

הפקולטה להנדסה  
אוניברסיטת תל אביב

# אותות אקראים ורעד

**0512.3632**

על פי הרצאותיו של פרופסור אורן ארז סמסטר א'  
**תשע"ד**

סוכם, נכתב ונערך ע"י ערן אבידור

מהדורה 1.1

14/01/14

יצירה זו הינה מוגנת לפי דיני זכויות היוצרים התקפים בישראל ועל פי אמנות בין-לאומיות. זכויות היוצרים על יצירה זו שייכים לכותב היצירה. יצירה זו מופצת לצרכים אישיים ולימודים בלבד. למען הסר שפק, חל איסור מוחלט להשתמש ביצירה זו באופן שאינו פרטני (לרבבות אופן מסחרי, מוסדי וכדומה). שימוש ביצירה מהויה הסכמה מדעת לקבלת רישיון לא-בלודי, שאינו ייחודי/אישי ובלתי ניתן להעברה. רשיון זה מאפשר לייצר עותק (פיזי או דיגיטלי) של יצירה זו לצרכים אישיים ולימודים. אין ליצור נגזרות של יצירה זו או לפרסם יצירה זו באופן חלקי. ניתן לצטט ולהשתמש בחלקים קצריים מן היצירה במסגרת שימוש הוגן.

## תוכן עניינים

10	מבוא/מטרה
13	חlik א': משתנים אקראיים ופעולות עליהם
13	הסתברות ומשתנים אקראיים
13	חזקה על מושגי יסוד בהסתברות
13	מרחב הסתברות (הגדרה)
15	חזקה על מושגי יסוד עבור משתנה אקראי יחיד
16	משתנה אקראי (הגדרה)
17	פונקציית התפלגות מצטברת ופונקציית צפיפות הסתברות
17	Cumulative Distribution Function – פונקציית התפלגות מצטברת
19	פונקציית צפיפות ההסתברות – Probability Density Function
20	סיכום
21	פונקציות של משתנים אקראיים
22	מומניטים, פונקציה אופיינית ופונקציה יוצרת מומניטים
22	מומנט מסדר $\alpha$ של משתנה אקראי
22	מומנט מרכזי מסדר $\alpha$ של משתנה אקראי
23	תוחלת
23	שונות
24	סטטיסטיקה מסדר סופי
26	פונקציה אופיינית
26	פונקציה יוצרת מומניטים
29	ווקטוריים אקראיים
29	פונקציית התפלגות מצטברת משותפת ופונקציית צפיפות הסתברות משותפת
29	פונקציית התפלגות מצטברת משותפת – Joint Cumulative Distribution Function (jCDF)
31	פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת – Joint Probability Density Function (jPDF)

32	שני משתנים אקראיים (פילוג מותנה ופילוג שלוי)
33	פילוג מותנה
35	פונקציות פילוג (CDF/PDF) מותנה
35	תוחלת מותנה ושונות מותנה
36	אי-תלות סטטיסטית
39	וקטור של משתנים אקראיים
39	פונקציה של וקטור אקראי
41	תוחלת של וקטור אקראי ותוחלת של פונקציה של וקטור אקראי
42	מומנטים משותפים של וקטור אקראי
43	שונות משותפת – Covariance
43	חוסר קורולציה
43	אורותוגונליות
44	מקדמי מתאימים ליניארים (מקדם פירסון ומקדם קורולציה)
46	פונקציה אופיינית משותפת
48	סטטיסטיקה מסדר II של וקטורים אקראיים
54	מעבר וקטור אקראי דרך מערכת ליניארית
54	סטטיסטיקת המוצא של מערכת ליניארית וקטוריית
55	וקטור אקראי גאוסי
58	הלבנה של וקטור אקראי גאוסי
59	יצור/צביעת וקטור אקראי גאוסי
60	תמונה גיאומטרית של תהליך ייצור/הלבנת ו"ג
64	שערך
64	קריטריוני שגיאה
64	שגיאות שערך
64	מדד עיוות
65	עיוות ממוצע/תוחלת העיוות
65	שערך אופטימלי
4	

66	משערק אופטימלי תחת מدد הסתברות השגיאה
68	שערוק במובן של שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית ((MMSE
69	משערק אופטימלי תחת ממד MSE
71	סיכום ביןיהם – משערכים אופטימליים במובן הסתברות שגיאה ובמובן MSE
72	שערוק ליניארי אופטימלי במובן (LMMSE) MSE
74	מסקנות משערכי MMSE\ (מתבססות על תכונות של משערכי: (MMSE\)
75	תכונות משערכי LMMSE\MMSE\
76	הוכחות:
80	תמונה גיאומטרית של משערכי MMSE\
83	שערוק וקטור אקראי מותוק וקטור אקראי
83	וקטור שגיאת שערוק
83	מדד עיות וקטורי
84	עיות ממוצע/תוחלת העיות
84	משערק אופטימלי
85	שערוק משתנה אקראי מותוק וקטור אקראי
86	שערוק מ"א מותוק ו"א באופן אופטימלי תחת ממד הסתברות השגיאה
87	שערוק מ"א מותוק ו"א באופן אופטימלי תחת ממד MSE
90	שערוק אופטימלי במובן MSE של ו"א מותוק ו"א
91	חלק ב': תהליכי אקראים ופעולות עליהם
91	מבוא, הגדרות ותכונות
92	תהליך אקראי בזמן רציף
93	תהליך אקראי בזמן בדיד
93	פונקציית מדגם (ריאליזציה) של תהליך אקראי
94	موظיבציה לתחליכים אקראים
94	תהליך אקראי p.i.
94	דוגמאות קונסטרוקטיביות פשוטות של תהליכי אקראים
97	מידע סטטיסטי מלא על תהליך אקראי
5	

98	תהליך אקראי גaussiy בזמן רציף
100	סטטיסטיקה מסדר שני של תהליכיים אקראיים
101	מקדמי מתאם ליניארים בין דגימות של תהליך אקראי
101	סטציונריות במובן הצר (SS) ובמובן הרחב ((WSS
101	סטציונריות במובן הצר (SSS)
101	סטציונריות במובן הרחב (WSS)
104	סטציונריות אסימפטוטית
104	סטציונריות משותפת במובן הצר (SSSS) ובמובן הרחב ((WWS)
104	סטציונריות משותפת במובן הצר (SSSS)
105	סטציונריות משותפת במובן הרחב ((WWS)
105	תהליך אקראי אוטו-רגressive (Auto Regressive Process)
105	מרקוביות של תהליך אקראי אוטו-רגressive
106	תהליך אקראי אוטו-רגressive ליניארי
107	סטציונריות של תהליך אקראי אוטו-רגressive ליניארי
109	שרשראות מركוב
109	תהליך מركובי
110	כלל השרשרת (עבור שרשראות מركוב)
110	נוסחת צ'אפמן קולמוגורוב
111	שרשרת מركוב סופית
111	פילוג שלו של שרשרת מركוב
111	מטריצת מעבר של שרשרת מركוב
113	דיגרמת טרלייס (Trellis Diagram)
114	שרשרת מركוב הומוגנית ודיגרמת מצבים
116	פילוג סטציונרי
116	ווקטור סטציונרי
116	ווקטור הפילוג הסטציונרי
117	סטציונריות בשרשראות מركוב

118	אפיון שרשרות מركוב
118	הגדירות סיוג:
119	מחלקה מוחזורת
122	"שיכחת העבר"
124	ארגודיות (שיכחת העבר)
124	ארגודיות בשרשראות מركוב
124	משפט פרון-פרוביניוס ((Perron-Frobenius Theorem))
127	הגדירה פורמלית עבור ארגודיות
128	חוק המספרים הגדולים (ATE)
129	מציאת סטטיסטיקה של שרשרת מרכוב ארגודית
129	שערוך הפילוג הסטציונרי של שרשרת מרכוב ארגודית
129	שערוך מטריצת המעברים של שרשרת מרכוב ארגודית (והומוגנית)
131	הקשר בין ההגדירה האינטואיטיבית והפורמלית של ארגודיות
132	ארגודיות חלשה
133	שערוך פרמטרים של תהליך אקראי
134	ארגודיות בתוחלת ובקורולציה
136	תנאים לארגודיות בתוחלת
140	ספקטורים הספק
140	חישוב ספקטורים הספק
140	ספקטורים הספק של ת"א SSS בזמן רציף
141	ספקטורים הספק של ת"א SSS בזמן בדיד
141	קרוס-ספקטורים הספק של זוג ת"א SWSJ
141	תכונות של ספקטורים הספק עבור ת"א ממשי
142	רעש לבן בזמן רציף
143	מעבר תהליכי SSS במערכות ליניאריות
143	מעבר תהליך אקראי דרך מערכת ליניארית
143	מודל עזר לניתוח הקשר בין הכנסה למוצא במערכות DNA

144	سطטיסטיקה של מוצא מערכת ותא המוחנת בתהיליך אקראי WSS
147	יצור תהליך אקראי גאוסי סטציאוני
147	MSN מערביר סרט
149	חוסר קורולציה בין פסי-תדר
149	חוסר קורולציה בין פסי-תדר-זרים של תהליך אקראי WSS
150	חוסר קורולציה בין פסי-תדר זרים של שני תהליכיים אקראים WSS
152	עיבוד מקבילי של פסי-תדר
152	שערוך ליניארי אופטימלי של תהליך אקראי במובן MSE (MSN) Wiener
153	שערוך ליניארי MMSE של ת"א מת"א WSS
154	מערכת לשערוך LMMSE של שני ת"א WSS
158	שגיאת שערוך וינר
161	תהליכיים אקראים מתקדמים
161	תהליך אקראי בעל תוספות בת"ס
161	תהליך Wiener / תנועת Brown
161	תהליך שיכון חד-מימדי בזמן בדיד
163	תהליך שיכון חד-מימדי בזמן רציף
164	תהליך וינר (פיתוח)
167	תהליך וינר (הגדרה פורמלית)
168	תהליך הנגורות של תהליך וינר
171	תהליך אקראי Poisson
171	התפלגות מערכית
172	התפלגות פואסון
172	בנייה תהליך פואסון
180	תהליך תוספות של תהליך אקראי פואסון
181	תהליך פואסון (הגדרה פורמלית)
183	בנייה אלטרנטיבית של תהליך פואסון מסכום ברנולי
185	אפשרויות סימולז של תהליך אקראי פואסון

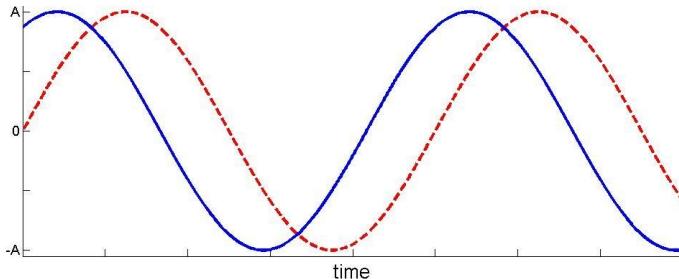
187	סטטיסטיקה מסדר שני של תהליך פואסון
187	מיוג ופיקול של תהליך פואסון
190	תהליכי הנגזרת של תהליך פואסון
191	תהליכי פואסון C-Renewal Process

## מבוא/מטרה

תהליכי אקראיים נמצאים בכל מקום. אפילו במערכות דטרמיניסטיות לכאות קיימים דברים שלא ידועים לחלוטין (מידת אקראיות מסוימת). אנו נמדל את אי-הידיעה על דברים אלו כרכיב אקראי של המערכת.

**דוגמה 1 – "מעט אקראיות":**

נסתכל על מתח בשקע חשמל ביתי ברגע הדגימה. אנו יודעים כי קיבל דגימה מתוך גל סינוס אר לא נדע באיזה מקום הגל כי הפהזה לא ידועה לנו.



$$V(t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \phi)$$

$$\phi \sim \text{Unif}(0, 2\pi]$$

למעשה  $V(t)$  אקראי לכל זמן  $t$  לאחר והפהזה  $\phi$  אינה ידועה. מכיוון שאין תיעוד לפזה מסוימת מתקיים  $\phi \sim \text{Unif}(0, 2\pi)$ . נרצה לדעת מה ההסתברות לקבל ערך כלשהו עבור  $V(t)$  בזמן דגימה מסוימת (עבור פילוג בזמן כלשהו נוכל לדעת את הפילוג לכל שאר הזמן כי התנהגות סינוס ידועה), נניח  $t = 0$ .

למעשה נשאל איך נראה  $f_{V(0)}(v)$ . במהלך הקורס נראה כי הסיכוי לקבל  $A$  גדול מהסיכוי לקבל  $0$ .

**דוגמה 2 – "רבה אקראיות":**

שנידוברים נמצאים בחדר, דובר א' (ילד) ודובר ב' (מבוגר). נסמן את אותן הדיבורים שלהם ע"י  $X_1(t)$  ו-  $X_2(t)$  בהתאם.

נניח גם שהדוברים נייחים בחדר ולכון נוכל למדל את המערכת (חדר, החזרות וכו') כמערכת ליניארית. נסמן את פונקציות התמסורת הכוללות (סק' הגבירה והחזרות) של כל אות ע"י  $(h_1(t), h_2(t))$  אם הדוברים היו למרחב פתוח אז פונקציות התמסורת יהיו קבועות בזמן).

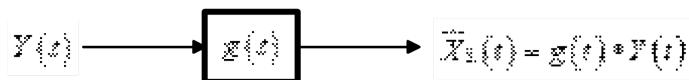
נוכל לייצג את אותן הדיבורים בחדר ע"י האות  $Y(t) = h_1(t) * X_1(t) + h_2(t) * X_2(t)$ .

נניח שאנו מעוניינים להאזין לדובר א'. שני האותות  $X_1(t), X_2(t)$  מכילים מידע אך האחד רצוי (בהתאם לדרישות המערכת, אצלנו  $X_1(t)$ ) והשני רעש.

מטרתנו היא למשה לסנן את הרעיון כך שנΚבל "שערוך" טוב של אות המידע הרלוונטי ( $X_t$ ). מוח האדם עושה זאת בקלות ובאינטואיטיביות מדהימה. ע"מ לתכנן מערכת הנדסית כזאת נרצה לדעת מידע מוקדים על אופי אותן. אנו יודעים שאלה אותן דיבור של ילד ומבוגר וכן אותן דיברונות שוניות מבחינה ספקטRELית, דהיינו אותן קיימים בתחום תדר שונים (ילד מדובר בקול גבהו יותר מאשר מבוגר).

מידע מוקדים זה נתקנן מסנן מתאים (אצלנו מדובר במסנן מעביר גבוהים / מנחית נמוכים פשוט) וכך נשערך את אותן האינפורמציה.

למעשה המערכת (מסנן) הזאת היא פשוט פונקציה.

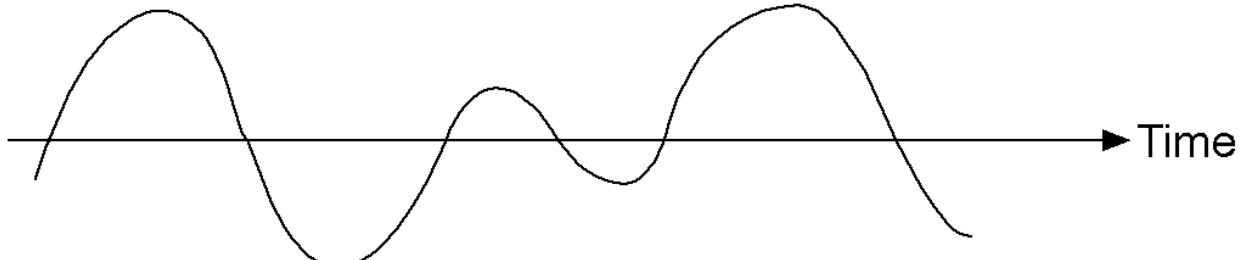


נרצה לדעת את הקשר הסטטיסטי בין מוצא המערכת לכניסתה, ז"א איך הפונקציה משפיעה על אותן הכניסה (אשר כולל אי-וודאות כלשהו) ועל מאפיינו. באופן כללי, נרצה למדוד את אותן/התהיליך האקראי, לבצע ניתוחים בתחום כלשהו (לדוגמא תחום התדר) ואז לבנות מושער איקוטי לפי המدى המבוקש.

במהלך הקורס נלמד להתמודד עם אותן כניסה מהסוגים הבאים:

- ❖ משתנה אקראי (מ"א) יחיד
- ❖ ווקטור אקראי (ו"א)
- ❖ תהליך אקראי (ת"א) בזמן בדיד
- ❖ תהליך אקראי (ת"א) בזמן רציף

לצורך קבלת אינטואיציה לגבי המצבים השוניםணיה קיום של אותן כלשהו ( $X_t$ ) אשר קיימת אי-וודאות לגבי.



מןנו נגדר את ארבעת המצבים השונים:

- ❖ מ"א יחיד יהיה ערך אותן בנקודת זמן כלשהו ( $X_{t_0}$ ).
- ❖ ו"א יהיה סט דגימות סופי של אותן  $\underline{X}(t_0, t_1, \dots, t_n) = (X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n))$ .
- ❖ ת"א בזמן בדיד יהיה סט הדגימות האינסופי במרוח כי זמן קבועים  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} = \{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

❖ ת"א בזמן רציף הוא למעשה התהילה  $(X(t))$  בשלמותו (ז"א לכל  $t \geq 0$   $t \in \mathbb{R}$ ).

## חלק א': משתנים אקראיים ופעולות עליהם

### הסתברות ומשתנים אקראיים

#### חזרה על מושגי יסוד בהסתברות

#### מרחב הסתברות (הגדרה)

מרחב הסתברות מוגדר ע"י השלשה  $\{\Omega, F, P\}$ .

•  $\Omega$  – מרחב המדגם:

קובוצת כל התוצאות האפשרות בניסוי. מרחב המדגם יכול להיות סופי (לדוגמא הטלת קובייה) או אינסופי (לדוגמא בחירת מספר רצינלי).

•  $F$  – שדה המאורעות:

מאורע הינו תת-קובוצה של מרחב המדגם  $\Omega$ . ז"א מאורע הוא למעשה "תרחיש אפשרי". שדה המאורעות מכיל רק (וأت כל) את השאלות שניתן לשאול לגבי ה"ניסוי".

מלבד כך ש-  $F$  מוכל עד כדי שיווין ב-  $\Omega$  ( $\Omega \subseteq F$ ) על חלות הדרישות המתמטיות הבאות:

i. שדה המאורעות  $F$  סגור תחת איחוד בן-מניה, חיתוך בן-מניה וכן תחת משלים.

זאת למעשה על מנת שכל שאלה טבעיות של תרחישים בנוגע לניסוי תהיה מוגדרת.

ii. האיברים  $\Omega$  ו-  $\emptyset$  נמצאים בשדה המאורעות  $F$  (ז"א  $\emptyset, \Omega \in F$ ).

•  $P$  – פונקציית מידת ההסתברות:

פונקציית מידת ההסתברות הינה פונקציה מן שדה המאורעות לאינטראול הסגור  $[0,1]$ .

פונקציה זו מתארת את הסיכוי לקבלת מאורע.  $P: F \rightarrow [0,1]$ .

על השלשה  $\{\Omega, F, P\}$ קיימים את הדרישות הבאות:

1.  $\forall A \in F: P(A) \geq 0$

2.  $P(\Omega) = 1$ , זאת אומרת מתקיים כי הסתברות המאורע הוודאי הינה 1.

3. אם  $\{A_i\}$  היא קבוצת מאורעות זרים בזוגות, ז"א  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$  אז

$$P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$$

מתוך דרישות אלו נובעות התכונות הבאות:

4.  $\forall A \in F: P(A) \leq 1$

נוכחות:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\stackrel{P(A), P(\bar{A}) \geq 0}{\Rightarrow} P(A) \leq 1 \quad \forall A \in F$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad .2$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad .3$$

אי תלות בין מאורעות (הגדרה):

.  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$   $A, B \in F$  הינט בلتוי תלויים סטטיסטיים (בת"ס) אם"מ דוגמא 1:  
נסתכל על ניסוי הטלת קובייה הוגנת.

- מרחב המדגם הינו  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- שדה המאורעות יהיה כל תת-הקבוצות האפשרות של  $\Omega$ , זו"א את קבוצת החזקה של  $\Omega$ .

$$F = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \quad |F| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$$

• פונקציית מידת ההסתברות המלאה  $P$  מתאימה מספר עבור כל אחד מ- 64 המאורעות.  
למעשה, מספיק להגיד את  $P$  רק על המאורעות האלמנטריים  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$  ומערכות אלו נוכלים לחשב מידת ההסתברות עבור כל מאורע שנתעניין בו בעזרת הדרישות והתכונות של מרחב הסתברות.

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

ונראה דוגמא:

$$P(\text{even result}) = P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) =$$

$$= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

הערה:

על אותו מרחב מדגם (ואפילו על אותו ניסוי ספציפי) ניתן להגיד מספר שדות מאורעות שונים.  
לדוגמה נגדיר את שדה המאורעות לניסוי זוגי/אי-זוגי  $F_2 = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ .  
אר למשהו אין טעם להגיד שדה מאורעות כזה אחר והוא מוכל בשדה המאורעות המלא.  
לכן כל עוד מרחב המדגם סופי (או אפילו בן-מניה) כדאי לעבוד עם קבוצת החזקה של מרחב

המבחן כshedah המאורעות ואת פונקציית מידת ההסתברות נגדיר על המאורעות האלמנטריים בלבד.

### דוגמא 2:

הגדרה איחידה של נקודה באינטראול הסגור  $[0,1]$ .

למעשה זהו התורחיש המכוי "קרוב" לקוביה הוגנת אך עם מרחב מבחן רציף.

- מרחב המבחן הינו  $\Omega = [0,1]$ .

shedah המאורעות יהיה כל תת-הקבוצות האפשרות של  $\Omega$ , כלומר קבוצת כל האינטראולים

הפנימיים ב- $[0,1]$ . חשוב להבחין כי ב- $F$  ישנו גם אינטראולים לא רציפים. למעשה

shedah המאורעות ישנו כל האינטראולים מהצורה  $[a,b] \subseteq [0,1]$  וכן

איחוד/חיתוך/משלים של כל קומבינציה אפשרית מהם.

למעשה אם נרצה להגיע לנקודה בזדמנות נבעצם סדרת אינסופית של חיתוכים כך שבכל

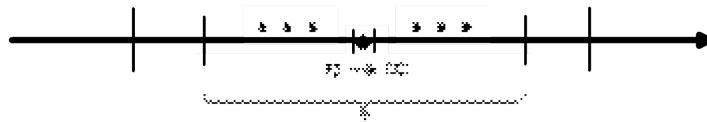
שלב נקטין את האינטראול אך עדין נשאר עם אינטראול ולא נקודה (בגבול נקבל

אינטראול אינפיטיסימלי אשר ייצג נקודה ברמת "דיק" מסוימת). הסיבה לכך היא

שנקודת אינה תת קבוצה של מרחב המבחן ולכון לא ניתן להגדיר את  $P$  עבורה (הסיכוי

ליפול על נקודה מסוימת הוא 0 ואם היינו מגדירים את shedah המאורעות כאוסף כל

נקודות האפשרות הינו מקבלים שמידת ההסתברות עבור כל מאורע תהיה 0).



- פונקציית מידת ההסתברות  $P$  תוגדר עבור מאורעות "בסיסיים" שהם אינטראולים (לאו דווקא סגורים מאחר ומידת ההסתברות של נקודה יחידה היא אפס) רציפים והיא מקיימת:

$$P([a,b]) = \frac{b-a}{1-0}, \quad [a,b] \subseteq [0,1]$$

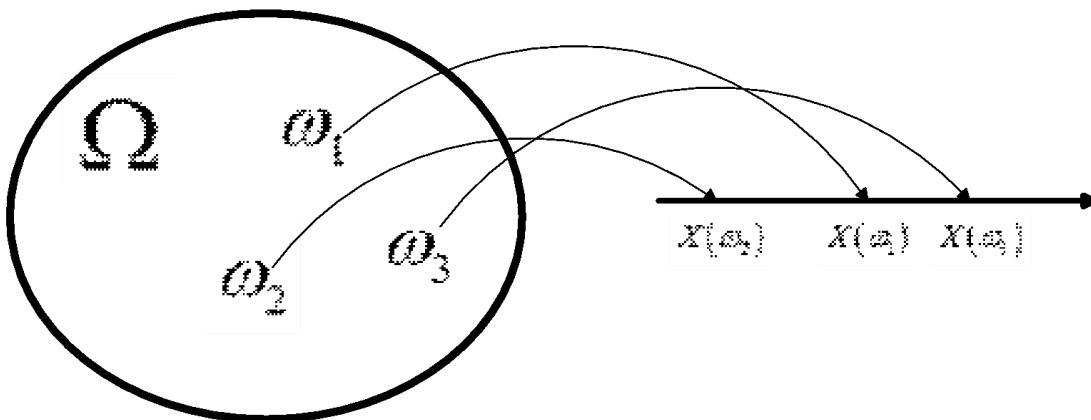
### חזרה על מושגי יסוד עבור משתנה אקראי יחיד

נרצה "להיפטר" מהשפה המופשטת של מרחבי הסתברות והשלשות  $\{\Omega, F, P\}$  ולדון בשפה יותר הנדסית. "שפה" זו מופשטת מאחר ואיברי  $\Omega$  הינם מופשטים (עבור כל ניסוי הקבוצה בעלת אופי שונה ולאיברי הקבוצה אין משמעות ערכית/מתמטית לדוגמא בניסוי הטלת מטבע  $\Omega = \{Heads, Tails\}$  ובניסוי קובייה  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ ).

לכן, על מנת "להיפטר" משפה מופשטת זו נרצה למפות את איברי  $\Omega$  לשפה אחידה, שפת המספרים המשיים.

### משתנה אקראי (הגדרה)

משתנה אקראי (מ"א)  $X$  הינו מיפוי (פונקציה) המשיך לכל תוצאת ניסוי אפשרית  $\omega \in \Omega$  מספר ממשי  $x \in \mathbb{R}$ , כך שמתיקיימת הדרישה  $\{ \omega : X(\omega) \leq x \} \in F$ . ז"א עברו כל  $x \in \mathbb{R}$  הקבועה  $\{ \omega : X(\omega) \leq x \}$  תהיה מאורע (שhicת לשדה המאורעות).



### הערות:

1. מ"א יסמן תמיד באות גדולה.
2. בעיקרונו המיפוי יכול להיות שרירוטי (כל עוד מתיקיימת הדרישה בהגדרה) אך בפועל בהנדסה המיפוי יהיה טבוי ומתקקש (וכך גם הדרישה תתקיים).
3. הדרישה נחוצה ע"מ להגדיר את פונקציית ה-CDF (בහמש).

### דוגמא:

עבור ניסוי הטלת קובייה מתקיים  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ונווכל להגיד מ"א

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 1, 3, 5 \\ 2 & \omega = 2, 4, 6 \end{cases}$$

כלומר מ"א בעל ערכים 1 (עבור תוצאה הטלה אי-זוגית) ו- 2 (עבור תוצאה הטלה זוגית).

### **פונקציית התפלגות מצטברת ופונקציית צפיפות הסתברות**

החלפנו את תוצאות הניסוי המופשנות בערכים מספריים ע"י מיפוי. בעת נרצה לפתח כלים אשר לחישוב מידת ההסתברות עבור ערכים המתאים למשתנה האקראי. ז"א, נרצה להגיד פונקציות כך שבעזרתן נוכל לענות על כל שאלה הסתברותית על ניסוי מסוים (לדוגמא  $\Pr(X \in S)$ ).

#### **פונקציית התפלגות מצטברת – Cumulative Distribution Function**

פונקציית התפלגות מצטברת מסווגת באוט  $F$  עם אינדקס שם המשתנה האקראי ורגומנט המיצג את הערך המבוקש. ערכה מייצג את ההסתברות לקבל ערך לא גדול (נמוך וכולל) מן ערך הארגומנט.

עבור מ"א  $X$  נגדיר ונסמן את פונקציית ה-CDF הבא:

$$F_X(x) \triangleq \Pr(\{\omega : X(\omega) \leq x\})^* = \Pr(X \leq x)$$

(\*) חישוב מידת ההסתברות עובד על מאורעות אך נכתב ע"י ערכי המ"א לשם פשוטות ונוחות.

תכונות:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad .3$$

$$F_X(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0^+) \quad .4$$

$$\forall x_2 > x_1 : F_X(x_2) \geq F_X(x_1) \quad .5$$

$$\Pr(a < X \leq b) \text{ אחר ומתקיים: } \Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad .6$$

$$\Pr(a < X \leq b) = \Pr(-\infty < X \leq b) - \Pr(-\infty < X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

הערות:

$$1. \text{ מתקיים } \Pr(X \leq a) = F_X(a) \text{ (נובע מתכונות 6 ו-3 או ממשמעות ההגדרה).}$$

$$2. \text{ עבור גבול הסיכוי הנΚודתי } \Pr(X = a) = F_X(a^+) - F_X(a^-)^* = F_X(a) - F_X(a^-) \quad .$$

$$(*) \text{ נובע מרציפות מימין (תכונה 4).}$$

3. תכונה 4 הינה תכונה שרירותית אשר נובעת מההגדרה אשר כוללת שיוויון. אילו היינו מסירים את השיוויון אז היינו מקבלים רציפות דוקא משמאל.

דוגמאות:

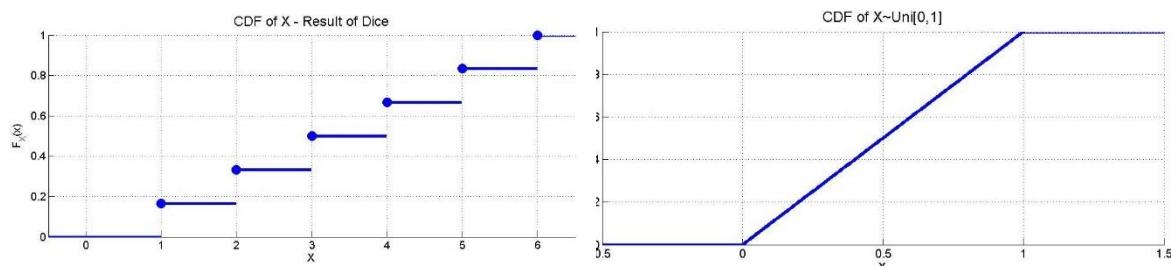
הטלהקובייה הוגנת

הגרלה איחידה בקטע  $[0,1]$

נדיר מיפוי "טבעי" ונקבל:

נדיר מיפוי  $\omega = X(\omega)$  (כמובן שמתקיים

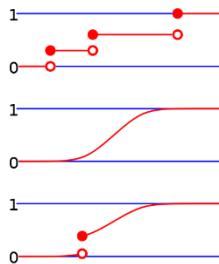
$\omega \in \Omega$  ) ונקבל:



הfonקציה לא גירה בכל נקודה אך רציפה לחלוין.

$$F_X(x) = \sum_i \Pr(X = x_i) u(x - x_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 u(x - i)$$

הבחנה:



- מ"א  $X$  יקרא בדיד אם  $F_X(x)$  מורכבת ממדרגות (קפיצות) בלבד.

- מ"א  $X$  יקרא רציף אם  $F_X(x)$  רציפה לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

- מ"א  $X$  יקרא מעורב אם  $F_X(x)$  מורכבת גם ממדרגות (קפיצות) וגם מקטעים רציפים.

נוכל לכתוב את פונקציית ה-CDF עבור כל מ"א ע"י:

$$F_X(x) = \alpha F_X^D(x) + (1-\alpha) F_X^C(x) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

כאשר  $F_X^D(x)$  הינה פונקציית ה-CDF הבודדיה (Discrete) ו-  $F_X^C(x)$  הינה פונקציית ה-CDF הרציפה (Continuous).

הערה:

עבור מ"א כללי, נקודות עם הסתברות לא אפס נקראות אטומיים. אלו הנקודות עם הקפיצה ב-CDF ונאמר שיש בהן מסת הסתברות.

### פונקציית צפיפות ההסתברות – Probability Density Function

פונקציית צפיפות ההסתברות מסומנת באות  $f$  עם אינדקס שם המשתנה האקראי וארגומנט המיצג את הערך המבוקש. ערכה מייצג את צפיפות ההסתברות סביב נקודת מסוימת (ערך הארגומנט).

עבור מ"א  $X$  פונקציית PDF שלו תוגדר להיות הפונקציה המקבילה:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

תכונות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad .1$$

$$\forall x \quad f_X(x) \geq 0 \quad .2$$

$$\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx \quad .3$$

(נובע מהגדרת פונקציית PDF).

הערות:

1. עבור  $F_X(x)$  גזירה לכל  $x$  (גזירה זו דרישת חזקה יותר מרציפה) אז מתקיים

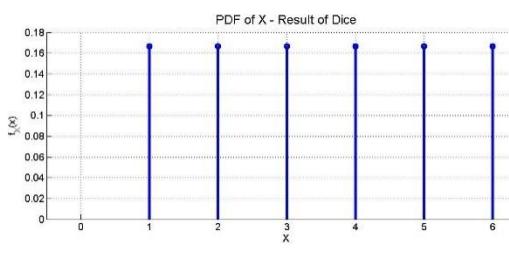
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

2.  $f_X(x)$  אינה יחידה. הדבר נובע מערכיהם נקודתיים אשר לא ישפיעו על האינטגרל.

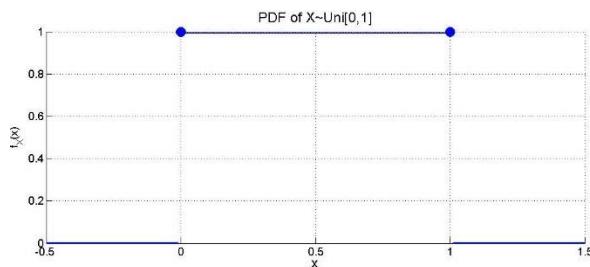
נקודות אלו קיימות בנקודות אי-גזירות של  $F_X(x)$  וניתו ליחס ל- $f_X(x)$  כל ערך סופי בהן.

דוגמאות:

### הטלה קובייה הוגנת



### הגרלה אחידה בקטע $[0,1]$

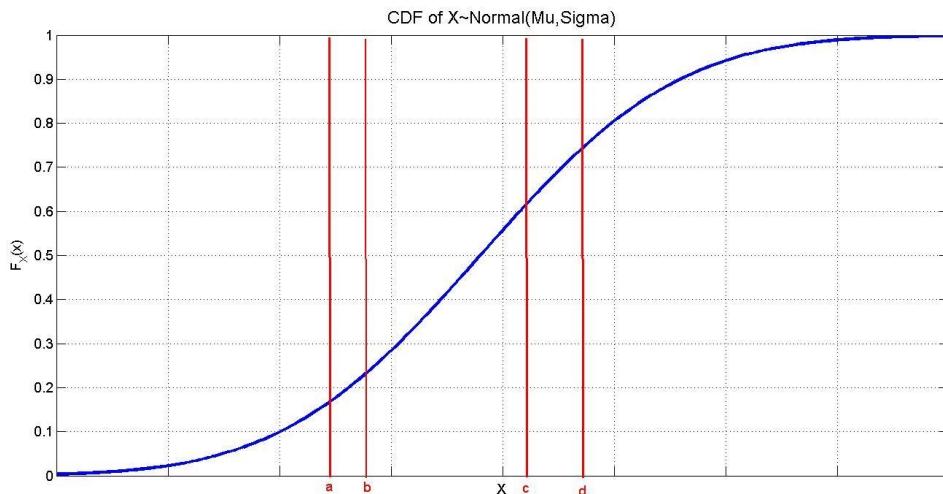


בנקודות  $x^- = 0^-$  ו-  $x^+ = 1^+$  ניתן לשים כל ערך סופי  
שנרצה   
סיכום

כעת נוכל לענות כל כל שאלת מהצורה  $\Pr(X \in S)$  כאשר  $S \subseteq \mathbb{R}$  תוק שימוש בפונקציות

$$f_X(x), F_X(x)$$

לצורך המראה נראה דוגמא פשוטה של מ"א רציף (מ"א גaussiy – נלמד בהמשך).



$$S = \{[a, b], [c, d]\}$$

$$\begin{aligned} \Pr(x \in S) &= \Pr(x \in \{[a, b], [c, d]\}) = \Pr(x \in [a, b] \cup [c, d]) = \Pr(x \in [a, b]) + \Pr(x \in [c, d]) = \\ &= [F_X(b) - F_X(a)] + [F_X(d) - F_X(c)] \end{aligned}$$

כאשר המעבר (\*) מוצדק מאחר ומתקיים (הוכחה בתוכנות)  
ומאוחר והמשתנה האקראי רציף אין מסות הסתברות ולכן  
 $\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a < X \leq b)$

## פונקציות של משתנים אקראיים

משתנה אקראי  $X$  עובר טרנספורמציה כלשהי  $g(\cdot)$ . בידיעת נתוני ההסתברות  $f_X(x)$  (ז"א ידועות פונקציות ה-CDF וה-PDF של הכניסה) ואיפיון המערכת  $g(\cdot)$  נרצה לדעת את הסטטיסטיקה של מוצא הטרנספורמציה  $f_Y(y), F_Y(y)$ , ככלומר את  $Y = g(X)$ .



למעשה קיבלנו פונקציה מורכבת:

$$Y = g(X) = g(X(\omega)) \Rightarrow Y(\omega) = g(X(\omega))$$

פונקציה מורכבת של מ"א הינה עדין מ"א אחר והיא עדין מיפוי מהצורה  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

נרצה לענות על  $\Pr(Y \in S)$  לכל  $S \in \mathbb{R}$ .

$$\Pr(Y \in S) = \Pr(g(X) \in S) = \Pr(X \in g^{-1}(S))$$

כאשר (\*) נובע מההגדרה  $\{x : g(x) \in S\}$  (או דוקא הפיכה).

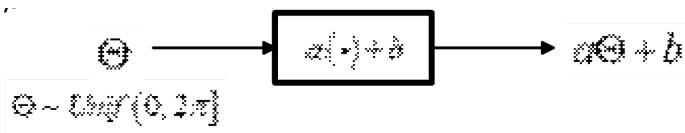
ז"א כל  $x$ -ים אשר  $g$  ממפה אותם ל-  $S$ .

מסקנה:

את פונקציית ה-CDF של  $Y$  ניתן לחשב מתוך פונקציית ה-CDF של  $X$ :

$$F_Y(y) \triangleq \Pr(Y \leq y) = \Pr(Y \in (-\infty, y]) = \Pr(g(X) \in (-\infty, y]) = \Pr(X \in g^{-1}((-\infty, y]))$$

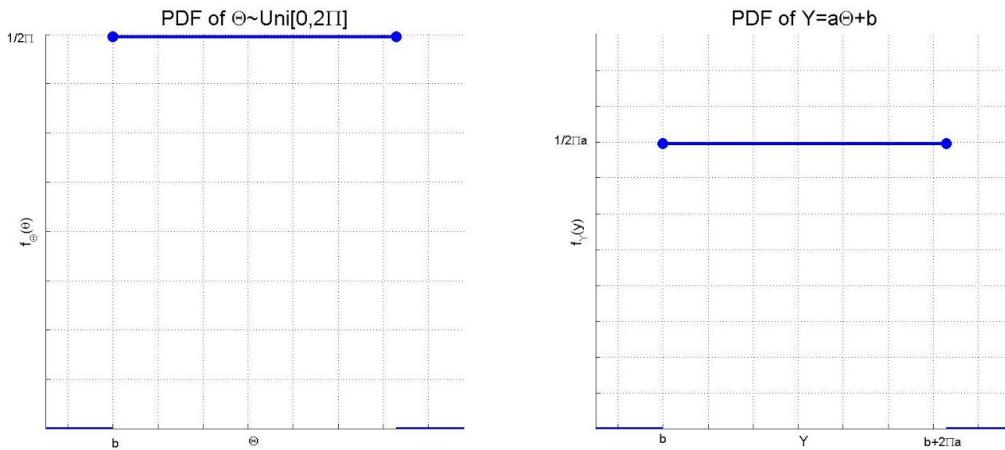
דוגמה:



עבור המערכת הבאה נרצה לדעת את הפילוג של המוצא. נבחן בפתרונות ובפתרונות כי יש חישיבות לשימן של  $a$ .

$$F_Y(y) = \Pr(g(\Theta) \leq y) = \Pr(a\Theta + b \leq y) = \Pr(a\Theta \leq y - b) = \begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Pr\left(\Theta \leq \frac{y-b}{a}\right) = \begin{cases} F_\Theta\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ 1 - F_\Theta\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} F_\Theta\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_\Theta\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases} \stackrel{\frac{d}{dy}}{\Rightarrow} f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_\Theta\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_\Theta\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$



### מומנטים, פונקציה אופיינית ופונקציה יוצרת מומנטים

לא תמיד ידוע PDF/CDF בצורה מדויקת ואנו יודעים רק חלק מהנתונים הסטטיסטיים. לשם כך נגידר אפיון סטטיסטי חלקי. מאפיון חלקי נקבל חסם במקומם הסתברות מדויקת. בנוסף, נוכל לבדוק את הרובסטיות (איתנות ויכולת לשמר על מבנה המערכת כנגד שינויים) של מערכת לפי תלות בסטטיסטיקה החלקית (לדוגמא תלות מערכת דרך מומנטים עד סדר שני בלבד או הנחת סדר שני לשם שערוך ליניארי).

### מומנט מסדר n של משתנה אקראי

מומנט מסדר n של מ"א מסומן (בקיצור) ע"י  $m_n$  ומחושב באופן הבא:

$$m_n(X) = m_n \triangleq E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) \cdot dx$$

כאשר (\*) מתקיים בתנאי שקיים האינטגרל.

$m_n$  למעשה מייצג את "המרכז המשווה של הפילוג" של המ"א  $X^n$ .

### מומנט מרכזי מסדר n של משתנה אקראי

מומנט מרכזי מסדר n של מ"א מסומן (בקיצור) ע"י  $\mu_n$  ומחושב באופן הבא:

$$\mu_n(X) = \mu_n = m_n(X - \eta_X) = E[(X - \eta_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \eta_X)^n \cdot f_X(x) \cdot dx$$

כאשר (\*) מתקיים בתנאי שקיים האינטגרל.

$\mu_n$  למשה מייצג את "המרכז המשווה של הפילוג" של המ"א  $(X - \eta_X)^n$ .

### תוחלת

תוחלת של מ"א הינה למשה ממנטו מסדר ראשון של המשתנה האקראי.

תוחלת של מ"א מוגדרת ומסומנת ע"י:

$$\eta_X = m_1(x) = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx$$

עבור מ"א בדיד נוכל לרשום:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot \Pr(x_i)$$

لتוחלת משמעות של "מרכז המשווה של הפילוג".

הערה/הבחנה: התוחלת הינה פונקציה ליניארית מתכונות הליניאריות של אינטגרל.

### תכונות:

1. משפט התוחלת

$$E[Y] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) \cdot dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx \quad \text{אם } Y = g(X)$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad .2 \quad \text{(LINIARITY OF THE MEAN).}$$

תכונה זו נובעת מההבחנה לגבי ליניאריות התוחלת, מתכונות ה-PDF.

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) \cdot f_X(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) \cdot f_X(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax \cdot f_X(x) \cdot dx + \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot f_X(x) \cdot dx = \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = a \cdot E[X] + b \cdot 1 = aE[X] + b \end{aligned}$$

### שונות

שונות של מ"א הינה למשה ממנטו מרכזי מסדר שני של המשתנה האקראי.

שונות של מ"א מוגדרת ומסומנת ע"י:

$$\begin{aligned} Var(X) = \sigma_x^2 &= \mu_2(x) = E[(X - \eta_X)^2] = E[X^2 - 2X\eta_X + \eta_X^2] = E[X^2] - 2\eta_X E[X] + \eta_X^2 = \\ &E[X^2] - 2\eta_X \cdot \eta_X + \eta_X^2 = E[X^2] - \eta_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = m_2 - (m_1)^2 \end{aligned}$$

### הערה:

הגדרת כל המומנטים עד סדר 2 של מ"א שקול לידעית התוחלת והשונות בלבד.

הסבר:

מציג את רשימת כל המומנטים עד סדר שני:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 & m_1 &= \eta_X & m_2 &= E[X^2] \\ \mu_0 &= 1 & \mu_1 &= 0 & \mu_2 &= \sigma_X^2 = Var(X) = m_2 - (m_1)^2 \end{aligned}$$

מתוך השיטה ישנו שלושה טריויאליים ( $\mu_0, \mu_1, \mu_2$  טריויאליים ונובעים מחישוב פשוט ואינם תלויים בסטטיסטיקה של המשטנה האקראי) ושלושה נוספים אשר מוגדרים כל אחד ע"י השניים האחרים.

סטטיסטיקה מסדר סופי

סטטיסטיקה מסדר  $k$  משמעה ידעת כל המומנטים עד (כולל) סדר  $k$ , ז"א ידעת כל המומנטים  $\{m_i\}_{i=0}^k$  (או לחילופין ידעת  $\{\mu_i\}_{i=0}^k$ ) ז"א כל המומנטים המרכזיים עד סדר  $k$  ובנוסף את המומנט מסדר ראשון, קרי התוחלת).

אם נתעלם מן הגדים הטריואליים אז סטטיסטיקה מסדר  $k$  משמעה ידעת אחד הסטם:

$$\begin{bmatrix} \{m_i\}_{i=0}^k \\ \{\mu_i\}_{i=0}^k, m_1 = \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0, m_1, m_2, \dots, m_k \\ \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, m_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m_1, m_2, \dots, m_k \\ \mu_2, \dots, \mu_k, m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{m_i\}_{i=1}^k \\ \{\mu_i\}_{i=2}^k, m_1 = \eta \end{bmatrix}$$

הערה:

מבחינה מתמטית ידעת אחד הסטם שcolaה לידעת הסט השני ( מבחינה הנדסית יש הבדל, נניח עבור סדר שני ידעת  $X^2$  מעידה על הספק בעוד שידעת  $(X - \eta_X)^2$  מעידה על סטייה ריבועית מן המרכז).

הסבר:

נראה כיון ראשון, נניח כי ידועים  $\{\mu_i\}_{i=0}^k, m_1 = \eta_X$ . נרצה לבטא את  $m_k$  על-ידם.

$$m_k = E[X^k] = E[((X - \eta_X) + \eta_X)^k]^* = E\left[\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (X - \eta_X)^l (\eta_X)^{k-l}\right] = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \mu_l (\eta_X)^{k-l}$$

כasher (\*). תקף לפי נוסחת הבינום של ניוטון.

נראה כיון הפוך, נניח כי ידועים  $\{m_i\}_{i=1}^k$ . נרצה לבטא את  $\mu_k$  על-ידם.

$$\mu_k = E[(X - \eta_X)^k]^* = E\left[\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (X)^l (-\eta_X)^{k-l}\right]^{**} = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} m_l (-m_1)^{k-l}$$

כאשר (\*) תקף לפי נוסחת הבינום של ניוטון ו-(\*\*) מאחר ומתקיים  $\eta_X = m$ .

באמור, ידעת סטטיסטיקה חיליקת לא תוכל לתת לנו הסתברות מדויקת אלא רק חסם.

אי-שוויון צ'בישב – Chebychev's Inequality

אי-שוויון צ'בישב מתאר את הסיכוי להתרחק במידה מסוימת מן התוחלת.

$$\Pr(|X - \eta_X| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}, \quad a > 0$$

ע"י בחירת  $a = k\sigma_X$ , ז"א בחירות  $a$  כמכפלה שלמה של גודל שורש השונות, אנו שואלים בעצם מה הסיכוי ש-  $X$  התרחק מן התוחלת יותר מ-  $k$  צעדים של  $\sigma_X$ . במקרה זה קיבל:

$$\Pr(|X - \eta_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

אי-שוויון מרקוב – Markov's Inequality

אי-שוויון מרקוב מתאר את הסיכוי של מ"א אי-שלילי  $Y$  לחזור מרף מסוים  $b > 0$ .

$$\Pr(Y \geq b) \leq \frac{\eta_Y}{b}$$

הוכחת אי-שוויון מרקוב:

$$\begin{aligned} \Pr(Y \geq b) &= \int_b^\infty f_Y(y) dy = \int_b^\infty 1 \cdot f_Y(y) dy \stackrel{y \geq b}{\leq} \int_b^\infty \frac{y}{b} \cdot f_Y(y) dy \stackrel{\frac{y}{b} > 0}{\leq} \int_0^\infty \frac{y}{b} \cdot f_Y(y) dy = \frac{1}{b} \int_0^\infty y \cdot f_Y(y) dy = \\ &= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^\infty y \cdot f_Y(y) dy = \frac{1}{b} E[Y] = \frac{\eta_Y}{b} \end{aligned}$$

כאשר עבר (\*) מאחר והאינטגרנד חיובי ולכן נוכל להרחיב את תחום האינטגרל ומעבר

(\*\*) תקף מאחר ומ"א  $Y$  הינו אי-שלילי ולכן  $f_Y(y) = 0 \quad \forall y \in (-\infty, 0)$  (ז"א האינטגרנד מתאפס בכל התחום שהוספנו).

