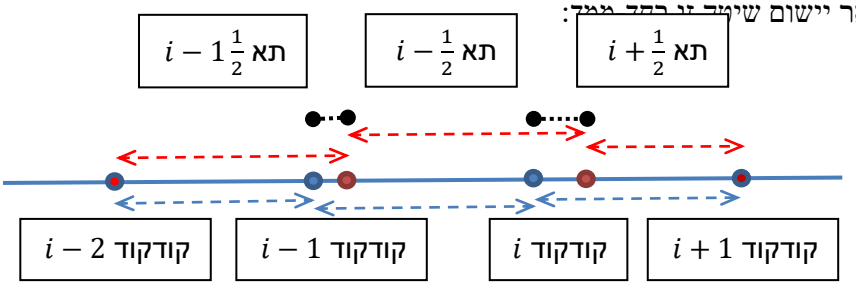
הידרודינמיקה – פתרון אוילרי מבוסס על צעד לגרנז'י ושלב תיקון

עד כה הצגנו פתרון לגרנז'י חד-ממדי של ההידרודינמיקה. ניתן להרחיב פתרון זה (שתואר בשיעור שעבר) לדו-ממד ואף לתלת-ממד באופן פשוט וישיר למדי, כשמעדכנים את אופן חישוב הנפחים במשוואה (3), את חישוב התאוצות במשוואה (7) ואת חישוב הצמיגות המלאכותית. כשמנסים לחשב זרימה רב-ממדית, בדרך זו, נתקלים בבעיה כשהזרימה מסובכת: תאי החישוב מתחילים להתעוות באופן ניכר עד שלא ניתן להמשיך את החישוב. זו הסיבה שברב-ממד שיטות החישוב נסמכות בדרך כלל על ההצגה האוילרית של משוואות ההידרודינמיקה.

אחת הדרכים לפתור את המשוואות האוילריות היא על ידי חלוקת צעד הזמן לשני שלבים: בשלב הראשון מבצעים צעד זמן לגרנז'י כפי שתיארנו בשיעור שעבר ובשלב השני "מחזירים" את מיקומי הקודקודים למיקומם ההתחלתי. שינוי מיקום הקודקודים בשלב השני מלווה למעשה בהעברת נפחים בין תאים סמוכים ותוך כדי כך מעבירים את המסה, האנרגיה והתנע הנמצאים בנפחים אלו בין התאים וכך מתארים את השטפים של גדלים אלו הקיימים במשוואות בהצגה האוילרית כפי שנראה מיד. נבהיר זאת על ידי האיור הבא המתאר יישום שיטה זו בחד-ממד:

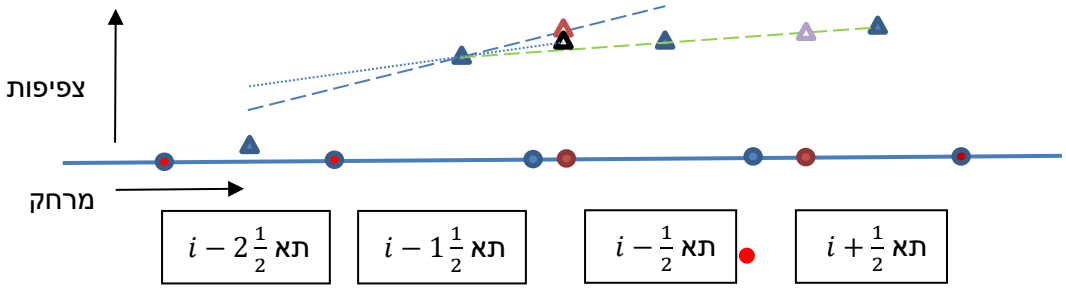


- מיקום התחלתי של קודקוד (קבוע בראיה האוילרית)
- מיקום קודקוד בסוף צעד לגרנז'י
- מיקום קודקוד שלא זז כלל
- נפח התחלתי (אוילרי) של תא
- נפח של תא בסוף צעד לגרנז'י
- נפח שעובר מתא לתא בסוף צעד לגרנז'י כדי לחזור לנפח המקורי האוילרי

בדוגמה המוצגת בציור, קודקודים $i-1$ ו-i נעים ימינה במהלך צעד הזמן הלגרנז'י וכתוצאה מכך, כדי להחזיר את מיקומי הקודקודים למיקומים האוילרים הקבועים, תא $i-\frac{1}{2}$ צריך לקבל נפח מתא $i-1\frac{1}{2}$ ולהעביר נפח לתא $i+\frac{1}{2}$.

