקדמים של $u_{i,j-1}$ ושל $u_{i,j+1}$.
הבעיה בפתרון המשוואה המטריציונית נעוצה בגודל המטריצה המתקבל שכן אפילו עם $N = 100$ מקבלים שמספר האברים בווקטור u הוא כ- 10,000 ובמטריצה יש 100 מיליון אברים, ולכן פתרון ישיר הינו יקר חישובית.

שיטות איטרטיביות לפתרון:

את משוואת ההפרשים $(*)$ ניתן לרשום אחרת:

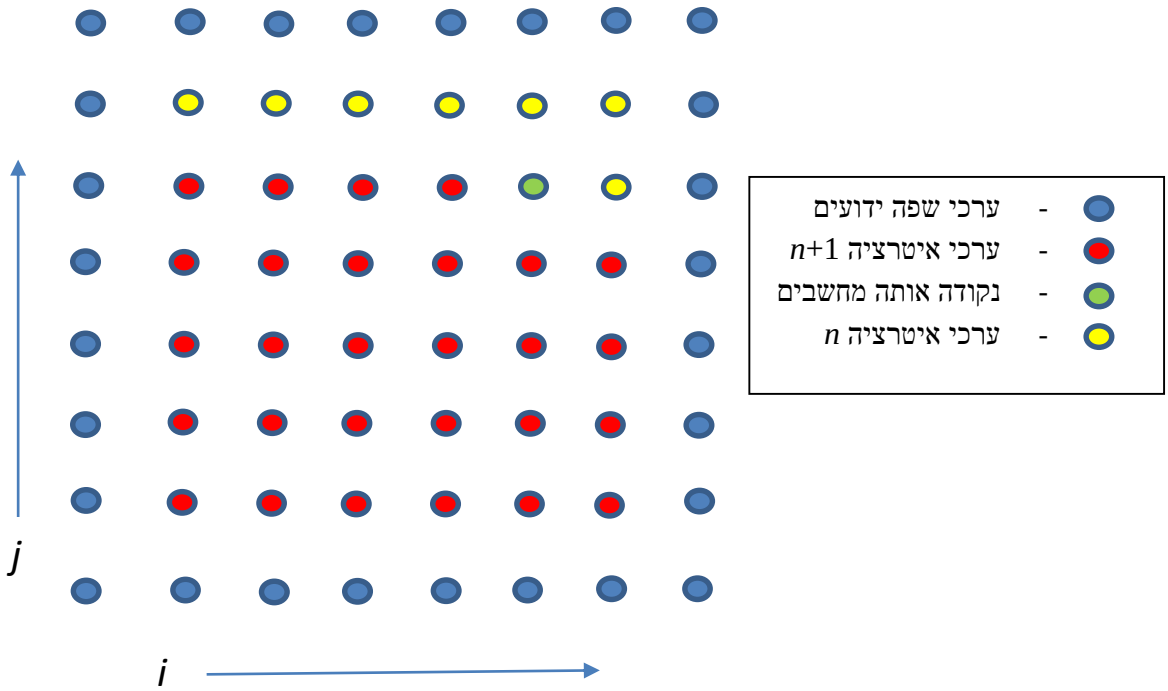
$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) - \frac{h^2}{4}\rho_{i,j}$$

בשיטת Jacobi מחשבים את $u_{i,j}$ באיטרציות על בסיס משוואה זו. נסמן ב-$u_{i,j}^n$ את הערך של $u_{i,j}$ באיטרציה ה-n-ית ונחשב את הערך באיטרציה ה-n+1:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n\right) - \frac{h^2}{4}\rho_{i,j}$$

ניתן לראות שהערך העדכני בנקודה מסוימת הוא ממוצע הערכים על השכנים באיטרציה הקודמת מתוקן על ידי אבר ימין של המשוואה הדיפרנציאלית. איטרציות Jacobi מתכנסות עבור משוואת פואסון זו. עבור שריג בגודל $N \times N$ נקודות וכדי להשיג דיוק של 10^{-p} יש צורך ב-$\frac{1}{2}pN^2$ איטרציות.

ניתן לשפר את ההתכנסות על ידי שימוש בערכים העדכניים ביותר של $u_{i,j}$. כדי להבהיר זאת נתבונן בתרשים הבא המציג את אופן עדכון ערכי $u_{i,j}$ במהלך המעבר על נקודות השריג באיטרציות:



בציור זה הנחנו שסדר המעבר על נקודות השריג הוא קודם כל על השורה הראשונה משמאל לימין ואח"כ על השנייה וכולי. במצב שכזה, כשמגיעים לנקודה מסוימת (המסומנת בירוק בתרשים) הרי שהנקודות עם i ו-j נמוכים יותר כבר עודכנו. ניתן אם כך לעדכן את שיטת Jacobi ולהשתמש בנוסחה:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n+1}\right) - \frac{h^2}{4}\rho_{i,j}$$

נוסחת איטרציה זו נקראת שיטת Gauss-Seidel וההתכנסות שלה מהירה בפקטור 2 לעומת שיטת Jacobi.

ניתן להאיץ את ההתכנסות עוד יותר על ידי שימוש באקסטרפולציה המביאה בחשבון את הערך בנקודה באיטרציה הקודמת:

$$u_{i,j}^{*} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n+1}\right) - \frac{h^2}{4}\rho_{i,j}$$

$$u_{i,j}^{n+1} = w u_{i,j}^{*} + (1-w) u_{i,j}^{n}$$

כאשר $1 < w < 2$. ניתן לראות שבשיטה זו השינוי בערכו של $u_{i,j}$ בכל איטרציה הוא גדול יותר מאשר בשיטת Gauss-Seidel המקורית ועבור הערך המרבי ($w = 2$) השינוי הוא כפול. שיטה זו נקראת over relaxation. שיטה זו מאפשרת האצה משמעותית והפחתה גדולה בכמות האיטרציות, אך זאת בתנאי שמוצאים את הערך המתאים של w .

ניתן להשתמש בשיטת Gauss-Seidel כדי לפתור משוואות מסובכות יותר שעדיין דומות למשוואת פואסון. לדוגמה משוואה בה קיימים מקדמים עם תלות לא ליניארית בערכי u. במקרים שכאלה נדרש לפעמים להשתמש ב-$0 < w < 1$ כדי להבטיח התכנסות של האיטרציות. עבור ערכים אלו נקראת השיטה under relaxation.