הוכחת אי-שוויון צ'בישב:

עבור מ"א  $X$  נגיד  $|X - \eta_X|^2 \geq a^2$ . כזכור ש-  $Y$  הינו מ"א אי-שלילי.

$$\Pr(|X - \eta_X| \geq a) = \Pr(|X - \eta_X|^2 \geq a^2) = \Pr(Y \geq a^2) \stackrel{\text{Markov's Inequality}}{\leq} \frac{\eta_Y}{a^2} = \frac{\sigma_X^2}{a^2}$$

הערה:

דיעת מומנטים מכל סדר (ז"א ידעת הסט האינסופי של המומנטים) שcola להסתטיסטיקה מלאה (ראה הערה בסוף הנושא פונקציה אופיינית ופונקציה יוצרת מומנטים).

### פונקציה אופיינית

פונקציה אופיינית (פ"א) של מ"א  $X$  היא התמרת פורייה של ה-PDF של  $X$  (עד כדי מינוס בחזקה).

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx = E[e^{j\omega X}]$$

הערות:

- נבחן למשה כי זו פונקציה של מ"א  $Y(X) = e^{j\omega X}$ , פונקציה זו יוצרת מ"א מרוכב.
- לאחר והפונקציה האופיינית נוצרת מההתמרת פורייה אז תכונות פורייה תקפות.

תכונות:

1. פ"א הינה תיאור אלטראנטיבי של מידע סטטיסטי מלא ובכך שcolaה לדיעת ה-CDF שלו (וגם ה-PDF שלו אך למעשה הוא לא תמיד מוגדר). לכן מבחינת מידע סטטיסטי

$$\Phi_X(\omega) \Leftrightarrow F_X(x) \Leftrightarrow f_X(x)$$

$$f_X(x) = F^{-1}(\Phi_X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} \Phi_X(\omega) d\omega$$

$$\Phi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^0 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (\text{הוכחה: } \Phi_X(0) = 1) \quad .2$$

$$|\Phi_X(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j\omega x}| |f_X(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(x)| dx = 1 \quad (\text{הוכחה: } |\Phi_X(\omega)| \leq 1) \quad .3$$

$$\left. \frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} = j^n \cdot m_n \quad .4$$

הוכחה:

$$\left. \frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (jx)^n e^{j\omega x} f_X(x) dx \right]_{\omega=0} = j^n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (x)^n e^{j\omega x} f_X(x) dx \right]_{\omega=0} = j^n \cdot m_n$$

5. פונקציה אופיינית הינה פונקציה ליניארית (נובע מליינאריות של אינטגרל ותכונות אקספוננט).

$$Y = a \cdot X + b \Rightarrow \Phi_Y(\omega) = e^{j\omega b} \cdot \Phi_X(a\omega)$$

$$\Phi_Y(\omega) = E[e^{j\omega Y}] = E[e^{j\omega(a \cdot X + b)}] = e^{j\omega b} E[e^{j\omega(a \cdot X)}] = e^{j\omega b} \cdot \Phi_X(a\omega) \quad (\text{הוכחה: })$$

### פונקציה יוצרת מומנטים

פונקציה יוצרת מומנטים (Moment Generating Function) של מ"א  $X$  היא התמורה לפולס של ה-PDF של  $X$ .

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx = E[e^{sX}]$$

הערה:

פונקציה אופיינית תמיד רציפה בהחלט (התמורה פורייה) ואילו בפונקציה יוצרת מומנטים יש לעיתים בעיות התכנסות (התמורה לפולס) אך היתרון שלו הוא שאינו את המקדם המרוכב  $j$ .

תכונות:

1. פונקציה יוצרת מומנטים הינה תיאור אלגורייטמי של מידע סטטיסטי מלא.

2. הקשר בין הפונקציה היוצרת לבין המומנטים נתון ע"י

חסם צ'רנוף – Chernoff Bound

חסם צ'רנוף מתאר את הסיכוי של מ"א כלשהו  $X$  לחרוג מרף מסוים  $a$ .

$$\Pr(X \geq a) \leq e^{-sa} M_X(s)$$

הערה:

באגד ימין של החסם אנו משתמשים בפונקציה יוצרת מומנטים. ידעתה שקולה לידע על סטטיסטיקה מלאה, לכן מדובר בשנטפק רק בחסם אם בידינו כל הסטטיסטיקה? התשובה היא שיחסוב החסם דרך הפונקציה היוצרת הרבה יותר פשוט ומאוד שימושי

$X = \sum_i a_i X_i$      $\{X_i\}_{i=1}^n$  (מתקיים חסם הדוק) לחישוב הסתברויות עם רף נמוך למ"א מהצורה

p.i.n – תזכורת

סט מ"א הינם Independent Identically Distributed (בת"ס ושווי פילוג) אם ככלים יש אותה פונקציית PDF ויש אי-תלות סטטיסטית ביניהם (לא רק בזוגות אלא בכלל).

הוכחת חסם צ'רנוף:

$$\Pr(X \geq a) = \Pr(sX \geq sa) = \Pr(e^{sX} \geq e^{sa}) \stackrel{\text{Markov's Inequality}}{\leq} \frac{M_X(s)}{e^{sa}} = e^{-sa} M_X(s)$$

הערה:

כאמור, ידעת המומנטים מכל סדר שcola להסתטיקה המלאה. נניח כי ידועה הקבוצה

$$\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$$

נפתח את הפונקציה האופיינית לטור מק-לורן (טילור סביב הראשית  $0 = \omega$ ):

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} j^n m_n \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^n}{n!} m_n =$$

ואכן הבינו את הפונקציה היוצרת (אשר שcolaה לדיעת פונקציית ה-PDF) ע"י קבוצת המומנטים. כמובן שפיטוח הטור תקף רק אם הפונקציה האופיינית אנליטית. תנאים מדויקים הינו מסובכים ומיותרים לקורס, תנאי מספיק (ואף מחריר) לאנלייטיות הוא שהמ"א  $X$  חסום, כלומר קיים  $A$  כך שתמיד  $|X| \leq A$ , או  $\Pr(-A \leq X \leq A) = 1$ .

## ווקטורים אקראיים

ווקטור אקראי הינו הכללה של משתנה אקראי. הוא סט של מספר מ"א (אשר יכולים להיות תלויים אחד בשני, בחלקם, כמובן או בכלל לא). למעשה הוא סט של מספר מ"א אשר מוגדרים

על אותו מרחב הסתברות  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ .

מתמטית, וקטור אקראי  $\underline{X}$  מוגדר על אותו מרחב הסתברות  $\{\Omega, F, P\}$  כמו מ"א אך עם מיפוי

$$\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

אנו נדרוש שמייפוי יקיים כי הקבוצה  $\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}$  הינה מאורע ב-  $F$  לכל

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

אנו ננаг להציג וקטור אקראי כווקטור עמודה:

$$\underline{X}(\omega) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{bmatrix} \quad \underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

כמו במ"א נתאר את המידע ההסתברותי על הווקטור האקראי  $\underline{X}$  ע"י:

הערה: j עבור joint (משותף – לכל המשתנים  
האקראיים).

jCDF •

jPDF •

פונקציה יוצרת מומנטים  
(משותפת)

### פונקציית התפלגות מצטברת ופונקציית צפיפות הסתברות משותפת

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת (jCDF – Joint Cumulative Distribution Function)  
פונקציית ה-CDF j מוגדרת באופן הבא:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) \triangleq \Pr\left(\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}\right)^* = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \Pr(\underline{X} \leq \underline{x})$$

(\*) חישוב מידת הרסתברות עובד על מאורעות אך נכתב ע"י ערכי המ"א לשם פשוטות ונוחות.

תכונות:

$$0 \leq F_{\underline{X}}(\underline{x}) \leq 1 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad .1$$

.2.  $F_{\underline{X}}(\underline{x})$  היא פונקציה מונוטונית לא-ירודת בכל אחד מן המשתנים  $x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ .

.3. רציפה מימין בכל אחד מן המשתנים  $x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ .

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow " \infty"} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 . \quad .4$$

המשתנים עברו את המיפוי האפשרי מ-  $\Omega$ .

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = 0 \quad .5 \quad (\text{הסיבה לכך היא שאין אף מקור מ- } \Omega \text{ שימפה את } X_i \text{ לערך הקטן מ-} -\infty)$$

$$\{\omega : X_i(\omega) \leq -\infty\} = \emptyset , \text{ הרי}$$

6. פילוג שלווי (ניתן לחשב את פונקציית ה-CDF של מ"א יחיד או תת-ווקטור):

$$F_{X_k}(x) = \lim_{x_i \rightarrow \infty, i \neq k} F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F_{\underline{X}'}(\underline{x}') = \lim_{x_i \rightarrow \infty, X_i \notin \underline{X}'} F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

הדבר מבוצע ע"י השאפת הארגומנטים אשר לא שייכים לפילוג שלווי הרלוונטי ל-  $\infty$ .  
(לפי אותו עקרון של תכונה 3).

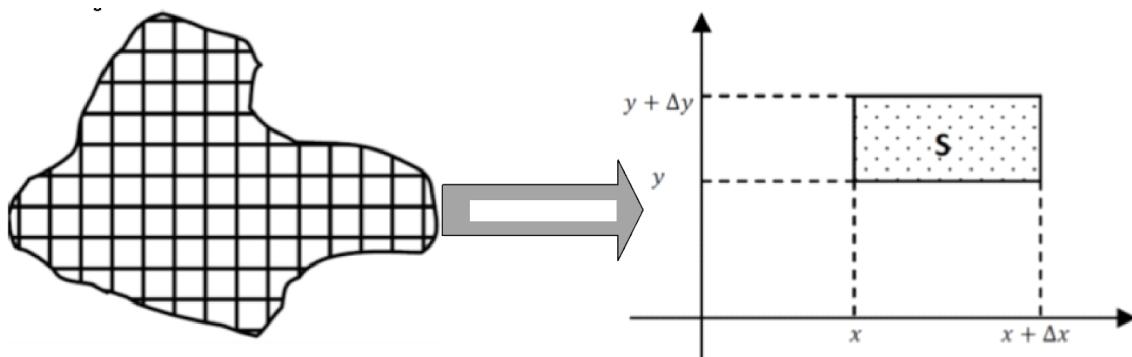
הערה:

הגדרת ה-CDF מספקיה ע"מ לענות על כל שאלה מהצורה  $\Pr(\underline{X} \in S)$ .

הסביר:

נמchiaש עבור דו-מימד (נעבוד עם מ"א המסומנים  $X$  ו-  $Y$  לשם נוחות).

נניח תחילה כי  $S$  הוא שטח אשר ניתן לחלק למלבנים. עבור  $S$  אשר אינו ניתן לחלוקת פשוטה למלבנים נוכל לחלקם למלבנים אינפיניטיסימליים. בעת נרצה לענות מה ההסתברות "ליפול" במלבן בודד (קטן כרצוננו) ואז נוכל פשוט לסקום את ההסתברויות המתאימות לכל המלבנים.



$$\begin{aligned} \Pr((X, Y) \in S) &= \Pr(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y) = \\ &= F_{XY}(x + \Delta x, y + \Delta y) - F_{XY}(x, y + \Delta y) - F_{XY}(x + \Delta x, y) + F_{XY}(x, y) \end{aligned}$$

הסיבה לכך היא למעשה  $F_{XY}(a,b)$  ( $X, Y$ ) יימצא בכל המלבן האינסופי אשר נמצא משמאלי- מתחת לנקודה  $(a,b)$  ולכן אנו מחסרים ומחברים חלקים מלבנים אינסופיים אחד מהשני.

### פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת – jPDF

עבור ו"א  $\underline{X}$  פונקציית ה-jPDF שלו תוגדר להיות הפונקציה המקיים:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\underline{x}} \cdots \int f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{x_1=-\infty}^{x_1} \int_{x_2=-\infty}^{x_2} \cdots \int_{x_n=-\infty}^{x_n} f_{\underline{X}}(\underline{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

תכונות:

$$\int_{\underline{X} \in \mathbb{R}^n} \cdots \int f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} = 1 .1$$

$$\forall \underline{x} \quad f_{\underline{X}}(\underline{x}) \geq 0 .2$$

3. פילוג שלוי (ניתן לחשב את פונקציית ה-PDF של מ"א יחיד או תת-ווקטור):

$$f_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\forall X \neq X_k}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

$$f_{\underline{X}'}(\underline{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\forall X_i \notin \underline{X}'}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

הדבר מבוצע ע"י אינטגרציה בתחום  $(-\infty, \infty)^n$  על כל המ"א אשר לא שייכים לפילוג השולי הרלוונטי.  
הוכחה עבור דו-מימד:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{XY}(x, \infty) \\ f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_{XY}(x, \infty) = \frac{d}{dx} \Pr(-\infty \leq X \leq x, -\infty \leq Y \leq \infty) = \\ \Rightarrow &= \frac{d}{dx} \int_{y'=-\infty}^{\infty} \int_{x'=x}^{\infty} f_{XY}(x', y') dx' dy' = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \end{aligned}$$

הערה:

עבור  $(x)$  גזירה לכל  $\underline{x}$  (גזרה זו דריש חזקה יותר מרציפה) אז מתקיים

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{d^n}{dx_1 \cdots dx_n} F_{\underline{X}}(\underline{x}) . \text{ כאשר אנו מניחים שהנגזרות מוגדרות היטב ואין חшибות לסדר הגזירה.}$$

הסביר:

עבור דו-מימד מתקיים (โนכל לראות מפיתוח ההסתברות עבור מלון ב-CDF(j)):

$$f_{XY}(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \Pr(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y) = \frac{d^2}{dxdy} F_{XY}(x,y)$$

מסקנה:

$$\Pr(\underline{X} \in S) = \int_{\underline{X} \in S} \cdots \int f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

### שני משתנים אקראיים (פילוג מותנה ופילוג שלוי)

תחילה נרჩיב את הדיוון בנושא ו"א ע"י דיוון על ו"א בגודל 2, ז"א שני משתנים אקראיים. הדיוון על שני משתנים אקראיים תקף גם לו"א בגודל כללי, אנו מתחילהים עם שני מ"א בלבד לצורך תחיליך הלימוד ופשטות הפיתוח.

דוגמא:

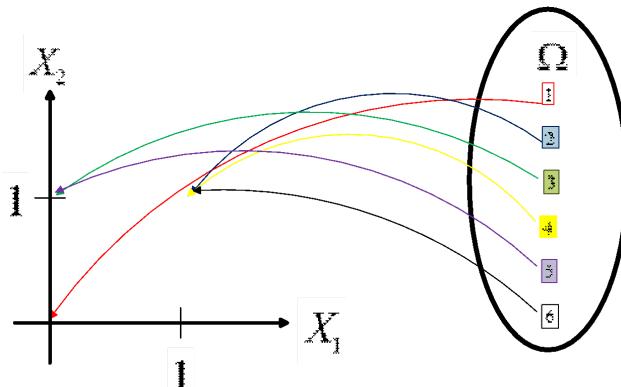
עבור ניסוי הטלת קובייה הוגנת נגדיר שני משתנים:

$$1. \quad X_1(\omega) \text{ אינדיקטור זוגיות}$$

$$2. \quad X_2(\omega) \text{ אינדיקטור 'האם יצא גדול מ-1'}$$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = 1, 3, 5 \\ 1 & \omega = 2, 4, 6 \end{cases} \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 1 \\ 0 & \omega = 1 \end{cases}$$

נראה את המיפוי באופן גרפי:



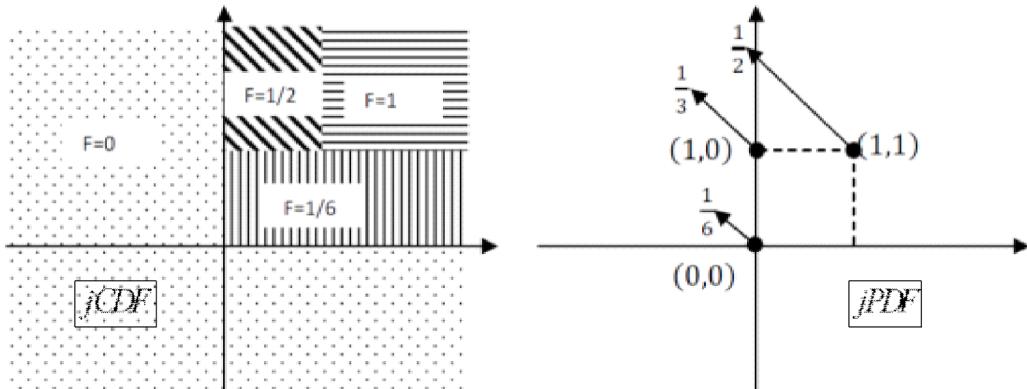
נוכל לחשב את ההסתברויות:

$$\Pr(X_1, X_2) = \begin{cases} 1/6 & (X_1, X_2) = (0,0) \\ 1/3 & (X_1, X_2) = (0,1) \\ 0 & (X_1, X_2) = (1,0) \\ 1/2 & (X_1, X_2) = (1,1) \end{cases}$$

ניתן להביחס כי קיימת תלות בין המשתנים מאחר ו-

$$\Pr(X_1 = \alpha, X_2 = \beta) \neq \Pr(X_1 = \alpha) \cdot \Pr(X_2 = \beta)$$

פונקציות ה-CDF וה-PDF המתאימות לווקטור זה הן:



אנו רואים כי פונקציית ה-PDF מורכבת מHALMs (מומחסים כחצאים אך כיוונים מחוץ למישור הגרף) ופונקציית ה-CDF מורכבת מקפיצות. הדבר נובע מכך שהמשתנים האקראיים אשר מרכיבים את הו"א בדים.

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \sum_{X_1=0}^1 \sum_{X_2=0}^1 \Pr(X_1, X_2) U(x_1 - X_1) U(x_2 - X_2) = \\ &= \frac{1}{6} U(x_1 - 0) U(x_2 - 0) + \frac{1}{3} U(x_1 - 0) U(x_2 - 1) + \frac{1}{2} U(x_1 - 1) U(x_2 - 1) \\ \Rightarrow f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \frac{d^2}{dx_1 dx_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{d}{dx_2} \left[ \frac{d}{dx_1} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \right] = \\ &= \frac{1}{6} \delta(x_1) \delta(x_2) + \frac{1}{3} \delta(x_1) \delta(x_2 - 1) + \frac{1}{2} \delta(x_1 - 1) \delta(x_2 - 1) \end{aligned}$$

### פילוג מותנה

נרצה לדעת לתאר את ההסתברות לגביי מאורעות על אחד המשתנים בהינתן מידע מקדים על המשתנה האקראי הנוסף.

### הסתברות מותנית – תזכורת

בהינתן מאורעות  $B$ ,  $A$ ,  $\Pr(B) \neq 0$  כאשר ידוע אז ההסתברות של מאורע  $A$  בהינתן קיום מאורע  $B$  היא:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

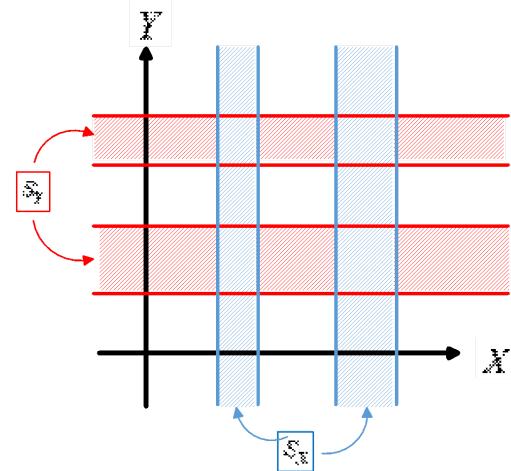
דיagramת ון לצורך הממחשה:



### הסתברות מותנית עברו שני משתנים אקראיים

לכן עבור ו"א  $(X, Y)$  נגיד רשיון מאורעות  $X \in S_X, Y \in S_Y$ . ולצורך ההכללה נניח כי כ"א מהתחומים  $S_X, S_Y$  הוא תחום רציף למקוטעין.

$$\begin{aligned} \Pr(X \in S_X | Y \in S_Y) &= \frac{\Pr(X \in S_X \cap Y \in S_Y)}{\Pr(Y \in S_Y)} = \\ &= \frac{\int_{X \in S_X} \int_{Y \in S_Y} f_{XY}(x, y) dx dy}{\int_{Y \in S_Y} f_Y(y) dy} = \\ &= \frac{\int_{X \in S_X} \int_{Y \in S_Y} f_{XY}(x, y) dx dy}{\int_{X=-\infty}^{\infty} \int_{Y \in S_Y} f_{XY}(x, y) dx dy} \end{aligned}$$

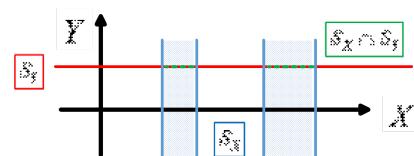


### הת寧יה נקודתית

ישנן הסתברויות אשר מוגנות במאורע נקודתי מהצורה  $Y = y$ , ז"א אחד המשתנים ידוע בדיק.

במקרה הרציף אנו בבעיה מאחר והסיכוי הנקודתי הינו אפס ( $\Pr(Y = y) = 0$ ) ולכן לא נוכל להשתמש בנוסחה להסתברות מותנית מאחר שהחלוקת באפס אינה מוגדרת.

$$\Pr(X \in S_X | Y = y) = \frac{\Pr(X \in S_X \cap Y = y)}{\Pr(Y = y)} = \frac{\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)}$$



על מנת להתמודד עם הבעיה נגידו:

$$\begin{aligned} \Pr(X \in S_X | Y = y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Pr(X \in S_X | Y \in (y, y + \Delta y)) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Pr(X \in S_X | Y \in S_Y) = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Pr(X \in S_X \cap Y \in S_Y)}{\Pr(Y \in S_Y)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_{X \in S_X} \int_{Y \in S_Y} f_{XY}(x, y) dx dy}{\int_{Y \in S_Y} f_Y(y) dy} \cdot \frac{1}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\Delta y} \int_{v=y}^{y+\Delta y} \int_{X \in S_X} f_{XY}(u, v) du dv}{\frac{1}{\Delta y} \int_{v=y}^{y+\Delta y} f_Y(v) dv} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta y} \int_{v=y}^{y+\Delta y} \left( \int_{X \in S_X} f_{XY}(u, v) du \right) dv \right] \stackrel{\text{L'Hôpital's}}{=} \frac{\int_{X \in S_X} f_{XY}(x, y) dx}{f_Y(y)} = \int_{X \in S_X} \frac{f_{XY}(x, y) dx}{f_Y(y)} = \int_{X \in S_X} f_{X|Y}(x | y) dx \end{aligned}$$

כאשר במעבר (\*) הגבול הופרד למונה ולמכנה בהנחה שהוא קיים והוחלף סדר האינטגרציה.  
במעבר (\*\*) השתמשנו בהגדרת הנגזרת ובמשמעות כלל לופיטל יחד עם רציפות הפונקציה בקטע האינטגרל (ולכן יכולנו להחליף את האינטגרל על התחום בערך הפונקציה כפול רוחב התחום – אינטגרל רימן/לבג).

### פונקציות פילוג (CDF/PDF) מותנה

נגדיר את פונקציות הפילוג המותנה, ז"א נגדיר את הפונקציות בעזרתן נוענה על השאלות מסוג

$$\Pr(X \in S_x | Y = y)$$

### CDF מותנה

$$F_{X|Y}(x|y) = F_{X|Y}^*(x,y) \triangleq \Pr(X \in (-\infty, x) | Y = y) = \int_{x \in S_x} \frac{f_{XY}(x,y)dx}{f_Y(y)}$$

נבהיר כי בשוויון (\*) הפונקציה מוצגת בשני אופנים שונים. שני התוצאות זהות מאחר והוא  
פונקציה פשוטה של שני משתנים והרישום יכול להשתנות לצורכי נוחות, אינדקס הפונקציה (  $X | Y$  ) הוא החשוב (כנ"ל לגבי PDF מותנה).

### PDF מותנה

$$f_{X|Y}(x|y) = f_{X|Y}(x,y) \triangleq \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

### הערה – חוק בייס:

ע"י החלפת תפקדים בין המשתנים נוכל לקבל את חוק בייס (Bayes' Theorem) עבור PDF מותנה:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)}{f_X(x)} = \frac{f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy} = \frac{f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_{X|Y}(x|y) dy}$$

החוק תקין גם במקרים של בדיד ומעורב, עבור משתנה בדיד יהיה  $\Pr$  ולא  $f$ .

### הערה:

פונקציות ה-PDF (כנ"ל לגבי CDF) היא פונקציית PDF לכל דבר ועניין. ניתן לחשב עליה כעל פונקציית PDF אשר מתארת את המשתנה האקראי ' $y | X = x$ '.

### תווחלת מותנה ושונות מותנה

נוכל להגיד תוחלת מותנה, שונות מותנה וככ"ל לגבי כל מומנט שנרצה.

$$\eta_{X|Y=y} = E[X | Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x, y) dx$$

$$Var(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_{X|Y=y})^2 \cdot f_{X|Y}(x, y) dx$$

### אי-תלות סטטיסטית

נאמר ש-  $X$  ו-  $Y$  משתנים אקראיים בלתי-תלויים סטטיסטיות (או נאמר ש-  $(X, Y)$  הינו ו"א בת"ס) אם:

$$\Pr(X \in S_X, Y \in S_Y) = \Pr(X \in S_X) \cdot \Pr(Y \in S_Y) \quad \forall S_X, S_Y \in \mathbb{R}$$

הערה:

הטענות הבאות שקולות:

$$(X, Y) \text{ הינו ו"א בת"ס}. \quad .1$$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad .2$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad .3$$

$$f_{X|Y}(x | y) = f_X(x), \quad f_{Y|X}(y | x) = f_Y(y) \quad .4$$

$$F_{X|Y}(x | y) = F_X(x), \quad F_{Y|X}(y | x) = F_Y(y) \quad .5$$

הוכחה:

$$1 \rightarrow 2 \quad F_{XY}(x, y) \triangleq \Pr(X \in (-\infty, x), Y \in (-\infty, y)) = \Pr(X \in (-\infty, x)) \cdot \Pr(Y \in (-\infty, y)) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$2 \rightarrow 3 \quad f_{XY}(x, y) = \frac{d^2}{dxdy} F_{XY}(x, y) = \frac{d^2}{dxdy} [F_X(x) \cdot F_Y(y)] = \frac{d}{dx} F_X(x) \cdot \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$3 \rightarrow 1 \quad \Pr(X \in S_X, Y \in S_Y) = \int_{X \in S_X} \int_{Y \in S_Y} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{X \in S_X} \int_{Y \in S_Y} f_X(x) \cdot f_Y(y) dx dy = \\ = \int_{X \in S_X} f_X(x) dx \int_{Y \in S_Y} f_Y(y) dy = \Pr(X \in S_X) \cdot \Pr(Y \in S_Y)$$

$$4 \quad f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

$$5 \quad F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = F_X(x)$$

מעבר (\*) עקב חסר-תלות סטטיסטי. מעבר (\*\*\*) עקב טענה 2. מעבר (\*\*\*\*) עקב טענה 3. מעבר (\*\*\*\*\*) עקב טענה 4.

הרחבה:

עבור ו"א בת"ס כללי  $X$  מתקיים:

$$\Pr(X_1 \in S_{X_1}, \dots, X_n \in S_{X_n}) = \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \in S_{X_i})$$

מכאן ההכללה מיידית לגבי פונקציות ה-CDF וה-PDF (מתפרקות למכפלה).  
הערה:

ידיית פונקציית ה-PDF של ו"א נותרת גם את ה-PDF-ים של כל המ"א ממנה מרכיב הווקטור (או את ה-PDF של כל תת-ווקטור) ע"י אינטגרציה בתחום  $(-\infty, \infty)$  על שאר המשתנים האקראיים.

ההיפך לא נכון אלא אם ידוע כי המשתנים האקראיים בת"ס ואז  $f_X(x) \cdot f_Y(y)$  נותרנים את

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ ע"י קשר פשוט של מכפלה, ז"א}$$

דוגמה 1:

אי-תלות בזוגות לא גוררת אי-תלות מלאה (לא גוררת בת"ס).

נתון ו"א  $(X, Y, Z)$  בעל רכיבים בת"ס בזוגות, ז"א ידוע כי  $(X, Y)$  בת"ס.

ידוע כי:

$$X = Y = \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2} \\ 0 & w.p. \frac{1}{2} \end{cases} \quad Z = X \oplus Y = \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2} \{(0,1), (1,0)\} \\ 0 & w.p. \frac{1}{2} \{(0,0), (1,1)\} \end{cases}$$

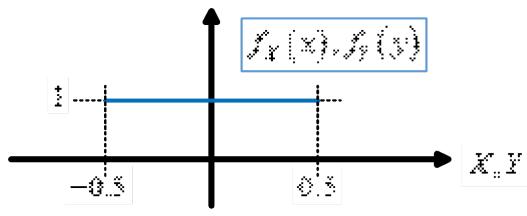
אך הוא ו"א אינו בת"ס מאחר ו-

$$\Pr(X=1, Y=1, Z=1) \neq \Pr(X=1) \cdot \Pr(Y=1) \cdot \Pr(Z=1)$$

$$\Pr(X=1, Y=1, Z=1) = 0$$

$$\Pr(X=1) \cdot \Pr(Y=1) \cdot \Pr(Z=1) = \frac{1}{8}$$

דוגמה 2:



נתון ו"א  $(X, Y)$  כאשר  $X, Y \sim Unif(-0.5, 0.5)$ .

$$f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1 & -0.5 < y < 0.5 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נרצה להראות איך התלות בין שני המשתנים האקראיים משפיעה ע"י שלושה מקרים:

מקרה 1:

אם ידוע  $X, Y$  בת"ס אז:

	$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -0.5 < x < 0.5 \\ -0.5 < y < 0.5 \end{cases} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
--	---

מקרה II –

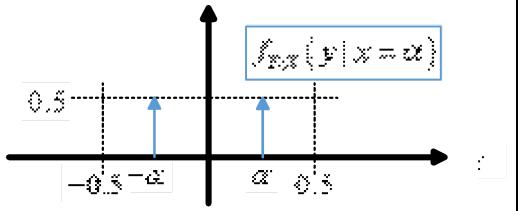
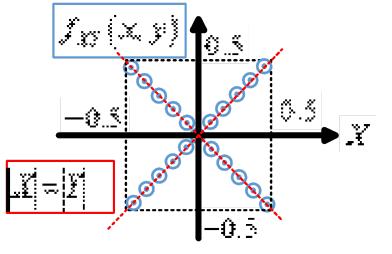
אם נתון  $X = Y$ , ז"א הם למעשה אותו מ"א אז:

	<p>כמובן שמתקיים (משום זהה אותו מ"א):</p> $f_{X Y}(x y) = \begin{cases} 1 & x = y,  y  < 0.5 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \delta(x-y),  y  < 0.5$ <p>הערה - כאשר <math>y</math> ידוע ובעל ערך מתאים לפילוג שלו.</p>
$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) \cdot f_{X Y}(x y) = \begin{cases} 1 \cdot \delta(x-y) & \begin{cases} -0.5 < x < 0.5 \\ -0.5 < y < 0.5 \end{cases} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	<p>ולכן נקבל</p>

זהו למעשה "קיר-דלתאות" על הישר  $X = Y$ .

בתחום המתאים לפילוג המ"א ( $|X|, |Y| < 0.5$ ).

$B = \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2} \\ -1 & w.p. \frac{1}{2} \end{cases}$	<p>נתון כי <math>Y = BX</math> כאשר <math>B = \pm 1</math> בהסתברויות שוות ו-</p> <p>ידוע <math>X \sim Unif(-0.5, 0.5)</math> ולכן <math>'X'</math> מתפלג באופן זהה. מכאן שעבור כל ערך של <math>B</math> ל- <math>Y</math> ול- <math>X</math> פילוג זהה, ז"א <math>X, Y \sim Unif(-0.5, 0.5)</math>.</p>
---	--

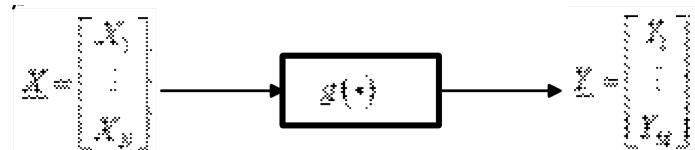
	<b>מתקיים</b> $f_{Y X}(y x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\delta(y-x)+\frac{1}{2}\delta(y+x) &  x <0.5 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y X}(y x)=\begin{cases} 1\cdot\left[\frac{1}{2}\delta(y-x)+\frac{1}{2}\delta(y+x)\right] & \begin{cases} -0.5 < x < 0.5 \\ -0.5 < y < 0.5 \end{cases} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	<b>ולכן נקבל</b>
	<b>שאלו למשה שני "קירות-דלתאות" על</b> הישרים המקיימים את השוויון $ X = Y $ . <b>בתחום המתאים לפילוג המ"א (<math> X , Y &lt;0.5</math>)</b> .

### וקטור של משתנים אקראיים

כעת נרחיב את הדיון לוקטור כללי (בגודל כלשהו) של משתנים אקראיים, אך עדין נדגים לעתים עברו שני מ"א.

#### פונקציה של וקטור אקראי

ווקטור אקראי  $\underline{X}$  עובר טרנספורמציה כלשהי  $\underline{g}$ , מוצא הטרנספורמציה הינו ו"א  $\underline{Y}$  אשר לא בהכרח באותו גודל/מיד. בידיעת נתוני ההסתברות  $f_{\underline{X}}(\underline{x})$  ו-  $F_{\underline{X}}(\underline{x})$  (ז"א ידועות פונקציות ה-CDF וה-PDF של הכניסה) ואיפיון המערכת  $\underline{g}$  נרצה לדעת את הסטטיסטיקה של מוצא הטרנספורמציה  $f_{\underline{Y}}(\underline{y}), F_{\underline{Y}}(\underline{y})$ , כלומר את  $\underline{Y}=g(\underline{X})$ .



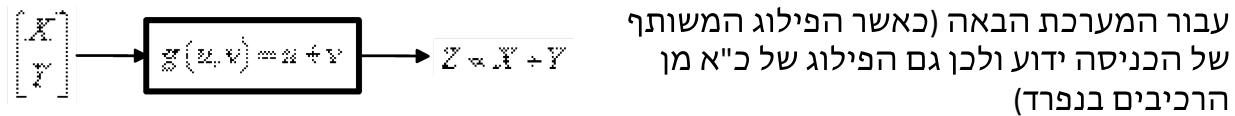
למעשה קיבלנו פונקציה מורכבת:

$$\underline{Y} = g(\underline{X}) = g(\underline{X}(\omega)) \Rightarrow \underline{Y}(\omega) = g(\underline{X}(\omega))$$

פונקציה מורכבת של ו"א הינה עדין ו"א מאחר והוא עדין מיפוי מהצורה  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

נרצה לענות על  $\Pr(\underline{Y} \in S)$  לכל  $S \in \mathbb{R}^M$ .

דוגמא:



נרצה למצוא את פילוג המוצא, כלומר את  $F_Z(z)$ .

$$F_Z(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(g(X, Y) \leq z) = \Pr((X, Y) \in g^{-1}((-\infty, z])) = \iint_{(X, Y) \in g^{-1}((-\infty, z])} f_{XY}(x, y) dx dy$$

כasher בשווין (\*) הגדכנו את הפונקציה ההופכית להיות:

$$g^{-1}((-\infty, z]) = \{(x, y) : g(x, y) \in (-\infty, z]\}$$

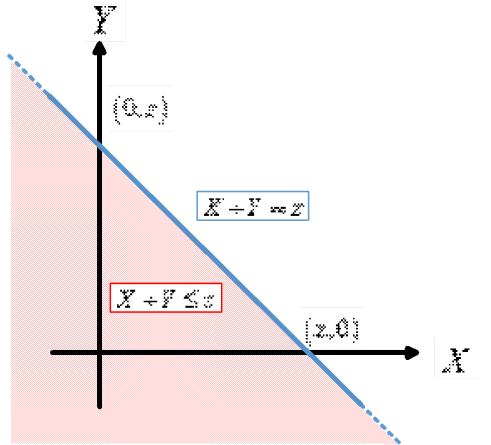
עד כה הפיתוח היה כללי עבור  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  כלשהו, אצלנו מתקיים  $g$  ולכן:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \Pr(Z \leq z) = \Pr(X + Y \leq z) = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{z-x} f_{XY}(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx$$

(\*) לפי המשפט היסודי של האלגברה:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t) dt = f(b)$$



אם נוסיף כי  $(X, Y)$  ו"א בת"ס אז  $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$  ולכן:

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx = f_X(x) * f_Y(y)$$

כasher בשווין (\*) מתקיים לפי הגדרת הקונבולוציה (והגבול האינסופי לכן נוכל להחיליפמשתנים בקלות):

$$f(x) * g(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-x) \cdot g(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t-x) \cdot f(t) dt = g(x) * f(x)$$

מסקנה:

עבור סדרת משתנים אקראיים  $\{X_i\}_{i=1}^N$  בת"ס, נגידר מ"א  $Z = X_1 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i$  ובערו מתקיים:

$$f_Z(z) = f_{X_1} * \dots * f_{X_N}(z)$$

הערה:

אם סדרת משתנים אקראיים  $\{X_i\}_{i=1}^N$  היא p.i.i. נגידר מ"א  $Z$  באותו אופן (סכום שלהם). פונקציית ה-  $f_Z(z)$  היא למעשה קונבולוציה N- עצמית של אותו  $f_X(x)$  (כי הם p.i.i.). כאשר  $\infty \rightarrow N$  מקבל גאוסיאן עבור ללא תלות בפילוג ההתחלתי.

הסביר:

הדבר נובע ממשפט הגבול המרכזי. עבור כל פילוג ההתחלתי נגיע בסוף לפילוג עם ממורכז ולכן זהו גאוסיאן. ניתן להמחיש את הדבר אם נתחיל עם פילוג אחד; עבור מ"א אחד מקבל מלבן, עבור שניים מקבל משולש (קונבולוציה של שני מלבנים) ובגבול מקבל גאוסיאן.

#### תווחלת של ווקטור אקראי ותווחلت של פונקציה של ווקטור אקראי

נניח קיימים ו"א  $(X, Y)$  עם  $f_{XY}(x, y)$  (או במקרה ה-ח מימדי ו"א  $\underline{X}$  עם  $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ ) כמו כן נניח טרנספורמציה  $g(X, Y)$  (או בהתאם טרנספורמציה  $g(\underline{X})$ ) 1. תוכנות ההחלה / משפט התוחלת שלמה

נחשב את התוחלת של מ"א כלשהו מתוך הווקטור ע"י:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) E[Y|X=x] dx = E_X[E_Y[Y|X]] \end{aligned}$$

ז"א נבצע את התוחלת של  $Y$  תחילה ע"י התנייה לפי  $X$  (החזקתו בערך קבוע מסויים) ואז נבצע תוחלת לפי כל ערכי  $X$  האפשרים (כך בתוחלת הפנימית "נפטרנו" מן המשתנה האקראי  $Y$ ).

2. משפט ההחלה / משפט התוחלת שלמה - תוחלת של פונקציה של ווקטור אקראי נחשב את התוחלת של פונקציה של ו"א ע"י:

$$E[g(\underline{X})] = \int \cdots \int g(\underline{X}) f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

עבור המקרה הדו-מימדי:

$$\begin{aligned}
 E[g(X,Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y) f_{XY}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y) f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx dy = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y) f_{Y|X}(y|x) dy \right) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [E_Y[g(X,Y)|X]] f_X(x) dx = \\
 &= E_X[E_Y[g(X,Y)|X]] \stackrel{\text{Symmetry}}{=} E_Y[E_X[g(X,Y)|Y]]
 \end{aligned}$$

הערות:

1. תכונת ההחלה נובעת ממשפט ההחלה כאשר  $g(X,Y) = Y$ , ז"א טרנספורמציה אשר מתعلמת מן המשתנה האקראי  $X$ .
2. נוכל להכליל את הנוסחאות הנ"ל למקורה ח-מיידי באותו האופן, לדוגמה:

$$E[Z] = E_X[E_Y[E_Z[Z|X,Y]]] = E_X[E_Y[E_Z[Z|X,Y]]]$$

### מומנטים משותפים של וקטור אקראי

עבור ו"יא כלי  $X$  מממד  $N$  נגדיר את סדר המומנט  $k$  ע"י

המומנט מסדר  $k$  מוגדר להיות:

$$m_{k_1, \dots, k_N} = E[X_1^{k_1} \cdot \dots \cdot X_N^{k_N}] = E\left[\prod_{i=1}^N X_i^{k_i}\right]$$

המומנט המרכזי מסדר  $k$  מוגדר להיות:

$$\mu_{k_1, \dots, k_N} = E\left[\left(X_1 - \eta_{X_1}\right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(X_N - \eta_{X_N}\right)^{k_N}\right] = E\left[\prod_{i=1}^N \left(X_i - \eta_{X_i}\right)^{k_i}\right]$$

עבור ו"יא דו-מיידי  $(X, Y)$  נקבל:

$$m_{nk} = E[X^n \cdot Y^k], \quad \mu_{nk} = E[(X - \eta_X)^n \cdot (Y - \eta_Y)^k]$$

נציג את המומנטים (הלא טריויאליים) עד סדר 2:

$$\begin{array}{lll}
 m_{1,0} = \eta_X & m_{0,1} = \eta_Y & m_{1,1} = E[XY] = R_{XY} \\
 \mu_{2,0} = \sigma_X^2 = Var(X) & \mu_{0,2} = \sigma_Y^2 = Var(Y) & \mu_{1,1} = \sigma_{XY} = Cov(X, Y)
 \end{array}$$

הערה:

סטטיסטיקה משותפת מסדר 2 למעשה נותנת את כל התוחלות והשונות (ואריאנסים - Var) של המ"א כולל את כל הקروس-וואריאנסים (Co-Var) בין זוגות מ"א.

### שונות משותפת – Covariance

השונות המשותפת של שני מ"א  $X$  ו-  $Y$  מוגדרת להיות (פיתוח בדומה לאי שבוצע עבור שונות רגילה):

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = \mu_{1,1} = E[(X - \eta_X) \cdot (Y - \eta_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

### חוסר קורולציה

.  $Cov(X, Y) = 0$  אם שני מ"א  $X$  ו-  $Y$  הם חסרי-קורולציה (חס"ק) או בלתי-מתואמים אם חוסר קורולציה הינו "החלשה" של אי-תלות סטטיסטית.  
טענה:

אם שני מ"א  $X$  ו-  $Y$  הם בת"ס אז הם גם חס"ק.  
הוכחה:

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \stackrel{\text{Independence}}{=} E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0$$

טענה:

.  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$  אם שני מ"א  $X$  ו-  $Y$  הם חס"ק אז מתקיים  
הוכחה:  
נזכור כי:

$$Var(X) = E[(X - \eta_X)^2] = E[X^2] - E^2[X] = E[X^2] - \eta_X^2$$

ולכן:

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= E[((X - \eta_X) + (Y - \eta_Y))^2] = E[(X - \eta_X)^2] + 2 \cdot E[(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)] + \\ &+ E[(Y - \eta_Y)^2] = Var(X) + 2 \cdot Cov(X, Y) + Var(Y) = Var(X) + Var(Y) \end{aligned}$$

מעבר (\*) לפיה ליניאריות התוחלת. מעבר (\*\*) מאחר ש-  $X$  ו-  $Y$  הם חס"ק ומתקיים

$$. Cov(X, Y) = 0$$

### אורתוגונליות

.  $R_{XY} = E[XY] = m_{1,1} = 0$  אם אורתוגונליים אם

הערה:

באופן כללי אי-תלות סטטיסטית (בת"ס) לא בהכרח גורר אורתוגונליות (אך כפי שראינו כן גורר חס"ק).

טענות (חס"ק ואורתוגונליות):

1. אם זוג משתנים אקראיים  $X, Y$  הינם אורתוגונליים ובנוסף ידוע כי  $E[X] = \eta_X = 0$  או

$$E[Y] = \eta_Y = 0 \quad (\text{או שניהם}), \text{ אז הם חס"ק (הרוי נקבל)}$$

$$\text{.}(\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0 - 0 = 0$$

2. אם זוג משתנים אקראיים  $X, Y$  הינם חס"ק ובנוסף ידוע כי  $E[X] = \eta_X = 0$  או

$$E[Y] = \eta_Y = 0 \quad (\text{או שניהם}), \text{ אז הם אורתוגונליים (הרוי נקבל)}$$

$$\text{.}(\text{E}[XY] = \text{Cov}(X, Y) + E[X] \cdot E[Y] = 0 + 0 = 0$$

מסקנה:

אם  $E[Y] = \eta_Y = 0$  או  $E[X] = \eta_X = 0$ , אז אורתוגונליות  $\Leftrightarrow$  חס"ק.

**מקדמי מתאם ליניארים (מקדם פירסון ומקדם קורולציה)**

בהינתן שני משתנים אקראיים נרצה לבטא את הקשר ביניהם.

לאפעם נחפש מתאם בין שני רכיבים בתחום אותו ווקטור-אקראי (נאמר בין  $X$  לבין  $Y$ ).

אנו נתעסק עם מקדמי מתאם ליניארים בלבד, ז"א ממדדים אשר מבטאים את יכולת קיורוב התלות של מ"א מסוימים (נאמר  $X$ ) במ"א אחר ( $Y$ ) ע"י תלות ליניארית ללא מקדם

חופשי (עוברת בראשית), ז"א ע"י  $Y = \alpha X + \epsilon$ .

**מקדם המתאם של פירסון**

מקדם המתאם של פירסון (מתאם פירסון) הוא מدد המתאם ליניארי בין שתי קבוצות של מספרים ונתון ע"י:

$$r(X, Y) = \frac{E[X \cdot Y]}{\sqrt{E[X^2] \cdot E[Y^2]}}$$

נקבל  $|r(X, Y)| = 1$  אם ומ"מ קיימת  $\alpha$  כך שמתקיים  $Y = \alpha X + \epsilon$ . ז"א קיימים ישר העובר דרך ראשית הציריים אשר מתאר את הקשר בין  $X$  ל- $Y$ .

**מקדם קורולציה**

מקדם קורולציה גם הוא מדרד המתאם ליניארי והוא מוגדר מהגדרת מקדם פירסון ע"י:

$$\rho(X, Y) = r(X - \eta_X, Y - \eta_Y) = \frac{E[(X - \eta_X) \cdot (Y - \eta_Y)]}{\sqrt{E[(X - \eta_X)^2] \cdot E[(Y - \eta_Y)^2]}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

נוכל גם לרשום באופן יותר מפורש:

$$\rho(X, Y) = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{\sqrt{E[X^2] - E^2[X]} \cdot \sqrt{E[Y^2] - E^2[Y]}}$$

נ קיבל  $|\rho(X, Y)| = 1$  אם ו רק קיימת  $\alpha$  כך שקיימים  $X - \eta_X$  ו  $Y - \eta_Y$  מתקיים  $\alpha(X - \eta_X)(Y - \eta_Y) = \alpha(X - \eta_X)$ .  
טענה:  
השווים:

1. זוג משתנים אקראיים  $X, Y$  הינם אורוותוגונליים אם ו רק מתקיים  $E[X \cdot Y] = 0$  (הרוי אז מתקיים).

$$E[X \cdot Y] = 0$$

2. זוג משתנים אקראיים  $X, Y$  הינם חס'ק אם ו רק מתקיים  $Cov(X, Y) = 0$  (הרוי אז מתקיים).

$$Cov(X, Y) = 0$$

טענה:

עבור כל שני משתנים אקראיים  $X, Y$  מתקיים  $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$  (ז"א  $|r(X, Y)| \leq 1$ ).