השלב בו חוזרים למיקומים האוילרים וחישוב המסה, התנע והאנרגיה העוברים בין התאים נקרא שלב ה"רישות מחדש". שלב זה נעשה בכל צעד זמן ולכן נקראה גם "רישות רציף". למעשה, שלב זה מממש את איבר ההסעה (advection) שנוסף כזכור בהצגה האוילרית: $d_t \Rightarrow \partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$.

דרך פשוטה לחשב את הגדלים העוברים בין התאים היא שיטת ה-full donor. חישוב המסה (לדוגמה) העוברת בשיטה זו הוא על ידי מכפלת הצפיפות בתא התורם בנפח שעובר. בדומה, ניתן לחשוב גם על שיטת full acceptor בה קובעים את הגדלים על פי הערך בתא המקבל. שתי השיטות אינן מדויקות והשיטה השנייה אף אינה יציבה. Van Leer הציע שיטה מדויקת יותר בה משתמשים בערך בתא התורם אך מחשבים גם את הנגזרת המרחבית של הגדלים הנקבעת גם על סמך הערכים בתאים השכנים כשמניחים שערכי התאים מתייחסים למרכז התא. בהינתן הערך במרכז התא התורם והנגזרת המרחבית בו, מחשבים את הערך על שפת התא (הצמודה לנפח שעובר לתא השכן) ואותו מכפילים בנפח העובר. חשוב להקפיד בשיטה זו, על מונוטוניזציה, כלומר, מניעת יצירת אקסטרמום לוקלי בגדלים בשפת התאים וזאת על ידי מיתון הנגזרת המרחבית במידת הצורך, כפי שמודגם באיור הבא עבור הצפיפות:



- מיקום התחלתי של קודקוד (קבוע בראיה האוילרית)
- מיקום קודקוד בסוף צעד לגרנז'י
- מיקום קודקוד שלא זז כלל
- נפח שעובר מתא $i-1\frac{1}{2}$ לתא $i-\frac{1}{2}$ בסוף הצעד הלגרנז'י כדי לחזור לנפח המקורי האוילרי
- נפח שעובר מתא $i-\frac{1}{2}$ לתא $i+\frac{1}{2}$ בסוף הצעד הלגרנז'י כדי לחזור לנפח המקורי האוילרי
- ערך הצפיפות במרכזי התאים
- קירוב ליניארי של הצפיפות בתא $i-\frac{1}{2}$ על סמך ערכי הצפיפות בתאים השכנים
- קירוב ליניארי של הצפיפות בתא $i-1\frac{1}{2}$ על סמך ערכי הצפיפות בתאים השכנים
- קירוב ליניארי של הצפיפות בתא $i-1\frac{1}{2}$ לאחר מונוטינזציה
- ערך הצפיפות שנלקח לחישוב המסה העוברת מתא $i-\frac{1}{2}$ לתא $i+\frac{1}{2}$
- ערך הצפיפות בשפת התא $i-1\frac{1}{2}$ לפי הקירוב הליניארי לפני מונוטוניזציה – מייצר מקסימום לוקלי
- ערך הצפיפות שנלקח לחישוב המסה העוברת מתא $i-1\frac{1}{2}$ לתא $i-\frac{1}{2}$, לאחר המונוטוניזציה

בדוגמה המוצגת בציור, נקבעת המסה בנפח העובר מתא $i-\frac{1}{2}$ לתא $i+\frac{1}{2}$ על ידי צפיפות המחושבת בשפת התא הימנית של תא $i-\frac{1}{2}$ על סמך קירוב ליניארי של תלות הצפיפות בתא, כפי שמחושב מהערך במרכז התא ובמרכזי התאים השכנים. כשמחשבים באופן דומה את הצפיפות בשפת התא הימנית של תא $i-1\frac{1}{2}$ מתקבל ערך צפיפות הגבוה מהערכים בתא $i-1\frac{1}{2}$ ובתא $i-\frac{1}{2}$ ולכן יש למתן את נגזרת הצפיפות בתא , כך שמתקבל ערך שאינו חורג.