הוכחה:

נתבונן במטריצה:

$$\begin{bmatrix} E[X^2] & E[X \cdot Y] \\ E[Y \cdot X] & E[Y^2] \end{bmatrix}$$

זו מטריצה PSD (Positive-Semi-Definite) – נלמד באלגברה ליניארית, תבוצע חזרה בהמשך הקורס.

לכן כל הערכים העצמיים שלה אי-שליליים, ז"א  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ . מכאן שגם הדטרמיננטה של המטריצה אי-שלילית ולכון:

$$\det \begin{pmatrix} E[X^2] & E[X \cdot Y] \\ E[Y \cdot X] & E[Y^2] \end{pmatrix} = E[X^2] \cdot E[Y^2] - E^2[X \cdot Y] \geq 0$$

נעביר אגפים ונקבל את אי-שוויון קושי-שوارץ (Cauchy-Schwarz Inequality)

$$E^2[X \cdot Y] \leq E[X^2] \cdot E[Y^2]$$

מחלוקה באגף ימין ומהגדלת מקדם פירסון נקבל:

$$r^2(X, Y) = \frac{E^2[X \cdot Y]}{E[X^2] \cdot E[Y^2]} \leq 1 \Rightarrow |r(X, Y)| \leq 1$$

טענה:

עבור כל שני משתנים אקראיים  $X, Y$  מתקיים  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$  (ז"א  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ ).

הוכחה:

הוכחנו  $|r(X, Y)| \leq 1$  עבור כל שני משתנים אקראיים  $X, Y$ . נגידיר זוג משתנים:

$$\begin{cases} X' = X - \eta_X \\ Y' = Y - \eta_Y \end{cases}$$

ובמובן שמתקיים  $|\rho(X, Y)| \leq 1$  ומכאן  $|\rho(X', Y')| \leq 1$ .

### פונקציה אופיינית משותפת

פונקציה אופיינית משותפת של ו"א  $\underline{X}$  היא התמרת פוריה של ה-PDF של  $\underline{X}$  (עד כדי מינוס בחזקה).

$$\Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) = \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^N} \cdots \int e^{j\underline{\omega}^T \underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} = E[e^{j\underline{\omega}^T \underline{X}}]$$

הערות:

- $\underline{\omega}$  וה  $\underline{X}$  הינם מאותו מימד, את המכפלה ביניהם ניתן לרשום כסכום

$$\underline{\omega}^T \cdot \underline{X} = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot X_i$$

- פ"א משותפת הינה תיאור אלטראנטיבי של מידע סטטיסטי מלא של הו"א.
- את הארגומנט של פ"א משותפת נרשום כווקטור שורה או עמודה לפי הנוחות.

תכונות:

$$1. \quad \Phi_{\underline{X}}(0) = 1$$

$$2. \quad |\Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega})| \leq 1$$

3. ניתן לחשב פ"א שולית מתוך הפונקציה האופיינית המשותפת ע"י הצבת  $\omega_i = 0$  עבור

כל אינדקס  $i$  אשר אינו רצוי. דוגמא:

$$\Phi_{X_k}(\omega_k) = \Phi_{\underline{X}} \left( 0, \dots, 0, \underbrace{\omega_k}_{k'th place}, 0, \dots, 0 \right)$$

ז"א הזנת  $\underline{\omega}$  לפ"א משותפת כאשר בווקטור  $\underline{I}$  ישנו אחדים רק במקומות הרלוונטיים.

4. התמרת פוריה הפוכה:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} = \int_{\underline{\omega} \in \mathbb{R}^N} \int e^{-j\underline{\omega}^T \underline{x}} \Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) d\underline{\omega}$$

5. הקשר בין הפונקציה האופיינית המשותפת לבין המומנטים נתון ע"י:

$$m_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{j^{k_1 + \dots + k_n}} \left[ \frac{d^{k_1 + \dots + k_n}}{d\omega_1^{k_1} \cdot \dots \cdot d\omega_n^{k_n}} \Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) \right]_{\omega=0}$$

6. פונקציה אופיינית משותפת הינה פונקציה ליניארית (נובע מליינאריות של אינטגרל ותכונות אקספוננט).

נראה את השפעת טרנספורמציה ליניארית על הפ"א המשותפת.

נתון ו"א  $\underline{X}$  עם פ"א משותפת  $\Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega})$ , הוא עובר טרנספורמציה ליניארית ידועה. נקבל:

$\underline{Y}_{M \times 1} = \underline{\underline{A}}_{M \times N} \cdot \underline{X}_{N \times 1} + \underline{b}_{M \times 1}$ $\Phi_Y(\underline{\omega}) = e^{j\underline{\omega}^T \underline{b}} \cdot \Phi_{\underline{X}}(\underline{\underline{A}}^T \underline{\omega})$	
---	--

הסביר:

$$\begin{aligned} \Phi_Y(\underline{\omega}) &= E[e^{j\underline{\omega}^T \underline{Y}}] = E[e^{j\underline{\omega}^T (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b})}]^* = e^{j\underline{\omega}^T \underline{b}} \cdot E[e^{j\underline{\omega}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X}}]^* = e^{j\underline{\omega}^T \underline{b}} \cdot E[e^{j(\underline{\omega}^T \cdot \underline{\underline{A}})^T \cdot \underline{X}}] = \\ &= e^{j\underline{\omega}^T \underline{b}} \cdot E[e^{j(\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\omega})^T \cdot \underline{X}}] = e^{j\underline{\omega}^T \underline{b}} \cdot \Phi_{\underline{X}}(\underline{\underline{A}}^T \underline{\omega}) \end{aligned}$$

מעבר (\*) ע"י הוצאת קבוע מהתוחלת. מעבר (\*\*) ע"י הוספה טרנספורמציה פעמיים.

מעבר (\*\*\*) ע"י הכנסת טרנספורמציה פעם אחת ולכון גם הפיכת סדר המכפלת.

7. ו"א  $(X, Y)$  בעלי רכיבים בת"ס אמ"ם  $\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = \Phi_X(\omega_1) \cdot \Phi_Y(\omega_2)$  הוכחת כיון 1 – נתון בת"ס:

$$\begin{aligned} \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) &= \int \int e^{j(\omega_1, \omega_2)^T (x, y)} f_{XY}(x, y) dx dy \stackrel{\text{Independence}}{=} \int \int e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int \int e^{j\omega_1 x} e^{j\omega_2 y} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int e^{j\omega_1 x} f_X(x) dx \int e^{j\omega_2 y} f_Y(y) dy = \Phi_X(\omega_1) \cdot \Phi_Y(\omega_2) \end{aligned}$$

הוכחת כיון 2 – יש להוכיח בת"ס: אותו דבר במערכות.

דוגמאות לשימוש בתכונות של פונקציה אופיינית משותפת:

• דוגמא לתוכנה מס' 7

דוע  $(X, Y)$  ו"א בת"ס. נגידר שני מ"א:  $U = g(X)$   $V = h(Y)$ . נראה כי גם בת"ס.

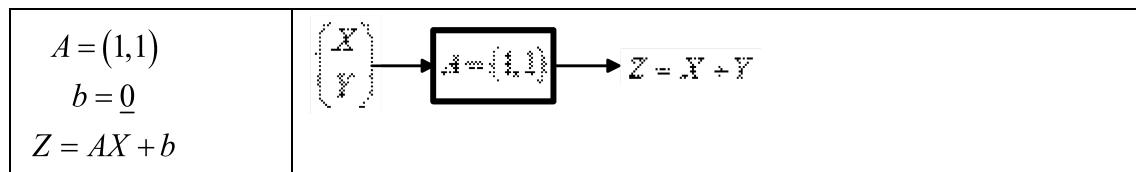
$$\begin{aligned}\Phi_{UV}(\omega_1, \omega_2) &= E\left[e^{j(\omega_1, \omega_2)^T(U, V)}\right] = \int \int e^{j(\omega_1, \omega_2)^T(U, V)} f_{UV}(u, v) du dv = \\ &= \int \int e^{j(\omega_1, \omega_2)^T(g(x), h(y))} f_{XY}(x, y) dx dy \stackrel{\text{Independence}}{=} \int \int e^{j(\omega_1 g(x), \omega_2 h(y))} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int e^{j\omega_1 g(x)} f_X(x) dx \int e^{j\omega_2 h(y)} f_Y(y) dy = \Phi_U(\omega_1) \cdot \Phi_V(\omega_2)\end{aligned}$$

משמעות הדבר היא שפונקציות של מ"א בת"ס מניבות מ"א בת"ס.

דוגמה לתכונה מספר 6 •

יהו מ"א  $X, Y$  בת"ס, נגידר  $f_Z = f_X * f_Y$ . כבר רأינו כי  $Z = X + Y$ . נוכיח שוב.

נכתב את  $Z$  כמערכת ליניארית:



$$\Phi_Z(\omega) = \Phi_{XY}(A^T \cdot \omega) = \Phi_{XY}((1, 1)^T \cdot \omega) = \Phi_{XY}\left(\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{Independence}}{=} \Phi_X(\omega) \cdot \Phi_Y(\omega)$$

### סטטיסטיקה מסדר II של ווקטורים אקראיים

על מנת לנתח מערכות ליניאריות נתעניין בסטטיסטיקה מסדר שני בלבד מאחר וסטטיסטיקה מסדר גובה יותר לא תורמת לניתוח. הדבר יבוא לידי ביטוי בשערוך ליניארי (מאחר והמערכת ליניארית) אשר לימד בהמשך ובאופןו ו"א גואס (מאחר ושאר המומנטים מתאפסים).

עבור ו"א  $X$  נוכל לחשב את התוצאות של המשתנים האקראיים ממנה הוא מורכב, את השונות שלהם ואת השונות המשותפת של כל זוג מרכיבים ע"י מומנטים משותפים כפי שראינו לגבי סטטיסטיקה מסדר שני.

$$m_{0, \dots, 0, \underset{k'th place}{\underbrace{\dots}, 0, \dots, 0}} = E[X_k] = \eta_{X_k}$$

$$m_{0, \dots, 0, \underset{k'th place}{\underbrace{\dots}, 0, \dots, 0, \underset{l'th place}{\underbrace{\dots}, 0, \dots, 0}} = E[X_k \cdot X_l]$$

$$\mu_{0, \dots, 0, \underset{k'th place}{\underbrace{\dots}, 0, \dots, 0, \underset{l'th place}{\underbrace{\dots}, 0, \dots, 0}} = E[(X_k - \eta_k) \cdot (X_l - \eta_l)] = \sigma_{X_k X_l} = Cov(X_k, X_l)$$

$$\mu_{0, \dots, 0, \underset{k'th place}{\underbrace{\dots}, 0, \dots, 0}} = E[(X_k - \eta_k)^2] = \sigma_{X_k}^2 = Var(X_k)$$

הסימונים של המומנטים באופן הנ"ל מייגעים. נעבור לSIMON מטריצוני וכך ע"י מטריצות נוכל ליצג את כל המומנטים הנ"ל, ז"א ע"י מטריצות ניצג את הסטטיסטיקה מסדר שני של ו"א.

### ווקטור התוחלות

ווקטור התוחלות של ווקטור אקראי  $\underline{X}$  מציג את כל המומנטים מסדר ראשון של הווקטור:

$$\eta_{\underline{X}} = E[\underline{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{X_1} \\ \vdots \\ \eta_{X_N} \end{bmatrix}$$

### מטריצת קורולציה

מטריצת הקורולציה של ווקטור אקראי  $\underline{X}$  מציגה את כל המומנטים מסדר שני של הווקטור:

$$R_{\underline{X}, \underline{X}} = E[\underline{X} \cdot \underline{X}^T] = \begin{bmatrix} E[X_1^2] & \cdots & E[X_1 \cdot X_N] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_N \cdot X_1] & \cdots & E[X_N^2] \end{bmatrix}$$

נבהיר כי המכפלה  $\underline{X} \cdot \underline{X}^T$  מניבה מטריצה במימד  $N \times N$  ומחשבת תוחלת על כל איבר במטריצה בנפרד.  
הערות:

- נזהה שזו מטריצה סימטרית לאחר שמתקדים.
- נסמן "גישת אינדקסים" לאיברים במטריצה ע"י  $R_{\underline{X}, \underline{X}}(i, j) = E[X_i \cdot X_j]$ .
- $\forall i \neq j \quad E[X_i \cdot X_j] = 0$  אלכסונית אם ורק כי  $\underline{X}$  אורתוגונליים הדדיים (הרי  $R_{\underline{X}, \underline{X}}$  מטריצה סימטרית).

מטריצת הקו-ואריאנס (Covariance)

מטריצת הקו-ואריאנס של וקטור אקראי  $\underline{X}$  מציגה את כל המומנטים המרכזיים מסדר שני של הווקטור:

$$\begin{aligned} C_{\underline{X}, \underline{X}} &= R_{\underline{X}-\eta_{\underline{X}}, \underline{X}-\eta_{\underline{X}}} = E\left[\left(\underline{X}-\eta_{\underline{X}}\right) \cdot \left(\underline{X}-\eta_{\underline{X}}\right)^T\right] = \\ &= \begin{bmatrix} E\left[\left(X_1-\eta_{X_1}\right)^2\right] & \cdots & E\left[\left(X_1-\eta_{X_1}\right) \cdot \left(X_N-\eta_{X_N}\right)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left[\left(X_N-\eta_{X_N}\right) \cdot \left(X_1-\eta_{X_1}\right)\right] & \cdots & E\left[\left(X_N-\eta_{X_N}\right)^2\right] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \cdots & Cov(X_1, X_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_N, X_1) & \cdots & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

הערות:

- כמובן שגמ זו מטריצה סימטרית וגם עבורה נסמן גישת אינדקסים.

$$C_{\underline{X}, \underline{X}} = R_{\underline{X}, \underline{X}} - \eta_{\underline{X}} \cdot \eta_{\underline{X}}^T . \quad \bullet$$

- מתקיים  $C_{\underline{X}, \underline{X}}$  אלכסונית אם ורקobi  $\underline{X}$  חס"ק באופן הדדי (הרி 0  $\forall i \neq j \quad Cov(X_i, X_j) = 0$ ).

### תכונות של מטריצה קורולזית ומטריצה קו-ו-אריאנס

1.  $\underline{\underline{R}}_{xx}, C_{xx}$  הינה מטריצות סימטריות (מיידי) ולכון מתלבסנות אורתונורמלית.

2.  $\underline{\underline{R}}_{xx}, C_{xx}$  הינה מטריצות אי-שליליות מוגדרות (Positive-Semi-Definite) – הוכחה  
בבמsha.

#### מטריצה סימטרית – תזכורת:

מטריצה  $\underline{\underline{A}}$  תיקרא מטריצה סימטרית אם היא ריבועית ומתקיים  $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$ .  
לכsoon מטריצה סימטרית – תזכורת:

מטריצה סימטרית  $\underline{\underline{A}}$  מתלבסנת אורתונורמלית, ז"א קיימת מטריצה  $\underline{\underline{P}}$  כך ש:

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{I}}_n .$$

2.  $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}}^T$  כאשר  $\underline{\underline{Q}}$  היא מטריצה אלכסונית.

מטריצה  $\underline{\underline{P}}$  הזו מורכבת מן הווקטורים העצמיים (פתרונות הפולינום האופיני) של המטריצה  $\underline{\underline{A}}$  בעמודות, מטריצה  $\underline{\underline{Q}}$  היא מטריצה אלכסונית עם הערכים העצמיים של  $\underline{\underline{A}}$  על האלכסון הראשי (מסודרים בסדר של הו"ע במטריצה  $\underline{\underline{P}}$ ).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}} &= [\underline{\underline{v}}_1 | \cdots | \underline{\underline{v}}_N] \\ \{\lambda_i\} : \det(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}) &= 0, \quad \|\underline{\underline{v}}_i\| = 1, \quad \underline{\underline{v}}_i \cdot \underline{\underline{v}}_j = 0 \\ (\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{v}}_i &= 0 \end{aligned}$$

#### מטריצה אי-שלילית מוגדרת (PSD Positive-Semi-Definite) – תזכורת:

מטריצה סימטרית  $\underline{\underline{A}}$  תיקרא PSD אם מתקיים  $\underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}} \geq 0 \quad \forall \underline{\underline{y}} \in \mathbb{R}^N$ .  
הערות:

- מטריצה  $\underline{\underline{A}}$  PSD הינה סימטרית ולכון ניתנת לכsoon.
- למטריצה  $\underline{\underline{A}}$  PSD ישם ערכים עצמיים אי-שליליים ( $0 \geq \lambda_N \geq \lambda_{N-1} \geq \dots \geq \lambda_1$ ).
- למטריצה סימטרית  $\underline{\underline{A}}$  ישם ע"ע אי שליליים בלבד ( $0 \geq \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ ) אם "ם מטריצה  $\underline{\underline{A}}$  הינה PSD".

#### תווחלת של מכפלת מטריצות – תזכורת:

בاهינתן מטריצה אקראית  $\underline{\underline{X}}_{N \times M}$  ומטריצות דטרמיניסטיות (קבועות)  $\underline{\underline{A}}_{K \times N}, \underline{\underline{B}}_{M \times L}, \underline{\underline{C}}_{N \times M}, \underline{\underline{D}}_{L \times K}$  מתקיים:

$$E[A \cdot X] = A \cdot E[X]$$

$$E[X \cdot B] = E[X] \cdot B \quad \Rightarrow \quad E[A \cdot X \cdot B + D] = A \cdot E[X] \cdot B + D$$

$$E[X + C] = E[X] + C$$

נוכיח את אחד הכללים, נראה עבור איבר ייחד במטריצה (שאר ההוכחות באופן דומה):

$$\begin{aligned} (E[A \cdot X])_{j,k} &= E[(A \cdot X)_{j,k}] = E\left[\sum_{i=1}^N a_{j,i} \cdot x_{i,k}\right] = \sum_{i=1}^N E[a_{j,i} \cdot x_{i,k}] = \\ &= \sum_{i=1}^N a_{j,i} \cdot E[x_{i,k}] = (A \cdot E[X])_{j,k} \end{aligned}$$

הוכחה עבור תכונת PSD של מטריצת קורולציה ומטריצת קו-וarianس

עבור וקטור אקרי  $\underline{X}$  אנו יודעים כי  $R_{\underline{X}\underline{X}}$  סימטרית. נרצה להוכיח כי

$$\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^N : \underline{b}^T \cdot R_{\underline{X}\underline{X}} \cdot \underline{b} \geq 0$$

יהי וקטור  $\underline{Y} = \underline{b}^T \cdot \underline{X} \cdot \underline{b} = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq E[Y^2] &= E[Y \cdot Y] = E[Y \cdot Y^T] = E\left[\left(\underline{b}^T \cdot \underline{X}\right) \cdot \left(\underline{b}^T \cdot \underline{X}\right)^T\right] = E\left[\left(\underline{b}^T \cdot \underline{X}\right) \cdot \left(\underline{X}^T \cdot \underline{b}\right)\right] = \\ &= E\left[\underline{b}^T \cdot \underline{X} \cdot \underline{X}^T \cdot \underline{b}\right] = \underline{b}^T \cdot E\left[\underline{X} \cdot \underline{X}^T\right] \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot R_{\underline{X}\underline{X}} \cdot \underline{b} \quad \Rightarrow R_{\underline{X}\underline{X}} \text{ is PSD} \end{aligned}$$

מעבר (\*) כי תמיד מתקיים  $0 \leq Y^2 \forall Y \in \mathbb{R}$ . מעבר (\*\*\*) כי נוכל להוסיף טרנספוז על מספר

הרי  $a^T = a \forall a \in \mathbb{R}$ . מעבר (\*\*\*) לפי תכונות של תוחלת של מכפלת מטריצות.

nocich באתו אופן כי  $C_{\underline{X}\underline{X}}$  הינה PSD ע"י הגדרת  $\underline{Y} = \underline{b}^T \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_{\underline{X}})$ . מעבר לתחילה ההוכחה מחדש ניתן להגיד כי מטריצת  $C_{\underline{X}\underline{X}}$  הינה מקורה פרטיז של  $R_{\underline{X}'\underline{X}}$  עבור  $\underline{X}' = \underline{X} - \underline{\eta}_{\underline{X}}$  ולכן תכונותיה של מטריצת  $R$  נשמרות.

מטריצת קروس-קורולציה ומטריצת קروس-קו-ואריינס

עבור זוג ו"א  $\underline{X}_{N \times 1}$  ו-  $\underline{Y}_{M \times 1}$  נגדיר:

- מטריצת קروس-קורולציה

$$R_{\underline{X}, \underline{Y}} = E[\underline{X} \cdot \underline{Y}^T] = \begin{bmatrix} E[X_1 \cdot Y_1] & \cdots & E[X_1 \cdot Y_M] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_N \cdot Y_1] & \cdots & E[X_N \cdot Y_M] \end{bmatrix}$$

- מטריצת קروس-קו-ואריינס

$$C_{\underline{X}, \underline{Y}} = R_{\underline{X} - \eta_{\underline{X}}, \underline{Y} - \eta_{\underline{Y}}} = E[(\underline{X} - \eta_{\underline{X}}) \cdot (\underline{Y} - \eta_{\underline{Y}})^T] = \begin{bmatrix} Cov(X_1, Y_1) & \cdots & Cov(X_1, Y_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_N, Y_1) & \cdots & Cov(X_N, Y_M) \end{bmatrix}$$

תכונות:

$$R_{\underline{Y} \underline{X}} = (R_{\underline{X} \underline{Y}})^T, \quad C_{\underline{Y} \underline{X}} = (C_{\underline{X} \underline{Y}})^T.$$

$$2. \text{ מתקיים } C_{\underline{X} \underline{Y}} = R_{\underline{X} \underline{Y}} - \eta_{\underline{X}} \cdot \eta_{\underline{Y}}^T.$$

הערות:

- מטריצות  $R_{\underline{X} \underline{Y}}, C_{\underline{X} \underline{Y}}$  אינן בהכרח ריבועיות (ולכן גם לא בהכרח סימטריות), למעשה הן

מМИמד  $[|\underline{X}| \times |\underline{Y}|]$ .

$$3. \text{ זו למעשה הכללה של } R_{\underline{X} \underline{X}}, C_{\underline{X} \underline{X}} \text{ לאחר נוכל לבחור } \underline{Y} = \underline{X}.$$

$$4. \text{ עבור שני ו"א } \underline{Z}_{N+M \times 1} \text{ ו- } \underline{Y}_{M \times 1} \text{ נוכל להגדיר ו"א חדש } \underline{Z} \text{ אשר בניוי משירשור של } \underline{X} \text{ ו- }$$

$$\underline{Y}.$$

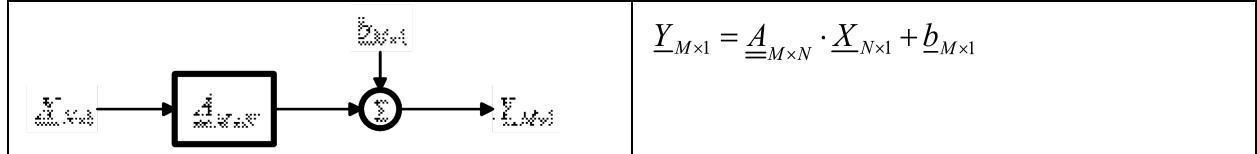
nocel להגדיר את מטריצת הקורולציה (והקו-ואריינס) של  $\underline{Z}$  וזו תכלול את  
תתי-המטריצות הבאות:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{pmatrix} \quad R_{\underline{Z}, \underline{Z}} = E[\underline{Z} \cdot \underline{Z}^T] = E\left[\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{pmatrix} \cdot (\underline{X} \quad \underline{Y})\right] = \begin{bmatrix} R_{\underline{X}, \underline{X}} & R_{\underline{X}, \underline{Y}} \\ R_{\underline{Y}, \underline{X}} & R_{\underline{Y}, \underline{Y}} \end{bmatrix}$$

## **מעבר ווקטור אקראי דרך מערכת ליניארית**

### **سطטיסטיקת המוצא של מערכת ליניארית ווקטורית**

יהי  $\underline{X}_{N \times 1}$  ו"א אשר עובד במערכת ליניארית המתוארת (כאשר  $\underline{b}$  ווקטור דטרמיניסטי ו-  $\underline{A}_{M \times N}$  מטריצה דטרמיניסטיבית):



במערכות כאלו נדון בסטטיסטיקה מסדר שני (משום שהמערכת ליניארית).

سطטיסטיקת הכניסה ידועה, כולל נזtones  $C_{XX}$  (או  $R_{XX}$ ) וווקטור התוחלות  $\underline{\eta}_X$ . נרצה לדעת את סטטיסטיקת המוצא ואת קروس-הסטטיסטיקה בין הכניסה למוצא (ז"א איך נוכל לבטא אותן ע"י סטטיסטיקת הכניסה ונתוני המערכת).

טענות:

1. ווקטור התוחלות של המוצא נתון ע"י:

$$\underline{\eta}_Y = E[\underline{Y}] = E[\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}] = \underline{A} \cdot \underline{\eta}_X + \underline{b}$$

2. מטריצת הקו-וarianס של המוצא נתונה ע"י:

$$C_{YY} = \underline{A} \cdot C_{XX} \cdot \underline{A}^T$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} C_{YY} &= E[(\underline{Y} - \underline{\eta}_Y) \cdot (\underline{Y} - \underline{\eta}_Y)^T] = E\left[\left[(\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}) - (\underline{A} \cdot \underline{\eta}_X + \underline{b})\right] \cdot \left[(\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}) - (\underline{A} \cdot \underline{\eta}_X + \underline{b})\right]^T\right] = \\ &= E\left[\left[\underline{A} \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X)\right] \cdot \left[\underline{A} \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X)\right]^T\right] = E\left[\underline{A} \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X) \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X)^T \cdot \underline{A}^T\right] = \underline{A} \cdot C_{XX} \cdot \underline{A}^T \end{aligned}$$

3. מטריצת הקروس-קו-וarianס בין המוצא לבנייה נתונה ע"י:

$$C_{YX} = \underline{A} \cdot C_{XX}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} C_{YX} &= E[(\underline{Y} - \underline{\eta}_Y) \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X)^T] = E\left[\left[(\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}) - (\underline{A} \cdot \underline{\eta}_X + \underline{b})\right] \cdot \left[(\underline{X} - \underline{\eta}_X)\right]^T\right] = \\ &= E\left[\left[\underline{A} \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X)\right] \cdot \left[(\underline{X} - \underline{\eta}_X)\right]^T\right] = E\left[\underline{A} \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X) \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X)^T\right] = \underline{A} \cdot C_{XX} \end{aligned}$$

וכמוובן שמותקיים:

$$C_{XY} = (C_{YX})^T = (\underline{A} \cdot C_{XX})^T = {C_{XX}}^T \cdot \underline{A}^T = C_{XX} \cdot \underline{A}^T$$

### הערה:

באוטו האופן נוכל גם לחשב את מטריצות הקורולציה (והקורס-קורולציה) ע"י חיבור/חיסור של וקטור התוחלות:

$$R_{YY} = E[\underline{Y} \cdot \underline{Y}^T] = E\left[\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b}\right) \cdot \left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b}\right)^T\right] = \underline{\underline{A}} \cdot R_{XX} \cdot \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{A}} \cdot \eta_{\underline{X}} \cdot \underline{b}^T + \underline{b} \cdot \eta_{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{A}}^T + \underline{b} \cdot \underline{b}^T$$

$$R_{XY} = E[\underline{X} \cdot \underline{Y}^T] = E\left[\underline{X} \cdot \left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b}\right)^T\right] = E\left[\underline{X} \cdot \left(\underline{X}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T + \underline{b}^T\right)\right] = R_{XX} \cdot \underline{\underline{A}}^T + \eta_{\underline{X}} \cdot \underline{b}^T$$

$$R_{YX} = E[\underline{Y} \cdot \underline{X}^T] = E\left[\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b}\right) \cdot \underline{X}^T\right] = \underline{\underline{A}} \cdot R_{XX} + \underline{b} \cdot \left(\eta_{\underline{X}}\right)^T = \left(R_{XY}\right)^T$$

### וקטור אקראי גאוסי

וקטור אקראי  $\underline{X}_{N \times 1}$  יקרא ו"א גאוסי (וא"ג) אם לכל  $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$  מתקיים כי המ"א  $Y = \underline{a}^T \cdot \underline{X}$  הינו מ"א גאוסי.

ז"א, אם עבר כל קומבינציה ליניארית של רכיבי הווקטור ( $Y = \underline{a}^T \cdot \underline{X} = \sum_{i=1}^N a_i \cdot X_i$ ) קיבל מ"א גאוסי.

למעשה אנו דורשים כי המכפלה הפנימית של הווקטור האקראי עם כל וקטור מהמימד שלו  $\langle \underline{a}, \underline{X} \rangle$ , ז"א ההיטל של  $\underline{X}$  על כל וקטור  $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ , תהיה מ"א גאוסי.

עבור  $\underline{X}$  וא"ג נסמן  $\underline{X} \sim N(\eta_{\underline{X}}, C_{XX})$  (מתפלג לפי וקטור התוחלות ומטריצת הקו-ואריאנס). מסקנות מההגדרה (הוכחות בהמשך):

1. כל רכיבים של וא"ג הינם מ"א גaussians, ז"א עבור  $X_i \sim N(\eta_{X_i}, C_{XX})$  ומ"ג מתקיים  $\underline{X} \sim N(\eta_{\underline{X}}, C_{XX})$  מ"א גאוסי

לכל  $i = 1, \dots, N$ .

2. וא"ג מקיימים סגירות תחת התמורות ליניאריות, ז"א עבור  $\underline{X} \sim N(\eta_{\underline{X}}, C_{XX})$  וא"ג גם  $\underline{Y} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b}$  הינו וא"ג.

3. פונקציה אופיינית משותפת של וא"ג  $\underline{X} \sim N(\eta_{\underline{X}}, C_{XX})$  נתונה ע"י:

$$\Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) = e^{j \cdot \underline{\omega}^T \cdot \eta_{\underline{X}} - \frac{1}{2} \cdot \underline{\omega}^T \cdot C_{XX} \cdot \underline{\omega}} = \exp\left(j \cdot \underline{\omega}^T \cdot \eta_{\underline{X}} - \frac{1}{2} \cdot \underline{\omega}^T \cdot C_{XX} \cdot \underline{\omega}\right)$$

4. PDF של וא"ג  $\underline{X} \sim N(\eta_{\underline{X}}, C_{XX})$  היפיכה, ז"א  $C_{XX}$  אם מטריצה.

$$f_{\underline{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{XX}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \eta_{\underline{X}})^T \cdot (C_{XX})^{-1} \cdot (x - \eta_{\underline{X}})\right)$$

5. אם מתקיים כי  $\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{bmatrix}$  הינו וא"ג אז הוא  $\underline{Y} | \underline{X}$  הינו וא"ג אשר מקיים:

$$\begin{aligned}\underline{Y} | \underline{X} &\sim N\left(\eta_{\underline{Y}|\underline{X}}, C_{\underline{Y}\underline{Y}|\underline{X}}\right) \\ \eta_{\underline{Y}|\underline{X}=\underline{x}} &= \eta_{\underline{XY}} + C_{\underline{YX}} \cdot \left(C_{\underline{XX}}\right)^{-1} \cdot (\underline{x} - \eta_{\underline{X}}) \\ C_{\underline{YY}|\underline{X}} &= C_{\underline{YY}} - C_{\underline{YX}} \cdot \left(C_{\underline{XX}}\right)^{-1} \cdot C_{\underline{XY}}\end{aligned}$$

הערה:

אם  $\underline{X} \sim N\left(\eta_{\underline{X}}, C_{\underline{XX}}\right)$  וא"ג וידוע שרכיביו חס"ק (ז"א  $C_{\underline{XX}}$  הינה מטricia אלכסונית) אז "י ו"א בת"ס.

הסבר:

ידוע כי מטricia הקו-ואריאנס אלכסונית, ז"א מהצורה:

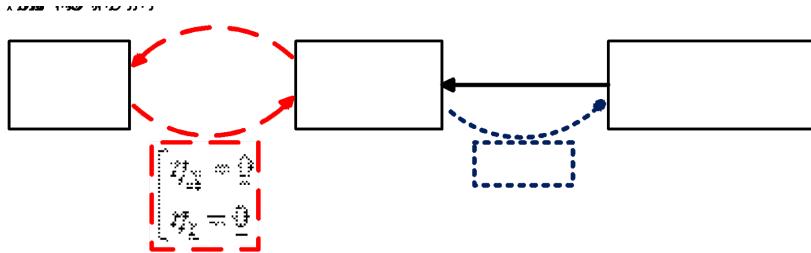
$$C_{\underline{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Omega}}$$

ולכן ע"י שימוש בנוסחת הפונקציה האופיינית המשותפת נקבל:

$$\begin{aligned}\Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) &= \exp\left(j \cdot \underline{\omega}^T \cdot \eta_{\underline{X}} - \frac{1}{2} \cdot \underline{\omega}^T \cdot C_{\underline{XX}} \cdot \underline{\omega}\right) = \exp\left(j \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \eta_{X_i} - \frac{1}{2} \cdot \underline{\omega}^T \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\omega}\right) = \\ &= \exp\left(j \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \eta_{X_i} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \left(j \cdot \omega_i \cdot \eta_{X_i} - \frac{1}{2} \cdot \omega_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2\right)\right) = \\ &= \prod_{i=1}^N \exp\left(j \cdot \omega_i \cdot \eta_{X_i} - \frac{1}{2} \cdot \omega_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2\right) = \prod_{i=1}^N \Phi_{X_i}(\omega_i)\end{aligned}$$

סיכום:

אם שני ו"א כלליים  $\underline{X}$  ו-  $\underline{Y}$  הינם בת"ס הם גם חס"ק. אם בנוסף וקטור התוחלת של לפחות אחד מהם מתאפס (ז"א  $\eta_{\underline{Y}} = \underline{0}$ ) אז הם אורתונורמלים. אם עברו וקטוריים אקראיים חס"ק ידוע כי הם גaussians אז הם גם בת"ס.



הערה - אם ידוע כי  $X$  מ"א גausי וכי  $Y$  מ"א גausי ובנוסף כי הם חס"ק אין הדבר אומר כי הם בהכרח בת"ס. לדעת מידע על כל רכיב גausי זה לא מספיק – צריך שהרכיבים ירכיבו ווקטור אקראי גausי.

ז"א אם ו"א  $\underline{X}$  הינו ווקטור שכל רכיביו מא"ג ואפילו חס"ק אין הדבר אומר בהכרח ש-

$\underline{X}$  הוא וא"ג. אך אם  $\underline{X}$  הוא ו"א עם רכיבים שכל אחד בעצמו מא"ג וכן בת"ס אז  $\underline{X}$  הוא וא"ג.

דוגמא - ניקח שני מ"א גausיים וחס"ק ונבנה מהם ו"א אשר לא וא"ג.

$$X \sim N(0,1) \quad B = \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2} \\ -1 & w.p. \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y = B \cdot X$$

ו-  $B$  הינו בת"ס ומתקבל כי  $Y$  הינו מ"א גausי בגלל  $X$

$$(Y | B=1) = X \sim N(0,1)$$

$$(Y | B=-1) = -X \sim N(0,1)$$

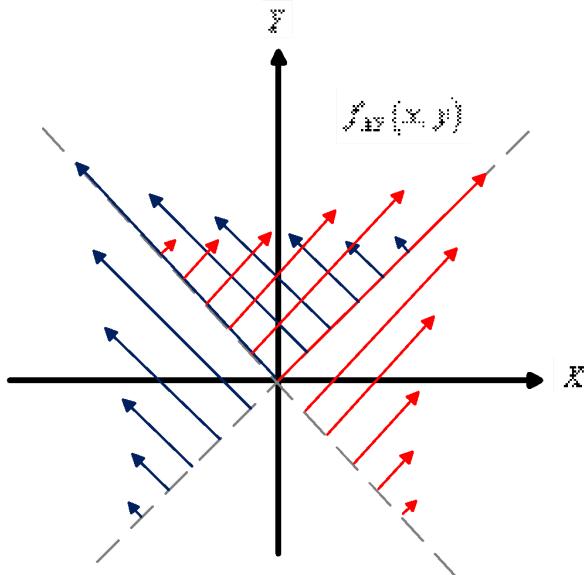
כמו כן מתקיים כי  $X$  ו-  $Y$  חס"ק:

$$\begin{aligned} E[X \cdot Y] &= E_B[E[X \cdot Y | B]] = \Pr(B=1) \cdot E[X \cdot Y | B=1] + \Pr(B=-1) \cdot E[X \cdot Y | B=-1] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot E[X^2] + \frac{1}{2} \cdot E[-X^2] = \frac{1}{2} \cdot E[X^2] - \frac{1}{2} \cdot E[X^2] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

אך הם אינם גausיים במשמעות. נראה את ה-PDF שלהם:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y | X=x) = f_X(x) \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta(y-x) + \frac{1}{2} \cdot \delta(y+x) \right]$$



הפילוג המותנה אינו פילוג גאוסי משומם שהוא לא מורכבת מפונקציית דלתא בודדת (אילו הוא היה אז היינו מתייחסים לדלתא בודדת כמ"א גאוסי אשר בעל תוחלת כמיוקום הדelta ושונות אפס – ז"א מא"ג אשר מתרכז כולו בנקודה אחת – קבוע).

קיבלנו פונקציית PDF אשר מורכבת משני "הרוי-דלתאות" לפי הפילוג הגaussiano של המא"ג  $X$  ("הרוי" אלו ממוקמים על הישרים  $X = Y$  וגובה הדeltasאות כמו גאוסיאן) קוויה הגובה של פונקציית הצפיפות המשותפת זו אינם אליפטיים. בנוסף, אילו הפילוג המשותף היה גaussiano היינו יכולים לכתוב ע"י פילוגים גaussiani.

### הלבנה של וקטור אקראי גaussiano

נתון וא"ג  $\underline{X}$  עם וקטור תוחלות  $\underline{\mu}$  ומטריצת קו-ואריאנס  $C_{XX}$  ידועים. נרצה לבצע טרנספורמציה ליניארית כך שהמוצא יהיה בעל אותו מידע עם וקטור תוחלות  $\underline{\hat{\mu}}$  ומטריצת קו-ואריאנס אלכסונית, ככלומר איברים חס"ק (ומאחר זהה וא"ג איזי האיברים בת"ס). התהליך יבוצע באופן הבא:

1. נפחית מ-  $\underline{X}$  את וקטור התוחלות שלו  $\underline{\mu}$ , ככלומר נגדיר  $\underline{X} - \underline{\mu}$ .

כך נקבל וא"ג עם וקטור תוחלות  $\underline{0} = \underline{\mu}$  ומטריצת קו-ואריאנס  $C_{XX} = C_{XX'}$ .

2. מכיוון שמטריצת קו-ואריאנס הינה מטריצת PSD אנו יודעים שקיימות מטריצה מלבסנת

אורותונורמלית  $\underline{P}$  ומטריצה אלכסונית  $\underline{\Lambda}$  כך שמתקיים  $\underline{\Lambda} = \underline{P}^T \cdot C_{XX} \cdot \underline{P}$  (  $\underline{P}$  מלכשנת

אורותונורמלית את  $C_{XX} = C_{XX'}$  ו-  $\underline{\Lambda}$  מכילה את הערכיהם העצמיים של  $C_{XX}$  ).

לכן נפעיל על  $\underline{X}$  את הטרנספורמציה  $\underline{P}^T$  ונסמן את המוצא ב- $\underline{Y}$ . יתקיים

$$C_{YY} = \underline{P}^T \cdot C_{XX} \cdot \underline{P} = \underline{\Lambda}$$

מכיוון שוקטור התוחלות של  $\underline{X}$  מקיים  $\underline{\eta}_X = \underline{0}$  אז גם  $\underline{\eta}_Y = \underline{0}$  (מתכונות מעבר ו"א במערכת ליניארית).

אם בנוסף נרצה שרכיבי ווקטור המוצא יהיו p.i. אז למעשה נרצה לייצר מטrixת קו-ויריאנס אלכסונית עם איברי אלכסון זהים, לשם פשטות נדרש כי מטrixת הקו-ויריאנס של המוצא

תהיה מטrixת היחידה  $\underline{I}$ .

לשם כך נפעיל על  $\underline{Y}$  את הטרנספורמציה  $(\underline{\Lambda}^{0.5})^T = \underline{\Lambda}^{-0.5}$  ונסמן את המוצא ב- $\underline{Z}$ . נבחן כי נקבל:

$$C_{ZZ} = \underline{\Lambda}^{-0.5} \cdot C_{YY} \cdot \underline{\Lambda}^{0.5} = \underline{\Lambda}^{-0.5} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{\Lambda}^{0.5} = \underline{I}$$

תרשים התהילה:



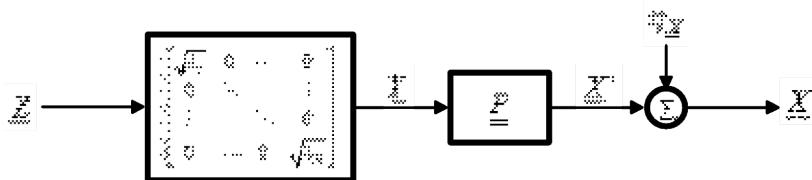
$$\begin{aligned} \underline{X} & \quad \underline{\eta}_X, \quad C_{XX} \\ \underline{X}' &= \underline{X} - \underline{\eta}_X \quad \underline{\eta}_{X'} = \underline{0}, \quad C_{X'X'} = C_{XX} \\ \underline{Y} &= \underline{P}^T \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X) \quad \underline{\eta}_Y = \underline{0}, \quad C_{YY} = \underline{\Lambda} \\ \underline{Z} &= \underline{\Lambda}^{-0.5} \cdot \underline{P}^T \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_X) \quad \underline{\eta}_Z = \underline{0}, \quad C_{ZZ} = \underline{I} \end{aligned}$$

### יצור/צביעת ווקטור אקראי גאוסי

נרצה "לייצר" א"ג כלשהו  $\underline{X} \sim N(\underline{\eta}_X, C_{XX})$ . לשם כך נתחיל עם א"ג  $\underline{Z} \sim N(\underline{0}, \underline{I})$  מאותו מימד, ז"א וא"ג p.i. עם תוחלת אפס ושונות אחת. נבצע את התהילה בכיוון הפוך (כמובן ש-

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  הם הע"ע של  $C_{XX}$ ).

תרשים התהילה:



$$\begin{aligned} \underline{Z} & \quad \eta_{\underline{Z}} = 0, \quad C_{\underline{Z}\underline{Z}} = \underline{\underline{I}} \\ \underline{Y} = \underline{\underline{\Lambda}}^{0.5} \cdot \underline{Z} & \quad \eta_{\underline{Y}} = 0, \quad C_{\underline{Y}\underline{Y}} = \underline{\underline{\Lambda}} \\ \underline{X}' = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{0.5} \cdot \underline{Z} & \quad \eta_{\underline{X}'} = 0, \quad C_{\underline{X}'\underline{X}'} = C_{\underline{X}\underline{X}} \\ \underline{X} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{0.5} \cdot \underline{Z} + \eta_{\underline{X}} & \quad \eta_{\underline{X}}, \quad C_{\underline{X}\underline{X}} \end{aligned}$$

### תמונה גיאומטרית של תהליך ייצור/הלבנת וא"ג

זכור פונקציית ה-PDF של מא"ג נתונה ע"י:

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{X}\underline{X}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} (\underline{x} - \eta_{\underline{X}})^T \cdot (C_{\underline{X}\underline{X}})^{-1} \cdot (\underline{x} - \eta_{\underline{X}})\right)$$

ע"מ להמchioש את שלבי התהליך נרצה לבדוק את קווי-הגובה של פונקציות צפיפות הפילוג

המשותפות בשלבים השונים (קו-גובה של קבוע מסויים  $Const_1$  הינו קבועות הווקטורים

$\underline{x}$ ). מבנה ה-PDF נוכל לדרוש רק כי ארגומנט האקספוננט ישאר קבוע,

$$(\underline{x} - \eta_{\underline{X}})^T \cdot (C_{\underline{X}\underline{X}})^{-1} \cdot (\underline{x} - \eta_{\underline{X}}) = Const$$

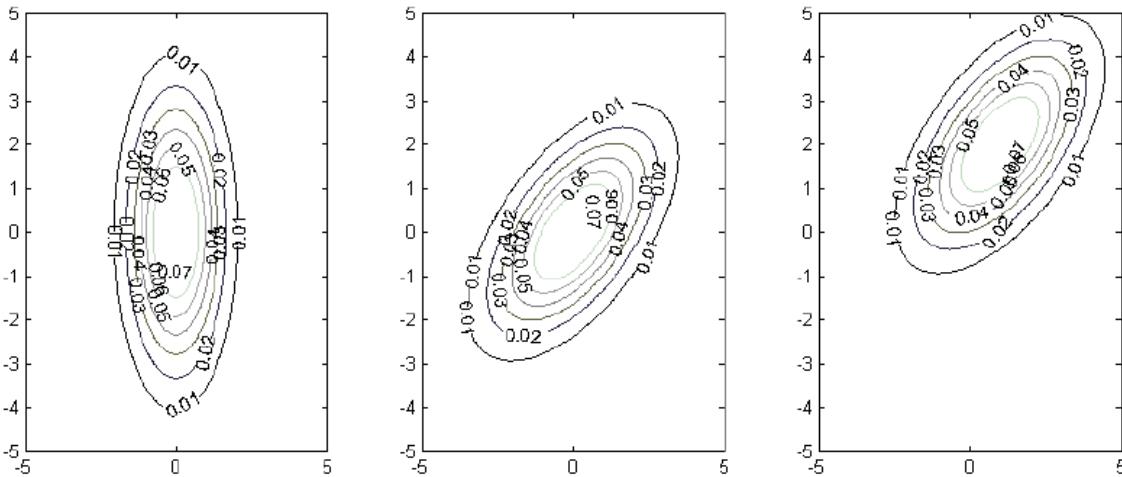
נזהה כי הדישה הינה מהתבניות  $\underline{A}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = Cconst$ , כלומר תבנית מטריצית

ריבועית. עבור תבנית מטריצית ריבועית עם מטריצה  $\underline{A}$  שהוא PSD פתרון המשווה הוא

אלפסואיד במימד של  $\underline{A}$ .

לשם פשוט נבחן את התהליך עבור דו-מימד, האלפסואיד מתנוון לאלייפסה דו-מימדית. נראה את מפת הגבהים עבור השלבים השונים:

#### 13.11.13 הרצאה



הסבר:

- עבור  $\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$  אנו דנים למעשה בשני מא"ג p.i. בעלי פילוג  $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$ .

דרישת קווי הגובה הנובעת מפונקציית ה-PDF הינה  $z_1^2 + z_2^2 = Const$ , כלומר מעגל סביב הראשית.

- עבור  $\underline{Y} = \underline{\Lambda}^{0.5} \cdot \underline{Z} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \cdot Z_1 \\ \sqrt{\lambda_2} \cdot Z_2 \end{bmatrix}$  נקבל את משוואת קווי הגובה  $\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} = Const$ , כלומר

אליפסה ניצבת (בעלת צירים  $(0,1)$  ו-  $(1,0)$ ) סביב הראשית (בشرطות הנחנו  $\lambda_1 > \lambda_2$ ).

- עבור  $\underline{X}' = \underline{P} \cdot \underline{Y} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  (כאשר  $v_1, v_2$  הם הווקטורים העצמיים של  $C_{XX}$ ) נקבל למעשה העתקת סיבוב (אנחנו יודעים שהוא יוצרים בסיס אוניטרי חדש) כאשר

$$T \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

טרנספורמציה סיבוב כזאת נקראת טרנספורמציה אורתונורמלית (יכולת גם ליצור היפוך בסימן).

- עבור  $\underline{X} = \underline{X}' + \underline{\eta}_X = \begin{bmatrix} X_1' + \eta_{X_1} \\ X_2' + \eta_{X_2} \end{bmatrix}$  אנחנו למעשה מקבלים זהה בקבוע .

הוכחות עבור מסקנות מההגדורה:

1. המסקנה מיידית מהגדורה וא"ג אם נבחר וקטור יחידה באחת הקואורדינטות, לדוגמה

- עבור  $\underline{a} = e_i = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, \underset{i^{th} place}{1}, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}$  נקבל  $Y = \underline{a} \cdot \underline{X} = X_i$ , ז"א הינו מ"א גאוסי.

2. נבדוק את דרישת ההגדורה עבור ו"א  $\underline{Y}$ :

$$Z = \langle \underline{a}, \underline{Y} \rangle = \underline{a}^T \cdot \underline{Y} = \underline{a}^T \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{b}) = \underline{a}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{a}^T \cdot \underline{b} \stackrel{\underline{a}^T = \underline{a}^T \cdot \underline{\underline{A}}}{=} \underline{a}'^T \cdot \underline{X} + \underline{a}^T \cdot \underline{b}$$

וקיבלנו כי  $\underline{Y}$  הינו וא"ג כי  $Z$  שהתקבל הינו מ"א גאוסי (מאחר ש-  $\underline{X}$  הינו מ"א

גאוסי משומש-  $\underline{X}$  וא"ג וקומבינציה ליניארית שלו היא מ"א גאוסי והוספת הקבוע

$\underline{a}^T \cdot \underline{b}$  לא משנה).

3. עברו  $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^N$  כלשהו נתבונן במ"א  $\underline{X} = \underline{\omega}^T \cdot \underline{X}$ . מכיוון ש-  $\underline{X}$  הינו וא"ג אז  $\underline{Y}$  הוא מ"א גאוסי.

פונקציה אופיינית של מ"א גאוסי נתונה ע"י:

$$\Phi_Y(u) = E[e^{juY}] = \exp\left(j \cdot u \cdot \eta_Y - \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \sigma_Y^2\right)$$

מהקשר בין הפונקציות האופייניות של  $\underline{X}$  ושל  $\underline{Y}$  (לפי ההתמרה ביניהם) נסיק:

$$\Phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) = E[e^{j\underline{\omega}^T \cdot \underline{X}}] = E[e^{j \cdot \underline{\omega}^T \cdot \underline{Y}}] = \Phi_Y(1) = \exp\left(j \cdot \eta_Y - \frac{1}{2} \cdot \sigma_Y^2\right)$$

אנו יודעים (מן ההתמרה) כי מתקיים:

$$\eta_Y = \underline{\omega}^T \cdot \eta_{\underline{X}}, \quad \sigma_Y^2 = \underline{\omega}^T \cdot C_{\underline{X}\underline{X}} \cdot \underline{\omega}$$

ולכן לאחר הצבה קיבל את הביטוי הדרושים.

4. דרך I – נוכל להוכיח ע"י התמרה הפוכה של הפונקציה האופיינית המשותפת . דרך II –

• שלב 1: נניח  $\underline{X}$  וא"ג חס"ק (ולכן בת"ס).

המקרה המדובר הינו טריויאלי,

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_{X_i}^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_i - \eta_{X_i})^2}{\sigma_{X_i}^2}\right) \right) = \\ &= \prod_{i=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_{X_i}^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (x_i - \eta_{X_i})^T \cdot \frac{1}{\sigma_{X_i}^2} \cdot (x_i - \eta_{X_i})\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{X}\underline{X}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\underline{x} - \eta_{\underline{X}})^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{X_1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sigma_{X_N}^2} \end{pmatrix} \cdot (\underline{x} - \eta_{\underline{X}})\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{X}\underline{X}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} (\underline{x} - \eta_{\underline{X}})^T \cdot (C_{\underline{X}\underline{X}})^{-1} \cdot (\underline{x} - \eta_{\underline{X}})\right) \end{aligned}$$

• שלב 2: נניח  $\underline{X}$  וא"ג כללי.

נרצה להפעיל על  $\underline{X}$  טרנספורמציה כזו שיהיה  $\text{חס"ק/בת"ס}, \underline{Z} = \underline{X}$  נרצה לבצע לוא"ג  $\underline{Y} = T(\underline{X}) \sim N(\underline{\eta}_\underline{X}, C_{\underline{X}\underline{X}})$  (למענה הדרישה של תוחלות אפס כלל לא הכרחית כפי שראינו בשלב 1). הטרנספורמציה המתאימה להלבנת וא"ג כללי הינה  $\underline{Y} = \underline{P}^T \cdot (\underline{X} - \underline{\eta}_\underline{X})$ . לאחר תחילת ההלבנה  $\underline{\eta}_\underline{X}$  הינה מטריצה אלכסונית המכילה ע"ע של  $C_{\underline{X}\underline{X}}$ .  
אנו יודעים כי פונקציית ה-PDF של  $\underline{Y}$  נתונה באופן הבא:

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{Y}\underline{Y}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{y} - \underline{\eta}_{\underline{Y}})^T \cdot (C_{\underline{Y}\underline{Y}})^{-1} \cdot (\underline{y} - \underline{\eta}_{\underline{Y}})\right)$$

נבחן את פונקציית ה-PDF של  $\underline{X}$  (לפי הקשר בין פונקציות צפיפות לאחר טרנספורמציה):

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \frac{1}{\sqrt{|P^T|}} \cdot f_{\underline{Y}}(P^T \cdot (\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X})) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{Y}\underline{Y}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(P^T \cdot (\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X}))^T \cdot (C_{\underline{Y}\underline{Y}})^{-1} \cdot (P^T \cdot (\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X}))\right) = \\ &\stackrel{**}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{X}\underline{X}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X})^T \cdot (P \cdot (C_{\underline{Y}\underline{Y}})^{-1} \cdot P^T) \cdot (\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X})\right) = \\ &\stackrel{***}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C_{\underline{X}\underline{X}}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X})^T \cdot (C_{\underline{X}\underline{X}})^{-1} \cdot (\underline{x} - \underline{\eta}_\underline{X})\right) \end{aligned}$$

$$\text{מעבר (*) לפי הקשר } . \quad \underline{Y} = \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b} \quad \stackrel{|\underline{A}| \neq 0}{\Rightarrow} \quad f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{|\underline{A}|} \cdot f_{\underline{X}}(\underline{A}^{-1} \cdot (\underline{y} - \underline{b}))$$

מעברים (\*) ו- (\*\*) לפי  $|C_{\underline{Y}\underline{Y}}| = |C_{\underline{X}\underline{X}}|$  לאחר שמתתקיים

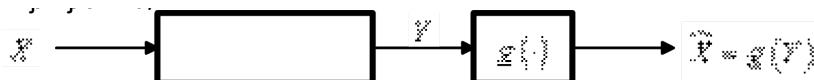
$$\underline{P} \text{ מטריצה אוניטרית אלכסונית ולכן עם ע"ע אחדים, מכאן ש-} |\underline{A}| = 1$$

5. לא נוכיח כאן, הדבר נובע מתכונות סטטיסטיקה מסדר שני. נוכיח בפרק שערוך.

## שערון

נתונים שני מ"א  $X$  ו-  $Y$  (או ו"א  $(X, Y)$ ), אנו יודעים את  $Y$  אך מעוניינים ב-  $X$ . לכן למעשה מ-  $Y$  הadol המצוין נרצה לדעת את  $X$  הadol הרצוי. לדוגמה, נשדר אות מידע  $X$  בעל פילוג ידוע (לדוגמא  $X$  הוא אות בדיד אשר יכול לקבל ערך  $\pm 1$  בסיכוי שווה) בעroz עם רעש גאוסי  $Z \sim N(0,1)$ . נקלוט את האות  $Z = X + Y$  ונרצה לשערך איזה  $X$  שדר.

נשערך את  $X$  מתוך  $Y$  ע"י פונקציה כלשהי ונסמן  $\hat{X} = g(Y)$ .



### קריטריוני שגיאה

הינו רוצים לקבל  $\hat{X}$  אך לא נוכל להבטיח זאת תמיד. הדבר נותן אך ורק אם הקשר בין  $X$  ו-  $Y$  הוא חח"ע. לצורך להתאפשר ונגיד שגיאת שערון.

### שגיאת שערון

שגיאת שערון הינה פונקציה אשר נותנת מدد לטיב השערון. שגיאת השערון מסומן באות  $e$  (אות קטנה על מנת לא להתבלבל עם סימון התוחלת). ישנו הרבה פונקציות לחישוב שגיאת השערון.

אנו נעבד עם שגיאת שערון הפרשיות:

$$e = X - \hat{X} = X - g(Y)$$

$X$  הוא מ"א, גם  $\hat{X}$  הוא מ"א ולכן שגיאת השערון  $e$  הינה מ"א.

### מדד עיוות

נרצה לתכנן מערכת  $(\cdot, g)$  כך שנקבל שגיאת שערון קטנה.  $e$  הינו מ"א ולכן הוא אינו קבוע. לצורך "הסדרת" התנהגונו נגדיר מדד-עיוות. פונקציית  $d(e) \geq 0$  תקרא מדד עיוות אם לכל  $e$  וכן  $d(0) = 0$ . נציג כי מאחר ו-  $e$  מ"א גם  $d(e)$  הינו מ"א. כמובן שאין דבר כזה מדד עיוות אופטימלי באופן אבסולוטי. הדבר תלוי באופן המערכת.

### דוגמאות:

2. מדד שגיאת ריבועית $d(e) = e^2$	1. מדד "קטישה" (מתאים עבור מ"א $X$ בדיד בלבד), נקרא גם 'מדד הסתברות שגיאיה'
--------------------------------------	---

3. מzd שגיאה מוחלטת $d(e) =  e $	$d(e) = \begin{cases} 0 & e = 0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases}$
-------------------------------------	--

### יעות ממוצע/תוחלת העיות

באמור, גם  $d(e)$  הוא מ"א. נגיד עיתות ממוצע (או תוחלת העיות) ע"י:

$$D = E[d(e)] = E[d(X - Y)] = E[d(X - g(Y))]$$

כעת נקבל מספר דטרמיניסטי ואיתו נוכל למדוד את "טיב השعروך".  
הערה - מאחר ואנו מתכוונים למערכת אשר תעבור המון פעמים אנו מבצעים תוחלת לפי חוק המספרים הגדולים. התוחלת תהפוך ממוצע זמני בהמשך.

מטרה - למצוא מערכת  $(\cdot)$  שتبיא למינימום את  $D$ . אנו מקבלים שהמערכת  $(\cdot)$

תלויה בבחירה  $d(e)$ .

### שערך אופטימלי

מטרה:

בהתנן מzd עיתות  $d(e)$  נרצה למצוא מערכת  $(\cdot)$  שتبיא את  $D$  למינימום.

$$D = E[d(X - g(Y))] \rightarrow \min$$

פתרון:

נבחר את המערכת אשר עבר כל ערך  $Y$  "מנחשת" את  $\alpha$  אשר תביא  $D$  את למינימום:

$$g_{opt}^d(Y=y) = \arg \min_{\alpha} \left( E[d(X-\alpha) | Y=y] \right)$$

הערה - נבחן כי הביטוי  $E[d(X-g(Y)) | Y=y]$  הוא פונקציה של  $Y$  ו-  $\alpha$  בלבד.

הוכחה:

$$D = E[d(X - g(Y))] = E_Y \left[ E[d(X - g(Y)) | Y=y] \right] = E_Y[h(\alpha, Y)]$$

$$D = \int f_Y(y) \left( \int d(X - g(Y)) f_{X|Y}(x, y) dx \right) dy$$

כasher עבר (\*) לפי משפט הה החלקה והגדרת  $h(\alpha, Y) = E[d(X - g(Y)) | Y=y]$

נרצה להביא את  $D$  למינימום כפונקציה של  $\alpha$  ולכן נבחר:

$$g_{opt}^{d(e)}(Y=y) = \alpha^* = \arg \min_{\alpha} \left( E[d(X-\alpha) | Y=y] \right)$$

ז"א לבדוק את כל האפשרויות ולראות מי נותן פתרון הכי טוב.

דוגמא:

עבור  $X$  מ"א דיסקרטי (בדיד) נבחר את ממד העיוות 'מדד הסתירות שגיאה':

$$d(e) = \begin{cases} 0 & e=0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$D = E[d(e)] = \Pr(e=0) \cdot e + \Pr(e=1) \cdot e = \Pr(e=0) \cdot 0 + \Pr(e=1) \cdot 1 = \Pr(e=1) = \Pr(X \neq X)$$

.(Probability of error -  $D = Pe$ ) הוא למעשה למשה הסתירות השגיאה (

### משער אופטימלי תחת ממד הסתירות השגיאה

טענה - המשער האופטימלי תחת ממד הסתירות השגיאה הוא:

$$\hat{X}_{opt}^{Pe}(Y=y) = g_{opt}^{Pe}(Y=y) = \arg \max_{\alpha} \Pr(X=\alpha | Y=y)$$

זו למעשה בחרה לפי כללMAP (maximum a posteriori probability) לאחר שמחליטים

על הערך המשוערך לאחר "رأית"  $Y$ .

הוכחה -

$$\begin{aligned} \hat{X}_{opt}^{Pe}(Y=y) &= g_{opt}^{Pe}(Y=y) = \arg \min_{\alpha} \left( E[d(X-\alpha) | Y=y] \right)^* = \arg \min_{\alpha} \left( \Pr(X \neq \alpha | Y=y) \right) = \\ &= \arg \max_{\alpha} \Pr(X=\alpha | Y=y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad E[d(X-\alpha) | Y=y] &= \Pr(d(X-\alpha)=0 | Y=y) \cdot d(X-\alpha) + \Pr(d(X-\alpha) \neq 0 | Y=y) \cdot d(X-\alpha) = \\ &= \Pr(d(X-\alpha)=0 | Y=y) \cdot 0 + \Pr(d(X-\alpha) \neq 0 | Y=y) \cdot 1 = \Pr(d(X-\alpha) \neq 0 | Y=y) = \\ &= \Pr(X \neq \alpha | Y=y) = \Pr(X \neq \alpha | Y=y) \end{aligned}$$

דוגמא:

אות מידע בדיד  $X$  ורעש  $N$  נקלט  $Y = X + N$  ו-  $N$  בת"ס).

$$X = \begin{cases} 1 & w.p. \quad p \\ -1 & w.p. \quad 1-p \end{cases}$$

$$N \sim N(0, \sigma^2) \quad d(e) = \begin{cases} 0 & e=0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases}$$

$$Y = X + N$$

אם נשתמש במידד הסתירות שגיאה אז אינטואיטיבית:

- אם  $0.5 = p$  אז נחליט לפי הסוף 0. אם  $0 \geq Y$  ננחש  $\hat{X} = -1$ , אחרת ננחש  $\hat{X} = 1$ .
  - אם  $0.5 > p$  אז נתדעך את  $\hat{X}$  וכן נחליט לפי ערך סף שלילי כלשהו.
- בזה"כ נחליט באופן אופטימלי לפי כלל MAP:

$$\hat{X}_{opt}^{Pe}(Y=y) = g_{opt}^{Pe}(Y=y) = \arg \max_{\alpha} \Pr(X=\alpha | Y=y)$$

ז"א עבור כל  $y$  נחשב את ההסתברויות המותנות:

$$\Pr(X=1|Y=y), \quad \Pr(X=-1|Y=y)$$

ולבחור את הסביר יותר. לשם החישוב נctrיך לדעת את הפילוג של משתנים אקראיים אלו. זהה כי המ"א  $X|Y$  מתפלג גאוסית עם מאחר שהרעש  $N$  הוא רעש גaussiano ובהינתן  $X$  אנו למעשה מבצעים זהה.

$$(Y|X=x) \sim N(x, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} (Y|X=1) \sim N(1, \sigma^2) \\ (Y|X=-1) \sim N(-1, \sigma^2) \end{cases}$$

ע"מ למצוא את הפילוג המותנה הפוך השתמש בחוק ביס:

$$\Pr(X=1|Y=y) \stackrel{Bayes}{=} \frac{f_{Y|X=1}(y|1) \cdot \Pr(x=1)}{P_Y(y)} = \frac{f_N(y-1) \cdot p}{p \cdot f_N(y-1) + (1-p) \cdot f_N(y+1)} =$$

$$= \frac{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right)}{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\Pr(X=-1|Y=y) \stackrel{Bayes}{=} \frac{f_{Y|X=-1}(y|-1) \cdot \Pr(x=-1)}{P_Y(y)} = \dots = \frac{(1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

נרצה למצוא את הסף המדובר, ז"א לבדוק עבור איזה  $y$  – ים מתקיים

$$\hat{X}_{opt}^{Pe}(Y) = 1 \text{ ועבור איזה – ים מתקיים } \Pr(X=1|Y=y) > \Pr(X=-1|Y=y)$$

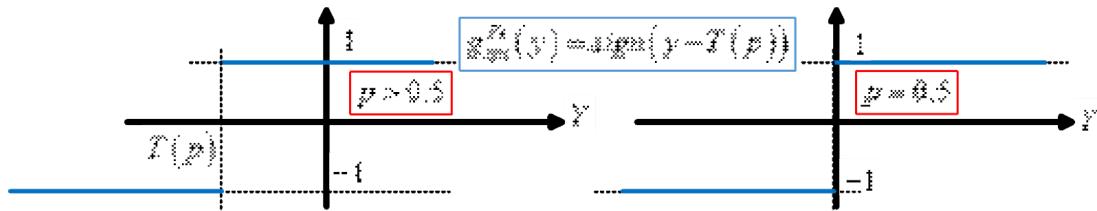
$\mathbb{E}_{opt}^{Pe}(Y) = -1$  (ההחלטה על הסף עצמו לא קריטית). נמצא את הסף:

$$\begin{aligned} \Pr(X=1|Y=y) &>_1 \Pr(X=-1|Y=y) \\ p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) &>_1 (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right) \\ \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2} + \frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right) &>_1 \frac{(1-p)}{p} \\ \exp\left(\frac{4y}{2\sigma^2}\right) &>_1 \frac{(1-p)}{p} \end{aligned}$$

מכיוון שאקספוננט הינה פונקציה מונוטונית עולה נוכל להוציא  $\ln$  משני האגפים ונקבל:

$$\begin{aligned} \frac{4y}{2\sigma^2} &>_1 \ln\left(\frac{(1-p)}{p}\right) \\ y &>_1 \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{(1-p)}{p}\right) = T(p) \end{aligned}$$

נראה את כלל ההחלטה בצורה גרפית:



### שערון במובן של שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (MMSE)

ראינו שעורך אופטימלי במובן הסתברות השגיאה, ז"א שעורך אשר מביא למינימום את הסיכון לשגיאה.

לשערון זה מספר חסרונות מהותיים:

1. מدد העיונות בינהרי ולכן מתאים רק למ"א בדים.
2. אין שליטה על גודל השגיאה כשהיא קיימת וANO רק מזערים את הסיכון לשגיאה.
3. המערכת מבוצעת לפי כל MAP, ז"א מותאם כל פעם ערך אופטימלי בהתאם לערך הנקלט.

אם נשתמש במידע עיונות של שגיאה ריבועית  $d(e) = e^2$  אז תוחלת העיונות תהיה:

$$D = E[d(e)] = E[(X - \mathbb{E})^2]$$

זהו מד MSE (Mean Squared Error). נרצה למצוא מערכת שערוך אופטימלית ב观摩ן MSE, כלומר נרצה למצוא מערכת  $(\cdot)^g$  אשר תביא את תוחלת העיוות (העיוות הממוצע) למינימום (MMSE – Minimum MSE).

$$D = E[d(e)] = E[(X - \hat{X})^2] \rightarrow \min$$

נבחן כי תוחלת העיוות למעשה מיצגת את הספק השגיאה.

### שיעור אופטימלי תחת מד MSE

טענה - המשערק האופטימלי תחת מד MSE הוא:

$$\hat{X}_{opt}^{MSE}(Y=y) = g_{opt}^{MSE}(Y=y) = E[X|Y=y]$$

ז"א הערך המשערק האופטימלי של  $X$  עבור  $Y$  מסוים הוא למעשה תוחלת המותנת של  $X$  בהינתן אותו  $Y$ .

- הוכחה

$$\hat{X}_{opt}^{MSE}(Y=y) = g_{opt}^{MSE}(Y=y) = \arg \min_{\alpha} \left( E[d(X-\alpha)|Y=y] \right) = \arg \min_{\alpha} \left( E[(X-\alpha)^2|Y=y] \right)$$

שוב נסמן את הארגומנט של :

$$h(\alpha, Y) = E[d(X-g(Y))|Y=y] = E[(X-\alpha)^2|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)^2 \cdot f_{X|Y}(x|y) dx$$

נגזר לפיקי  $\alpha$  ונשווה לאפס למציאת קיצון (מאחר וזה משווה ריבועית של  $X$  ניתן להבחין כי זו פרבולה מחייכת ומכאן שמדובר בנקודות מינימום):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} h(\alpha, Y) = -2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha) \cdot f_{X|Y}(x|y) dx$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha^*) \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \cdot f_{X|Y}(x|y) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = \alpha^* \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) dx$$

$$E[X|Y=y] = \alpha^* \cdot 1 = \alpha^*$$

מעבר (\*) לאחר וניתן להוציא את הקבוע  $\alpha^*$  מהאינטגרל על  $x$ . מעבר (\*\*\*) לאחר שאינגרל בתחום  $(-\infty, \infty)$  על כל פונקציית PDF הוא 1.

דוגמה:

אות מדע בדיד  $X$  ורעש  $N$  נקלט  $Y = X + N$  ו-  $N$  בת"ס).

$$X = \begin{cases} 1 & w.p. \quad p \\ -1 & w.p. \quad 1-p \end{cases} \quad Y = X + N$$

$$N \sim N(0, \sigma^2) \quad d(e) = e^2$$

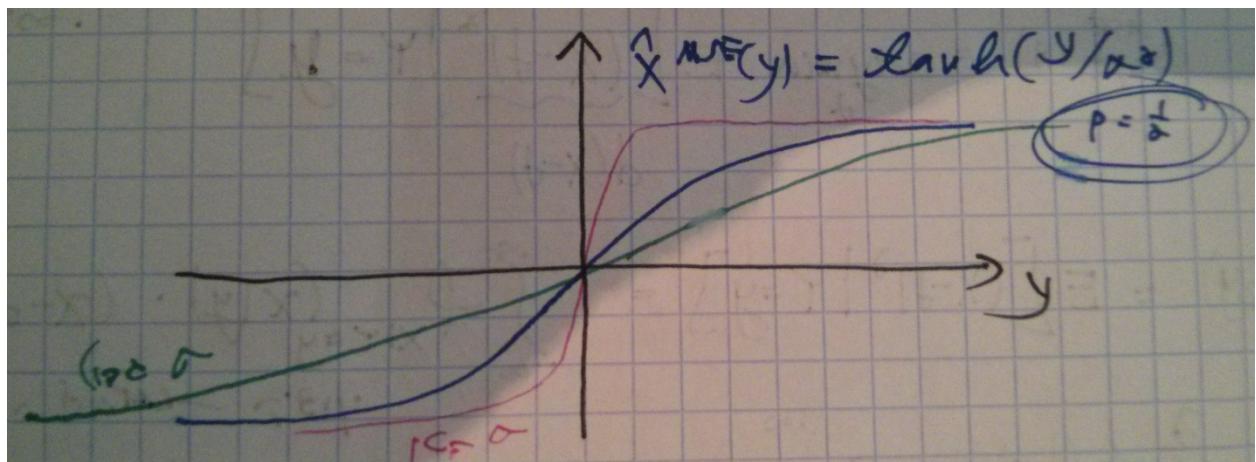
אם נשתמש במידע שגיאה ריבועית (ברגיל עברו  $e$  הפרשי):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{opt}^{MSE}(Y=y) &= g_{opt}^{MSE}(Y=y) = E[X|Y=y] = 1 \cdot \Pr(X=1|Y=y) + (-1) \cdot \Pr(X=-1|Y=y) = \\ &= \Pr(X=1|Y=y) - \Pr(X=-1|Y=y) = \\ &= \frac{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right)}{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)} - \frac{(1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)} = \\ &= \frac{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) - (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}{p \cdot \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)} = \dots = \frac{p \cdot \exp\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) - (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{y}{\sigma^2}\right)}{p \cdot \exp\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) + (1-p) \cdot \exp\left(-\frac{y}{\sigma^2}\right)} \end{aligned}$$

אם  $p = 0.5$  אז נקבל מערכת/מערך:

$$\mathbb{E}_{opt}^{MSE}(Y=y) = g_{opt}^{MSE}(Y=y) \stackrel{p=0.5}{=} \frac{\exp\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{y}{\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{y}{\sigma^2}\right)} = \tanh\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)$$

נראה את כלל ההחלה בצורה גרפית כאשר  $p = 0.5$  עברו ערכי  $\sigma$  שונים:



נבחן כי בעוד שכלל ההחלטה אשר נבע מן ממד הסתברות השגיאה היה מאד נוקשה וחוטף, כלל ההחלטה הנובע מן ממד השגיאה הריבועית הינו עדין וחלק יותר.

עבור  $0 \rightarrow \sigma$  (או אפיו  $1 \gg \sigma$ ) אנחנו מתכוונים לכלל ההחלטה החותף. הדבר הגיוני משומש לרשע אין שנות מושמות הדבר שהוא מטריך סביב התוחלת שלו, שהוא אפס, ואם אין רוש איז ההחלטה נורא קלה סבב אפס. דרך נוספת להסתכל על הדבר הוא שם נציג  $\sigma$  מאד קטן איז הארגומנט מאד גדול ואנו "נזרקים לקטנות הגרף".

עבור  $1 \gg \sigma$  הגרף חלק יותר מאחר והרוש "מפוזר" יותר, גם מקרה זה מוצדק המדעית וממתמטית מאותם שיקולים.

### סיכום ביןים – משורבים אופטימליים במובן הסתברות שגיאה ובמובן MSE

תחילה נציג כי אנו מתעסקים עם שגיאה הפרשית בלבד, ז"א  $e = X - \hat{X} = X - g(Y)$ .

בהתנון ממד עיוות מסוים  $d(e)$ , המשערך האופטימי מקיים:

$$g_{opt}^{d(e)}(Y=y) = \alpha^* = \arg \min_{\alpha} \left( E[d(X-\alpha) | Y=y] \right)$$

עבור מדדי עיוות  $d(e)$  שונים נקבל מערכות אופטימליות  $g_{opt}^{d(e)}(Y)$  שונות:

- . ממד הסתברות שגיאה ומערכת מבוססת כלל MAP (תוחלת העיוות מציגה את הסתברות השגיאה)

$$d(e) = \begin{cases} 0 & e = 0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{X}_{opt}^{Pe}(Y=y) &= g_{opt}^{Pe}(Y=y) = \arg \max_{\alpha} \Pr(X=\alpha | Y=y) \\ D &= \Pr(\hat{X} \neq X) = Pe \end{aligned}$$

- . ממד שגיאה ריבועית ומערכת תוחלת מותנית (תוחלת העיוות מציגה את הספק השגיאה)

$$d(e) = e^2 \Rightarrow \mathbb{E}_{opt}^{MSE}(Y=y) = g_{opt}^{MSE}(Y=y) = E[X|Y=y]$$

$$D = E[(X - \mathbb{E})^2] = E[e^2]$$

### שערך ליניארי אופטימלי בМОΒן (LMMSE)

אנו יודעים לתכנן מערכת שערך אופטימלי בМОΒן MSE לבי:

$$\mathbb{E}_{opt}^{MSE}(Y=y) = g_{opt}^{MSE}(Y=y) = E[X|Y=y]$$

לעתים נרצה לתכנן מערכת שערך  $\hat{g}(Y)$  אשר תהיה ליניארית, ז"א מהצורה  $\hat{g}(Y) = a \cdot Y + b$ .

למה שנרצה להתאפשר ולהגביל את המשערך להיות ליניארי אם אנחנו יודעים למצוא את המשערך האופטימלי?

. I. השימוש פשוט יותר (כל מאוד לבנות מערכת ליניארית).

. II. המערכת תלולה (ומושפעת) רק מסתטיסטיקה מסדר שני של הווקטור  $(X, Y)$ .

. III. התבසסות על מומנטים מסדריים נמוכים יותר גוררת רובסטיות.

נבחן מנקודה II כי עבור וא"ג המשערך האופטימלי בМОΒן MSE הינו ליניארי הרי לא"ג קיימים מומנטים (לא אפסים) עד סדר שני בלבד. לכן, ככל שההميدיע יותר קרובה לגאוסי אז ה"הפסד" הנוצר משיערין ליניארי יותר קטן.

### סיכום:

עתה נדון בעיקר במשערכים בМОΒן MSE, אופטימליים וליניארים אופטימליים. מטעמי נוחות נגדיר את הסימונים הבאים:

- עברו משערך אופטימלי בМОΒן MSE כלל:

$$\mathbb{E}_{opt}^{MSE}(Y) = \mathbb{E}_{opt}(Y) = \mathbb{E}_{MMSE}(Y)$$

כאשר  $MMSE = \text{Minimum Mean Squared Error}$

- עברו משערך ליניארי אופטימלי בМОΒן MSE:

$$\mathbb{E}_{opt}^{LinearMSE}(Y) = \mathbb{E}_{LMMSE}(Y) = \mathbb{E}_{BLE}(Y)$$

כאשר  $LMMSE = \text{Linear MMSE}$  ו-  $BLE = \text{Best Linear Estimation}$ .

### שערך ליניארי אופטימלי בМОΒן MSE:

נרצה מערכת שערך ליניארית אופטימלית, ז"א נרצה פונקציה ליניארית של  $Y$  אשר תשערך ליניארית את  $X$  באופן אופטימלי. נסמן את מערכת השערך הליניארית האופטימלית הזאת ע"י:

$$\hat{X}_{LMMSE}(Y) = a_{LMMSE} \cdot Y + b_{LMMSE}$$

כאשר מתקיים:

$$(a_{LMMSE}, b_{LMMSE}) = \arg \min_{\alpha, b} \left( E[(X - \alpha \cdot Y - b) | Y = y] \right)$$

נקבל כי:

$$(a_{LMMSE}, b_{LMMSE}) = \left( \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}, \eta_X - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} \cdot \eta_Y \right)$$

מפרמטרים אלו נקבל שמערכת שערוך ליניארי אופטימלי במובן MSE נתונה ע"י:

$$\hat{X}_{LMMSE}(Y) = \eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} (Y - \eta_Y)$$

ומקיים תוחלת של שגיאה ריבועית ממוצעת (תזורת  $\text{Cov}(X, Y)$ ):

$$E[e_{LMMSE}^2] = \sigma_X^2 (1 - \rho_{XY}^2) = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_X^2 \cdot \sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2} = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}$$

נבחן כי מתקיים כי תוחלת העיוות היא הספק השגיאה הריבועית שהוא תוחלת ריבוע העיוות:

$$D = E[(X - \hat{X})^2] = E[e^2] = MSE$$

הוכחה (ਮתבוססת על תוכנות של מושערכי LMMSE):

הוכחת נוסחת המשערך נמצאת בהוכחה תוכנות הניצבות עבור מושערך LMMSE בכיוון אופטימליות ← ניצבות.

נווכיח את הביטוי לתוחלת ריבוע השגיאה:

$$\begin{aligned} E[e_{LMMSE}^2] &= E[(X - \hat{X}_{LMMSE})^2] = E[X^2] - 2 \cdot E[X \cdot \hat{X}_{LMMSE}] + E[\hat{X}_{LMMSE}^2] = \\ &= E[X^2] - 2 \cdot E[(X - \hat{X}_{LMMSE} + \hat{X}_{LMMSE}) \cdot \hat{X}_{LMMSE}] + E[\hat{X}_{LMMSE}^2] = \\ &= E[X^2] - 2 \cdot E[(e_{LMMSE} + \hat{X}_{LMMSE}) \cdot \hat{X}_{LMMSE}] + E[\hat{X}_{LMMSE}^2] = \\ &= E[X^2] - 2 \cdot E[e_{LMMSE} \cdot \hat{X}_{LMMSE}] - 2 \cdot E[\hat{X}_{LMMSE}^2] + E[\hat{X}_{LMMSE}^2] = \\ &\stackrel{e_{LMMSE} \perp \hat{X}_{LMMSE}}{=} E[X^2] - 2 \cdot 0 - E[\hat{X}_{LMMSE}^2] = E[X^2] - E[\hat{X}_{LMMSE}^2] \end{aligned}$$

כאשר שיווין (\*) מתקיים לפि תכונת הניצבות (בהמשך). נמשיך ונפתח:

$$\begin{aligned} E[e_{LMMSE}^2] &= E[X^2] - E[\hat{X}_{LMMSE}^2] = E[X^2] - E[\hat{X}_{LMMSE}^2 - \eta_X^2 + \eta_X^2] = \\ &= E[X^2] - \eta_X^2 - E[\hat{X}_{LMMSE}^2 - \eta_X^2] \stackrel{*}{=} E[X^2] - \eta_{LMMSE}^2 - \left( E[\hat{X}_{LMMSE}^2] - \eta_{LMMSE}^2 \right) = \\ &= \sigma_X^2 - Var(\hat{X}_{LMMSE}) \end{aligned}$$

כאשר שיווין (\*) מתקיים לפि תכונת חוסר ההטייה (בהמשך). נבחין כי:

$$\begin{aligned} Var(\hat{X}_{LMMSE}) &= E\left[\left(\hat{X}_{LMMSE} - \eta_{LMMSE}\right)^2\right] \stackrel{E[X]=E[\hat{X}_{LMMSE}]}{=} E\left[\left(\hat{X}_{LMMSE} - \eta_X\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\left(\eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - \eta_Y)\right) - \eta_X\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - \eta_Y)\right)^2\right] = \left(\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}\right)^2 \cdot E[(Y - \eta_Y)^2] = \\ &= \left(\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}\right)^2 \cdot \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2} \end{aligned}$$

ולכן סה"כ קיבלנו:

$$E[e_{LMMSE}^2] = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2} = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_X^2 \cdot \sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2} = \sigma_X^2 \left(1 - \rho_{XY}^2\right)$$

#### מסקנות משערכי MMSE\|\| (מתבססות על תכונות של משערכי MMSE\|\|):

1. אנו יודעים כי  $\hat{X} = X - e$ , נבחין כי נוכל גם לרשום  $\hat{X} = X - e$ .

מתכונות משערכי MMSE\|\| אנו יודעים כי הזוג  $\hat{X}, e$  אורטורוגונליים (כי השגיאה  $e$  ניצבת לכל פונקציה של המדידות  $Y$ ). בנוסף אנו יודעים מן התכונות כי מתקיים

$$E[e] = 0$$

לכן למעשה נוכל להסיק כי הזוג  $\hat{X}, e$  הימם חס"ק (עבור שערכי MMSE ו-LMMSE) הרי:

$$Cov(e, \hat{X}) \triangleq E[(e - E[e]) \cdot (\hat{X} - E[\hat{X}])] = E[e \cdot \hat{X}] - E[e] \cdot E[\hat{X}] = 0 - 0 \cdot E[\hat{X}] = 0$$

2. ראיינו כי מתקיים עבור תוחלת ריבוע השגיאה (עבור LMMSE\|\|):

$$E[e_{LMMSE}^2] = \sigma_X^2 \left(1 - \rho_{XY}^2\right)$$

נזהה כי עבור ממד מתאים  $1 \rightarrow |\rho_{xy}|$  תוחלת ריבוע השגיאה של השערוק תתקרוב לאפס. בנוסף, אנו יודעים כי תמיד תוחלת שגיאת שערוק LMMSE תהיה אפס. לכן למעשה קיבלנו כי השגיאה זהותית אפס:

$$|\rho_{xy}| = 1 \Rightarrow E[e_{LMMSE}^2] = 0 \\ E[e_{LMMSE}] = 0 \Rightarrow e \equiv 0$$

הדבר הגיוני כי אם  $1 = \pm \rho_{xy}$  אז יש קשר ליניארי של מתיחה בין שני המ"א  $X$  ו-  $Y$  (תלות דטרמיניסטית ליניארית). מאחר שהשערוק  $\hat{X}$  הוא פונקציה ליניארית של  $Y$  אז מתקיים גם קשר ליניארי של מתיחה בין שני המ"א  $X$  ו-  $\hat{X}$ . למעשה בגלל שבמצב זה  $0 \equiv e$  אז מתקיים ממש  $X \equiv \hat{X}$ .

### תכונות משערכי LMMSE\MMSE

לשם נוחות, כאשר נרצה להציג תכונה אשר תקפה גם למשערק MMSE וגם למשערק LMMSE נסמן את האינדקס ע"י MMSE\MMSE. שימושו הסימוני שהתכונה תקפה לשנייהם אך ורק לאחד מהם כל פעם (ז"א אין לערבות ביניהם באותה תכונה או משווה).

#### 1. תכונות ניצבות/orootogonalיות

##### a. משערק MMSE

משערק  $(Y) = g(Y)$  הינו MMSE אם ושניהם מקיימת

$e \perp h(Y)$ . למעשה השגיאה ניצבת לכל פונקציה של

$$E[e \cdot h(Y)] = 0 \quad \forall h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

##### b. משערק LMMSE

משערק ליניארי  $(Y) = g(Y) = a \cdot Y + b$  הינו LMMSE אם ושניהם מקיימת

$$e = X - g(Y) = X - (a \cdot Y + b) \quad e \perp h(Y) \quad \text{�כל פונקציה ליניארית } h(Y)$$

או למעשה נדרש כי  $e \perp (c \cdot Y + d) \quad \forall c, d \in \mathbb{R}$ . למעשה השגיאה ניצבת לכל פונקציה ליניארית של המדידות. ז"א

$$E[e \cdot (c \cdot Y + d)] = E[(X - (a \cdot Y + b)) \cdot (c \cdot Y + d)] = 0 \quad \forall c, d \in \mathbb{R}$$

#### 2. חוסר הטיה (Un-Biasedness)

משערק MMSE\MMSE מקיים כי תוחלת השגיאה מתאפסת, למעשה הוא מקיים כי תוחלתו של המשערק שווה לתוחלתו של המשתנה המשוער  $X$ .

$$E[e_{L\setminus MMSE}] = 0$$

$$E[X - \hat{X}_{L\setminus MMSE}] = 0$$

$$E[\hat{X}_{L\setminus MMSE}] = E[X] = \eta_X$$

3. **פיתגורס (Pythagoras)**

הספק המ"א אשר אנו רוצים לשערך שווה להספק המשערך של המ"א פלוס הספק

השgiaה (כאמור עבור מד MSE הספק השgiaה מקיים  $D = MSE$ ).

$$E[X^2] = E[\hat{X}_{L\setminus MMSE}^2] + [e_{L\setminus MMSE}^2]$$

נבחן כי אם נתעסק עם משערך לינארי (נגביל את עצמנו) אז הספק השgiaה יגדל על חשבון הספק המשערך.

4. **עבור וא"ג מתקיים**  $\hat{X}_{MMSE} = \hat{X}_{LMMSE}$   $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  הינו אופטימלי

$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  הוא וא"ג אז המשערך האופטימלי במובן MMSE הינו לינארי ולמעשה מתקיים:

$$\hat{X}_{MMSE} = E[X|Y=y] = \eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_y^2} (y - \eta_Y) = \hat{X}_{LMMSE}$$

כאשר מעבר (\*) מתקיים כאשר  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  הוא וא"ג.

#### הוכחות:

1. **תכונות ניצבות/orthogonality**

כיוון 1 – ניצבות  $\leftarrow$  אופטימליות MSE

a. משערך MMSE

נתון שמשערך  $(Y) = g(Y)$  מקיים  $\hat{X}(Y) = g(Y) \perp e$  לכל פונקציה  $h(Y)$ . נניח כי

$\hat{X}(Y) = g(Y)$  אינו אופטימלי וקיים משערך מתחרה (טוב יותר)  $(\tilde{g}(Y))$

נרצה להראות כי הספק השgiaה של המשערך המתחרה לא קטן מזה שמקיים ניצבות:

$$E[e^2] \leq E[\tilde{e}^2] \Leftrightarrow E[(X - \hat{X})^2] \leq E[(X - \tilde{X})^2]$$

נחשב את הספק השגיאה של המשערך המתחנה:

$$\begin{aligned} E[\tilde{e}^2] &= E[(X - \tilde{X})^2] = E[(X - \hat{X})^2] E[(X - \tilde{X})^2] = E\left[\left((X - \hat{X}) + (\hat{X} - \tilde{X})\right)^2\right] = \\ &= E[(X - \hat{X})^2] + 2 \cdot E[(X - \hat{X})(\hat{X} - \tilde{X})] + E[(\hat{X} - \tilde{X})^2] = E[e^2] + 2 \cdot E[e(\hat{X} - \tilde{X})] + \\ &+ E[(\hat{X} - \tilde{X})^2]^* = E[e^2] + E[(\hat{X} - \tilde{X})^2]^{**} \geq E[e^2] \end{aligned}$$

כאשר מעבר (\*) מאחר ש-  $e \perp h(Y)$  וcmbwn sh- הינה פונקציה של  $y$

משום שני המשערכים הם פונקציות של  $Y$ . מעבר (\*\*\*) מאחר ש-

$$E[(\hat{X} - \tilde{X})^2] \text{ הינו גודל אי-שלילי.}$$

b. משערך LMMSE

ההוכחה זהה מכיוון שמתקיים ש-  $\hat{X}$  הינו פונקציה ליניארית (כתוצאה

של חיסור של פונקציות ליניאריות), ואז  $E[e(\hat{X} - \tilde{X})] = 0$  מתכונת הניצבות של  $e$ .

כיוון II – אופטימליות MSE  $\leftarrow$  ניצבות

a. משערך MMSE

נתון משערך  $\hat{X}(Y) = g(Y)$  אופטימי במובן MSE. יש להראות כי הוא מקיים

את תכונות הניצבות, כלומר מקיים  $e \perp h(Y)$  לכל פונקציה  $h(Y)$ . נדרש כי

התכונה תתקיים ונמצא באופן מפורש את המשערך  $\hat{X}(Y) = g(Y)$  זהה.

$$\forall h(Y): \quad e \perp h(Y) \Leftrightarrow E[e \cdot h(Y)] = 0 \Leftrightarrow E[(X - g(Y)) \cdot h(Y)] = 0$$

$$E_Y \left[ E_{X|Y} \left[ (X - g(Y)) \cdot h(Y) \mid Y = y \right] \right] = 0 \quad \forall h(Y)$$

$$E_Y \left[ h(Y) \cdot E_{X|Y} \left[ (X - g(Y)) \mid Y = y \right] \right] = 0 \quad \forall h(Y)$$

$$E_Y \left[ h(Y) \cdot (E_{X|Y} [X \mid Y = y] - g(Y)) \right] = 0 \quad \forall h(Y)$$

נרצה כי השיוויון יתקיים עבור כל פונקציה  $h(Y)$  ולכן נדרש (נוכל גם לפתח לפי הגדרת התוחלת לפי אינטגרלים):

$$E_{X|Y} [X \mid Y = y] - g(Y) = 0 \Rightarrow g(Y = y) = E_{X|Y} [X \mid Y = y] = E[X \mid Y]$$

ואכן קיבלנו כי  $g(Y)$  נתון לפי נוסחת השונות המותנית, ז"א לפי הגדרת משערך MMSE.

b. משערך LMMSE

نبצע אותו דבר עבור משערך מהצורה  $\hat{X}(Y) = g(Y) = a \cdot Y + b$

$$\forall c, d \in \mathbb{R}: \quad e \perp (c \cdot Y + d) \Leftrightarrow E[e \cdot (c \cdot Y + d)] = 0$$

נבחן כי מספיק לדרש (כי שניים מספיקים ע"מ לפרוש את מרחב הפונקציות הלייניאריות של  $Y$ ):

i.  $e \perp 1$  (או כל קבוע אחר מ- $\mathbb{R}$ )

ii.  $e \perp (Y - \eta_Y)$

$$\begin{aligned} E[e \cdot (c \cdot Y + d)] &= E[e \cdot (c \cdot Y + c \cdot \eta_Y - c \cdot \eta_Y + d)] = E[e \cdot c \cdot (Y - \eta_Y) + e \cdot (c \cdot \eta_Y + d)] = \\ &= c \cdot E[e \cdot (Y - \eta_Y)] + (c \cdot \eta_Y + d) \cdot E[e \cdot 1] = c \cdot 0 + (c \cdot \eta_Y + d) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

כעת נראה מה משמעות זוג דרישות אלו:

$$i \quad e \perp 1 \Leftrightarrow E[e \cdot 1] = 0$$

$$E[X - a \cdot Y - b] = 0$$

$$\eta_X - a \cdot \eta_Y - b = 0$$

$$b(a) = \eta_X - a \cdot \eta_Y$$

$$ii \quad e \perp (Y - \eta_Y) \Leftrightarrow E[e \cdot (Y - \eta_Y)] = 0$$

$$E[(X - a \cdot Y - b) \cdot (Y - \eta_Y)] = 0$$

נציב את  $b(a)$  ונמשיך:

$$ii \quad E[(X - a \cdot Y - \eta_X + a \cdot \eta_Y) \cdot (Y - \eta_Y)] = 0 \\ E[((X - \eta_X) - a \cdot (Y - \eta_Y)) \cdot (Y - \eta_Y)] = 0$$

$$\sigma_{XY} - a \cdot \sigma_Y^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}$$

וכעת "נרכיב" את המשער שמצאנו (ונקבל שזה משער  $\hat{X}_{LMMSE}$  כפי שהגדנו):

$$\hat{X}(Y) = a \cdot Y + b = \begin{bmatrix} a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} \\ b(a) = \eta_X - a \cdot \eta_Y \end{bmatrix} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} Y + \eta_X - \eta_Y \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} (Y - \eta_Y)$$

.2. חוסר הטיה (Un-Biasedness)

a. משער LMMSE

$$E[\hat{X}_{MMSE}] = E[X] = \eta_X \quad \text{נראה כי מתקיים}$$

$$E[\hat{X}_{MMSE}] = E_Y[\hat{X}_{MMSE}] = E_Y\left[E_{X|Y}[X|Y=y]\right]^* = E[X]$$

כאשר שיווין (\*) מתקיים לפי נוסחת ההחילקה (בכיוון ההפוך).

b. משער LMMSE

. .  $E[e_{LMMSE}] = E[e] = 0$  במקרה זה ההוכחה מיידית מאחר שדרשנו שיתקיים  $1 \perp e$  ולכן

3. פיתגורס (Pythagoras)

$$E[X^2] = E\left[\left((X - \hat{X}_{LMMSE}) + \hat{X}_{LMMSE}\right)^2\right] = E\left[\left(e + \hat{X}_{LMMSE}\right)^2\right] = E[e^2] + \\ + 2 \cdot E[e \cdot \hat{X}_{LMMSE}] + E\left[\hat{X}_{LMMSE}^2\right]^{e \perp \hat{X}_{LMMSE}(Y)} = E\left[\hat{X}_{LMMSE}^2\right] + E[e_{LMMSE}^2]$$

כמובן שהאיבר  $E[e \cdot \hat{X}_{LMMSE}]$  מתאפס עבור מקרה אופטימלי כללי וליניארי (מניצבות השגיאה).

4. עבור וא"ג מתקיים  $\hat{X}_{MMSE} = \hat{X}_{LMMSE}$ , כלומר  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  הינו אופטימלי

ראינו (מסקנות מושערבי MMSE) כי מתקיים הזוג  $\underline{X}, e$ , הימם חס"ק () .