האיורים מדגימים את השיטה כפי שהיא מיושמת בחד-ממד אך ניתן להכלילה לדו-ממד ותלת-ממד.

הידרודינמיקה – הצגה כמשוואות שטף

ניתן להביע את המשוואות כמשוואה ווקטורית: $\partial_t \vec{U} + \partial_x \vec{F}(\vec{U}) = 0 \qquad (*)$

כאשר עבור הידרודינמיקה אוילרית חד ממדית $\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ e \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{F}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ (e+p)\frac{m}{\rho} \end{bmatrix}$

כאשר כרגיל: ρ, u, p הם הלחץ, המהירות והצפיפות בהתאמה, $m = \rho u$ התנע ליחידת נפח, וכן האנרגיה הכוללת ליחידת נפח היא: $e = \rho\left(e_p + \frac{1}{2}u^2\right)$ (e_p – אנרגיה פנימית ליחידת מסה).

ניתן לראות שמשוואות אלו שקולות למשוואות האוילריות החד-ממדיות אותן רשמנו בעבר ושהן מהוות משוואות שטף שמייצגות את שימור המסה, התנע והאנרגיה.

כלומר, השינוי בזמן בכל אחד מגדלים אלו בקטע מהמרחב שווה להפרש בין השטף הנכנס והיוצא לקטע זה: $d_t \int_{x_1}^{x_2} \vec{U} dx = -\vec{F}(\vec{U})\big|_{x_2} + \vec{F}(\vec{U})\big|_{x_1}$

עבור הצגה לגרנז'ית נציג את משוואת השטף הווקטורית כ: $\partial_t \vec{V} + \partial_\xi \vec{F}(\vec{V}) = 0$ כאשר נגדיר $d\xi = \rho dr$ וכן $\vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \\ u \\ E \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{F}(\vec{V}) = \begin{bmatrix} -u \\ p \\ pu \end{bmatrix}$ כשהאנרגיה הכוללת ליחידת מסה היא: $E = \frac{1}{2}u^2 + e_p$

לצורך פיתוח משוואות הפרשים נפתח את $(*)$ בטור טיילור בזמן:

$$\vec{U}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n+1}} = \vec{U}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}} + \Delta t\left(\partial_t \vec{U}\right)_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(\partial_{t^2}\vec{U}\right)_j^n + \cdots$$

נפתח את הנגזרות הזמניות:

$$\partial_t \vec{U} = -\partial_x \vec{F}(\vec{U})$$

$$\partial_t^2 \vec{U} = -\partial_{\mathrm{t}}\partial_x \vec{F}(\vec{U}) = -\partial_{\mathrm{x}}\partial_t \vec{F}(\vec{U}) = -\partial_{\mathrm{x}}\left(\boldsymbol{A}\partial_t \vec{U}\right) = +\partial_{\mathrm{x}}\left(\boldsymbol{A}\partial_x \vec{F}(\vec{U})\right)$$

כאשר $\boldsymbol{A}$ היא מטריצת היעקוביאן של $\vec{F}(\vec{U})$ לעומת $\vec{U}$ כלומר, $A_{ik} = \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{U}_k}$

לשם הנוחות, נשמיט להלן את סימון הווקטור מעל $\vec{F}$ ו-$\vec{U}$

וכן נסמן: $F_j^n = F(U_j^n) \quad , \quad \boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}^n = \boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}U_{j+1}^n + \frac{1}{2}U_j^n\right)$

נקבל מהצבת הנגזרות הזמניות בפיתוח טיילור:

$$U_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}^n\left(F_{j+1}^n - F_j^n\right) - \boldsymbol{A}_{j-\frac{1}{2}}^n\left(F_j^n - F_{j-1}^n\right)\right]$$

שיטה זו מצריכה חישוב מרובה של מטריצת היעקוביאן. במקרה שמטריצה זו הינה קבועה, מקבלים ביטוי פשוט יותר:

$$(+)\quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right)^2\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right)$$

נרשום כעת שיטה של צעד כפול עבור המקרה הכללי בו המטריצה אינה קבועה שאין מחשבים בה את מטריצת היעקוביאן:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

כאשר:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} F\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

וכן:

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(U_{j+1}^n + U_j^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{j+1}^n - F_j^n\right)$$

עבור המקרה בו מטריצת היעקוביאן קבועה שיטה זו של צעד כפול מתנוונת חזרה לנוסחה $(+)$. שיטת צעד כפול זו נקראת שיטת *Lax-Wendroff* .