מahan ש-  $\begin{bmatrix} e_{LMMSE} \\ \underline{X}_{LMMSE} \end{bmatrix}$  וא"ג ולכון הזוג  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  איןו רק חס"ק אלא

גם בת"ס. למעשה נבחן כי  $\begin{bmatrix} X & Y & \underline{X}_{LMMSE} & e_{LMMSE} \end{bmatrix}$  הוא וא"ג (מדוע?). לכן נסיק:

• הזוג  $e_{LMMSE}, \underline{X}_{LMMSE}$  בת"ס

• הזוג  $e_{LMMSE}, Y$  בת"ס

• אנו יודעים אפיון מלא של השגיאה  $e_{LMMSE} \sim N(0, \sigma_X^2 \cdot (1 - \rho_{XY}^2))$

• ידוע הפילוג המותנה של  $(X|Y=y)$

$$(X|Y=y) = \underline{X}_{LMMSE}(y) + e_{LMMSE}(y)$$

$$\underline{X}_{LMMSE}(y) = \eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y - \eta_Y) \sim N\left(\eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - \eta_Y), 0\right)$$

$$e_{LMMSE}(y) \sim N(0, \sigma_X^2 \cdot (1 - \rho_{XY}^2))$$

$$\Rightarrow (X|Y=y) \sim N\left(\eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - \eta_Y), \sigma_X^2 \cdot (1 - \rho_{XY}^2)\right)$$

במקביל אנו יודעים איך לחשב את  $\underline{X}_{MMSE}(Y)$  ולכון (יחד עם ידיעת הפילוג המותנה):

$$\underline{X}_{MMSE}(Y=y) = E[X|Y=y] = \eta_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - \eta_Y) = \underline{X}_{LMMSE}(Y=y)$$

### תמונה גיאומטרית של מושערבי MMSE

אקסימוט של מכפלה פנימית:

בاهינתן מרחב וקטורי מכפלה פנימית מקיימת:

$$\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle = \langle \underline{Y}, \underline{X} \rangle^* \quad .1$$

$$\langle a \cdot \underline{X}, \underline{Y} \rangle = a \cdot \langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle = \langle \underline{X}, a \cdot \underline{Y} \rangle \quad .2$$

$$\langle \underline{X} + \underline{Y}, \underline{Z} \rangle = \langle \underline{X}, \underline{Z} \rangle + \langle \underline{Y}, \underline{Z} \rangle \quad .3$$

$$\langle \underline{X}, \underline{X} \rangle \geq 0, \quad \langle \underline{X}, \underline{X} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{X} = 0.$$

מסקנות:

- נבחין שאוסף המ"א (בעלי שונות סופית, ז"א בעלי מומנט שני סופי) הינו מרחב וקטורי מאחר והוא סגור תחת קומבינציה ליניארית (כל קומבינציה ליניארית שנעשה בהם תיצור מ"א).

- עבור מ"א  $X$ , אוסף כל הפונקציות  $g(X)$  הינו תת-מרחב וקטורי של המרחב הוקטור של המשתנים האקראיים. בפרט עבור אוסף כל הפונקציות הליניאריות של המ"א  $X$ .

הגדרת מכפלה פנימית על מרחב המשתנים האקראיים:

נגדיר מכפלה פנימית (מ"פ) על מרחב המשתנים האקראיים ע"י:

$$\langle X, Y \rangle = E[X \cdot Y]$$

נבחן את קיום האקסיומות:

1. טריוויאלי
2. טריוויאלי
3. טריוויאלי
4. כਮובן שמתקיים  $\langle X, X \rangle = E[X \cdot X] = E[X^2]$  לאחר ש-  $X^2$  הינו גדול או-שלילי.

מתקיים  $\langle X, X \rangle = E[X^2] = 0$  (כיוון ו) וגם אם  $\langle X, X \rangle \neq 0$  אז בהכרח  $X = 0$  מהגדרת האינטגרל (כיוון ו).

הגדרת נורמה של משתנה אקראי:

נגדיר נורמה של מ"א ע"י המ"פ שלו עם עצמו:

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{E[X^2]}$$

בעזרת הגדרת הנורמה נוכל להגיד:

$$\cos(\angle(X, Y)) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|} = \frac{E[X \cdot Y]}{\sqrt{E[X^2] \cdot E[Y^2]}} = r(X, Y)$$

$$\cos(\angle(X - \eta_X, Y - \eta_Y)) = \dots = \frac{E[(X - \eta_X) \cdot (Y - \eta_Y)]}{\sqrt{E[(X - \eta_X)^2] \cdot E[(Y - \eta_Y)^2]}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho(X, Y)$$

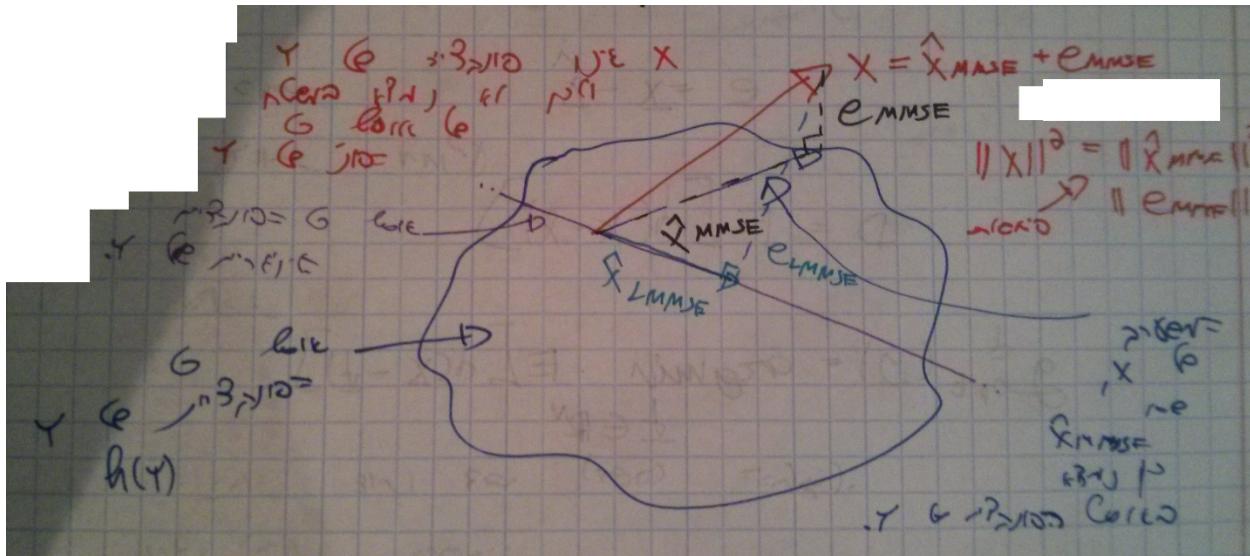
זכור מתקיים  $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$  (וכנ"ל עבור  $\rho(X, Y)$ ). הדבר אכן מסתדר עם הידע על

פונקציית  $\cos(\cdot)$ .

nicobot של משתנים אקראיים:

נאמר שני מ"א  $X$  ו-  $Y$  ניצבים (ונסמן  $Y \perp X$ ) אם ומתקיים  $\langle X, Y \rangle = 0$  (כלומר  $E[X \cdot Y] = 0$ ).

תמונה גיאומטרית של משערci MMMSE:



המישור מציג את אוסף (מרחב) כל הפונקציות האפשרות של  $Y$ , זו את אוסף כל הפונקציות  $h(Y)$ .

בתוך מרחב זה קיים תת-מרחב הפונקציות הליניאריות של  $Y$ , מסומן ע"י הקוו הסגול. המ"א  $X$  אינו פונקציה של  $Y$  ולכן לא על המישור, המשער  $\hat{X}_{MMSE}$  הוא פונקציה של  $Y$  ולכון נמצא במרחב הפונקציות הליניאריות של  $Y$ . בגלל שהמשערים אופטימליים השגיאה חיבת להיות קטנה ככל האפשר ולכון היא האנך. המשערים הם למעשה היטל של  $X$  על מרחב הפונקציות הכלליות או הליניאריות בהתאם לסוג המשער. עוד ניתן לבדוק כי לאחר שהשגיאות נתונות לפי ההגדרה על ידי  $e_{L\setminus MMSE} = X - \hat{X}_{L\setminus MMSE}$  ומכיון שאנו מתייחסים למ"א כמרחב וקטורי השגיאות הן מבצעים פשוט חיסור וקטורי וכן מקבלים ניצבות למרחב הפונקציות המתאים.

באוטו אופן הינו יכולים לבצע את היטל להיות פונקציה פולינומיאלית עד סדר שני לדוגמא אז לבצע את היטל והאנך לתת-מרחב זה.

### **שערוק ווקטור אקראי מתוך ווקטור אקראי**

למදנו לשערק מ"א מתוך מ"א וכעת נרצה להרחיב את הדיוון לשערוק ו"א מתוך ו"א, כלומר ידוע לנו ו"א  $\underline{Y}$  ונרצה לשערק ו"א אחר  $\underline{X}$ . נציג כי ווקטורים אלו לא חייבים להיות באותו מימד

(אך  $\underline{X}$  ו-  $\underline{Y}$  כן).



המערכת  $(\underline{g}, \underline{A})$  הינה פונקציה ווקטורית אשר במושואה ווקטור ממימד  $N$ . ( $\bullet$ )  $\underline{g}$  למשה בנויה מ-  $N$  פונקציות שונות, כ"א עבר רכיב אחר בווקטור  $\underline{Y}$ , אשר כל אחת מן הפונקציות משתמשת בכל רכיבי הווקטור  $\underline{Y}$ .

לכן למשה נוכל לרשום (ולזהות כי המערכת מורכבת מ-  $N$  מרכיבים):

$$\underline{A}_{N \times 1}(\underline{Y}) = \underline{g}(\underline{Y}) = \begin{bmatrix} g_1(\underline{Y}) \\ \vdots \\ g_N(\underline{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(Y_1, \dots, Y_M) \\ \vdots \\ g_N(Y_1, \dots, Y_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1(Y_1, \dots, Y_M) \\ \vdots \\ \underline{A}_N(Y_1, \dots, Y_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1(\underline{Y}) \\ \vdots \\ \underline{A}_N(\underline{Y}) \end{bmatrix}$$

### **ווקטור שגיאת שערוק**

כעת נגידיר את ווקטור שגיאת השערוק באופן דומה לזה שהגדכנו עבור מ"א בודד (ברגיל נבדק עם שגיאת שערוק הפרשית):

$$\underline{e} = \underline{X} - \underline{A} = \underline{X} - \underline{g}(\underline{Y})$$

גם כעת ווקטור שגיאת השערוק  $\underline{e}$  הינו ו"א מאחרו-  $\underline{X}$  וגם  $\underline{A}$  הוא ו"א (ו-  $\underline{e}$  הוא פונקציה שלהם).

### **מדד עיוות ווקטורי**

עבור שערוק מ"א יחיד הגדרנו פונקציית מדד עיוות  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $d$  והחלנו עליה מספר דרישות.

עבור שערוק ו"א הפונקציה תתאים עבור ווקטור שגיאת השערוק  $\underline{e}$  מספר יחיד, ז"א  $d(\underline{e})$ . פונקציה  $d(\underline{e})$  תיקרא מדד עיוות אם  $d(\underline{e}) \geq 0$  לכל  $\underline{e}$  וכן  $d(\underline{0}) = 0$ . נציג כי

מאחר ו-  $\underline{e}$  ו"א אז  $d(\underline{e})$  הינו מ"א.

### **מדד עיוות אדיטיבי (חיבורו)**

בהתנזהן מדד עיוות סקלרי  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $d$  נאמר שהוא משרה מדד עיוות ווקטורי אדיטיבי ע"י:

$$d(\underline{e}) = \sum_i d(e_i)$$

מדד עיות אדיטיביים הינט פריקים.  
דוגמאות:

1. מדד עיות סקלרי  $d(e) = e^2$  (מדד MSE) משרה מדד עיות ווקטוריאי:

$$d(\underline{e}) = \sum_i d(e_i) = \sum_i e_i^2 = \|\underline{e}\|^2$$

2. מדד עיות סקלרי 'מדד הסתברות השגיאה' (נקרא גם מדד SER) משרה מדד עיות ווקטוריאי:

$$d(e) = \begin{cases} 0 & e = 0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases} \Rightarrow d(\underline{e}) = \sum_i d(e_i) = \#(\text{errors})$$

דוגמא למדד עיות שאינו אדיטיבי:

- נגדיר מדד עיות ביןאי המציג האם קיימת שגיאה כלשהי בשיעורו הווקטוריאי:

$$d_{FER}(\underline{e}) = \begin{cases} 0 & \underline{e} = 0 \\ 1 & \underline{e} \neq 0 \end{cases}$$

מדד כזה מתאים לקרים בהם חשוב לגלוות אפילו טעות קטנה בתחום סט מידע (נגדיר ביט פגום בקובץ).

נוהג לקרוא למדד זה מדד FER = Frame Error Rate. עבור כל אחת מהדגימות מוגדרת בהתאם (אנחנו כבר מכירים מדד עיות זה) מדד SER = Symbol Error Rate.

$$d_{SER}(e) = \begin{cases} 0 & e = 0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases}$$

נציג את  $d_{SER}(e)$  ע"י פונקציות ה-  $d_{FER}(\underline{e})$  על רכיביו הווקטור השונים:

$$d_{FER}(\underline{e}) = 1 - (1 - d_{SER}(e_1)) \cdot \dots \cdot (1 - d_{SER}(e_N)) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - d_{SER}(e_i))$$

נבחן כי התוצאה היא של מכפלות וכלל לא אדיטיבית.

### unintuitiveness of the metric

העיות הממוצע (או תוחלת העיות) יחושבו באותו האופן, ז"א ע"י:

$$D = E[d(\underline{e})] = E[d(\underline{X} - \underline{\bar{X}})] = E[d(\underline{X} - \underline{g}(\underline{Y}))]$$

משערך אופטימלי  
טענה:

נבחר את המערכת אשר עבר כל ערך  $\underline{Y}$  "מנחשת" את  $\underline{e}$  אשר תביא  $D$  את למינימום:

$$g_{opt}^{d(\underline{e})}(\underline{Y} = \underline{y}) = \underline{\alpha}^* = \arg \min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^N} \left( E \left[ d(\underline{X} - \underline{\alpha}) \mid \underline{Y} = \underline{y} \right] \right)$$

הוכחה: באופן זהה כמו עבור שערוך מ"א בודד (בעזרת משפט ההחלה).

שערוך אופטימלי עבור ממדדי עיוות אדיטיביים:

אם נציגם לממדדי-עיוות אדיטיביים (ולכן פריקים) בלבד נוכל להציג את תוחלת העיוות לפי:

$$D = E \left[ d(\underline{e}) \right] = E \left[ \sum_i d(e_i) \right]^* = \sum_i E \left[ d(e_i) \right]^{D_i = E \left[ d(e_i) \right]} = \sum_i D_i$$

כאשר שיווין (\*) מתקיים לאחר ותוחלת (כמו אינטגרל) היא פועלה ליניארית לחיבור (קומוטטיביות).

הערה - גם עבור ( $\underline{e}$ )  $d$  כיפלי נוכל לבצע אנליה דומה ע"י הפרדה ואת בעזרת הפעלת

$\log$ .

מסקנה:

על מנת להביא את למינימום את  $D$  נוכל להביא למינימום כל  $D_i$  בנפרד (כי על מנת להביא סכום של איברים לא תלויים למינימום נביא כל אחד מהם למינימום בנפרד). לכן נוכל לכתוב את פונקציית השערוך של כל קואורדינטה באופן הבא:

$$g_{opt,i}^{d(\underline{e})}(\underline{Y} = \underline{y}) = \alpha^* = \arg \min_{\alpha} \left( E \left[ d(X_i - \alpha) \mid \underline{Y} = \underline{y} \right] \right)$$

ולכן המשערך כולו ייראה כך:

$$\underline{\mathbb{X}}_{opt}^{d(\underline{e})}(\underline{Y} = \underline{y}) = \underline{g}_{opt}^{d(\underline{e})}(\underline{Y} = \underline{y}) = \begin{bmatrix} g_{opt,1}^{d(\underline{e})}(\underline{Y} = \underline{y}) \\ \vdots \\ g_{opt,N}^{d(\underline{e})}(\underline{Y} = \underline{y}) \end{bmatrix}$$

מסקנה:

ניתן עתה להספק בתרחיש של שערוך מ"א מתוק ו"א כי שערוך ו"א מתוק ו"א מתפרק ל-  $N$  בעיות שערוך מ"א מתוק ו"א כאשר ממד העיוות הוא פריק.

### שערוך משתנה אקראי מתוק וקטור אקראי

בעת נרצה לשערך מ"א מתוק ו"א:



נדון במקרה זה רק עבור ממד עיוות פריקים וכפי שראינו (ברג'il שגיאת שערוך הפרשית):

$$D_i = E \left[ d(e_i) \right] = E \left[ d \left( X_i - \underline{\mathbb{X}}_i \right) \right] = E \left[ d \left( X_i - g_i(\underline{Y}) \right) \right]$$

כאשר ראיינו ששערוך אופטימלי (שוב – עברו מدد עיוות פריק) מבוצע ע"י המערכת:

$$\underline{X}_{opt,i}^{d(e)}(\underline{Y} = \underline{y}) = g_{opt,i}^{d(e)}(\underline{Y} = \underline{y}) = \alpha^* = \arg \min_{\alpha} \left( E \left[ d(X_i - \alpha) \mid \underline{Y} = \underline{y} \right] \right)$$

לכן למעשה ל-  $\underline{X}_i$  יש תלות ב-  $X_i$  וב-  $\underline{Y}$  בלבד ולא בשאר רכיבי הווקטורים  $\underline{X}$  ו-  $\underline{X}$ .  
שערוך מ"א מתוך ו"א באופן אופטימלי תחת מدد הסתבותות השגיאה

עבור מدد עיוות של הסתבותות השגיאה (מסומן  $Pe$  או SER) נרצה לתכנן את המערכת אשר תשערך מ"א מתוך ו"א באופן אופטימלי, ז"א תביא את תוחלת העיוות למינימום.

$$d_{Pe}(e) = \begin{cases} 0 & e = 0 \\ 1 & e \neq 0 \end{cases}, \quad D = E \left[ d_{Pe}(e) \right]^* = \Pr \left( \underline{X} \neq X \right)$$

כאשר את מעבר שיוויון (\*) ראיינו בשערוך אופטימלי של מ"א מתוך מ"א תחת ממד הסתבותות שגיאה.  
 טענה - המשערך האופטימלי של מ"א מתוך ו"א תחת ממד הסתבותות השגיאה הוא:

$$\underline{X}_{opt}^{Pe}(\underline{Y} = \underline{y}) = g_{opt}^{Pe}(\underline{Y} = \underline{y}) = \arg \max_{\alpha} \Pr \left( X = \alpha \mid \underline{Y} = \underline{y} \right)$$

זו למעשה בחרה לפי כלל maximum a posteriori probability (MAP) לאחר שמחליתים

על הערך המשוערך לאחר "ראיית"  $\underline{Y}$ .

הוכחה - זהה ל McKee של שערוך מ"א מתוך מ"א (ע"י פיתוח התוחלת המותנית).

$$\Pr \left( X = \alpha \mid \underline{Y} = \underline{y} \right) = E \left[ d(X - \alpha) \mid \underline{Y} = \underline{y} \right]$$

### שערוך מ"א מתוק ו"א באופן אופטימלי תחת מדד MSE

ראינו כי מדד עיוות שגיאה ריבועית  $d(e) = e^2$  (מדד MSE) משווה מדד עיוות ווקטורית

$$d(e) = \|e\|^2$$

נרצה לתכנן את המערכת אשר תשערך מ"א מתוק ו"א באופן אופטימלי, ז"א תביא את תוחלת העיוות למינימום.

### שערוך אופטימלי של מ"א מתוק ו"א בMOVED LMMSE:

טענה - המשערך האופטימלי של מ"א מתוק ו"א תחת מדד MSE הוא:

$$\hat{X}_{MMSE}(\underline{Y} = \underline{y}) = \hat{X}_{opt}^{MSE}(\underline{Y} = \underline{y}) = g_{opt}^{MSE}(\underline{Y} = \underline{y}) = E[X | \underline{Y} = \underline{y}]$$

זו למעשה בחרה לפי כלל maximum a posteriori probability (MAP) לאחר שמחליטים על הערך המשוערך לאחר "رأית"  $\underline{Y}$ .

הוכחה - זהה לקרה של שערוך מ"א מתוק מ"א (ע"י פיתוח התוחלת המותנית)

$$E[d(X - \alpha) | \underline{Y} = \underline{y}]$$

### שערוך אופטימלי של מ"א מתוק ו"א בMOVED LMMSE:

כעת נרצה להגביל את המשערך להיות פונקציה ליניארית של  $\underline{Y}$ , ז"א המשערך יהיה מהצורה:

$$\hat{X}(\underline{Y}) = \underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b = \sum_{i=1}^M a_i \cdot Y_i + b$$

שגיאת השערוך תהיה:

$$e = X - \hat{X}(\underline{Y}) = X - \underline{a}^T \cdot \underline{Y} - b$$

נרצה למצוא  $(\underline{a}, b)$  שיביאו את תוחלת העיוות למינימום, ז"א יקיימו

$$D = E[d(e)] = E[e^2] \rightarrow \min$$

טענה - המשערך הליניארי האופטימלי של מ"א מתוק ו"א תחת מדד MSE הוא:

$$\hat{X}_{LMMSE}(\underline{Y}) = \hat{X}_{opt}^{LinearMSE}(\underline{Y}) = g_{opt}^{LinearMSE}(\underline{Y}) = \eta_X + C_{XY} C_{YY}^{-1} (\underline{Y} - \eta_Y)$$

עבור השגיאה מתקיים:

$$E[e_{LMMSE}^2] = \sigma_X^2 - C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot C_{YX}$$

הוכחה - הוכחת נוסחת המשערך נמצאת בהוכחה תוכנות הניצבות עבור משערך LMMSE של מ"א מתוק ו"א. הוכחת הביטוי לתוחלת ריבוע השגיאה מבוצע באמצעות דומה להוכחה עבור משערך LMMSE של מ"א מתוק מ"א.

תכונות משערבי MMSE בעבור שערק מ"א מתוק ו"א:

1. תכונות ניצבות/אורותוגונליות
- a. שערק MMSE

שערק  $\underline{X}(\underline{Y}) = g(\underline{Y})$  הינו MMSE אם ומ"מ שגיאתו  $e = X - g(\underline{Y})$  מקיימת

שערק פונקציה  $h(\underline{Y})$ . למעשה השגיאה ניצבת לכל פונקציה של

$$E[e \cdot h(\underline{Y})] = 0 \quad \forall h: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$$

- b. שערק LMMSE

שערק ליניארי  $\underline{X}(\underline{Y}) = \underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b$  הינו LMMSE אם ומ"מ שגיאתו

שערק פונקציה ליניארית  $e \perp h(\underline{Y}) = X - g(\underline{Y}) = X - (\underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b)$  מקיימת

(או למעשה נדרש כי  $h(\underline{Y}) \perp e = X - (\underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b)$ ). למעשה

השגיאה ניצבת לכל פונקציה ליניארית של המדידות. ז"א

$$E[e \cdot (\underline{c}^T \cdot \underline{Y} + d)] = E[(X - (\underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b)) \cdot (\underline{c}^T \cdot \underline{Y} + d)] = 0 \quad \forall \underline{c} \in \mathbb{R}^M, d \in \mathbb{R}$$

2. חוכר הטיה (Un-Biasedness)

שערק MMSE מקיים כי תוחלת השגיאה מתאפסת, למעשה הוא מקיים כי תוחלתו של המשערק שווה לתוחלתו של המשתנה המשוער  $X$ .

$$E[e_{L\setminus MMSE}] = 0$$

$$E[X - \underline{X}_{L\setminus MMSE}] = 0$$

$$E[\underline{X}_{L\setminus MMSE}] = E[X] = \eta_X$$

3. פיתגורס (Pythagoras)

הספק המ"א אשר אנו רוצים לשערק שווה להספק המשערק של המ"א פלוס הספק

השגיאה (כאמור עבור מדד MSE הספק השגיאה מקיים  $D = MSE$ ).

$$E[X^2] = E[\underline{X}_{L\setminus MMSE}^2] + [e_{L\setminus MMSE}^2]$$

נבחן כי אם נתעסק עם שערק ליניארי (נגביל את עצמנו) אז הספק השגיאה יגדל על חשבון הספק המשערק.

$$\text{מתקיים } \underline{X}_{MMSE} = \underline{X}_{LMMSE}, \text{ ז"א } \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \text{ אופטימלי}$$

אם  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  הוא וא"ג אז המשערק האופטימלי במובן MMSE הינו ליניארי ולמעשה מתקיים:

$$\underline{\mathbf{X}}_{MMSE} = E[X | \underline{Y} = \underline{y}]^* = \eta_{\underline{X}} + C_{\underline{X}\underline{Y}} \cdot C_{\underline{Y}\underline{Y}}^{-1} \cdot (\underline{Y} - \eta_{\underline{Y}}) = \underline{\mathbf{X}}_{LMMSE}$$

כאשר מעבר (\*) מתקיים כאשר  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  הוא וא"ג.

#### הוכחות:

נוכיח ורק עבור קיום של משערק ליניארי אופטימלי המקיים את תוכנות האורתוגונליות (ニცבות) מושם שכל שאר ההוכחות מבוצעות באופן דומה להוכחות של תכונות משערכי MMSE\LN אופטימליים של מ"א מתוך מ"א.

נרצה למצוא את  $(\underline{a}, b)$  כך שתתקיימים תכונות הניצבות:

$$. \quad (X - (\underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b)) \perp (\underline{c}^T \cdot \underline{Y} + d) \quad \forall \underline{c} \in \mathbb{R}^M, d \in \mathbb{R}$$

טענה - להראות ניצבות צאת שcolaה לשתי הדרישות הבאות:

$$. \quad 1 \perp e \quad (\text{או כל קבוע אחר מ- } \mathbb{R})$$

$$E[e \cdot (\underline{Y} - \eta_{\underline{Y}})^T] = \underline{0} \Leftrightarrow \underset{\forall i=1,\dots,M}{e \perp (Y_i - \eta_{Y_i})} \Leftrightarrow \begin{cases} e \perp (Y_1 - \eta_{Y_1}) \\ \vdots \\ e \perp (Y_M - \eta_{Y_M}) \end{cases} .ii$$

כעת נראה מה משמעות זוג דרישות אלו:

$$i \quad e \perp 1 \Leftrightarrow E[e \cdot 1] = 0 \\ E[X - \underline{a}^T \cdot \underline{Y} - b] = 0 \\ \eta_X - \underline{a}^T \cdot \eta_{\underline{Y}} - b = 0 \\ b(\underline{a}) = \eta_X - \underline{a}^T \cdot \eta_{\underline{Y}}$$

$$ii \quad E[e \cdot (\underline{Y} - \eta_{\underline{Y}})^T] = \underline{0} \\ E[(X - \underline{a}^T \cdot \underline{Y} - b) \cdot (\underline{Y} - \eta_{\underline{Y}})^T] = \underline{0}$$

נציב את  $b(\underline{a})$  ונמשיך:

$$ii \quad E\left[\left(X - \underline{a}^T \cdot \underline{Y} - \eta_X + \underline{a}^T \cdot \eta_Y\right) \cdot \left(\underline{Y} - \eta_Y\right)^T\right] = 0$$

$$E\left[\left((X - \eta_X) - \underline{a}^T \cdot (Y - \eta_Y)\right) \cdot \left(Y - \eta_Y\right)^T\right] = 0$$

$$C_{XY} - \underline{a}^T \cdot C_{YY} = 0 \Rightarrow \underline{a}^T = C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1}$$

ובעת "נרכיב" את המשערק שמצאנו (ונקבל שזה משערק  $\underline{A}_{LMMSE}$  כפי שהגדנו):

$$\underline{A}(\underline{Y}) = \underline{a}^T \cdot \underline{Y} + b = \begin{bmatrix} \underline{a}^T = C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \\ b(\underline{a}) = \eta_X - \underline{a}^T \cdot \eta_Y \end{bmatrix} = C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot Y + \eta_X - C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot \eta_Y =$$

$$\eta_X + C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot (Y - \eta_Y)$$

### שערוק אופטימלי במובן MSE של ו"א מתוך ו"א

נחזיר את הדיוון לשערוק ו"א מתוך ו"א כאשר נצטמצם לשגיאה הפרשית עם ממד עיות MSE. שערוק MMSE:

$$\underline{A}(\underline{Y} = \underline{y}) = E\left[\underline{X} | \underline{Y} = \underline{y}\right] = \begin{bmatrix} E[X_1 | Y = \underline{y}] \\ \vdots \\ E[X_N | Y = \underline{y}] \end{bmatrix}$$

שערוק LMMSE:

$$\underline{A}_{LMMSE}(\underline{Y}) = \underline{A}_{opt}^{LinearMSE}(\underline{Y}) = \underline{g}_{opt}^{LinearMSE}(\underline{Y}) = \eta_X + C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot (Y - \eta_Y)$$

$$C_{ee} = C_{XX} - C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot C_{YX}$$

תכונות של מטריצת הקו-ואריאנס של השגיאה :

1. יהי משערק מתחורה ( $\underline{e}' = \underline{X} - \underline{A}'$  עם שגיאה  $\underline{e}' = \underline{e}' - \underline{A}' = h(\underline{Y})$ ) אז  $C_{e'e'} - C_{e_{LMMSE} e_{LMMSE}} \geq 0$ .

2. יהי משערק ליניארי מתחורה ( $\underline{e}'' = \underline{X} - \underline{A}'' = \underline{c}^T \cdot \underline{Y} + \underline{d}$  עם שגיאה  $\underline{e}'' = \underline{e}'' - \underline{A}'' = \underline{c}^T \cdot \underline{Y} + d$ ) אז המטריצה

$$C_{e''e''} - C_{e_{LMMSE} e_{LMMSE}}$$

מטריצת הקו-ואריאנס של וקטור השגיאה מוגדרת ע"י הערה -

$$C_{e_{LMMSE} e_{LMMSE}} = C_{XX} - C_{\underline{A}_{LMMSE} \underline{A}_{LMMSE}}$$

## חלק ב': תהליכי אקראיים ופעולות עליהם

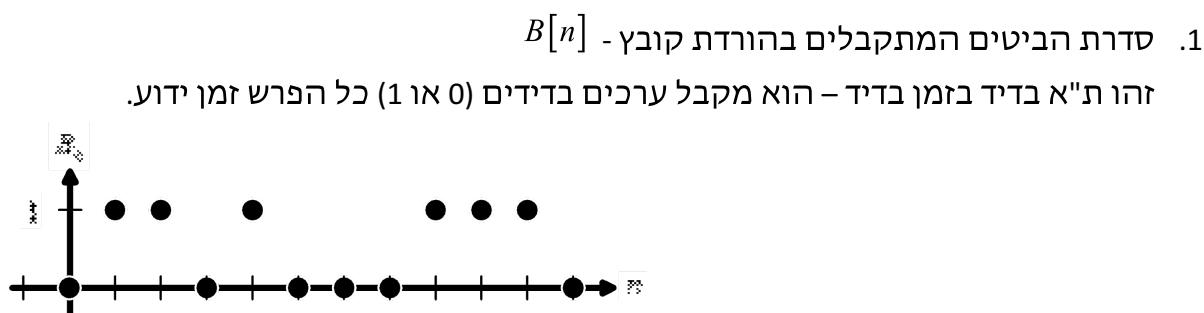
### מבוא, הגדרות ותכונות

תהליכי אקראיים הם הכללה של ו"א, תהליכי מתראחים בזמן/במרחב ולכון אינדקס המ"א מקבל משמעות מתאימה ובנוסף יש חשיבות לסדר המשתנים האקראיים (האינדקסים מייצגים את התפתחות התהליך).  
אנו נתעסק עם תהליכי אקראיים אשר מתפתחים בזמן. תהליך אקראי (ת"א) יכול להיות בזמן רציף או בדיד ולקבל ערכים רציפים או בדידים.  
אם נחשוב על ת"א בעל ו"א אינסופי אז:

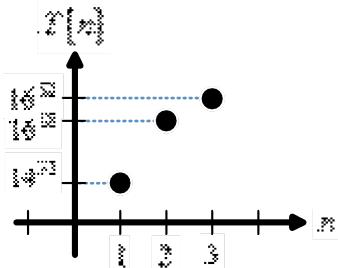
- ת"א בזמן רציף יהיה ב"גודל" אינסופי של עצמת-הרצף (א).
- ת"א בזמן בדיד יהיה ב"גודל" אינסופי בן-מניה (א<sub>0</sub>).

מהחר ותהליכי אקראיים הינם אינסופיים לעיתים במקומות מסוימים  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  (או תחום אינסופי אחר) עבור זמן בדיד נסמן בפשטות  $X$  (אך אין הכוונה לדגימה בוחדשת עבור  $n$  מסוים) ובמקומות מסוימים  $\{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  (או תחום אינסופי אחר) עבור זמן רציף נסמן בפשטות  $(t)$  (אך אין הכוונה לדגימה בוחדשת עבור  $t$  מסוים).

דוגמאות:

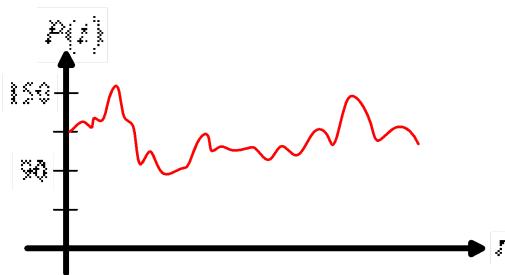


2. זמן הגעת האוטובוס ה- $n$ -י לתחנה -  $T[n]$ .  
זהו ת"א רציף בזמן – זמן ההגעה הינו פרמטר רציף אך ציר הזמן מיצג את מספר האוטובוס.



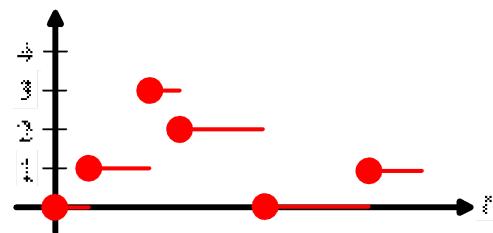
3. מדידת לחץدم לזמן -  $P(t)$

זהו ת"א רציף בזמן רציף – לחץ הדם יכול לקבל כל ערך (בטעות מסוימת) והוא נמדד כל הזמן.



4. מספר האנשים בתחנה כפונקציה של הזמן -  $N(t)$

זהו ת"א בדיד בזמן רציף – מספר האנשים בתחנה הוא מספר בדיד אך נמדד בכל זמן.



### תהליך אקראי בזמן רציף

ת"א בזמן רציף  $X(\omega, t)$  הוא פונקציה המשיכת לכל זמן רציף  $t$  ותוצאת ניסוי  $\Omega \in \omega$  מספר ממשי:

$$X : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

הערה – ייצוג אחר הוא  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , ז"א עברור כל תוצאה ניסוי  $\Omega \in \omega_0$  נקבע

אין סוף זוגות  $(t, x)$  כך ש-  $t, x \in \mathbb{R}$ . עברור כל ערך  $t_0$  יש את הזוג המתאים עם

הערך  $x_0$  אשר מתאים לו  $X(\omega_0, t_0)$ .

כאמור, נסמן את התהיליך בפשטות ע"י  $X(t)$ .

### תהליך אקראי בזמן בדיד

ת"א בזמן בדיד  $X[\omega, n]$  הוא פונקציה המשיכת לכל זמן בדיד  $n$  ותוצאת ניסוי  $\Omega \in \omega$  מספר ממשי:

$$X : \Omega \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \leftrightarrow X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

כאמור, נסמן את התהיליך בפשטות ע"י  $X$ .

### פונקציית מדגם (ריализציה) של תהליך אקראי

פונקציית מדגם (ריализציה – Realization) של ת"א היא תוצאות דגימת התהיליך האקראי עבור  $\omega_0 = \omega$  תוצאה ניסוי מסוימת. כמובן שבעור תוצאה ניסוי  $\omega_0$  זו התהיליך מקבל ערך בכל

נקודת זמן. ז"א עבור  $\omega_0 = \omega$  (ז"א הקפה של ציר  $\omega$ ) נקבל פונקציה  $X(\omega_0, t)$  שהיא מיפוי של תוצאה ניסוי מסוימת בהתאם לזמן.

אם בנוסף נבחר  $t_0 = t$  אז נקבל מ"א  $X(\omega_0, t_0)$  (זהו מ"א מאחר ש-  $X$  הוא ת"א ולא דטרמיניסטי).

## موظיבציה לתהליכיים אקראיים

לצורך הבנת יצירה של תהליכיים אקראיים נראה מספר דוגמאות פשוטות. במהלך הקורס נבנה ת"א לא טריוניים ונוצרק לזהות ולפרקם לתהליכיים אקראיים פשוטים יותר.

### תהליך אקראי p.i.

תהליך אקראי בדיד (לצורך ההמחשה, אפשר גם רציף) בזמן  $X_n$  יקרא ת"א p.i. אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. כל דוגמאות התהליך בעליות אותו פילוג, ז"א

$\Pr(X_i = x) = \Pr(X_j = x) \quad \forall i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$  (או עם פונקציית ה-PDF עבור המקרה של זמן רציף).

2. דוגמאות התהליך  $X_1, X_2, \dots$  בת"ס באופן הדדי (ולא רק בזוגות).

נסמן אי-תלות סטטיסטי של זוג משתנים ע"י  $X_{\underline{i}} Y_{\underline{j}}$ .

ולכן למעשה אנחנו דורשים  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1} \perp\!\!\!\perp X_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

הערה – אי-תלות בזוגות אינה גורת אי-תלות הדדיות.

### דוגמאות קונסטרוקטיביות פשוטות של תהליכיים אקראיים

1. ת"א p.i.:

ת"א p.i. הוא תהליך שככל דוגמאותיו הינם p.i. לצורך הדגמה נהיה יותר ספציפית ונראה ת"א p.i. עם דוגמאות ברנולי עם פרמטר הצלחה  $p$ .

$$W_n = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1-p \end{cases} \sim Ber(p), \quad \{W_n\} \text{ i.i.d}$$

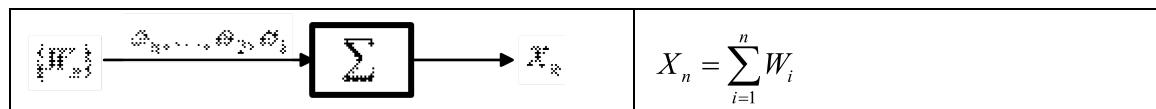
נרצה לבדוק את הסטטיסטיקה של התהליך עבור  $k$  נקודות זמן:  $i_1, i_2, \dots, i_k$ .

הדוגמאות p.i. ולכן בת"ס, לכן נוכל לדעת סטטיסטיקה מלאה של הת"א לכל סט זמינים כזה לפwi:

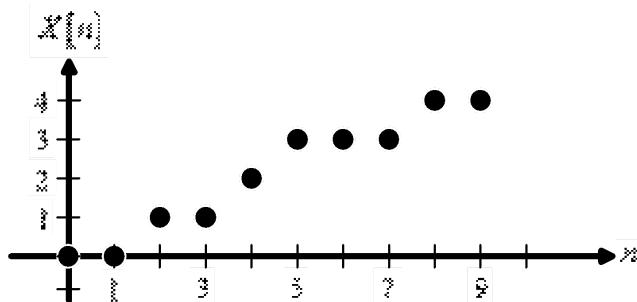
$$\Pr(W_{i_1} = \omega_1, \dots, W_{i_k} = \omega_k) \stackrel{\text{Independence}}{=} \prod_{j=1}^k \Pr(W_{i_j} = \omega_j)$$

2. ת"א של מניה:

נិיח את ת"א ברנולי  $\{W_n\}$  ה-p.i. מקודם ונזין אותה לסתום:



פונקציית מדגם אפשרית של התהליך  $\{X_n\}$  תראה כך:



נבחן כי נוכל להציג את התהיליך באופן רקורסיבי:

$$X_n = X_{n-1} + W_n \quad W_n = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1-p \end{cases}, \{W_n\} \text{ i.i.d}$$

למעשה זהה הגדרה של ת"א אוטו-רגressive Process (Auto Regressive Process).

ת"א  $\{X_n\}$  אינו p.i.i. על אף שהוא נבנה מת"א p.i.i. יתרה מזאת, גם בלי התייחסות לקשר בין הדגימות, דגימותיו כלל לא מתפלגות באופן זהה. אין ספק שיש קשר בין הדגימות הרי זו זוג דגימות סמוכות בהכרח נבדלות בכל היתר אחד והסדרה עולה (אך לא עולה ממש).

למעשה, זהו תהיליך מניה של דגימות ברנולי ולכן זה מ"א ביןומי . נרא:

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^n W_i\right] = \sum_{i=1}^n E[W_i] = \sum_{i=1}^n p = n \cdot p$$

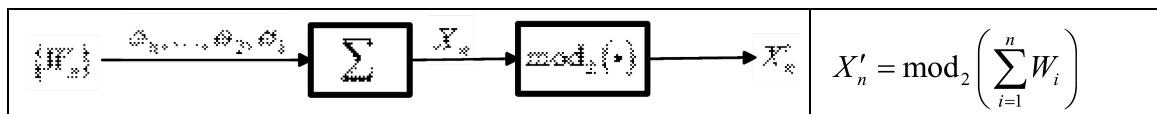
$$Var(X_n) = E[X_n^2] - E^2[X_n] = \dots = n \cdot p \cdot (1-p)$$

אנו מבינים כי זהו ת"א עם הרבה זיכרון – כל דגימה מתפלגת שונה ויש הרבה תלות בין הדגימות.

נבחן שאם  $p = 0,1$  אז השונות מתאפשרת – הדבר מובן כי אז התהיליך דטרמיניסטי.

ת"א OR 3.

על אותו ת"א ברנולי  $\{W_n\}$  ה-p.i.i. נבנה את הת"א הבא:



פונקציית מדגם אפשרית של התהיליך  $\{X'_n\}$  תראה כך:

شرطוט אפסים או אחדים

נבחן כי נוכל להציג את התהיליך באופן רקורסיבי:

$$X'_n = X'_{n-1} \oplus W_n \quad W_n = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1-p \end{cases}, \{W_n\} \text{ i.i.d} \quad A \oplus B = \begin{cases} 1 & A \neq B \\ 0 & A = B \end{cases}$$

ז"א אם  $W_n = 1$  אז ערכו של  $X'_n$  יהיה הפוך מקודמו, אחרת זהה (בכל אופן  $\{1, 0\}$ ).

עבור  $p = 0.5$  קיבל כידגימותיו של ת"א זה הnP.i.i. (כלומר  $X'_n$  קיבל ערך 0 או 1 בהסתברות שווה ללא תלות בדיגימות אחרות שלו).

#### 4. ת"א הילוך סיכור:

נרצה ליצור ת"א אשר מדמה תנועה לאחד משני כיוונים אפשריים בכל נקודת זמן. הדבר

שונה מן התפלגות ברנולי כי שם או שמתקיים צעד ( $W_n = 1$ ) או שלא ( $W_n = 0$ ).

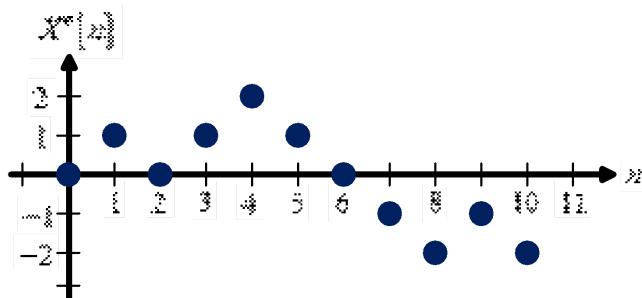
לשם כך נגדיר מת"א ברנולי  $\{W_n\}$  ה-P.i.i. את הת"א הבא:

$$W''_n = 2 \cdot W_n - 1 = \begin{cases} 1 & p \\ -1 & q = 1-p \end{cases} \quad W_n \sim Ber(p), \{W_n\} \text{ i.i.d}$$

כעת נבצע לת"א תהליך סכימה:



פונקציית מבחן אפשרית של התהליך  $\{X''_n\}$  תראה כך:



נבחין כי נוכל להציג את התהליך באופן רקורסיבי:

$$X''_n = X''_{n-1} + X''_n \quad X''_0 = 0 \quad W''_n = \begin{cases} 1 & p \\ -1 & 1-p \end{cases}, \{W''_n\} \text{ i.i.d}$$

ננתח את הסטטיסטיקה של הת"א :

$$E[X''_n] = E\left[\sum_{i=1}^n W''_i\right] = \sum_{i=1}^n E[W''_i] = \sum_{i=1}^n E[2 \cdot W_n - 1] = \sum_{i=1}^n (2 \cdot p - 1) = n \cdot (2 \cdot p - 1)$$

$$Var(X''_n) = 4 \cdot Var(X_n) = \dots = 4 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$$

כasher shiyyon (\*) nobu matkonot hašonot ( $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$ ).

עבור  $0.5 = p$  נקבל  $E[X_n] = 0$ , הדבר הגיוני כי ה"שיכון" נע לכל אחד מן הכוונים בסיכוי זהה.

ת"א זה דומה לתנועת ברואן (Brownian Motion), נדון בהמשך הקורס בת"א מתקדים.

## מידע סטטיסטי מלא על תהליך אקראי

עבור וקטור אקראי  $\underline{X}$  ידעת הסטטיסטיקה של הווקטור האופן מלא הייתה שcolaה לידעות פונקציית ה-CDF שלו (או ידעת פונקציית ה-PDF שלו), ז"א ידעת פונקציית פילוג משותפת שלו:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \Pr(\underline{X} \leq \underline{x})$$

עבור תהליך אקראי גודל הווקטור הינו אינסופי ולכן נתקל בבעית רישום ואך חישוב או אחסון של הפונקציה.

לכן נתאר ת"א מבחינה סטטיסטית ע"י פונקציית ה-CDF (או פונקציית ה-PDF) לכל אוסף נקודות זמן.

ז"א נבחר אוסף סופי של נקודות זמן מתוך הציר האינסופי ואז נצטמצם לו"א ונרצה לדעת להציג את ה-CDF.

עבור ת"א בזמן רציף נרצה לדעת לתת את פונקציית ה-CDF עבור כל סט זמן :

$$F(t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N) = F_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = F_{t_1, \dots, t_N}(\underline{x}) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_N) \leq x_N)$$

עבור ת"א בזמן בדיד נרצה לדעת לתת את פונקציית ה-CDF עבור כל סט זמן :

$$F(k_1, \dots, k_N, x_1, \dots, x_N) = F_{X(k_1), \dots, X(k_N)}(x_1, \dots, x_N) = F_{k_1, \dots, k_N}(\underline{x}) = \Pr(X(k_1) \leq x_1, \dots, X(k_N) \leq x_N)$$

נהוג גם לסמן  $X(t_i) = X_{t_i}$ ,  $X(k_i) = X_{k_i}$  ואז הסימונים קלים יותר.

נחזיר ונdagיש כי מידע סטטיסטי מלא על ת"א משמעותו ידעת הפונקציה הזאת עבור כל סט זמנים אפשרי כלשהו.

### הערות:

- בגלל שאנחנו רוצים לדעת את ה-CDF (או את ה-PDF) עבור כל סט זמנים עדין נתקשה לרשום את הביטוי לפונקציה אלא אם יש לנו מידע על אופי התהליך (לדוגמא גאוסי, p.i.o. וכדומה).
- פונקציות ה-CDF לסטים שונים של זמן חייבות לקיימת את דרישת הקונסיסטנטיות (עקביות).

נבחן כי אם ניקח את שני הסטים  $\{t_1, t_2\}, \{t_2, t_3\}$  אז נקבל את שתי פונקציות ה-CDF:

הבאות (לאחר שנסמן לשם פשוטות  $X_{t_i} = X_i$ ):

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2), F_{X_2, X_3}(x_2, x_3)$$

לפי תכונות של CDF מתקיים:

$$F_{X_2}(x) = F_{X_1, X_2}(\infty, x), F_{X_2}(x) = F_{X_2, X_3}(x, \infty)$$

משמעות הדבר שיש קשר בין פונקציות ה-CDF של  $X_2$  והונצרים מסוימים של זמן עם חפיפה. לכן עבור כל שני סטים של זמן עם חפיפה כלשהו יש דרישת שיש לקיים דבר היוצר קושי בהגדלה.

## **תהליך אקראי גאוסי בזמן רציף**

ת"א ( $X(t)$ ) יקרא ת"א גאוסי (תא"ג) בזמן רציף אם לכל קבוצת דגימות שלו (לכל סט זמן שיבחר) מתקיים כי קבוצה זו היא גאוסית במשמעות (ז"א הדגימות מרכיבות וא"ג).

ז"א עבור כל סט זמנים  $\{t_1, \dots, t_N\}$  דגימות התהליך  $\{X(t_1), \dots, X(t_N)\}$  מקיימות כי כל

$$Y = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot X(t_i) \text{ הוא מא"ג, כלומר כומבינציה ליניארית שלhn היא מא"ג, כאשר } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

כאמור, על מנת לתאר ת"א באופן סטטיסטי מלא אנחנו צריכים לדעת עליו מידע מוקדים.

עבור תא"ג ( $X(t)$ ) נוכל לרשום את פונקציית ה-CDF עבור כל סט זמנים  $\{t_1, \dots, t_N\}$  ע"י:

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = F_{t_1, \dots, t_N}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \cdot C_{tt}}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot (\underline{x} - \eta_t)^T \cdot C_{tt}^{-1} \cdot (\underline{x} - \eta_t) \right]$$

כאשר בסימונים  $(\eta_t, C_{tt})$  הכוונה היא ל-  $(\eta_{X_t}, C_{X_t X_t})$  והם מסומנים כך לצורך פשוטות.

על מטריצת  $C_{X_t X_t}$ קיימים את דרישת הקונסיסטנטיות. מטריצה זו היא פשוט מטריצת הקו-ואריאנס של דגימות התהליך ומחושבת ע"י:

$$C_{X_t X_t} = \begin{bmatrix} \sigma_{X(t_1)}^2 & \cdots & Cov(X(t_1), X(t_N)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X(t_N), X(t_1)) & \cdots & \sigma_{X(t_N)}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \cdots & Cov(X_{t_1}, X_{t_N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_{t_N}, X_{t_1}) & \cdots & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix}$$

הערה/תזכורת: לא מספיק שהபילוג השולי של תהליך יהיה גאוסי על מנת לומר שהת"א הינו תא"ג.

עבור מ"א פילוג גaussiano מוגדר ע"י תוחלת ושונות. עבור ו"א פילוג גaussiano מוגדר ע"י וקטור התוחלות ומטריצת הקו-ואריאנס. בשני המקרים מדובר בסטטיסטיקה מסדר שני.

תא"ג מוגדר ע"י סטטיסטיקה מסדר שני של ת"א – כלומר פונקציית תוחלת ופונקציית אוטו-קורולציה או פונקציית אוטו-קו-ואריאנס.

## سطטיסטיקה מסדר שני של תהליכי אקראיים

سطטיסטיקה מסדר שני של ת"א  $X(t) \backslash X_n$  היא אוסף כל המומנטים עד סדר שני של התהילה.

Continuous

$\forall t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\eta_X(t) = E[X_t] = E[X(t)]$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \eta_X(t_1)) \cdot (X(t_2) - \eta_X(t_2))] = Cov(X(t_1), X(t_2))$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1) \cdot \eta_X(t_2)$$

Discrete

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$$\eta_X(n) = E[X_n] = E[X(n)]$$

$$R_{XX}(n, m) = E[X_n \cdot X_m]$$

$$C_{XX}(n, m) = E[(X_n - \eta_X(n)) \cdot (X_m - \eta_X(m))] = Cov(X_n, X_m)$$

$$C_{XX}(n, m) = R_{XX}(n, m) - \eta_X(n) \cdot \eta_X(m)$$

לכן ידעת סטטיסטיקה מסדר שני היא ידעת הנ"ל (כזכור קיימת שקלות בין מומנטים ורגילים למרצפים).

הערות:

- עברו ת"א מטריצות הקורולציה והקו-ואריאנס הינהן אינסופיות. הסימונים הנ"ל הם פנינה לתא מסוים. כמובן שחדירה של ידעת כל הסטטיסטיקה היא ידעת כל תא.

$$C_{\underline{X}_t \underline{X}_t} = \begin{bmatrix} C_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_1, t_1) & \cdots & C_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_1, t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_N, t_1) & \cdots & C_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_N, t_N) \end{bmatrix}, R_{\underline{X}_t \underline{X}_t} = \begin{bmatrix} R_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_1, t_1) & \cdots & R_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_1, t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_N, t_1) & \cdots & R_{\underline{X}_t \underline{X}_t}(t_N, t_N) \end{bmatrix}$$

- מטריצות  $R_{\underline{X}\underline{X}}$ ,  $C_{\underline{X}\underline{X}}$  הינהן סימטריות, כלומר מתקיים  $A(i, j) = A(j, i)$
- נבחין כי איברי האלכסון של מטריצות המומנטים השניים מקיימים:

$$R_{XX}(t, t) = E[X(t) \cdot X(t)] = E[X^2(t)]$$

$$C_{XX}(t, t) = E[(X(t) - \eta_X(t)) \cdot (X(t) - \eta_X(t))] = Var(X(t))$$

- מטריצות  $R_{\underline{X}\underline{X}}, C_{\underline{X}\underline{X}}$  הינהן מטריצות אי-שליליות מוגדרות (PSD) ולכן:

$$\forall \underline{a}, \underline{t} \in \mathbb{R}^N \quad \underline{a}^T \cdot R_{\underline{X}\underline{X}} \cdot \underline{a} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i \cdot a_j \cdot R_{\underline{X}\underline{X}}(t_i, t_j) \geq 0$$

או בגבול האינטגרלי:

$$\int_{i=-\infty}^{\infty} \int_{j=-\infty}^{\infty} a(i) \cdot a(j) \cdot R_{\underline{X}\underline{X}}(i, j) \cdot dj \cdot di \geq 0$$

### מקדמי מתאימים ליניארים בין דגימות של תהליך אקראי

נגיד את מקדמי המתאים בין זוג דגימות של ת"א  $X(t)$  באופן הבא:

$$r(t_1, t_2) = \frac{R_{XX}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{XX}(t_1, t_1) \cdot R_{XX}(t_2, t_2)}} = \frac{E[X(t_1) \cdot X(t_2)]}{\sqrt{E[X^2(t_1)] \cdot E[X^2(t_2)]}}$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{C_{XX}(t_1, t_2)}{\sqrt{C_{XX}(t_1, t_1) \cdot C_{XX}(t_2, t_2)}} = \frac{Cov(X(t_1), X(t_2))}{\sqrt{Var(X(t_1)) \cdot Var(X(t_2))}}$$

וכמובן שמתקיים  $-1 \leq r(t_1, t_2), \rho(t_1, t_2) \leq 1$ .  
ונוכל להלץ ולקבל את אי השיוויון הבא:

$$C_{XX}^2(t_1, t_2) \leq C_{XX}(t_1, t_1) \cdot C_{XX}(t_2, t_2) \Leftrightarrow Cov^2(X(t_1), X(t_2)) \leq Var(X(t_1)) \cdot Var(X(t_2))$$

ז"א שונות משותפת בריבוע של שתי דגימות של ת"א לא גדולה מככפלת השונות של כל דגימה בנפרד.

### سطzionריות במובן הצר (SSS) ובמובן הרחב (WSS)

תהליכי אקראיים הינם בעלי תוכנות הסטוכסטיות (תהליכים סטוכסטיים), ז"א התפתחות התהליך תלויה בגורמים מקרים (שאינם דטרמיניסטיים). ככלומר ממצב התחלתי נתון של המערכת קיימים מספר מצבים שונים אליהם יכולה המערכת להגיע (במובן שיתכן כי במצבים מסוימים הסתברות גבולה יותר).

קיימת תת קבוצה של קבועות התהליכי אקראיים אשר מקיימת את תוכנות הסטzionריות.

### سطzionריות במובן הצר (SSS)

תהליך אקראי יקרא סטzionاري במובן הצר (Strict Sense Stationarity) אם הפילוג השולי שלו עברו כל סט דגימות אפשרי לא תלוי בזמן.

כלומר, ת"א  $X(t)$  יקרא SSS אם לכל סט זמנים  $\{t_1, \dots, t_N\}$  ולכל הזאה בזמן  $\Delta$  מתקיים:

$$f_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = f_{X(t_1+\Delta), \dots, X(t_N+\Delta)}(x_1, \dots, x_N)$$

בפרט אם הפילוג השולי כלל לא תלוי בזמן, ז"א מתקיים  $f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\Delta)}(x)$  עבור כל  $t, \Delta$ .

### سطzionריות במובן הרחב (WSS)

תהליך אקראי  $(t)$  יקרא סטציונארי במובן הרחב (Wide Sense Stationarity) אם:

1. תוחלת דגימות התהיליך לא תלויות בזמן
2. פונקציית הקורולציה בין כל זוג דגימות לא תלوية בהזזה בזמן (תלויה בהפרש הזמן בלבד)

כלומר, ת"א  $(t)$  יקרא WSS אם:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \eta_X(t) = \eta_X.$$

$$\forall t_1, t_2, \Delta \in \mathbb{R} \quad R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta).$$

### הערה

אם נציג את תנאי 2 עם  $t_2 = -t_1 - \Delta$  נקבל כי מתקיים

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2, t_2 - t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2, 0)$$

הזמן  $t_1 - t_2$  בלבד. נסמן את הפרש הזמן  $\tau = t_1 - t_2$  ולכן נוכל לרשום:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2, 0) \stackrel{\tau=t_1-t_2}{=} R_{XX}(\tau, 0) \stackrel{*}{=} R_{XX}(\tau)$$

כאשר בשיוויון (\*) אנו מסמנים את הפונקציה  $R_{XX}$  כפונקציה של משתנה אחד מטעמי נוחות, זו אותו פונקציה של שני משתנים אך משתמש בארגומנט אחד אשר מייצג את הפרש הארגומנטים כאשר נדון בפונקציית הקורולציה של ת"א WSS.

### תכונות פונקציית הקורולציה עבור תהליך אקראי WSS

אם  $(t)$  הוא תהליך אקראי סטציונרי במובן הרחב (WSS) אז:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2, 0) \Rightarrow E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = E[X(t_1 - t_2) \cdot X(0)].$$

$$.2 \quad R_{XX}(0) \text{ הוא הספק התהיליך האקראי}$$

הפרש הזמן מתאפס עבור זוג דגימות זהות, ז"א שני הזמןם היו זהים. במצב זה נקבל:

$$R_{XX}(t, t) = E[X(t) \cdot X(t)] = E[X^2(t)] = Power(X(t))$$

ניתן גם להראות בכיוון ההפוך:

$$R_{XX}(0) = R_{XX}(0, 0) \stackrel{*}{=} R_{XX}(t, t) = E[X(t) \cdot X(t)] = E[X^2(t)] = Power(X(t))$$

כאשר שיווין (\*) מתקיים מתכונה 2 של ת"א WSS (פונקציית הקורולציה לא רגישה להזזה בזמן).

3. פונקציית הקורולציה ( $R_{xx}(\tau)$ ) היא פונקציה סימטרית מהגדלת התוחלת ניתן להסיק כי פונקציית הקורולציה של ת"א WSS היא פונקציה סימטרית

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= R_{xx}(\tau, 0) = R_{xx}^*(0, -\tau) = E[X(0) \cdot X(-\tau)] = E[X(-\tau) \cdot X(0)] = \\ &= R_{xx}(-\tau, 0) = R_{xx}(-\tau) \end{aligned}$$

כאשר שיווין (\*) מתקיים מתכונה 2 של ת"א WSS (פונקציית הקורולציה לא רגישה להזזה בזמן).

$$4. \text{ מתקיים } |R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

ז"א הפונקציה מקבל ערך (גודל) מקסימלי עבור הפרש זמנים אפס.  
זכור, מהגדלת מקדם בהתאם פירסון עבור זוג דגימות של ת"א ע"י:

$$r(t_1, t_2) = \frac{R_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) \cdot R_{xx}(t_2, t_2)}} = \frac{R_{xx}(\tau, 0)}{\sqrt{R_{xx}(0, 0) \cdot R_{xx}(0, 0)}} = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}^2(0)}} = \frac{R_{xx}(\tau)}{|R_{xx}(0)|}$$

נסדר את השיוויון ונקבל:

$$R_{xx}(\tau) = r(t_1, t_2) \cdot |R_{xx}(0)| \Rightarrow |R_{xx}(\tau)| = |r(t_1, t_2)| \cdot |R_{xx}(0)|$$

אנו יודעים כי מתקיים  $|R_{xx}(0)| \leq 1$  אי-שלילי (תכונה 2 - הספק)  
ולכן:

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

$$\int_{i=-\infty}^{\infty} \int_{j=-\infty}^{\infty} a(i) \cdot a(j) \cdot R_{xx}(i-j) \cdot dj \cdot di \geq 0 \quad .5$$

ראינו כי מאחר ומטריצת הקורולציה  $R_{xx}$  הינה מטריצה PSD מתקיים:

$$\int_{i=-\infty}^{\infty} \int_{j=-\infty}^{\infty} a(i) \cdot a(j) \cdot R_{xx}(i, j) \cdot dj \cdot di \geq 0$$

ומאחר ש-  $X(t)$  הינו ת"א WSS מתקיים  $R_{xx}(i, j) = R_{xx}(i-j, 0) = R_{xx}(i-j)$  ולכן:

$$\int_{i=-\infty}^{\infty} \int_{j=-\infty}^{\infty} a(i) \cdot a(j) \cdot R_{XX}(i-j) \cdot dj \cdot di \geq 0$$

### سطzionריות אסימפטוטית

לעתים ת"א לא קיימים את דרישות הסטzionריות אך הוא יקיים אותן באופן אסימפטוטי (בגבול).

#### سطzionריות אסימפטוטית במובן הצר:

תהליך אקראי  $(X(t))$  יקרא סטzionרי אסימפטוטי במובן הצר (Asymptotic SSS) אם לפילוג

השולוי שלו (עבור כל סט דגימות אפשרי  $\{t_1, \dots, t_N\}$ ) קיים הגבול:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left( f_{X(t_1+\Delta), \dots, X(t_N+\Delta)}(x_1, \dots, x_N) \right)$$

נסמן את הגבול כפילוג הסטzionרי:

$$f_{t_1, \dots, t_N}^{Stationary}(x_1, \dots, x_N)$$

#### سطzionריות אסימפטוטית במובן הרחב:

תהליך אקראי  $(X(t))$  יקרא סטzionרי אסימפטוטי במובן הרחב (Asymptotic WSS) אם לפילוג

השולוי שלו (עבור כל סט דגימות אפשרי  $\{t_1, \dots, t_N\}$ ) קיים הגבול:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left( f_{X(t_1+\Delta), \dots, X(t_N+\Delta)}(x_1, \dots, x_N) \right)$$

נסמן את הגבול כפילוג הסטzionרי:

$$f_{t_1, \dots, t_N}^{Stationary}(x_1, \dots, x_N)$$

### سطzionריות משותפת במובן הצר (SSS) ובמובן הרחב (WSS)

הסבירנו כי תהליכי אקראיים הינם בעלי תכונות סטוכסטיות. עבור זוג ת"א כל אחד מהם סטוכסטי ונרצה לדעת האם נוכל להגיד כי היחידים מקיימים תכונת סטzionריות בלבד.

#### سطzionריות משותפת במובן הצר (SSS)

זוג תהליכי אקראיים  $(X(t))$  ו-  $(Y(t))$  יקראו סטzionרים במשותף במובן הצר (Jointly Strict Stationarity) אם הפילוג השולוי שלו (עבור כל סט דגימות אפשרי) לא תלוי בזמן.

כלומר, ת"א  $(X(t))$  ו-  $(Y(t))$  יקראו SSS אם לכל סט זמנים  $\{t_1, \dots, t_N, t_{N+1}, \dots, t_{N+M}\}$  ולכל האזהה בזמן  $\Delta$  מתקיים (כמפורט לעיל פונקציית ה-CDF):

$$\begin{aligned} f_{X(t_1), \dots, X(t_N), Y(t_{N+1}), \dots, Y(t_{N+M})}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) &= \\ &= f_{X(t_1+\Delta), \dots, X(t_N+\Delta), Y(t_{N+1}+\Delta), \dots, Y(t_{N+M}+\Delta)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) \end{aligned}$$

במובן שאם זוג תהליכי אקראיים  $(X(t), Y(t))$  הם SSSJ אז זה אומר שכ"א SSS בעצמו (ניתן להוכיח כי התנאי מתקיים גם עבור פונקציית ה-CDF) ו諾ול ליצר ממנו פונקציית CDF שולית ע"י הצבת ערכיהם  $t_i = \infty$  עבור כל הזמןנים של אחד התהליכיים ע"מ לנoon אותו).

### סטציונריות משותפת במובן הרחב (WSS)

זוג תהליכי אקראיים  $(X(t), Y(t))$  יקראו סטציונאריים במשמעות במובן הרחב (jointly Wide Sense Stationary) אם:

1. כ"א מן התהליכיים הוא SSW בעצמו ולכך:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \eta_X(t) = \eta_X, \eta_Y(t) = \eta_Y \text{ a.s.}$$

$$\forall t_1, t_2, \Delta \in \mathbb{R} \quad R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta), R_{YY}(t_1, t_2) = R_{YY}(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \text{ b.s.}$$

2. פונקציית הקروس-קורולציה בין כל זוג דגימות לא תליה בהזאה בזמן (תלויה בהפרש הזמןנים בלבד), כלומר:

$$\forall t_1, t_2, \Delta \in \mathbb{R} \quad R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

### הערה

גם עברו פונקציית הקروس-קורולציה של שני ת"א SSW נוכל להגדיר:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2, 0) \stackrel{\tau=t_1-t_2}{=} R_{XY}(\tau, 0) = R_{XY}(\tau)$$

## תהליך אקראי אוטו-רגressive (Auto Regressive Process)

יהי  $\{W_n\}$  ת"א p.i.i. בעל פילוג ידוע ( $w$ ) ותנאי התחלתה משתנה אקראי  $X_0$  בעל פילוג ידוע ( $x$ ) (בפרט אם  $X_0$  דטרמיניסטי) כאשר ת"ה  $X_0$  בת"ס ב-  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  (ז"א בכל  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  יחד ולא בכ"א בנפרד בלבד).

פונקציה דטרמיניסטיבית  $g$  תגדיר את  $\{X_n\}$  ת"א R.A. ע"י:

$$X_n = g(X_{n-1}, W_n)$$

פונקציה יכולה להיות כל פונקציה דטרמיניסטיבית, לדוגמה:

$$g_1(u, v) = u + v, \quad g_2(u, v) = u \oplus v$$

### מרקוביות של תהליך אקראי אוטו-רגressive

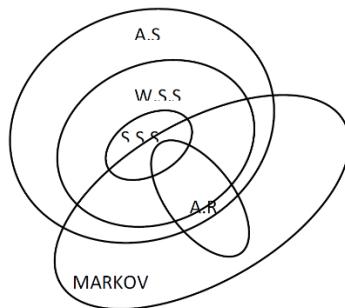
נדון במרקוביות בהרחבה בפרק של שרשרות מركוב אך נסביר קצת קצרה.

מערכת מוגדרת כמערכת מרקובית אם סך המידע בהווה אשר יכול לשמש לידיעת העתיד מתחילה ב המידע הנוכחי, ז"א אין צורך לזכור את ה עבר ע"מ להיות "חכמים יותר" מאשר שהנתונים הנוכחיים מספקים אותו מידע.

טענה - ת"א R.A. הינו מרקובי.

הסבר - בכל איטרציה  $X_n$  תלוי ב-  $X_{n-1}$  ו-  $W_n$ . אנו יודעים כי  $\{W_i\}$  הוא ת"א P.I. ולכן התפלגות  $W_n$  לא תלואה בערכיו  $W_k$  הקודמים ( $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$ ) וגם לא תלואה בערכיו הקודמים ( $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ ). לכן למעשה  $X_n$  מtabס על  $X_{n-1}$  והמשמעות היא ש-  $X_n$  מכיל בתוכו את כל המידע הרלוונטי מן ה עבר.

נציג דיאגרמת ון עבור קבוצת התהליכיים האקראיים (לא מלאה):



A.S. היא קבוצת התהליכיים האקראיים אשר SSS אסימפטוטית (ילמד בהמשך).

### תהליך אקראי אוטו-רגרסיבי ליניארי

ת"א אוטו-רגרסיבי  $\{X_n\}$  יקרא ת"א R.A. ליניארי אם (Q)  $g$  הינה פונקציה דטרמיניסטית ליניארית מהצורה:

$$g(u, v) = \alpha \cdot u + v$$

ולכן הגדרת ת"א אוטו-רגרסיבי ליניארי  $\{X_n\}$  תהיה מהצורה:

$$X_n = \alpha \cdot X_{n-1} + W_n$$

בקורס לא נתעסק עם תהליכיים אקראיים אוטו-רגרסיביים אשר אינם ליניארים. הערכה - אנו מבינים כי מון הדוגמאות הקונסטרוקטיביות כל התהליכיים הינם תהליכיים R.A. אך לא כולם ליניארים.

$$X_n = 0 \cdot X_{n-1} + W_n, \quad X_0 = 0, \quad \{W_n\} \quad i.i.d. \quad .1$$

$$X_n = 1 \cdot X_{n-1} + W_n, \quad X_0 = 0, \quad \{W_n\} \quad i.i.d. \quad .2$$

$$X'_n = X'_{n-1} \oplus W_n, \quad X'_0 = 0 \quad \{W_n\} \quad i.i.d. \quad .3$$

$$X''_n = 1 \cdot X''_{n-1} + X'', \quad X''_0 = 0, \quad \{W_n\} \quad i.i.d.$$

### سطzionיות של תהליך אקראי אוטו-רגרסיבי ליניארי

טענה:

עבור ת"א אוטו-רגרסיבי ליניארי  $\{X_n\}$  אשר מוגדר ע"י:

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha \cdot X_{n-1} + W_n & W_i &\sim f_W(w) \quad \forall i \\ X_0 &\sim f_{X_0}(x) & \{W_n\} &\text{i.i.d} \end{aligned}$$

מתקיים:

1. אם  $|\alpha| \geq 1$  אז הת"א לא סטzionרי.

ניתן להבוח כי עבור  $n \rightarrow \infty$  מתקיים  $Var(X_n) \rightarrow \infty$  וזה מפר דרישת SSS (ולכן גם (SSS).

2. אם  $|\alpha| < 1$  אז הת"א SSS אסימפטוטית (ולכן גם SSS אסימפטוטית).

ניתן להראות כי הגבול קיים משום שבסמן "אינסוף" מתקיים  $0 \rightarrow \alpha^n$ .

3. אם  $|\alpha| < 1$  ובנוסף תנאי ההתחלה מותאם אז הת"א סטzionרי בהתאם לתנאי ההתחלה.

a. לת"ה מותאם עבור SSS הוא  $f_{X_0}(x) = f_X^{Stat}(x)$  (ז"א הפילוג השולי של רגע אפס יהיה זהה לפילוג הסטzionרי).

b. לת"ה מותאם עבור SSS הוא  $\sigma_{X_0}^2 = \sigma_{Stat}^2$ ,  $\eta_{X_0} = \eta_{Stat}$ , ניתן לחשב את  $(\eta_{Stat}, \sigma_{Stat}^2)$  מתוך הסטטיסטיקה מסדר שני של התהליך (נדרוש כי השונות והתוחלת של רגע אפס יהיו זהים לסטzionרים).

דוגמא:

נבחן את הת"א האוטו-רגרסיבי ליניארי הבא:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} \cdot X_{n-1} + W_n & W_n &= \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2}, \{W_n\} \\ 0 & w.p. \frac{1}{2} \end{cases} \quad i.i.d \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

אנו רואים כי  $\alpha = \frac{1}{2}$  ולכן במקרה הנוכחי התהליך SSS אסימפטוטית.

תנאי ההתחלה הינו  $X_0 = 0$ , ז"א ידוע באופן דטרמיניסטי (ערך 0 בהסתברות 1) ולכן

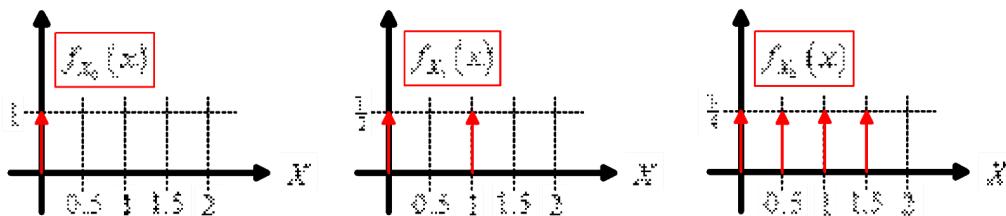
$$f_{X_0}(x) = \delta(x).$$

נחשב עבור הדגימות הבאות:

$$X_1 = \frac{1}{2} \cdot X_0 + W_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + W = W = \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2} \\ 0 & w.p. \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f_{X_1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \delta(x) + \frac{1}{2} \cdot \delta(x-1)$$

$$X_2 = \frac{1}{2} \cdot X_1 + W_2 = \frac{1}{2} \cdot X_1 + W = \begin{cases} 1.5 & w.p. \frac{1}{4} \\ 1 & w.p. \frac{1}{4} \\ 0.5 & w.p. \frac{1}{4} \\ 0 & w.p. \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow f_{X_2}(x) = \frac{1}{4} \cdot [\delta(x) + \delta(x-0.5) + \delta(x-1) + \delta(x-1.5)]$$

נראה גרפית את פילוג הדגימות הללו:

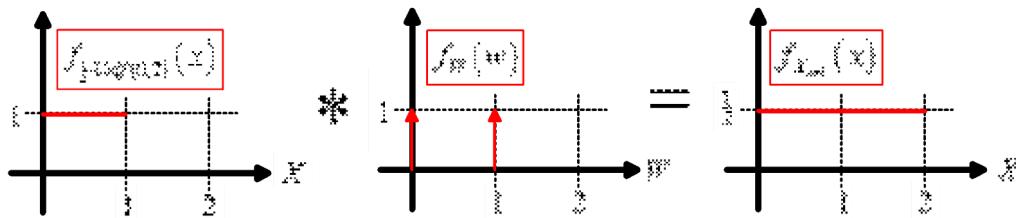


אנו מזהים כי בגבול  $\infty \rightarrow n$  פילוג הדגימה  $X_n$  ישאך לפילוג הרציף  $Unif(0,2)$ .

ונכל לוודא זאת לפי הרצת האיטרציה ה-  $(n+1)$  עבור  $\infty \rightarrow n$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot X_n + W_{n+1} \\ f_{X_{n+1}}(x) &= (f_{\frac{1}{2} \cdot X_n}(x)) * (f_W(x)) = (2 \cdot f_{X_n}(2x)) * (f_W(x)) = \\ &= \left( 2 \cdot \begin{cases} 0.5 & 0 \leq 2x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right) * (\frac{1}{2} \cdot \delta(x) + \frac{1}{2} \cdot \delta(x-1)) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right) * (\delta(x) + \delta(x-1)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right) * \delta(x) + \left( \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right) * \delta(x-1) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right) + \left( \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right) \right] \sim \frac{1}{2} \cdot [Unif(0,1) + Unif(1,2)] = Unif(0,2) \end{aligned}$$

נראה גם גרפית:



ואכן קיבלנו כי פילוג שתי דגימות סמכות באינסוף לא משתנה, לכן זהו הפילוג הסטציונרי.  
נוכל גם למצוא משווה וקורסיבית עבור התהיליך:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} \cdot X_{n-1} + W_n = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot X_{n-2} + W_{n-1} \right) + W_n = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot X_{n-2} + \frac{1}{2} \cdot W_{n-1} + W_n = \\ &= \dots = \left( \frac{1}{2} \right)^n \cdot X_0 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \right)^{n-i} \cdot W_i \end{aligned}$$

אנו מזמינים כי הראש דויר אקספוננציאלית ב-  $n$  וכן רק הסכום רלוונטי.

אנחנו מקבלים SSS עבור ת"ה  $X_0$  מתואם ל-  $\rightarrow n$ ,  $Z^n$  מתואם לפילוג  $Unif(0,2)$ .  
אצלנו לא.

בчисוב הפילוג הסטציונاري ביצענו (נובע מההתמורות של מ"א):

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} \cdot X_{n-1} + W_n \\ &\Downarrow \\ f_X(x) &= f_{\frac{1}{2}X}(x) * f_W(x) = (2 \cdot f_X(2x)) * f_W(x) \end{aligned}$$

## שרשראות מרקוב

שרשראות מרקוב הן כלי לתיאור תהליכי מרקובי בזמן בדיד. אנו נגידו תהליכי מרקובי ארכטעסק בתהליכי מרקוביים בזמן בדיד בלבד (ולרוב נתעסק בתהליכי מרקוביים הומוגניים בזמן בדיד בעלי מספר מצבים סופי).

שרשראות מרקוב מציגות התפתחות תהליכי סדרת מצבים וניתן לחשב מהן הסתברות לסדרת אירועים מסוימת, לחלק את המערכת לשוגי מצבים ועד.

### תהליך מרקובי

תהליכי אקראיים מרקוביים הינם תת-מחלקה מאוד פשוטה ואינטואיטיבית של תהליכי סטוכסטיים (אקראיים).

ת"א ( $t$ )  $X$  יקרא מרקובי אם פילוג העתיד תלוי רק במצב ההווה ולא תלוי בעבר ("כל החטאים נמחלנו").

למעשה, ת"א ( $t$ )  $X$  יקרא מרקובי אם הפילוג המותנה של העתיד בהינתן ההווה והעבר שווה לפילוג המותנה של העתיד בהינתן ההווה בלבד (היות ומספריק להנתנות את ההסתברות בערך הנוכחי של התהליך נקרא לערך זה ה"מצב" של התהליך).

עבור ת"א בזמן רציף (עבור כל סדרת זמנים  $t_1 < t_2 < \dots < t_N \in \mathbb{R}$ )

$$\Pr(X(t_N) \in S | X(t_{N-1}) = x_{N-1}, \dots, X(t_1) = x_1) = \Pr(X(t_N) \in S | X(t_{N-1}) = x_{N-1})$$

או בכתב אחר:

$$\Pr(X(t_N) \in S | \{X(t), t < t_N\}) = \Pr(X(t_N) \in S | \{X(t), t \leq t_{N-1}\}) = \Pr(X(t_N) \in S | X(t_{N-1}) = x_{N-1})$$

עבור ת"א בזמן בדיד:

$$\Pr(X_{k_N} \in S | X_{k_{N-1}} = x_{N-1}, \dots, X_{k_2} = x_2) = \Pr(X_{k_N} \in S | X_{k_{N-1}} = x_{N-1}) \quad \forall k_1 < k_2 < \dots < k_N \in \mathbb{Z}$$

### **כלל השרשרת (עבור שרשרות מركוב)**

עבור ת"א מרכוביים בזמן בדיד מתקיים (עבור סט נקודות זמן עולה ממש  $k_1 < k_2 < \dots < k_N \in \mathbb{Z}$  כלשהו):

$$\begin{aligned} \Pr(X_{k_1} = x_1, X_{k_2} = x_2, \dots, X_{k_N} = x_N) &= \Pr^*(X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_2} = x_2, \dots, X_{k_N} = x_N | X_{k_1} = x_1) = \\ &= \Pr^*(X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_2} = x_2 | X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_3} = x_3, \dots, X_{k_N} = x_N | X_{k_2} = x_2, X_{k_1} = x_1) = \\ &= \Pr^*(X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_2} = x_2 | X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_3} = x_3, \dots, X_{k_N} = x_N | X_{k_2} = x_2) = \\ &= \dots = \Pr(X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_2} = x_2 | X_{k_1} = x_1) \cdot \Pr(X_{k_3} = x_3 | X_{k_2} = x_2) \cdot \\ &\quad \cdot \Pr(X_{k_4} = x_4, \dots, X_{k_N} = x_N | X_{k_3} = x_3) = \dots = \Pr(X_{k_1} = x_1) \cdot \prod_{i=2}^N \Pr(X_{k_i} = x_i | X_{k_{i-1}} = x_{i-1}) \end{aligned}$$

שיויוני (\*) לפי הסתברות מותנית. שיויון (\*\*) לפי מרכוביות (תלות במצב הנוכחי ולא בעבר).

### **נוסחת צ'אפמן קולמוגורוב**

עבור ת"א מרכובי בזמן בדיד מתקיים (עבור  $k < m < n \in \mathbb{Z}$ ):

$$\Pr(X_n = x_n | X_k = x_k) = \sum_m \left[ \Pr(X_n = x_n | X_m = x_m) \cdot \Pr(X_m = x_m | X_k = x_k) \right]$$

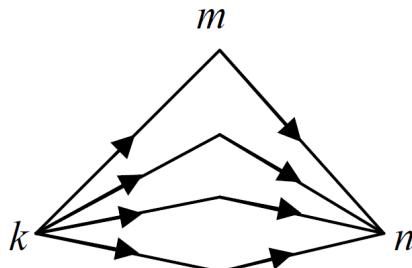
ז"א הסתברות להגעה למצב  $x_n$  מסויים ברגע  $n$  אם ידוע כי ברגע  $k$  הינו במצב  $x_k$  כלשהו

הוא סך הסתברויות להגעה מהמצב  $x_k$  למצב  $x_n$  דרך מצב בינים  $x_m$ .

ונכל להציג את הנוסחה גם ע"י סכימת מצבים הביניים האפשריים במקום נקודות זמן-הביניים האפשריות:

$$\Pr(X_n = x_n | X_k = x_k) = \sum_{x_m} \left[ \Pr(X_n = x_n | X_m = x_m) \cdot \Pr(X_m = x_m | X_k = x_k) \right]$$

תרשים גרפי של משמעות הנוסחה:



הוכחה:

הדבר הגיוני מנוסחת הסתברות השלמה. נראה:

$$\begin{aligned} \Pr(X_n = x_n | X_k = x_k) &= \sum_{x_m}^* \Pr(X_n = x_n, X_m = x_m | X_k = x_k) = \\ &= \underset{\text{Bayes}}{\sum_{x_m}} \Pr(X_n = x_n | X_m = x_m, X_k = x_k) \cdot \Pr(X_m = x_m | X_k = x_k) = \\ &= \sum_{x_m}^{**} \Pr(X_n = x_n | X_m = x_m) \cdot \Pr(X_m = x_m | X_k = x_k) \end{aligned}$$

שיויון לפि נוסחת הסתברות השלמה. שיויון (\*\*\*) לפי מרכוביות (תלות במצב נוכחי ולא בעבר).

### שרשרת מركוב סופית

שרשרת מركוב (ת"א מרכובי בזמן בדיד) תקרא סופית אם יש לה מספר סופי (או בר-מניה) של מצבים, זאת אומרת מתקיים כי מצב יכול לקבל ערך מתוך קבוצה סופית (או ברת-מניה).

$$X_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_J\} = \{1, 2, \dots, J\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

שיויון (\*) מבוצע לשם נוחות, נסמן את המצבים עם מספרים לצורך הקלת הדיוון.

**הערה - מעתה נדון בשרשראות מركוב (תהליכיים מרכוביים בזמן בדיד) סופיות בלבד**

### פילוג שלוי של שרשרת מركוב

עבור שרשרת מركוב נרצה לדעת איך מתפלג מצב התהליך ברגע מסוים  $n$ . אם השרשרת

סופית נוכל להציג את הפילוג שלוי של  $X_n$  ע"י:

$$\pi(n) = (\pi_1(n), \dots, \pi_J(n)) = (\Pr(X_n = 1), \dots, \Pr(X_n = J))$$

### מטריצת מעבר של שרשרת מركוב

עבור שרשרת מركוב נרצה לדעת בכל נקודת זמן את הסתברויות המעבר בין המצבים. אם השרשרת סופית נוכל להציג הסתברויות אלו במטריצה:

$$\underline{\underline{P}}(n) = \begin{bmatrix} P_{11}(n) & \cdots & P_{1J}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{J1}(n) & \cdots & P_{JJ}(n) \end{bmatrix} \quad P_{ij}(n) = \Pr(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

המטריצה מרכיבת מתאים  $P_{ij}(n)$ . הערך  $P_{ij}(n)$  מייצג את ההסתברות להגיע בזמן  $n$  לנצח  $j$  אם ידוע שביחסית זמן קודם לכך, משמע בזמן  $1-n$ , הינו במצב  $i$ .

זהה כי שורה  $i$  מייצגת את הסיכויים להגיע ממצב  $i$  (זמן  $1-n$ ) לכל שאר התאים לפי מיקום העמודה בזמן  $n$ .

זהה כי עמודה  $j$  מייצגת את הסיכויים להגיע לנצח  $j$  (זמן  $n$ ) מכל שאר המ מצבים לפי מיקום השורה בזמן  $1-n$ .

כל איברי המטריצה אי-שליליים (הסתברויות) וסכום כל שורה הינו 1 (סכום הסתברויות המעבר ממצב מסוים) ולכן מטריצה  $\underline{\underline{P}}(n)$  הינה מטריצה סטוכסית.

מסקנה:

תיאור סטטיסטי מלא של שרשרת מركוב סופית עד זמן  $N$  ניתן ע"י הפילוג השולי של מצב ההתחלת ומטריצות המעברים לכל זמן  $N, \dots, n, 1$  על ידי:

$$\underline{\pi}(0).$$

$$\underline{\underline{P}}(n) \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

או באופן כללי ע"י  $\underline{\pi}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$  עבור  $n = 1, 2, \dots$ .

הסבר:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה קיבל את הפילוג השولي של כל מצב עפ"י נוסחת ההסתברות השלמה:

$$\underline{\pi}(n) = \underline{\pi}(n-1) \cdot \underline{\underline{P}}(n)$$

ובפרט מתקיים  $\underline{\pi}(0) \cdot \underline{\underline{P}}(1) = \underline{\pi}(1)$  (אינטואיטיבי לגבי פילוג המצב לאחר המעבר הראשון). נראה כי למעשה מתקיים:

$$\underline{\pi}(n) = \underline{\pi}(n-1) \cdot \underline{\underline{P}}(n) = \underline{\pi}(n-2) \cdot \underline{\underline{P}}(n-1) \cdot \underline{\underline{P}}(n) = \dots = \underline{\pi}(0) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \underline{\underline{P}}(n-i) = \underline{\pi}(0) \cdot \prod_{i=1}^n \underline{\underline{P}}(i)$$

### דיאגרמת טרלייס (Trellis Diagram)

דיאגרמת טרלייס הינה כלי גרפי להציג פילוג מצבים שרשרת מركוב בזמן. בכל עמדת זמן נקבע קודקוד עבור כל מצב אפשרי של השרשראת. נחבר בקשת שני מצבים

$j \rightarrow i$  בזמןנים עוקבים  $n \rightarrow n-1$  אם הסתברות המעבר חיובית (כלומר  $P_{ij}(n) > 0$ ) ונרשום (לא חובה) על הקשת את הסתברות המעבר.

דוגמה:

נציג דיאגרמת טרלייס עבור שרשרת מركוב הנתונה לפיה:

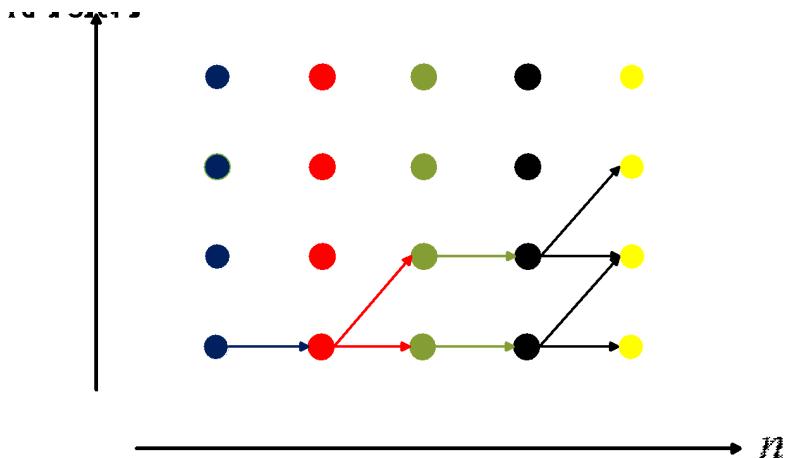
$$X_n = \text{mod}_4(X_{n-1} + W_n) \\ X_0 = 0 \\ W_n = \begin{cases} 0 & n \text{ is odd} \\ 1 & w.p. \frac{1}{2} \\ 0 & n \text{ is even} \\ w.p. \frac{1}{2} \end{cases}$$

נבחן בקלות כי  $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$  ולכן השרשראת סופית.

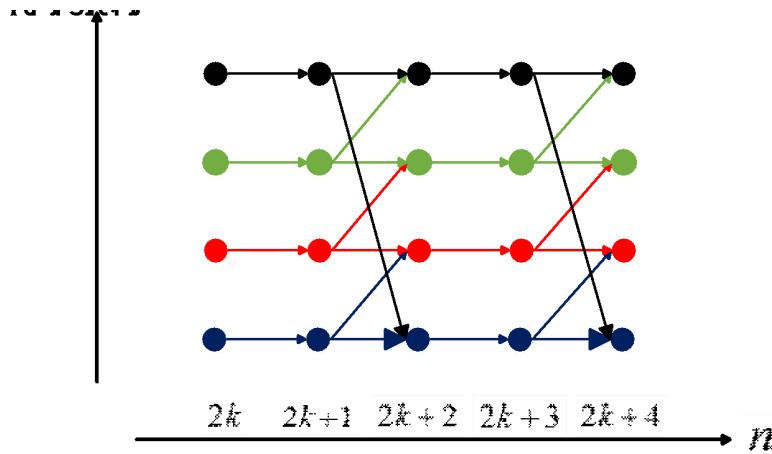
עבור זמנים אי-זוגיים לא מבוצע מעבר כלל כי בודאות  $W_n = 0$ , ומנוסחת הנסיגה ומסופיות השרשראת  $X_n = X_{n-1}$ .

עבור זמנים זוגיים יש סיכוי חצי ל- 0 (ואז כמו קודם אין מעבר) וסיכוי חצי ל- 1 (ואז מבוצע קידום באחד ומודולו 4 על מנת "להחזיר" את ערך השלב לקבוצה הסופית שלו).

נתון שהמצב ההתחלתי של השרשראת הוא  $X_0 = 0$  ולכן השרשראת נראית באופן הבא:



נבחן כי השרשראת "מכירה" את המצבים ככל שהוא מתקדמת. דיאגרמת טרלייס עבור זמן מתקדם (מתחיל זמן זוגי) בשרשראת:



נזהה כי השרשרת נהיית מחזורית.  
הערה - ערכי ההסתברויות לא רשומים על הקשתות (כל המעברים לזמן זמני אי-זוגיים הם 1 – משמע וודאיים, כל המעברים לזמן זוגיים הינם חצי).

### שרשרת מركוב הומוגנית ודיאגרמת מצבים

שרשרת מركוב (ת"א מركובי בזמן בדיד) תקרא הומוגנית (בזמן) אם מתקיים:

$$\Pr(X_n = x_D | X_{n-1} = x_S) = \Pr(X_m = x_D | X_{m-1} = x_S) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

כלומר, הפילוג המותנה של מעבר (ביחידת זמן אחד) הוא קבוע בזמן. המשמעות היא שמעבר ממצב מקור מסוים למצב מטרה אחר לא תלוי בזמן.  
בפרט נראה כי סיכוי המעבר שווה לסיכוי אילו היה המעבר הראשון של השרשרת:

$$\Pr(X_n = x_D | X_{n-1} = x_S) = \Pr(X_1 = x_D | X_0 = x_S) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

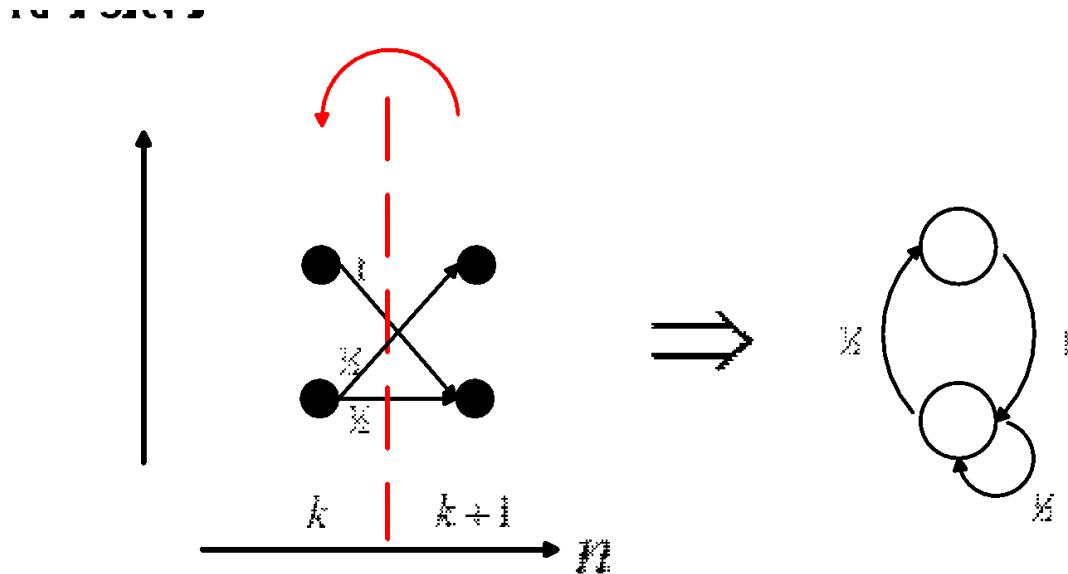
נבחן אם שרשרת מركוב היא הומוגנית או מטriceת המעבר שלה לא תלולה בזמן  $\underline{\underline{P}}(n) = \underline{\underline{P}}$ .

$$\text{כמו כן מתקיים } \underline{\underline{\pi}}(n) = \underline{\underline{\pi}}(0) \cdot (\underline{\underline{P}})^n.$$

הערה - מעתה נדון בשרשראות מركוב (**תהליכיים מركוביים בזמן בדיד**) הומוגניות וסופיות  
 **בלבד**

נבחן כי עבור שרשרת מרכוב הומוגנית סופית לא נדרש לצירר בדיאגרמת טרלייס יותר מחתך בודד (מהמצב הסופי עבור זמן מתקדם) מאשר שינוי בהסתברויות המעברים בזמן. לכן שרשראות מרכוב הומוגניות וסופיות מוצגות/נתונות ע"י דיאגרמת מצבים ולא דיאגרמת טרלייס. למעשה ניתן להמיר חתך ייחיד מדיאגרמת טרלייס לדיאגרמת מצבים ע"י "קיפולו".

דוגמה:



נמשיך עם דוגמא זו ונתייחס אליו כאל מקרה של 'חיפושית קופצת'.  
כשהחיפושית במצב 1 יש לה סיכוי זהה להישאר או להחליף מצב, לחיפושית לא נוח במצב 2 ולכן תחזור למצב 1.

נניח כי אנו יודעים שבזמן אפס מיקמו את החיפושית במצב 1, ז"א כי מתקיים  $\underline{\pi}(0) = (1, 0)$ .  
בבנה מן דיאגרמת המצבים את מטריצת המעברים ונרכיב את כלל הפילוג השולי של מעבר:

$$\underline{\underline{P}}(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\pi}(n) = \underline{\pi}(n-1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\pi}(0) \cdot \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^n = (1, 0) \cdot \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^n$$

נראה את הפילוגים השוליים של מצביו ההתחלתי בזמן:

$$\underline{\pi}(1) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \underline{\pi}(2) = \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \quad \underline{\pi}(3) = \left( \frac{5}{8}, \frac{3}{8} \right), \quad \underline{\pi}(4) = \left( \frac{11}{16}, \frac{5}{16} \right), \dots$$

נרצה לדעת את הפילוג השולי של מצב החיפושית עבור  $n \rightarrow \infty$  (אם יש כזה).