הידרודינמיקה – שיטת הקווים האופייניים (קרקטריסטיקות)

במשוואות היפרבוליות ניתן לקבל משוואות מנוונות לאורך קווים אופייניים כלומר, משוואות דיפרנציאליות רגילות ולא חלקיות. נדגים זאת בחד-ממד במצב בו הזרימה רציפה (ללא הלמים) ואין קפיצות מרחביות במהירות ובלחץ. נתבונן בשינויי המהירות והלחץ לאורך קו מסוים $X(t)$ במישור $[x,t]$:

השינוי במהירות לאורך הקו - $du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ כשהשתמשנו במשוואת התנע בפיתוח.

השינוי בלחץ לאורך הקו - $dp = \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx = c^2\frac{\partial \rho}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx = -c^2\rho\frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx$

כאשר השתמשנו בפיתוח בהגדרת מהירות הקול: $c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{adiabatic}$ ובמשוואת הרציפות.

מכאן נקבל:

$$\rho du = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)dt$$

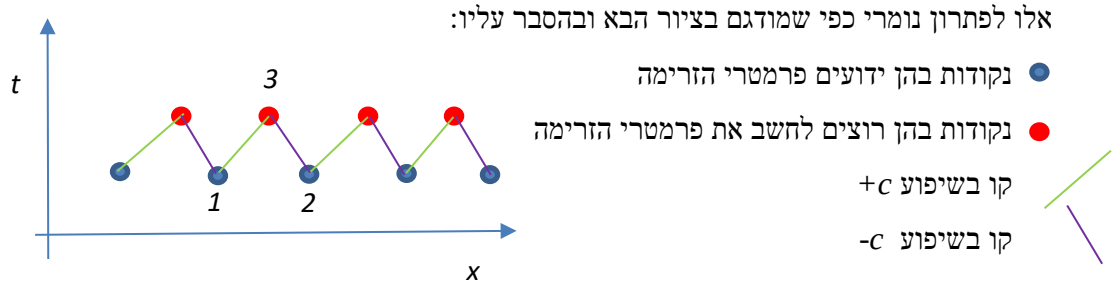
$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)dt$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-c ונחבר את המשוואות עבור שני קווים מיוחדים של $X(t)$:

במקרה הראשון נבחר קו כך ש: $\frac{dx}{dt} = +c$ ואז נקבל: $dp + \rho c du = 0$

במקרה השני נבחר קו כך ש: $\frac{dx}{dt} = -c$ ואז נקבל: $dp - \rho c du = 0$

כלומר, לאורך קווים אלו קיים קשר ישיר ופשוט בין שינוי הלחץ לשינוי המהירות. ניתן לנצל משוואות אלו לפתרון נומרי כפי שמודגם בציור הבא ובהסבר עליו:



לדוגמה, מידיעת נתוני הזרימה בנקודות 1 ו-2 ניתן לחשב את הנתונים בנקודה 3, בעזרת שתי המשוואות הבאות:

$$p_3 - p_1 = \rho_1^* c_1^*(u_1 - u_3)$$

$$p_3 - p_2 = \rho_2^* c_2^*(u_3 - u_2)$$

כאשר בקירוב הפשוט $\rho_1^* = \rho_1,\ c_1^* = c_1,\ \rho_2^* = \rho_2,\ c_2^* = c_2$ ואם רוצים דיוק גבוה יותר ניתן לקחת ממוצע כלשהו לאורך הקו.

ניתן להרחיב שיטה זו ולכלול בה גם הלמים על ידי התחשבות במשוואות הוגניו. הכללה אחרת היא לממד גבוה יותר וגם היא אפשרית אם כי מסובכת למדי.