נוכל לחשבו עבור העלתה המטrice  $(\underline{\underline{P}}(n))$  בחזקת אינסוף ולקוות להתכנסות, נבצע ונקבל:

$$(\underline{\underline{P}}(n))^n = \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

נבחן כי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{\pi}(0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \right) = (1, 0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

נבחן למעשה כי ככל לא היה חשיבות במצב ההתחלתי. הרוי אם איברי כל עמודה במטריצה

$\underline{\pi}(n)^P$  זהים וסק איברי וקטור ההתחלה תמיד יהיה 1 (גם אם המצב ההתחלתי בעל פילוג

לא דטרמיניסטי) אז פילוג המצב הסופי יהיה וקטור שורה מן המטריצה  $\underline{\pi}(n)^P$  – ככל לא תלוי בפילוג השולי  $\underline{\pi}(0)$ .

בדרך נוספת, עם מעט אינטואיציה נוכל לזהות את כיוון ההתקנסות ולנחש כי הסיכוי

ב"אינסוף" להיות במצב 1 הוא  $\frac{2}{3}$ , כלומר  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1(n) = \frac{2}{3}$ . נחלץ מכל המעברים:

$$\underline{\pi}(n) = \underline{\pi}(n-1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_1(n) = \frac{1}{2} \cdot \pi_1(n-1) + 1 \cdot \pi_2(n-1)$$

אם אכן ההנחה מתקינה אז עבור  $n$  מאוד גדול מתקיים:

$$\pi_1(n) = \pi_1(n-1) = \frac{2}{3} \quad \pi_2(n-1) = 1 - \pi_1(n-1) = \frac{1}{3}$$

נציב ונבדוק (ונראה שצדkanו):

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow True$$

### פילוג סטציוני

כפי שראינו במקרה החיפושית, קיימות שרשרות בהן הפילוג השולי של השרשרת מתכנס (כלומר קבוע לכל  $k \geq n$  החל מערך  $k$  מסוים).

נאמר שלשרשרת מרקוב הומוגנית סופית יש פילוג סטציוני אם קיים פילוג צזה, ז"א:

$$\exists k : \underline{\pi}(n) = \underline{\pi}(k) \quad \forall n \geq k$$

### ווקטור סטציוני

ווקטור  $\underline{x}$  יקרא ווקטור סטציוני עבור מטריצה  $\underline{A}$  אם  $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{x}$ .

הערה - נבחן כי מטריצה  $\underline{A}$  חייבת להיות ריבועית ומאותו מימד של  $\underline{x}$ .

### ווקטור הפילוג הסטציוני

נסמן את ווקטור הפילוג הסטציוני (ונקרא לו הפילוג הסטציוני) של שרשרת מركוב ע"י  $\underline{\pi}'$   
 $(\text{או } \underline{\pi}^{\infty}).$

בשרשרת מركוב הומוגנית סופית הפילוג הסטציוני מקיים  $\underline{\pi}' = \underline{\pi}' \cdot P.$

### סטציונריות בשרשראות מركוב

כזכור, הדרישה עבור סטציונריות במובן הצר (SS) היא שהפילוג המשותף יהיה קבוע בזמן.  
 בשרשראות מركוב אם למצב יש פילוג שלו אשר זהה לפילוג הסטציוני אז גם לכל הממצבים  
 אחריו יהיה פילוג שלו זהה.  
 נגידր עבור שרשרות מركוב הומוגניות סופיות:

1. אם  $\underline{\pi}' = \underline{\pi}$  אזי מתקיים  $\underline{\pi}' = \underline{\pi}(n)$  לכל  $k \geq n$  והשרשרת נקראת סטציונית סופית.  
 אסימפטוטית.

המשמעות היא שאם בזמן מסוים  $k$  הפילוג השולי של המצב  $X_k$  זהה לפילוג  
 הסטציוני אז השרשרת הגיעה למצב סטציוני והפילוג השולי של כל הממצבים הבאים (

$$\forall n \geq k \quad X_n \neq \underline{\pi})$$

2. אם  $\underline{\pi}' = \underline{\pi}(0)$  אזי מתקיים  $\underline{\pi}' = \underline{\pi}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$  והשרשרת נקראת סטציונית.  
 למעשה זו סטציונריות מלאה במובן הצר מכיוון שאנו מקבלים שהפילוג המשותף קבוע  
 בזמן כי בכל נקודות הזמן הפילוג השולי של המצב קבוע – הוא מתחילה מהפילוג  
 הסטציוני.

דרישה שcola היא שפילוג התחלה  $\underline{\pi}(0)$  יהיה ו"ע שמאלית של המטריצה  $P$  עם ע"ע  
 $\lambda = 1$ .

טענה:

אם עבור שרשרת מركוב עם פילוג סטציוני  $\underline{\pi}'$  קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}'(n) = \underline{\pi}''$  אזי  $\underline{\pi}''$  חייב  
 להתכנס לווקטור הסטציוני של השרשרת, ז"א מתקיים  $\underline{\pi}' = \underline{\pi}''$ .  
הוכחה:

קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}'(n+1) = \underline{\pi}'''$  אז גם מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}'(n) = \underline{\pi}'''$ . ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\underline{\pi}(n) \cdot \underline{\underline{P}}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\pi}(n) \cdot \underline{\underline{P}}$$

$$\underline{\pi}'' = \underline{\pi}'' \cdot \underline{\underline{P}}$$

קיבלנו ש-  $\underline{\pi}$  הוא וקטור סטציוני של מטריצה  $\underline{\underline{P}}$  ומיחידות הגבול  $\underline{\pi}'' = \underline{\pi}'$ .

### **אפיון שרשרות מركוב**

נרצה לענות על השאלה הטבעית מתי שרשרת מركובית תתנהג באופן כזה בו אין תלות במצב ההתחלתי (כמו החיפושית), ז"א נרצה לדעת מתי שרשרת תתכנס לפילוג שלו סטציוני. כמובן שנדון רק בשרשראות מركוב הומוגניות וסופיות. לצורך אפיון השרשרת נסוג את מצביו המערכת לפידיאגרמת המצבים (או מטריצת המעברים).

#### **הגדירות סיוג:**

1. **נגישות:** נאמר ש מצב  $j$  נגיש למצב  $i$  ונסמן  $j \rightarrow i$  אם יש מסלול כלשהו

(במספר שלבים סופי) ממצב  $i$

ל המצב  $j$ .

2. **קשריות:** נאמר ש מצב  $i$  קשור למצב  $j$  ונסמן  $j \leftrightarrow i$  אם  $j \rightarrow i$  וגם  $i \rightarrow j$ .

הערה – קשריות הינה תכונה טרנסיטיבית, משמע אם  $j \leftrightarrow i$  וגם  $i \leftrightarrow k$  אז

$i \leftrightarrow k$ .

3. **מחלקה:** מחלוקת היא אוסף מקסימלי של מצבים קשורים. בחלוקת כל המצביעים קשורים אחד לשני ואין אף מצב אשר קשור לאיבר אשר לא נמצא בחלוקת.

4. **מצב נשנה:** מצב הנגיש מכל מצב הנגיש ממנו (מצב הנגיש רק למצביעים שהוא קשור איתם), ז"א מצב

שניינן לחזור אליו אם עזבנו אותו.

5. **מצב חולף:** מצב שאינו נשנה. ז"א מצב שניינן להמשיך ממנו למצב שלא ניתן לחזור.

מצב חולף יופיע מספר סופי של פעמים.

6. **מחלקה נשנית:** מחלוקת שכל איבריה נשנים. על מנת לבדוק האם מחלוקת היא מחלוקת נשנית מספיק לבדוק עבור מצב בודך בה האם הוא מצב נשנה.

7. **מחלקה חולפת:** מחלוקת שאינה נשנית. מחלוקת שכל איבריה חולפים. על מנת לבדוק האם מחלוקת היא

מחלקה חולפת מספיק לבודור עברו מצב בודד בה האם הוא מצב חולף.

8. זמן חזרה: זמן חזרה של מצב  $i$  הם אוסף אורכי המוגלים היוצאים ממצב  $i$  וחזריים אליו.

זמן חזרה (אם קיימים) הם סדרה אינסופית ומסומנת ע"י  $\dots, n_1^i, n_2^i, \dots$ .

9. מחזור: מחזור של מצב  $i$  הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של סדרת זמני החזרה של המצביע, ד"א:

$$d(i) = GCD\left(\left\{n_k^i\right\}_{k=1}^{\infty}\right)$$

- ניתן לסוג מחלקות (חולפת/נסנית) לפי מטריצת המעברים עפ"י הזיהוי הבא:  
 מזהים מחלקות נשנות ע"י איתור תת-מטריצות ריבועיות כך שבאותן השורות יש רק אפשרים מלבד איברי תת-המטריצה (מצבי שורות תת-המטריצות לא ניתנים לעבר למצביעים מחוץ לה).  
 מזהים מחלקות חולפות ע"י איתור תת-מטריצות ריבועיות כך שבאותם הטורים יש רק אפשרים מלבד איברי תת-המטריצה (אל מצבים שורות תת-המטריצות לא הגיעו מכך מחוץ לה).

### מחלקה מחזורתית

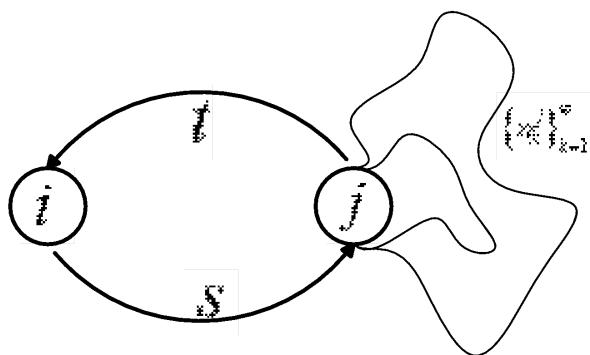
מחלקה תקרא מחלקה מחזורתית אם למצביע  $i$  אשר חבר בה מתקיים  $d(i) > 1$ .  
טענה - לכל המצביעים באותו המחלקה יש אותו מחזור.

הוכחה - ניקח שני מצבים  $j, i$ , מאותו מחלקה ונסמן  $d(i), d(j)$ .

נראה שמתקיים שהמחזור  $d(i)$  הוא מחלק של המחזור  $d(j)$  ולהיפך (ולבון).

$$d(i) = d(j).$$

נאמר שקיימים מסלול ממצביע  $i$  למצביע  $j$  באורך  $s$  וגם כי קיים מסלול הפוך באורך  $t$ .



מהגדרת מחזור של מצב אנו יודעים כי  $(i)^d$  הוא מחלק של כל זמני החזרה של המצב

$i$  ולכן:

$$\begin{aligned} d(i)|s+t \\ d(i)|s+t+n_k^j \quad \forall k \end{aligned} \Rightarrow d(i)|n_k^j \quad \forall k \Rightarrow d(i)|d(j)$$

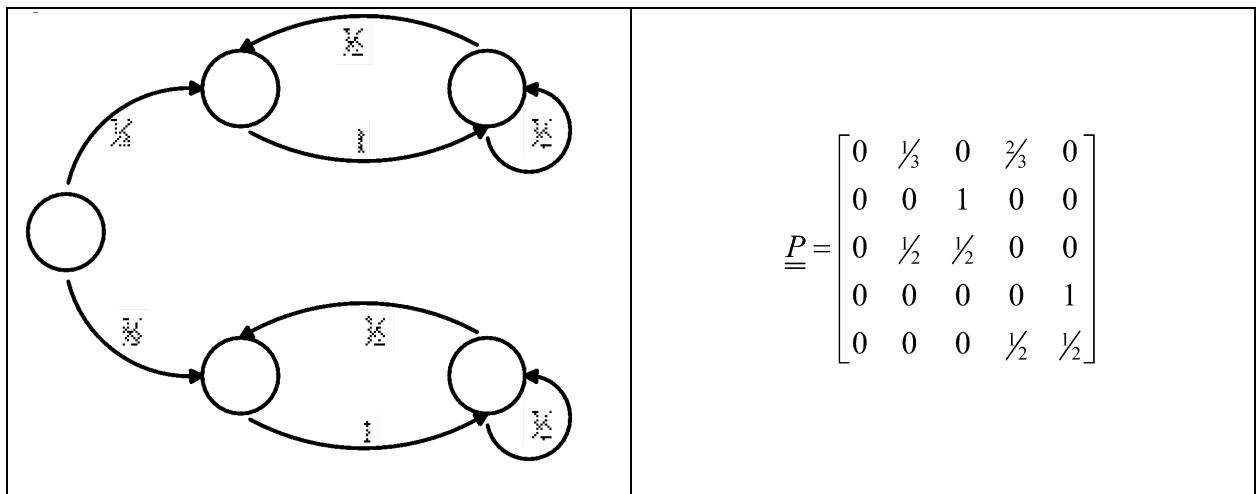
נהפוך תפקדים בין המצבים ונחשב באותו אופן ונקבל  $d(j)|d(i)$

מאחר שקיבלנו  $d(j)|d(i)$  וגם  $d(i)|d(j)$  (ז"א הם מחלקים אחד של השני) אז

$$d(i)=d(j)$$

#### דוגמא 1:

נתונה דיאגרמת המצבים (או המטריצה – ניתנות להמרה פשוטה):



נבע סיווג לפי מחלקות (נזכר כי בחלוקת חולפת כל המצבים חולפים ובחלוקת נשנית כל המצבים נשנים):

מחלקות (נזהה לפי תת-מטריצות ריבועיות עם איברי שורות/עמודות אפסים):

$$T_1 = \{1\} \bullet$$

$$T_2 = \{2, 3\} \bullet$$

$$T_3 = \{4, 5\} \bullet$$

שתי תת-מטריצות של המחלקות הנשנות זהות. בנוסף למת-מטריצות אלו קיים פילוג סטציוני (לא לשרשת כולה).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ובור המטריצה כולה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{pmatrix} P \\ \underline{P} \end{pmatrix}^n \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

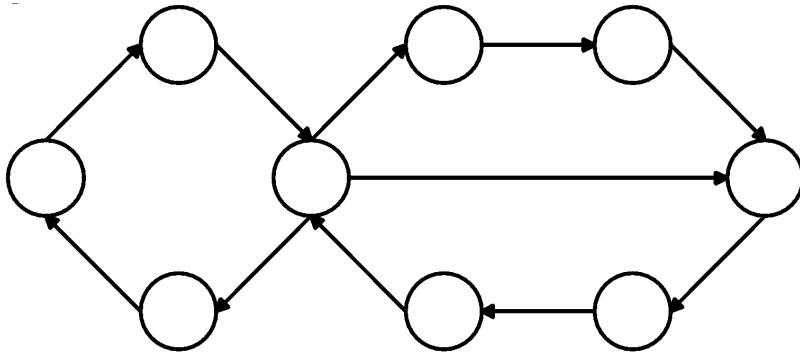
ערך וקטור השורה הראשונה שווה ל (בהתאם לסיכויי המעבר לכל אחת מהמחלקות והפילוג הסטציאנרי בהן):

$$\frac{1}{3} \cdot \pi^\infty(T_2) + \frac{2}{3} \cdot \pi^\infty(T_3)$$

שתי המחלקות הנשנות אינן מחזוריות מאחר ויש מסלול באורך אחד (מצטב 3 לעצמו וכן ניל' לגבוי איבר 5).

דוגמה 2 (חישוב מחזוריים בלבד):

נתונה דיאגרמת המ מצבים:



נזהה כי כל המ מצבים קשורים וכולם מהווים מחלקת נשנית אחת.

נחשב מסלולים עבור אחד המ מצבים, נגיד עבור מצב 1:

$$n_1^1 = 4, \quad n_2^1 = 8, \quad n_3^1 = 10, \quad n_4^1 = 12, \quad n_5^1 = 14, \dots$$

נזהה כי לעולם זמני החזרה ימשכו להיות זוגיים, ולכן:

$$d(1) = GCD(4, 8, 10, 12, 14, \dots) = 2$$

ז"א המחזור של המצב הוא 2, ולכן מחזור המחלוקת כולה הוא 2, מחלוקת זו מהוות את כל המ מצבים בשרשראת ולכן זה גם מחזור השרשראת.

"שיכון העבר"

ראיינו בדוגמה החיפושית כי אין חשיבות במצב ההתחלתי שלה. כמובן, אין תלות בתנאי ההתחליה.

נגדיר התנагות זאת כ"שיכון העבר" (חוסר זיכרון כלפי מצבי העבר).

נאמר שהרשראת מركובית שוכנת את העבר (ארוגודית) אם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j^\infty$$

הדבר צריך להתקיים עבור כל מצב אפשרי,  $\{j, \dots, 1\} \in J$  בשרשראת ומצב ההתחלתי  $i$ .

לכן אםרשראת הינה ארוגודית אז בכתיב אחר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{\pi}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{\pi}(0) \cdot (\underline{P})^n) = \underline{\pi}^\infty = (\underline{\pi}_1^\infty, \dots, \underline{\pi}_J^\infty)$$

כאשר  $\underline{\pi}(0)$  הוא וקטור המיצג את תנאי ההתחליה. לרוב נדע את מצבה ההתחלתי של השרשראת באופן דטרמיניסטי ואז יתקיים  $\underline{\pi}(0) = \underline{e}_i$ , כלומר הפילוג השולי של המצב ההתחלתי הוא וקטור ייחודה ממימד  $J$  (ווקטור אפסים עם 1 במקום ה-  $i$  אשר מייצג הסתברות 1 להיות במקום ה-  $i$  בזמן 0). ניתן גם פילוג לא דטרמיניסטי.

אם הגבול הנ"ל קיים אז הוא בהכרח מקיים את תכונת הווקטור הסטציונרי של השרשראת,

$$\text{כלומר } \underline{\pi}^{\infty} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\pi}^{\infty}.$$

אם השרשראת ארגודית אז הגבול צריך להתקיים עבור כל פילוג התחלתה  $(\underline{\underline{P}})^{(0)}$ , ובפרט עבור פילוגי התחלתה המיצג דיבעה דטרמיניסטיבית של המצב ההתחלתי – משמע ווקטור ייחידה מהבסיס הסטנדרטי  $\underline{e}_i$ . לכן מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{e}_i \cdot (\underline{\underline{P}})^n \right) = \underline{\pi}^{\infty}$$

המשמעות של מכפלת ווקטור ייחידה  $\underline{e}_i$  במטריצה היא קבלת השורה ה-  $i$  מן המטריצה.

ומכאן שכל שורותיה של  $(\underline{\underline{P}})^n$  צריכה להיות שוות לווקטור הסטציונרי  $\underline{\pi}^{\infty}$ .

נאמר שרשראת מركוב הומוגנית וסופית שוכחת את העבר (ארגדית) אם "מ" מטריצת המעברים שלה  $\underline{\underline{P}}$  מקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\underline{\underline{P}})^n \right) = \begin{bmatrix} \leftarrow & \underline{\pi}^{\infty} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \underline{\pi}^{\infty} & \rightarrow \end{bmatrix}$$

נבחן שהדבר לא מונע מהפילוג השולי של המצב ההתחלתי להיות ווקטור שונה מוקטור ייחידה מאחר שסק איבריו הוא אחד ושורות המטריצה  $(\underline{\underline{P}})^n$  זהות כולן אם השרשראת ארגודית. כמובן שנוכל לבדוק כי הדבר התקיים עבור דוגמת החיפושית.

## ארוגדיות (שיכון העבר)

תהליך אקראי יקרא ארוגדי (Ergodic) – בעל תכונות הארגודיות אם עבור מוגם ארוך מספיק כל פונקציה סטטיסטיות זמניות מתכנסת לסטטיסטיקה של התהליך. במקרה אחרות, ת"א הינו ארוגדי אם ניתן ללמוד את הפלוג המשותף המלא שלו (משמעותו את כל הפרמטרים הסטטיסטיים שלו) מתוך התבוננות בפונקציית מוגם (אורך מספיק) בודדת שלו. באופן זה, עבור ת"א ארוגדי, נוכל להסיק תכונות סטטיסטיות לפי ממוצע מוגם ולא ידע סטטיסטי מוקדים על התהליך. נציג כי עבור ת"א ארוגדי נקבל התבוננות מוגם יחיד שלו. באופן כללי, עיבודים של תהליכי אקראיים (או תכנון מערכות) מתבססים לא פעם על ידיעת הסטטיסטיקה שלהם. עבור ת"א שהסטטיסטיקה שלו לא ידועה (או ידועה באופן לא מספיק) נוכל "למדוד" את הסטטיסטיקה שלו בעזרת מוגם ארוך מספיק אם הוא ארוגדי.

## ארוגדיות בשרשראות מרקוב

ראינו כי ישנן שרשראות מרקוב אשר בעלות תכונות הארגודיות וגם כאלה שלא. נרחיב את הדיון בנושא ארגודיות בשרשראות מרקוב (הומוגניות וסופיות בלבד).

### משפט פרו-פרוביניווס (Perron-Frobenius Theorem)

עבור שרשרת מרקוב הומוגנית וסופית בעלת מטריצת מעברים  $\underline{P}$  מתקיים:

1. תמיד קיימים (לפחות אחד) פתרון הסתבירותי למשואה  $\underline{P} \cdot \underline{\pi} = \underline{\pi}$ . ככלומר תמיד קיימים

למטריצת המעברים  $\underline{P}$  ו"ע שמאליאי-שלילי עם  $u^T \underline{\pi} = 1 = \lambda$  (נובע מתכונות של מטריצה סטוכסית).

2. אם לשרשת יש מחלוקת נשנית יחידה אז הפתרון למשואה  $\underline{P} \cdot \underline{\pi} = \underline{\pi}$  הוא יחיד.

3. אם לשרשת יש  $r$  מחלוקות נשנות אז למשואה  $\underline{P} \cdot \underline{\pi} = \underline{\pi}$  יש  $r$  פתרונות בלתי תלויים ליניאריים.

כל קומבינציה הסתברותית (קומבינציה ליניארית עם מקדים אי-שליליים שסכוםם 1) של פתרונות אלו (הווקטורים הסטציונרים) הינה ו"ע של המטריצה, המשמעות היא

שהווקטורים הסטציונרים האלו פורסמים את כל הווקטורים העצמיים של המטריצה  $\underline{P}$ . כאמור, הווקטורים הסטציונרים האלו בת"ל ולכן ייראו מהצורה (סידרנו את המטריצה

$\underline{P}$  מטעמי נוחות):

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix} \quad \underline{\pi}_1^{Stat} = (*, *, 0, 0, 0) \\ \underline{\pi}_2^{Stat} = (0, 0, *, *, *)$$

4. השרשת היא ארגודית אם יש לה רק מחלוקת אחת והיא נשנית ולא מחזורית ( $d = 1$ ).

במקרה זה השרשת סטציונרית אסימפטוטית והוא מתכנסת לפילוג  $\underline{\pi}$  עבור כל  $\underline{\pi}(0)$ .

5. השרשת היא ארגודית עם תופעת מעבר (transient) אם יש לה מחלוקת נשנית יחידה (שאינה מחזורית) ובנוסף יש בשרשת מצבים חולפים (או מחלוקת חולפות כמובן). במצב זו מובטח כי אם נתחיל בחלוקת הנשנית נישאר בה ונתנוון ל蹶ה 4 ואם נתחיל באחד המצביעים החולפים אז בנקודות זמן כלשהי בודדות נגיע למחלוקת הנשנית. במקרה זה נוכל ללמידה מפונקציית מדגם ייחידה רק עלחלוקת הנשנית (ועל חלק מהחולפים אך לא בודדות מספיק בשבייל סטטיסטיקה).

• עבור שרשת ארגודית (עם או בלי transient) מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{P}}^n \right) = \begin{bmatrix} \leftarrow & \underline{\pi}^\infty & \rightarrow \\ & : & \\ \leftarrow & \underline{\pi}^\infty & \rightarrow \end{bmatrix}$$

נזכיר את המשפט עבור זיהוי שרשות שאינן ארגודיות:

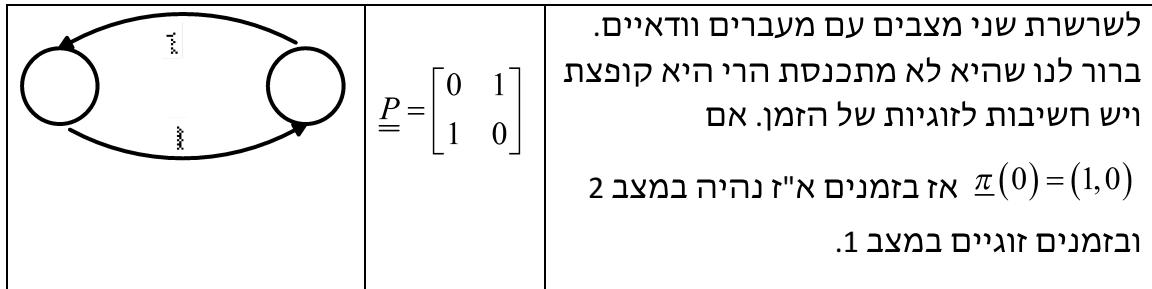
6. אם לשרשת יש שתי מחלוקות נשנות או יותר אז היא לא ארגודית. במקרה זה אם נתחיל בחלוקת נשנית כלשהיא אז נישאר בה ואם נתחיל במצב חולף אז נגיע לאותת מהמחלקות הנשניות אשר קשורות ממנו. לכן לא נוכל ללמידה את הסטטיסטיקה של כל המצביעים מדגם ייחיד.

אם במקרה זה כל המחלוקות הנשנות אינן מחזוריות אז  $\underline{\underline{P}}^n$  מתכנסת אבל שורותיה אינן זהות.

7. אם לשרשת מחלוקת נשנית אחת מחזורית  $d$  אז היא לא ארגודית. במקרה זה נוכל גם להוסיף תופעת מעבר.

בגלל שהחלוקת הנשנית מחזורית אז  $\underline{\underline{P}}^n$  לא מתכנסת (לא קיים הגבול) כוונת התופעת המחזוריות מונעת את הסטציונריות אך קיבל כי  $\underline{\underline{P}}^{d \cdot n+i} = \underline{\underline{P}}^i$   $\forall i = 0, 1, \dots, d-1$  מתכנסת.

דוגמאות לשרשאות מركוב לא ארגודיות:  
1. נתונה השרשת המחזורית הבאה:



לשרשת מחלוקת נסנית ייחידה עם מחזור 2, לכן לפי משפט FPF השרשרת לא ארגודית.

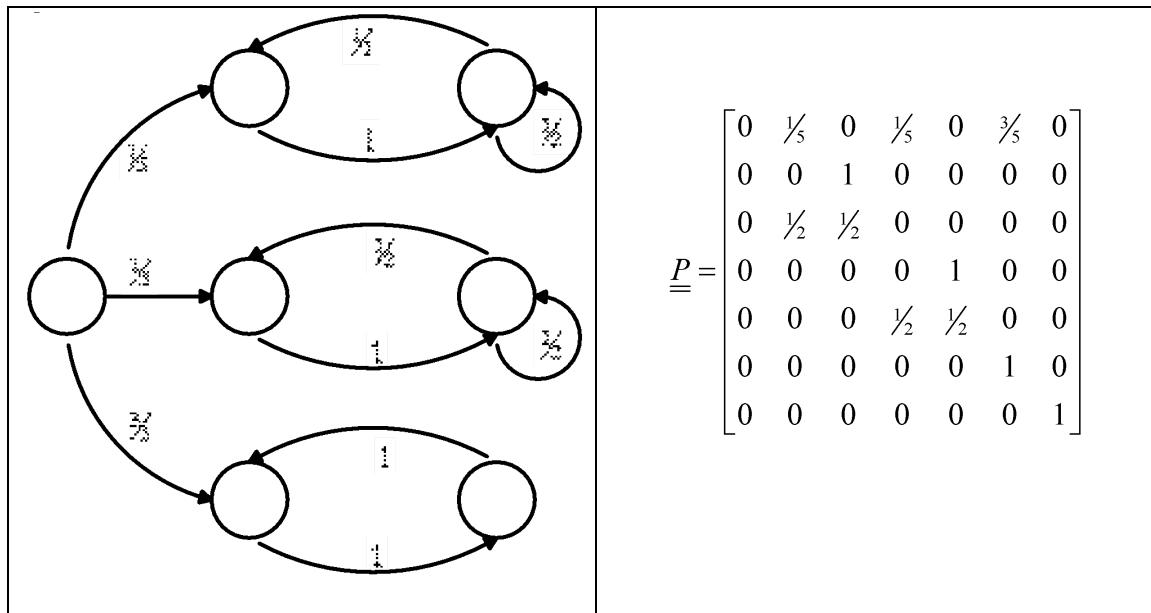
ממטריצת המעברים נראה כי לא קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{\underline{P}}^n)$ , אך קיימים הגבולות עבור  $(\underline{\underline{P}}^{2n})$  ו-  $(\underline{\underline{P}}^{2n+1})$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{\underline{P}}^{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{\underline{P}}^{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\pi^{stat} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  והגבולות שונים. בכל מקרה קיים לשווה  $\underline{\underline{P}} \cdot \pi$  פתרון והוא  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

2. נתונה השרשת הבאה:



נזהה מחלוקת לפי מטריצת המעברים (מחלקה חולפת, מחלוקות נשנות):

$$T_1 = \{1\}, T_2 = \{2, 3\}, T_3 = \{4, 5\}, T_4 = \{6, 7\}$$

$$\text{נחשב מחזורים ונקבל } d(T_2) = 1, \quad d(T_3) = 1, \quad d(T_4) = 2.$$

זו שרשראת עם תופעת מעבר ומספר מחלקות חדשות. בנוסף, לאחר המחלקות הנשנות שלה יש מחזור.

בגלל המחזור למטריצה  $\underline{\underline{P}}^n$  לא קיים הגבול

יש לנו שלוש מחלקות חדשות ולכון יש למשווה  $\underline{\underline{P}}^n = \underline{\underline{\pi}}$  שלושה פתרונות, אחד עבור

כל מחלוקת ונסמן בהתאם לשמות המחלוקות  $\underline{\pi}_{T_4}^{stat}, \underline{\pi}_{T_3}^{stat}, \underline{\pi}_{T_2}^{stat}$  (אך  $\underline{\pi}_{T_4}^{stat}$  מתנדנד ותלויה בזמן ולכון גם ערכו שונה) וקטור הפילוג הסטצionario מרכיב מקומבינציה הסתברותית שלהם, כלומר כל וקטור אשר עונה על:

$$\underline{\pi}^{stat} = p_1 \cdot \underline{\pi}_{T_2}^{stat} + p_2 \cdot \underline{\pi}_{T_3}^{stat} + p_3 \cdot \underline{\pi}_{T_4}^{stat} \quad p_1, p_2, p_3 \geq 0 \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

כמובן שלא נשאף לפילוג הסטצionario זהה עבור כל סט  $(p_1, p_2, p_3)$ , הדבר תלוי במקדים ובתנאי ההתחלתה (המשמעות היא רק שככל סט זהה יניב וקטור אשר פותר את המשווה  $\underline{\underline{P}}^n = \underline{\underline{\pi}}$ ).

נראה את הגבולות עבור  $\underline{\underline{P}}^n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{P}}^n \right)^{2,n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cdot \underline{\pi}_{T_2}^{stat} + \frac{1}{5} \cdot \underline{\pi}_{T_3}^{stat} + \frac{3}{5} \cdot \underline{\pi}_{T_4}^{even} \\ 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{bmatrix} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{P}}^n \right)^{2,n+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cdot \underline{\pi}_{T_2}^{stat} + \frac{1}{5} \cdot \underline{\pi}_{T_3}^{stat} + \frac{3}{5} \cdot \underline{\pi}_{T_4}^{odd} \\ 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{bmatrix}$$

נבחין בהתנדנדות עבור המחלוקת  $T_4$ , ולכון גם בפילוג הסטצionario שלה.

### **הגדרה פורמלית עבור ארגודיות**

ראינו כי ת"א הינו ארגודי אם ניתן ללמוד את הפילוג המשותף המלא שלו (משמעותו את כל הפרמטרים הסטטיסטיים שלו) מתוך התבוננות בפונקציית מדגם (ארוכה מספיק) בהזדמנות. למעשה תהליך אקראי הינו ארגודי אם המיצוע הזמני של כל פונקציה של ערכי התהליך מתכנס לתוחלת הפונקציה, זאת אומרת אם ממוצע זמני שווה לממוצע סטטיסטי עבור

פונקציה  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ :  $g$  כלשהו ולכל סט זמינים  $\mathbb{Z} \in k_1, \dots, k_M$ , כלומר:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} g(X_{k_1+i}, \dots, X_{k_M+i}) \right)^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( E[g(X_{k_1+N}, \dots, X_{k_M+N})] \right)^{**} = E[g(X_{k_1}, \dots, X_{k_M})]$$

עבור ת"א בזמן רציף הדבר נדרש להתקיים לכל סט זמני  $t_1, \dots, t_M \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=0}^T g(X(t_1+\tau), \dots, X(t_M+\tau)) d\tau \right)^* &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( E[g(X(t_1+\tau), \dots, X(t_M+\tau))] \right) = \\ &= E[g(X(t_1), \dots, X(t_M))] \end{aligned}$$

כאשר שיוויונים (\*) נובעים מسطציונריות אסימפטוטית ושיוויונים (\*\*) נובעים מسطציונריות.  
למעשה ארגודיות היא הכלל של חוק המספרים הגדולים (Law of Large Numbers) כי מתקיימת  
שם התכונות של ממוצע זמן למומוצע סטטיסטי. לדוגמה עבור מערכת עם הסתברות שגיאה  
0.1 לביט כאשר סדרת הביטים ארגודית נוכל להבטיח 10% שגיאה כללית בזמן (למשך זמן  
ארוך מספיק).

### חוק המספרים הגדולים (א.ל.)

עבור סדרה  $\{X_n\}$  ת"א.p.i.o. מתקיים:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X_n \right) = E[X_n]$$

נבחן כי א.ל. הוא מקרה פרטי של ארגודיות בו  $x = g(x)$  (ואז תוכן הגבול הוא ממוצע זמן אשר  
ושאך לתוחלת).

על מנת לבדוק האם חיבים שהסדרה  $\{X_n\}$  תהיה p.i.o. בשביל קיומ א.ל. נבחן את הפונקציה

עבור ת"א  $\{X_n\}$  סטציונרי ורגודי. נבחר סט זמני  $k_1 = 1, k_2 = 3$  ונקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (X_{1+n} \cdot X_{3+n}) \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (X_{n+1} \cdot X_{n+3}) \right)^* = E[(X_1 \cdot X_3)] = \\ &= R_{XX}(n+1, n+3) \stackrel{**}{=} R_{XX}(-2) \stackrel{***}{=} R_{XX}(2) \end{aligned}$$

שיוויון (\*) מארגודיות, שיוויון (\*\*) מسطציונריות ושיוויון (\*\*) מתכונות של פונקציית  
קורולוציה (זוגיות).

באופן כללי עבור סט זמני  $k_1, k_2$  נקבל:

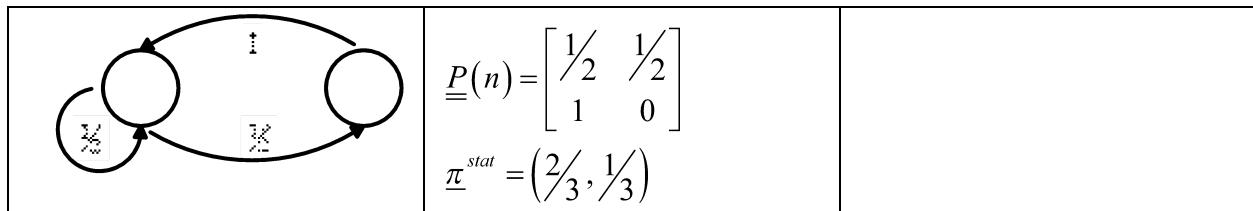
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (X_{k_1+n} \cdot X_{k_2+n}) \right) = R_{XX}(|k_2 - k_1|)$$

קיבלונו תכונת זיכרון, לכן נוכל להחילש את הדרישה וקיים ארגודיות יאפשר לנו הטענות  
משמעותי זמני למומצע סטטיסטי גם עבור תהליכי אקראיים אשר אינם p.i.i.

### **מציאת סטטיסטיקה של שרשרת מركוב ארגודית**

מהגדרת הארגודיות, עבור ת"א ארגודי ניתן למצוא את כל הפרמטרים הסטטיסטיים שלו  
מידיעת פונקציית מדגם יחידה ארוכה ככל שנרצה. נרצה ללמידה פילוג מסדר כלשהו עבור  
שרשרת מركוב ארגודית מתוך התבוננות בפונקציית מדגם.

נראה איך לשערק את הפילוג הסטצionario ומטריצת המעברים בהינתן פונקציית מדגם של  
שרשרת מركוב ארגודית. נבצע זאת על שרשרת החיפושית (אנו יודעים עליה שהיא ארגודית  
וסטצionarioית), תזכורת:



ונניח פונקציית מדגם כלשהי שלה (האיברים מסומנים באות קטנה כי זו ריאלייזציה של  
התהיליך):

$$x_{n=0,1,\dots} = 1,1,2,1,2,1,2,1,1,2,\dots$$

### **שערון הפילוג הסטצionario של שרשרת מרכוב ארגודית**

נרצה לשערק את הפילוג הסטצionario  $\underline{\pi}^{stat}$ , נחשבו את איברי הווקטור תא-תא. הסתברות כל תא  
תהיה שכיחות הופעת המצביע המתאים בפונקציית המדגם (אנחנו משתמשים בפונקציית  
אינדיקטור ( $I_a(x)$ ):

$$\underline{\pi}_a^{stat}(N) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} I_a(x_i) \quad I_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

באופן זה עבור שערון  $\underline{\pi}_a^{stat}(N)$  אנחנו סופרים את מספר הפעמים שהופיע המצביע  $a$  בתוך  $N$   
האירועים ומחלקים ב-  $N$ , ז"א ממש מיצוע לכמויות הופעות שלו.

### **שערון מטריצת המעברים של שרשרת מרכוב ארגודית (והומוגנית)**

נרצה לשערק את מטריצת המעברים  $\underline{\underline{P}}$ , לשם כך נחשב את איברי המטריצה תא-תא.

נשערק את הסתברות המעבר  $P(a,b)$  (הסתברות המעבר מ מצב  $a$  למצב  $b$ ) באופן הבא:

i. נשרך את הפילוג המשותף  $\Pr(X_n = a, X_{n+1} = b)$  ע"י סכימת ההופעות של המצביע  $b$

אחרי המצביע  $a$ , נבחן כי עברו סדרה בגודל  $N$  יש  $1 - N$  מעברים (אנחנו משתמשים

בפונקציית אינדיקטור כפול  $(I_{ab}(x))$ :

$$\underline{P}(a,b)(N) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-2} I_{ab}(x_i, x_{i+1}) \quad I_{ab}(x, y) = \begin{cases} 1 & x = a, y = b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ii. נחשב מן הסיכוי המשוערך הנ"ל את הסתברות המותנית  $\Pr(X_{n+1} = b | X_n = a)$  אשר מtabסת על השערוך המקורי עפ"י הנוסחה להסתברות מותנית (ושימוש בשערוך ההסתברות למצביע  $a$ ).

$$\Pr(X_{n+1} = b | X_n = a) = \frac{\Pr(X_{n+1} = b \cap X_n = a)}{\Pr(X_n = a)} = \frac{\Pr(X_n = a, X_{n+1} = b)}{\Pr(X_n = a)} \\ \Rightarrow \underline{P}_{ab}(N) = \underline{P}(a,b)(N) = \frac{\underline{P}(a,b)(N)}{\underline{\#}_a^{\text{stat}}(N)}$$

דוגמה:

עבור דוגמת החיפושית עם פונקציית המדגם (הקטנה -  $N = 10$ ) הנ"ל נשרך את הפילוג הסטצionarioרי:

$$\underline{\#}^{\text{stat}}(10) = (\underline{\#}_1^{\text{stat}}(10), \underline{\#}_2^{\text{stat}}(10)) = \left(\frac{6}{10}, \frac{4}{10}\right) = (0.6, 0.4)$$

נחשב את סיכוי המעבר עבור תא בודד (המייצג את הסתברות המעבר ממצביע 2 לעצמו):

$$\underline{P}_{2,2}(10) = \frac{\underline{P}(2,2)(10)}{\underline{\#}_2^{\text{stat}}(10)} = \frac{0/9}{0.4} = 0$$

עבור הפילוג הסטצionarioרי אכן מתקיים  $(0.6, 0.4) \approx \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  ולגביו ה的信任ות המעבר בהחלט אין סיכוי כזה.

הערות:

- אם יש מחלוקת נשנית אחת בלבד אז ניתן ללמידה את הפילוג המשותף מכל סדר (לפחות באופן אסימפטוטי) מתוך פונקציית מדגם בודדת ויתקיים:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \hat{\pi}_a^{\text{stat}}(N) \right) = \pi_a^{\text{stat}} \quad \forall a \in \{1, \dots, J\} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \hat{\pi}^{\text{stat}}(N) \right) = \underline{\pi}^{\text{stat}}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \hat{P}_{ab}(N) \right) = \underline{P}(a, b) \quad \forall a, b \in \{1, \dots, J\}$$

- אם אין סטציונריות אסימפטוטית (לפחות) אז לא נקבל התוכנסות כזאת. נניח עבור מחלוקת נשנית בת שני מצבים עם קפיצה עם מצב 2 (מצב ראשון לעומת מצב שני ומצב שני לעומת מצב השני) לא קיימת התוכנסות ל- A. כלליאלית רק בהפרדה לזוגי וαι-זוגי.
- אם יש בשרשראות יותר מחלוקת נשנית אחת אז לא נוכל ללמידה אותה מהסתכליות בפונקציית מדגם בודדת כי בהכרח ניבור בכל היותר בחלוקת נשנית אחת (לכל היותר ולא בהכרח מכיוון שיש את הסיכוי הקלוש להישאר בין מצבים חולפים) אשר אותה נלמד היטב.
  - בשרשראות לא ארגודית לעולם לא נוכל ללמידה את הסטטיסטיקה שלה מהתבוננות בריאליזציה בודדת.

### **הקשר בין ההגדרה האינטואיטיבית והפורמלית של ארגודיות**

ראינו בתחום הנושא כי ארגודיות באופן אינטואיטיבי היא היכולת ללמידה סטטיסטייה מלאה של ת"א על פי פונקציית מדגם ייחידה שלו. בהמשך הנושא הצגנו הגדרה פורמלית בו ארגודיות נתפסה כהתוכנסות הממוצע הזמן של פונקציה זמנית כלשהי על ת"א לממוצע הסטטיסטי (תוחלת) של אותה פונקציה על דוגמאותיו. נראה שההגדרות שקולות.

ביוון ראשון:

ידוע כי הממוצע הזמן מתכנס לממוצע סטטיסטי, נרצה להראות שנוכל ללמידה סטטיסטייה של התהליך. נציגים עבור פילוג שלוי מסדר 2 (שתי נקודות זמן של התהליך, נוכל עבור כל סדר באופן זהה), תוך שימוש בפונקציית אינדיקטור כפולה:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} I_{ab}(X_{k_1+i}, X_{k_2+i}) \rightarrow E[I_{ab}(X_{k_1}, X_{k_2})] = \Pr(X_{k_1} = a, X_{k_2} = b)$$

הראינו שבידיעת העובדה כי ממוצע הזמן מתכנס לממוצע סטטיסטי אנו יכולים להשתמש

בתכונות הארגודיות על פונקציה  $(x, y) = I_{ab}(x, y)$  ולקבל את הפילוג שלוי  $\Pr(x = a, y = b)$ .

ביוון שני:

ידוע כי נוכל ללמידה את הסטטיסטיקה של התהליך, נרצה להוכיח שממוצע הזמן מתכנס לממוצע סטטיסטי.

נרכיב פונקציה מסוימת (שוב, נציגים עבור פונקציה של שתי דוגמאות של הת"א) בעזרת פונקציית אינדיקטור ע"י (אנו מגדמים עבור ת"א סופי מטעמי נוחות, נוכל גם לעבוד עם אינטגרל בתיאוריה):

$$g(x, y) = \sum_{a=1}^J \sum_{b=1}^J g(a, b) I_{ab}(x, y)$$

הדבר יתאים עבור כל פונקציה כי אלו סוכנים את כל ערכיה האפשרים כפול אינדייקציה רק לערכים הרלוונטיים, ז"א רק כאשר יתקיים  $(a, b) = (x, y)$  אז איבר הסכימה לא יהיה אפס וערכו יהיה  $g(a, b) \cdot 1 = g(x, y)$ .

ומידעת העובדה שהסתטיסטיקה מתכנסת נרצה להראות שמיוצע הפונקציה בזמן יתכנס לתוחלת הפונקציה:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} g(X_{k_1+i}, X_{k_2+i}) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \sum_{a=1}^J \sum_{b=1}^J g(a, b) I_{ab}(X_{k_1+i}, X_{k_2+i}) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \sum_{a=1}^J \sum_{b=1}^J g(a, b) \cdot \frac{I_{ab}(X_{k_1+i}, X_{k_2+i})}{N} \right] \rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \sum_{a=1}^J \sum_{b=1}^J g(a, b) \Pr(X_{k_1} = a, X_{k_2} = b) \right] = \\ &= E[g(X_{k_1}, X_{k_2})] \end{aligned}$$

וקיבלנו את ההתכנסות הרצוייה.

### ארגודיות שלושה

בזכור, ההגדרה הפורמלית עבור ארגודיות היא התכנסות של הממוצע הזמני של כל פונקציה לממוצע הסטטיסטי (תוחלת) שלה. ישנו תהליך אשר לא מקיימים תcona זאת עבור כל פונקציה אלא רק עבור חלק (ארגודיות שלושה).

נאמר שת"א  $X^{(t)}$  (או עבור ת"א בזמן רציף  $X_n$ ) ארגודי ביחס לפונקציה מסוימת

$\text{אם } g: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R} \text{ מתקיימת ארגודיות ביחס לפונקציה זו, כלומר מתקיים:}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=0}^T g(X(t_1 + \tau), \dots, X(t_M + \tau)) d\tau \right) = E[g(X(t_1), \dots, X(t_M))] \quad \forall t_1, \dots, t_M \in \mathbb{R}$$

עבור התכנסות זאת נדרש שהתהליך יהיה לפחות סטציונירי אסימפטוטית (ס"א). מאחר שלא כל תהליך הוא ארגודי חזק למעשה נוכל לשער גדים מסוימים באופן לא מוצלח.

### שערון פרמטרים של תהליך אקראי

נניח כי אנו מנסים לשער על פרמטר מסוים של ת"א (מקדמ  $\alpha$  של ת"א R.A. ליניארי, תוחלת של ת"א, פזה וכדומה). נסמן את הפרמטר המשוער ב-  $\Theta$  ואת המשער שלו ב-  $(\Theta(T))$ . נזהה כי

$\Theta$  הוא גודל דטרמיניסטי ( רק שאנו לא ידעים אותו) ואילו  $(\Theta(T))$  הוא תהליכי אקראי

(מתבסס על דגימותיו של הת"א בזמן  $[0, T]$ ).

קיים גבול במובן MSE עבור סדרה אקראית:

נרצה להעמק את ההבנה לגבי קיום גבול עבור סדרה אקראית ולהבין מה המשמעות של סדרה אקראית אשר מתכנסת לקבוע. למעשה מה המשמעות של:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\Theta(T)) = \Theta$$

נאמר שת"א  $X[n]$  (או  $X(t)$  עבור ת"א בזמן רציף) שואף לקבוע  $\alpha$  כאשר  $\infty \rightarrow N$  אם מתקיים:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[(X[N] - \alpha)^2] = 0$$

ונסמן  $X[n] \xrightarrow{MSE} \alpha$ .

הערה - שאיפה במובן MSE גורר שאיפה בהסתברות.

נניח כי מתקיים  $\alpha \xrightarrow{MSE} X[n]$  ולכן:

$$\Pr(|X[N] - \alpha| \geq \varepsilon) = \Pr((X[N] - \alpha)^2 \geq \varepsilon^2) \stackrel{\text{Markov's Inequality}}{\leq} \frac{E[(X[N] - \alpha)^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

קיבנו שאיפה לאפס לכל  $\varepsilon$ , אז זו למעשה שאיפה בהסתברות.

כעת, כאשר התכוונו לערך מסוים נרצה לדעת לבחון את איקות המשער.

משער חסר הטיה אסימפטוטית:

נאמר שהשער  $(\Theta(T))$  (של הפרמטר  $\Theta$ ) הוא משער חסר הטיה אסימפטוטית אם מתקיים

$$E[\Theta(T)] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \Theta$$

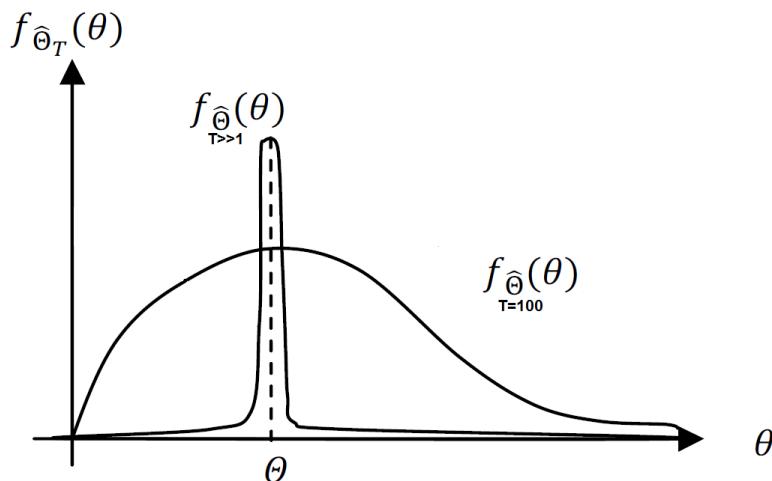
משער עקבי:

נאמר שהשער  $(\Theta(T))$  (של הפרמטר  $\Theta$ ) הוא משער עקבי אם:

1.  $\hat{\Theta}(T)$  הוא משערך חסר הטיה אסימפטוטית

$$\text{Var}\left(\hat{\Theta}(T)\right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

המשמעות של ההגדרה היא שמתקיים  $\lim_{T \rightarrow \infty} f_{\hat{\Theta}(T)}(x) = \delta(x - \Theta)$ . כלומר ככל ש-  $T$  גדול בר- פילוג המשערך מתקרב להלם סביב הערך הדטרמיניסטי של הפרמטר.



#### תהליך ארגודי בפרמטר:

נאמר שת"א הוא ארגודי בפרמטר  $\Theta$  אם קיים משערך  $\hat{\Theta}(T)$  שהוא משערך עקי של  $\Theta$ .

#### ארגודיות בתוחלת ובקורולציה

נרכיב את הדיון בארגודיות החלשה ביחס לשתי פונקציות ספציפיות. אנו דורשים שהתהליך האקראי יהיה סטציונירי לפחות אסימפטוטית לצורך קיום הגבול (הפילוג השולי באינסוף לא תלוי בזמן).

#### ארגודיות בתוחלת:

ת"א  $X(t)$  סטציונירי אסימפטוטי (ס"א) יקרא ארגודי ביחס לתוחלת (או בקצרה – ארגודי

בתוחלת) אם הוא ארגודי ביחס לפונקציה הספציפית  $x = g$ , כלומר מתקיים:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\eta}_X(t_1)(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^T X(t_1 + \tau) d\tau \right) = E[X(t_1)] = \eta_X^{stat}$$

מהחר והתהליך סטציונירי (פחות אסימפטוטית) נוכל לרשום:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\eta}_X(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_0^T X(t) dt \right) = E[X(t)] = \eta_X^{stat}$$

#### ארגודיות בקורסולציה:

ת"א **סטציונרי אסימפטוטי** (ס"א) יקרא ארגדי ביחס לקורולציה (או בקצרה – ארגדי בקורסולציה) אם הוא ארגדיividually) בלבד לפונקציה הספציפית  $y \cdot g(x, y)$ , כלומר מתקיים:

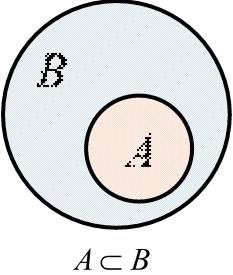
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( R_{XX}(t_1, t_2)(T) \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=0}^T X(t_1 + \tau) \cdot X(t_2 + \tau) d\tau \right) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \\ = R_{XX}^{stat}(t_1, t_2) = R_{XX}^{stat}(|t_2 - t_1|)$$

מהחר והתהליך **סטציונרי** (לפחות אסימפטוטית) נוכל לרשום:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( R_{XX}(\tau)(T) \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=0}^T X(t) \cdot X(t + \tau) dt \right) = R_{XX}^{stat}(\tau)$$

### תנאים לארגודיות בתוחלת

מציג תנאים הכרחיים ותנאים מופיעים עבור ארגודיות בתוחלת של ת"א.

 <p><math>A \subset B</math></p>	<p><b>תנאי מספיק –</b> תנאי מספיק הוא אשר קיומ טענה <math>A</math> גוררת בהכרח את קיומ טענה <math>B</math>. נסמן ע"י <math>A \Rightarrow B</math>, ז"א מספיק לדעת כי <math>A \in x</math> בשwil לקבוע כי <math>x \in B</math>. טענה שcola עבור <math>B \Rightarrow A</math> היא <math>A \Rightarrow B</math>.</p> <p><b>תנאי הכרחי –</b> תנאי הכרחי הוא אשר על מנת לקבוע את קיומ טענה <math>A</math> בהכרח חיבת להתקיים טענה <math>B</math>. לדוגמה עבור קיומ <math>A \in x</math> בהכרח חייב להתקיים <math>B \in x</math>. נבחן כי תנאי הכרחי הוא לא מספיק – לדוגמה אם מתקיים <math>B \in x</math> אין הדבר אומר בהכרח כי מתקיים <math>A \in x</math>. אם טענה <math>B</math> היא תנאי הכרחי לטענה <math>A</math> אז ניתן להסיק את התנאי המספיק <math>A \Rightarrow B</math>.</p> <p><b>תנאי הכרחי ומספיק –</b> קיום של שני התנאים יחד (<math>A \wedge B</math>) הוא למעשה שקלות לוגית בין טענה <math>A</math> וטענה <math>B</math>. הדבר מתקיים לאחר ש- <math>A</math> ניתן להסיק את <math>B</math> (מספיק) ומו- <math>B</math> ניתן להסיק את <math>A</math> (הכרחי), כלומר <math>A \Leftrightarrow B</math>.</p>
---	---

נסמן את התהליך האקראי  $(t) X$  (או  $[n] X$  עבור ת"א בזמן בדיד). נניח לשם ה"ניקיון" כי התהליך סטציונירי.

ראינו כי על מנת לדרש התכנסות אנו למשה צרכיים לדרש שהמשערק יהיה עקי (התוחלת תכנס לעירך המשוערך הדטרמיניסטי והשונות תכנס לאפס). אנו דנים בפרמטר התוחלת.

משערק התוחלת בנוי על הפונקציה  $x = g$  ולכון הוא למשה:

$$\eta_X(T) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T X(t) dt$$

נראה כי חוסר ההטיה מובטח עבור כל  $T$  (ללא השפה  $\infty \rightarrow T$ ) אם התהליך סטציונירי (תוחלת קבועה בזמן):

$$\begin{aligned} E[\eta_X(T)] &= E\left[\frac{1}{T} \cdot \int_0^T X(t) dt\right] = \frac{1}{T} \cdot E\left[\int_0^T X(t) dt\right] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E[X(t)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \eta_X(t) dt \stackrel{\text{Stationarity}}{=} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \eta_X dt = \frac{1}{T} \cdot \eta_X \cdot \int_0^T 1 dt = \eta_X \cdot \frac{1}{T} \cdot T = \eta_X \end{aligned}$$

נותר לבדוק את התנאי עבור התכונות השונות לאפס. נרצה לדעת מתי מתקיים

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \text{Var}(\hat{\eta}_X(T)) \right) = 0$$

$$\text{Var}(\hat{\eta}_X(T)) = \text{Var}\left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T X(t) dt\right) = \dots = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T C_{XX}(t) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt$$

למעשה מתקיים

נראה כי הדבר אכן מתקיים (עבור ת"א בזמן בידיד מטמוני נוחות):

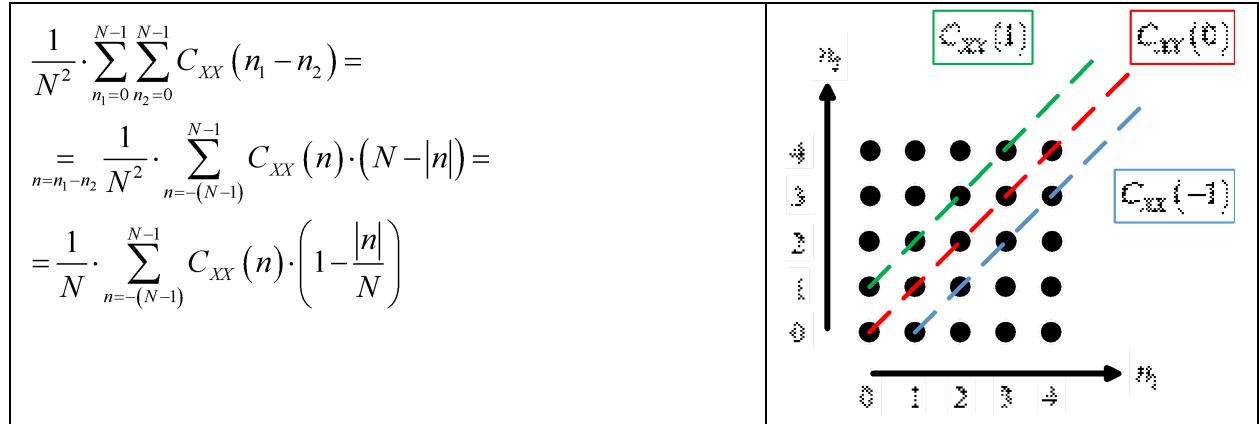
$$\begin{aligned} \eta_X(T) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \\ \text{Var}(\hat{\eta}_X(T)) &= E\left[\left(\hat{\eta}_X(T) - E[\hat{\eta}_X(T)]\right)^2\right]^* = E\left[\left(\hat{\eta}_X(T) - \eta_X\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X[n] - \eta_X\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (X[n] - \eta_X)\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{N^2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{N-1} (X[n] - \eta_X)\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{N^2} \cdot E\left[\left(\sum_{n_1=0}^{N-1} (X[n_1] - \eta_X)\right) \left(\sum_{n_2=0}^{N-1} (X[n_2] - \eta_X)\right)\right] = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} E[(X[n_1] - \eta_X)(X[n_2] - \eta_X)] = \\ &= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} C_{XX}(n_1, n_2) \stackrel{\text{Stationarity}}{=} \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} C_{XX}(n_1 - n_2) \end{aligned}$$

שיויון (\*) מתכונת חוסר ההטייה של התוחלת עבור ת"א סטציוני. שיויון (\*\*) משומש  
שנכניס את קבוע התוחלת לסכום ולכון היא תחולק באורך הסכום ואז נוכל להוציא את השבר  
בכורים משותף.

אנו צריכים לסקום למעשה את הגודל  $C_{XX}(n_1 - n_2)$  עבור כל קומבינציה  $(n_1, n_2)$  אפשרית

$$\text{כאשר } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

נבחר לסקום בנפרד את כל הקומבינציות האלו אשר יש להן אותו הפרש. ניתן לראות את  
נקודות אלו באופן גרפי ע"י אלכסונים (תיזה מן האלכסון הראשי תקטין את מספר האיברים  
באלכסון אחד). באלכסון הראשי יש  $N$  איברים.



טענה א' – סט תנאים:

1. אריגודיות ביחס לתוחלת אמ"ם (הכרחי ומשמעותי) מתקיים:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} C_{XX}(n) \cdot \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T C_{XX}(t) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0$$

ማחר שפונקציה האוטו-קו-ואריאנס הינה פונקציה זוגית תנאי שקול הוא:

$$\frac{2}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} C_{XX}(n) \cdot \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{2}{T} \cdot \int_0^T C_{XX}(t) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0$$

וכמוון ש- 2 במכנה לא קריטי.

2. אריגודיות ביחס לתוחלת אמ' (תנאי מספיק) מתקיים:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} |C_{XX}(n)| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T |C_{XX}(\tau)| d\tau \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0$$

ማחר שמקדם הקורולציה ( $\rho_{xx}$ ) דומה לפונקציית הקורולציה עד כדי נירמול בהספק האות נוכל לרשום את התנאי המספיק באופן הבא:

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{C_{XX}(\tau)}{C_{XX}(0)} \Rightarrow \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} |\rho_{xx}(n)| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T |\rho_{xx}(\tau)| d\tau \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0$$

3. אריגודיות בתוחלת מתקיימת אם (תנאי מספיק) מקדם הקורולציה ( $\rho_{xx}(\tau)$ ) מקיים לפחות אחד התנאים:

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{C_{XX}(\tau)}{C_{XX}(0)} \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} 0 .a$$

b. או-התבדרות האינגרל  $\int_0^\infty |\rho_{xx}(\tau)| d\tau < \infty$ , קלומר

תנאי 1 הוא דרישת בדיקת הגדרת העקביות של מושער (mbitio השונות של הערות – המושער).

תנאי 2 נובע מתנאי 1 לפי הchlשה שלו:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T C_{XX}(t) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt \leq \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T C_{XX}(t) \cdot 1 \cdot dt \leq \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T |C_{XX}(t)| dt$$

תנאי 3א' נובע מהגדרת מקדם הקורולציה ומהגדרת הספק אותן (סופי).

תנאי 3ב' נובע לפי אי-התבדדות האינטגרל (נסיק ממנו את תנאי 2 אשר כבר הסבירנו):

$$\exists A: \int_0^\infty |\rho_{XX}(\tau)| d\tau = A \Rightarrow \frac{1}{N} \cdot \int_0^\infty |\rho_{XX}(\tau)| d\tau = \frac{A}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

טענה ב' – תנאי סלוצקי (Slutsky's Theorem):

עבור ת"א סטציונירי תתקיים ארגודיות בתוחלת לפי תנאי סלוצקי אם ום (תנאי הכרחי ומספיק) מתקיים:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} C_{XX}(n) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^T C_{XX}(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0$$

בטענה א' תנאי 1 אנו מבחינים כי אנו לוקחים את פונקציית האוטו-קו-ואריאנס ומכפילים אותה בחילון משולשי ברוחב  $2T$  עם גובה מקסימלי 1, זאת מוחיתים אותה. לכן תנאי מספיק הוא אם הביטוי מתכנס לאפס ללא ההנחהה.

דיוון בארגודיות בתוחלת של שרשרת מרקוב:

נרצה להראות עבור שרשרת מרקובית סטציונרית כי שכחת העבר שකולה להתכנותות ממוצע זמני לממוצע סטטיסטי.

ז"א נרצה להראות כי אם מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{P}}^n \right) = \begin{bmatrix} \leftarrow & \pi^\infty & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \pi^\infty & \rightarrow \end{bmatrix}$$

אז מתקיים:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{\pi}}^{\text{stat}}(N) \right) = \underline{\pi}^{\text{stat}}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{P}}_{ab}(N) \right) = \underline{\underline{P}}(a, b) \quad \forall a, b \in \{1, \dots, J\}$$

למעשה מספיק להראות את הקיום של התכנותות ערך הסתברות המעבר (כי נוסחו כוללת את הפילוג השולי של מצב המקור – נובע מהסתברות מותנית ופותח בנושא מציאות סטטיסטיקה של שרשרת מרקוב ארגודית).

מן הביטוי עבור מושער התפלגות המעבר נראה שימושה נctrיך להראות כי הפילוג השולי המשוערך מתכנס לפילוג השולי הסטטיסטי:

$$\mathbb{P}(a,b)(N) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-2} I_{ab}(x_i, x_{i+1}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \Pr(x_i = a, x_{i+1} = b)$$

לכן למעשה נדרש להראות שפונקציית האינדיקטור  $I_{ab}(x, y)$  ארוגודית ביחס לתוחלת. נראה את הדבר ע"י שימוש בתנאי 3א', כולם נראה כי מקדם הקורולציה בין זוג דגימות שואף לאפס. אנו נתונים בשרשרת מركוב ולכן עבורנו פונקציית האינדיקטור תמיד פועלת על זוג זמינים סמוכים

$$\text{ולכן למעשה } I_{ab}(k) = I_{ab}(X_k, X_{k+1})$$

$$E[I_{ab}(X_i, X_{i+1})] = \Pr(X_i = a, X_{i+1} = b) = \pi_a^{stat} \cdot \underline{\underline{P}}(a, b)$$

$$R_{I_{ab}I_{ab}}(k) = R_{I_{ab}I_{ab}}(i+k, i) = E[I_{ab}(X_{i+k}, X_{i+k+1}) \cdot I_{ab}(X_i, X_{i+1})]$$

$$\text{מתקיים } I_{ab}(X_{i+k}, X_{i+k+1}) \cdot I_{ab}(X_i, X_{i+1}) = 1$$

$$\begin{aligned} R_{I_{ab}I_{ab}}(k) &= 1 \cdot \pi_a^{stat} \cdot \underline{\underline{P}}(a, b) \cdot \Pr(X_{i+1} = b, X_{i+k} = a) \cdot \underline{\underline{P}}(a, b) = \\ &= \pi_a^{stat} \cdot (\underline{\underline{P}}(a, b))^2 \cdot \Pr(X_{i+1} = b, X_{i+k} = a) \end{aligned}$$

ולכן פונקציית האוטו-קו-ואריאנס המתאימה היא:

$$\begin{aligned} C_{I_{ab}I_{ab}}(k) &= R_{I_{ab}I_{ab}}(k) - E[I_{ab}(X_{i+k}, X_{i+k+1})] \cdot E[I_{ab}(X_{i+k}, X_{i+k+1})] = \\ &= \pi_a^{stat} \cdot (\underline{\underline{P}}(a, b))^2 \cdot \Pr(X_{i+1} = b, X_{i+k} = a) - \pi_a^{stat} \cdot \underline{\underline{P}}(a, b) \cdot \pi_a^{stat} \cdot \underline{\underline{P}}(a, b) = \\ &= \pi_a^{stat} \cdot (\underline{\underline{P}}(a, b))^2 \cdot \Pr(X_{i+1} = b, X_{i+k} = a) - (\pi_a^{stat})^2 \cdot (\underline{\underline{P}}(a, b))^2 = \\ &= \pi_a^{stat} \cdot (\underline{\underline{P}}(a, b))^2 \cdot [\Pr(X_{i+1} = b, X_{i+k} = a) - \pi_a^{stat}] \end{aligned}$$

אך משיכחת העבר נקבע  $C_{I_{ab}I_{ab}}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . לכן  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Pr(X_{i+1} = b, X_{i+k} = a)) = \pi_a^{stat}$  משמע ארוגודיות.

## ספקטורים הספק

ספקטום הספק (PSD = Power Spectral Density) היא פונקציה אי-שלילית אשר מציגה את ההספק ליחידת תדר (ומכאן שמה 'צפיפות הספק-ספקטורי') עבור אותן בזמנן (דטרמיניסטיים או סטוכסטיים/אקראיים). אנו נחשב את ספקטורים ההספק עבור ת"א WSS בלבד.

### חישוב ספקטורים הספק

ספקטום הספק הוא למעשה התמרת פורייה (Fourier Transform) של פונקציית האוטו-קורולציה של התהילך.

כידוע פונקציית האוטו-קורולציה של ת"א היא פונקציה דטרמיניסטית ולכן גם ספקטום ההספק יהיה כזו.

### ספקטום הספק של ת"א WSS בזמן רציף

ספקטורים ההספק של תהליך אקראי SSS בזמן רציף  $X(t)$  בעל פונקציית אוטו-קורולציה

$R_{XX}(\tau)$  הוא:

$$S_{XX}(\omega) = F\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau$$

### ספקטורים הספק של ת"א SSS בזמן בדיד

ספקטורים ההספק של תהליך אקראי SSS בזמן בדיד  $[n]$   $X[n]$  בעל פונקציית אוטו-קורולציה

$R_{XX}(k)$  הוא:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = F\{R_{XX}(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) \cdot e^{-j\omega k}$$

### קורס-ספקטורים הספק של זוג ת"א SSS

ספקטורים ההספק של זוג ת"א SSS בזמן רציף  $(X(t), Y(t))$  בעלי פונקציית קורולציה משותפת

$R_{XY}(\tau)$  הוא:

$$S_{XY}(\omega) = F\{R_{XY}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau$$

נראה כי זו הגדרה כללית וניתן להספק ממנה את הגדרת ה"אוטו-ספקטורים".  
בהתאם ניתן להגדיר גם עבור זוג ת"א בזמן בדיד.

### תכונות של ספקטורים הספק עבור ת"א ממשי

בקורס זהה אנחנו מתעסקים עם תהליכיים ממשיים בלבד (אין ערכים מרוכבים) ולכןון  
כשאנו עוסרים למרחב התדר נהיה פשוט.

### תכונות של פונקציית האוטו-קורולציה – תזכורת:

- $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$  היא פונקציה זוגית, כלומר מתקיים  $\forall \tau$   $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ .

- עבור תהליך SSS מתקיים  $\forall \tau$   $R_{XX}(0) \geq |R_{XX}(\tau)|$ .

### תכונות של ספקטורים הספק:

1. היא פונקציה ממשית. נראה:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot (\cos\omega\tau + j \cdot \sin\omega\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\tau + j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \sin\omega\tau \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\tau \end{aligned}$$

שוויון (\*) נובע מאי-זוגיות האינטגרנד (מכפלת פונקציות  $\tau \cos\omega\tau$  ו-  $\sin\omega\tau$ ) בקטע סימטרי.

2.  $S_{xx}(\omega)$  היא פונקציה זוגית (נובע מזוגיות האינטגרנד כמכפלת פונקציות זוגיות).

$$\text{ו- } R_{xx}(\tau) \cos\omega\tau.$$

3.  $S_{xx}(\omega)$  היא פונקציה אי-שלילית, כלומר מתקיים  $\forall \omega$ . מכיוון שההתמרת פורייה של פונקציה אי-שלילית מוגדרת היא פונקציה אי-שלילית.

### רעש לבן בזמן רציף

רעש לבן הוא תהליך אקראי בעל צפיפות הספק-ספקטראלי אחידה וקבועה בכל התדרים. כמו כן שרעש לבן בעל רוחב סpekטר אינסופי הוא תיאורטי בלבד אחרות נקבל ת"א עם אנרגיה אינסופית. ברעש לבן כל זוג דגימות שוונות הן בת"ס, על אף שתהlixir רעש לבן הוא ת"א בזמן רציף ולא משנה כמה קרובות תהינה הדגימות (שколо לסדרה p.i.). למעשה המשמעות של זה היא שת"א של רעש לבן לא רציף בשום נקודה.

רעש לבן הוא מידול של רעש תרמי וכן נלמד לעבוד אליו. בפועל דגימותיו של רעש תרמי כן תלויות אחת בשניה (והוא גם תהליך רציף) אך בקצב כה מהיר שהמערכות שלנו לא מספיקות לקלוט דגימות תלויות. לא משנה כמה מהר נדגום רעש תרמי זה יהיה מספיק רחוק כך שהדגימות תהינה p.i. ולכן נוכל למדל את הרעש התרמי לרעש לבן.

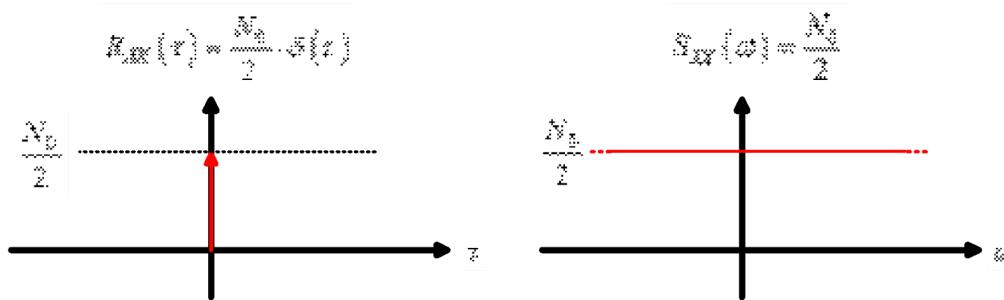
נאמר שתהlixir אקראי בזמן רציף ( $t$ )  $X$  הינו רעש לבן (בזמן רציף) אם הוא  $\text{WSS}$  ופונקציית

האוטו-קורולציה שלו היא מהצורה  $R_{xx}(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$  (ז"א הלם בגובה  $A$  ב-  $0 = \tau$ ).

המשמעות היא שכל זוג דגימות בזמנים שונים הינם חס"ק. נחשב את ספיפות הספק של אותן צזה ונקבל ערך קבוע:

$$S_{xx}(\omega) = F\{A \cdot \delta(\tau)\} = A \cdot F\{\delta(\tau)\} = A$$

נוהג לסמן  $A = \frac{N_0}{2}$  בטור צפיפות הספק חצי ספקטראלי (מאחר שעבור כל תדר יש גם את התדר ה"שלילי").



## מעבר תהליכי SSS במערכות ליניאריות

$Y_{M \times 1} = A_{M \times N} \cdot X_{N \times 1} + b_{M \times 1}$	<p>למדנו איך לנתח מעבר של וקטור אקראיידריך למערכת ליניארית. כמו כן למדנו לחשב סטטיסטיקה של המוצא וסטטיסטיקה של איברי הקROS בהינתן סטטיסטיקה של הכניסה ואיפיוון המערכת (עד סדר שני אחר צאת מערכת ליניארית).</p>
---	--

נרצה להרחיב את הדיון עבור מעבר של תהליכי אקראיים במערכות ליניאריות.

## מעבר תהליך אקראי דרכן מערכת ליניארית

מערכת עבור תהליכי אקראיים לא יכולה להיות מאופיינת ע"י מטריצה או לעבור מימדים סופיים לאחר והקלט הוא תהליך אקראי. תהליך אקראי הוא סדרה אינסופית. בפועל, סדרה תיכנס למערכת וסדרה תצא. למעשה מערכת זאת מאופיינת ע"י פונקציית תמסורת ונוהג לקרוא לפונקציה זו מסנן (על אף שהיא לא חייבה לבצע פעולה סינון).

אנו נתעסק רק בתהליכי סטציונריים במובן הרחב (WSS) שעוברים במערכות ליניאריות אשר אינן משתנות בזמן (Linear Time-Invariant), ז"א השפעת הזמן על המערכת הוא רק דרך השפעת הזמן על תהליך הכניסה.

מבנה כללי של מערכת זאת יראה באופן הבא (או עם  $X[n], Y[n], h[n]$  לת"א בזמן בדיד):

	<p>עבור מערכות ודו המוצא נתון ע"י קוונטולציה בין הכניסה לפונקציית המסנן של המערכת.</p> $Y(t) = X(t) * h(t)$
--	---

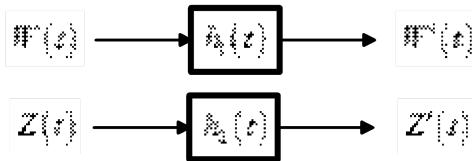
לא הוספנו קבועים (בכניסה או בOUTPUT) וזאת לשם פשוטות הדיון. בכל מקרה, גם אם נוסיף אותם, הקבועים יכולים לשנות רק את התוחלת מהאחר שהם בהכרח קבועים בזמן כי אנו דנים במערכות ודו.

נרצה לדעת את הסטטיסטיקה מסדר שני של המוצא בהינתן הסטטיסטיקה מסדר שני של הכניסה. לצורך כך נחשב סטטיסטיקה עבור מודל כללי יותר של מעבר ת"א במערכות ודו ואז נסיק על המערכת ה'פשוטה' שלנו.

## מודול עזר לניתוח הקשר בין הכניסה למוצא במערכות ודו

נתונות שתי מערכות  $W(t), Z(t)$ , הן מזוננות בת"א  $h_1(t), h_2(t)$  בהתאם. תהליכיים אלו הם

ת"א WSS. הסטטיסטיקה מסדר שני  $R_{WW}(\tau), R_{ZZ}(\tau), R_{WZ}(\tau)$  ידועה עבורם.



נרצה לדעת את המומנט המשותף מסדר שני של תהליכי המוצא, כולם ראות (אם הם בכלל WSS).

$$\begin{aligned}
 R_{WZ'}(t+\tau, t) &= E[W'(t+\tau) \cdot Z'(t)] = E[(W(t+\tau) * h_1(t)) \cdot (Z(t) * h_2(t))] = \\
 &= E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) \cdot W(t+\tau-\alpha) \cdot d\alpha\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta) \cdot Z(t-\beta) \cdot d\beta\right)\right] = \\
 &\stackrel{*}{=} \int_{\beta=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) \cdot h_2(\beta) \cdot E[W(t+\tau-\alpha) \cdot Z(t-\beta)] \cdot d\alpha \cdot d\beta = \\
 &= \int_{\beta=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) \cdot h_2(\beta) \cdot R_{WZ}(t+\tau-\alpha, t-\beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta = \\
 &\stackrel{**}{=} \int_{\beta=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) \cdot h_2(\beta) \cdot R_{WZ}(\tau-\alpha+\beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta = \\
 &= \int_{\beta=-\infty}^{\infty} h_2(\beta) \cdot \left( \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) R_{WZ}(\tau+\beta-\alpha) \cdot d\alpha \right) \cdot d\beta = \\
 &= \int_{\beta=-\infty}^{\infty} h_2(\beta) \cdot [h_1(\tau+\beta) * R_{WZ}(\tau+\beta)] \cdot d\beta \stackrel{\gamma=-\beta}{=} \int_{d\gamma=-d\beta}^{\infty} h_2(-\gamma) \cdot [h_1(\tau-\gamma) * R_{WZ}(\tau-\gamma)] \cdot d\gamma = \\
 &= \int_{\gamma=-\infty}^{\infty} h_2(-\gamma) \cdot [h_1 * R_{WZ}](\tau-\gamma) \cdot d\gamma = h_1(\tau) * R_{WZ}(\tau) * h_2(-\tau) = R_{WZ'}(\tau)
 \end{aligned}$$

שוויון (\*) מליניאריות של תוחלת וaintegral. שוויון (\*\*) משומש - ז"ה הם ת"א WSS.

קיבלו כי המוצאים  $W'(t), Z'(t)$  הם אכן ת"א WSS, ז"א עבור שני ת"א WSS אשר עוברים כ"א (אפילו בנפרד) במערכות וLT מתקיים כי המוצאים הם ת"א WSS.

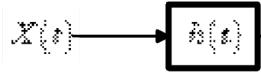
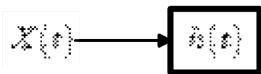
**סטטיסטיקה של מוצא מערכת וLT המזונת בתהליך אקראי WSS**

עבור  $X(t)$  תהליך אקראי SSW עם סטטיסטיקה מסדר שני  $R_{XX}(\tau)$  ידועה ומערכת זו עם פונקציית תמסורת ידועה  $h(t)$  נסמן את מוצר המערכת ב-  $Y(t)$ 我们知道  $Y(t) = X(t) * h(t)$

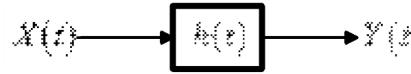
אנו רוצים לדעת את הסטטיסטיקה מסדר שני של המוצא ואת המשותפת, כלומר את

$$R_{XY}(\tau), R_{YY}(\tau)$$

לצורך כך נשתמש במודל העזר שפיתחנו ונזכיר כי קיבלנו  $R_{WZ}(\tau) = h_1(\tau) * R_{WZ}(\tau) * h_2(-\tau)$ . זהה כי נוכל לבחור למודל הנ"ל קונפיגורציות שונות אשר יעזורו לנו לקבל את הסטטיסטיקה הרצוייה.



(L)



(R)

נראה את הפיתוחים עבור זוג הקונפיגורציות (ימין ושמאל):

$$W(t) = X(t), h_1(t) = h(t) \Rightarrow W'(t) = W(t) * h_1(t) = X(t) * h(t) = Y(t)$$

$$(L) \quad Z(t) = X(t), h_2(t) = h(t) \Rightarrow Z'(t) = Z(t) * h_2(t) = X(t) * h(t) = Y(t)$$

$$R_{WZ}(\tau) = h_1(\tau) * R_{WZ}(\tau) * h_2(-\tau) \Rightarrow R_{YY}(\tau) = h(\tau) * R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

$$W(t) = X(t), h_1(t) = \delta(t) \Rightarrow W'(t) = W(t) * h_1(t) = X(t) * \delta(t) = X(t)$$

$$(R) \quad Z(t) = X(t), h_2(t) = h(t) \Rightarrow Z'(t) = Z(t) * h_2(t) = X(t) * h(t) = Y(t)$$

$$R_{WZ}(\tau) = h_1(\tau) * R_{WZ}(\tau) * h_2(-\tau) \Rightarrow R_{XY}(\tau) = \delta(\tau) * R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

סה"כ קיבלנו (נוכל גם להציג תוצאה עבור  $R_{YY}(\tau)$  אם נהפוך את קונפיגורציה R):

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$$

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

נחשב את ספקטרום ההספק עבור אותן (נזכיר כי קונבולוציה בזמן  $\leftrightarrow$  מכפלה בתדר) לפי ההגדרה ע"י טרנספורם פורייה של פונקציית הקורולציה ונקבל:

$$S_{XY}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot H^*(\omega)$$

$$S_{YX}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$S_{YY}(\omega) = H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega) \cdot H^*(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

באותו אופן עברו ת"א WSS בזמן בידיד נקבל:

$$R_{XY}[n] = R_{XX}[n] * h[-n] \quad S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})$$

$$R_{YX}[n] = R_{XX}[n] * h[n] \quad \xleftrightarrow[FourierTransform]{Discrete-Time} \quad S_{YX}(e^{j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$R_{YY}[n] = h[n] * R_{XX}[n] * h[-n] \quad S_{YY}(e^{j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$$

נרצה להחיל את מסקנות הפיתוח גם על פונקציית הקו-ואריאנס, ככלומר להראות שהקשרים

הנ"ל מתקיים גם עברו  $C_{XX}(\tau), C_{XY}(\tau), C_{YY}(\tau)$ .

עבור התהליכים  $X(t), Y(t)$  הנ"ל (כניסתה ומוצאה של המערכת  $h(t)$ ) נגידר את שני

התהליכים הבאים:

$$X'(t) = X(t) - \eta_X, \quad Y'(t) = Y(t) - \eta_Y$$

נזין את התהליך האקראי  $X'(t)$  למערכת  $h(t)$  ונקבל במוצאה:

$$X'(t) * h(t) = (X(t) - \eta_X) * h(t) = X(t) * h(t) - \eta_X * h(t) = Y(t) - \eta_Y = Y'(t)$$

קיבלו את התהליך  $Y'(t)$  במוצאה.

מכאן שהנוסחאות לפונקציות הקורולציה תקפות עבור התהליכים  $X'(t), Y'(t)$ .

מכיוון שני התהליכים שהגדכנו  $X'(t), Y'(t)$  הם מופחתי תוחלת אז מתקיים:

$$R_{XY'}(\tau) = C_{XY}(\tau), \quad R_{Y'Y'}(\tau) = C_{YY}(\tau), \quad R_{XX'}(\tau) = C_{XX}(\tau)$$

עבור פוריה טרנספורם של פונקציה הקו-ואריאנס נסיף סימון על מנת שנוכל להבדיל ולסייע:

$$C_{XY}(\tau) = C_{XX}(\tau) * h(-\tau) \quad S_{XY}^C(\omega) = S_{XX}^C(\omega) \cdot H^*(\omega)$$

$$C_{YX}(\tau) = C_{XX}(\tau) * h(\tau) \quad \xleftrightarrow[Transform]{Fourier} \quad S_{YX}^C(\omega) = S_{XX}^C(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$C_{YY}(\tau) = h(\tau) * C_{XX}(\tau) * h(-\tau) \quad S_{YY}^C(\omega) = S_{XX}^C(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

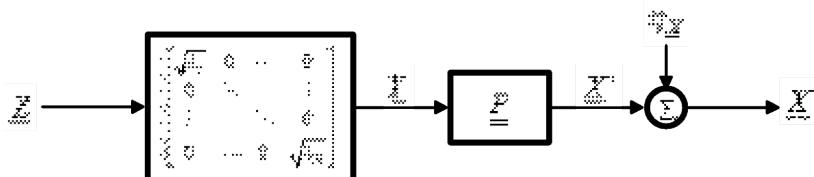
ועבור תהליכי אקראים SSW בזמן בידיד:

$$\begin{array}{ll} C_{XY}[n] = C_{XX}[n]*h[-n] & S_{XY}^C(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega}) \\ C_{YX}[n] = C_{XX}[n]*h[n] & \xleftrightarrow[Fourier Transform]{Discrete-Time} S_{YX}^C(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \\ C_{YY}[n] = h[n]*C_{XX}[n]*h[-n] & S_{YY}^C(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2 \end{array}$$

### יצור תהליך אקראי גאוסי סטציונרי

למננו כי נוכל לייצר וא"ג כרצוננו ע"י העברת וא"ג p.i. במערכת ליניארית. קראנו לפעולה זו "צביעה" וא"ג (וגם הכרנו את הפעולה הפוכה של "הלבנת" וא"ג). התחלנו עם וא"ג עם רכיבים p.i. נסמן  $\underline{X} \sim N(\underline{\eta}_X, C_{XX})$  וקיים בוצא וא"ג באותו מימד עם פילוג  $\underline{Z} \sim N(\underline{0}, \underline{I})$  וקיים בוצא ומימד אותו מילוג  $\underline{Z} \sim N(\underline{0}, \underline{I})$ .

מבנה המערכת (כאשר  $\underline{P}$  הינה מטריצה מלכשנת של  $C_{XX}$ ):



עבור תהליכי אקראיים נוכל לייצר תא"ג סטציונרי. נבחן מודל העזר כי פונקציית האוטו-קורולציה של מוצא מערכת זה בעלת מסנן  $h(t)$  ובינסה  $X(t)$  היא:

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

מכאן (וכפי שראינו במודל) שהמוצא כבר סטציונרי. נרצה לשנות ו"לעצב" את המוצא. אם ניקח תהליך מקור עם פונקציית קורולציה קבועה בזמן (רעש לבן) אז נקבל:

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * \left( \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau) \right) * h(-\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot h(\tau) * h(-\tau)$$

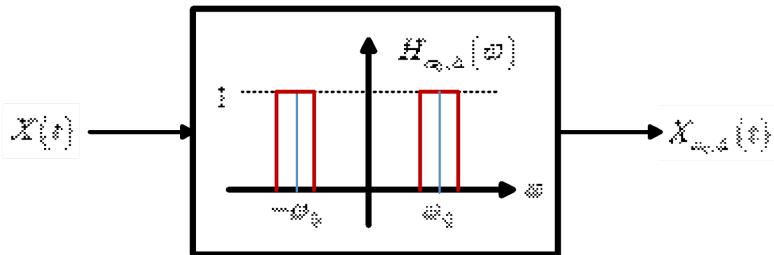
ולכן נדרש לתכנן רק את המサンן ונקבל אותן פונקציית קורולציה כרצוננו. אם נרצה שהמוצא יהיה תא"ג אז נדרש שהכינסה תהיה תא"ג (מאחר שהוא עבר במערכת וזה). לכן אם הGINSA תהיה תהליך רעש לבן בעל התפלגות נורמלית בזמן ותוחלת אפס (רעש גאוסי לבן) אז נקבל במוצא תא"ג סטציונרי.

כנ"ל לגבי תא"ג סטציונרי בזמן בדיד עבורו.

### מסנן מעביר סרט

נבחן מעבר של תא"א ממשי WSS דרך מסנן צר סרט (Narrow Band Pass Filter).

נ Zion תא"א בזמן רציף  $X(t)$  אשר ממשי ו-SWSS דרך מסנן BFP אשר יסמן  $H_{\omega_0, \Delta}(\omega)$ . נציג את המערכת:



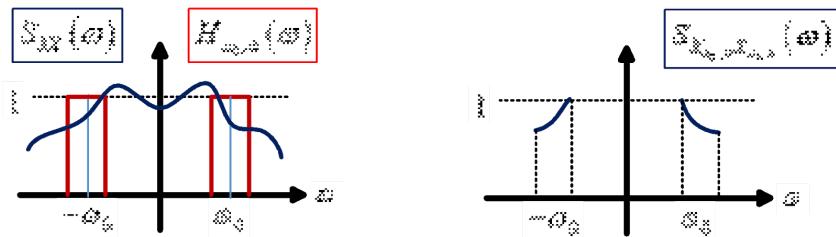
נבחן כי סימנו את המוצא ע"י  $X_{\omega_0, \Delta}(t)$  לאחר שהמוצא הוא חיתוך של  $X(t)$  בתחום התדר לפי המשנן, ז"א סביב  $\omega_0$ . חשוב לציין כי תדר המרכז מסומן בתדר זוטרי  $\omega$  ואילו רוחב המשנן בתדר  $f$  ולכן (לפי המעבר  $f = 2\pi/\omega$ ):

$$H_{\omega_0, \Delta}(\omega) = \begin{cases} 1 & f \in (f_0 - \frac{\Delta}{2}, f_0 + \frac{\Delta}{2}) \cup (-f_0 - \frac{\Delta}{2}, -f_0 + \frac{\Delta}{2}), \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

נניח כי ידוע הספקטורים של התהיליך  $X(t)$  אז נוכל לחשב את ספקטוריום ההספק בМОץ ע"י:

$$S_{X_{\omega_0, \Delta} X_{\omega_0, \Delta}}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot |H_{\omega_0, \Delta}(\omega)|^2$$

האותות בתדר יראו כך:



כמובן שם לא היה בגובה אחד או הינו מקבלים בМОץ צפיפות ההספק בגבהים שונים אך עם אותה התנהגות אם המשנן היה קבוע (בכל מקרה אילו היינו רוצה ל恢חזר את הערכבים הינו מעבירים במשנן אחר ש"תיכון").

נרצה לחשב את ההספק אותן התהיליך בМОץ:

$$\begin{aligned} Power(X_{\omega_0, \Delta}(t)) &= E[(X_{\omega_0, \Delta}(t))^2] = R_{X_{\omega_0, \Delta} X_{\omega_0, \Delta}}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_{\omega_0, \Delta} X_{\omega_0, \Delta}}(\omega) e^{j\omega_0} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_{\omega_0, \Delta} X_{\omega_0, \Delta}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \cdot |H_{\omega_0, \Delta}(\omega)|^2 d\omega = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{2\pi(f_0 - \frac{\Delta}{2})}^{2\pi(f_0 + \frac{\Delta}{2})} S_{XX}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

ז"א אנחנו סוכמים את צפיפות ההספק הספקטורי על התדרים בהם קיים המשנן. אם אנחנו יודעים כי מתקיים אז נוכל להפעיל אינטגרל רימן (רוחב האינטגרל כפול ערך האינטגרנד במרכז הקטע):

$$Power(X_{\omega_0, \Delta}(t)) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{2\pi(f_0 - \frac{\Delta}{2})}^{2\pi(f_0 + \frac{\Delta}{2})} S_{XX}(\omega) d\omega \xrightarrow{\text{Riemann}} \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi\Delta \cdot S_{XX}(2\pi f_0) = 2\Delta \cdot S_{XX}(\omega_0)$$

נבחן כי אם נעביר את רעש לבן בזמן רציף עם צפיפות הספק חצי ספקטרלית נקבל ב מוצר  
אות בעל הספק:

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \delta(t) \Rightarrow Power(X_{\omega_0, \Delta}(t)) = 2\Delta \cdot S_{NN}(\omega_0) = 2\Delta \cdot \frac{N_0}{2} = \Delta \cdot N_0$$

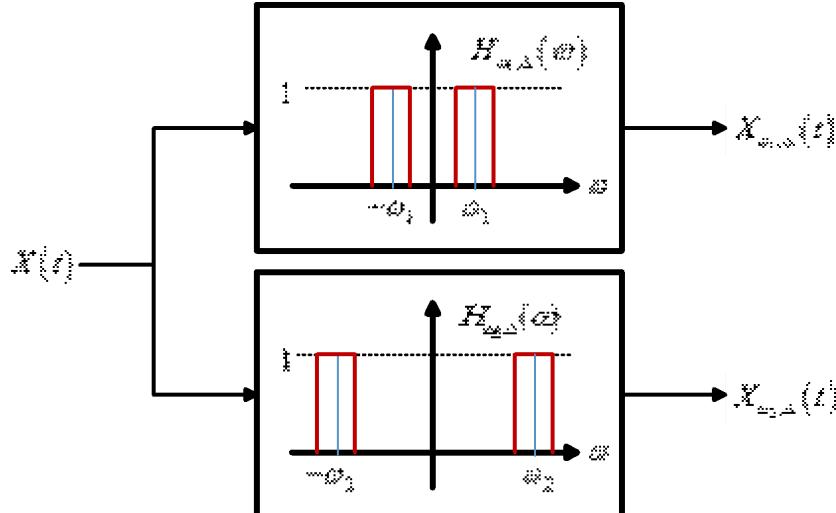
הערה - פונקציית האוטו-קורולציה מקיימת תמיד את התנאי שטרנספורם פורייה שליה יהיה אי-שלילי. זה נותן תוצאה נוספת לגבי כך שהיא פונקציה אי-שלילית מוגדרת. גם ההפק מתקיים – עבור כל פונקציה אי-שלילית זוגית במרחב התדר טרנספורם פורייה הפוך יניב פונקציה קורולציה.

### חוסר קורולציה בין פסי-תדר

נדון בתהליכיים אקראיים בזמן רציף אך הפיתוח תקף גם לתהליכיים אקראיים בזמן בדיד.

#### חוסר קורולציה בין פסי תדר-זרים של תהליך אקראי SS

נרצה להראות כי עבור ת"א בזמן רציף  $(t)$  שהוא סטצionario SS מתקיים שניות שנותרנו מחיתוך שלו בפסי-תדר זרים הם תמיד חסרי קורולציה.  
נציג את המערכת הבאה:



טענה:

עבור חיתוך בפסי-תדר זרים, ככלمر עבור  $|f_1 - f_2| < \Delta$ , מתקיים כי אותן המוצאים

$X_{omega_1, Delta}(t), X_{omega_2, Delta}(t)$  (שהם SSWz כמובן כפי שראינו בפיתוח במודל העוז) הם חסרי קורולציה.  
זאת אומרת עבור חיתוך בפסי-תדר זרים מתקיים:

$$R_{X_{\omega_1,\Delta} X_{\omega_2,\Delta}}(\tau) = E[X_{\omega_1,\Delta}(t+\tau) \cdot X_{\omega_2,\Delta}(t)] = 0 \quad \forall \tau$$

הוכחה:

זהה כי נוכל להשתמש במודל העזר ולבנות קונפיגורציה עבור מערכת זו:

$$\begin{aligned} W(t) &= X(t), h_1(t) = h_{\omega_1,\Delta}(t) \Rightarrow W'(t) = W(t) * h_1(t) = X(t) * h_{\omega_1,\Delta}(t) = X_{\omega_1,\Delta}(t) \\ Z(t) &= X(t), h_2(t) = h_{\omega_2,\Delta}(t) \Rightarrow Z'(t) = Z(t) * h_2(t) = X(t) * h_{\omega_2,\Delta}(t) = X_{\omega_2,\Delta}(t) \\ R_{WZ'}(\tau) &= h_1(\tau) * R_{WZ}(\tau) * h_2(-\tau) \Rightarrow R_{X_{\omega_1,\Delta} X_{\omega_2,\Delta}}(\tau) = h_{\omega_1,\Delta}(\tau) * R_{XX}(\tau) * h_{\omega_2,\Delta}(-\tau) \\ &\Rightarrow S_{X_{\omega_1,\Delta} X_{\omega_2,\Delta}}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot H_{\omega_1,\Delta}(\omega) \cdot H_{\omega_2,\Delta}^*(\omega) = 0 \end{aligned}$$

כאשר שיוויון (\*) נובע מכך שבתחום התדר אין למשננים חפיפה.

לכן אם הספקטורים ההספק מתאפסים לכל תדר אז התמרת פורייה ההיפוכה שלו גם ולכן הוכחנו:

$$R_{X_{\omega_1,\Delta} X_{\omega_2,\Delta}}(\tau) = F^{-1}\{S_{X_{\omega_1,\Delta} X_{\omega_2,\Delta}}(\omega)\} = F^{-1}\{0\} \equiv 0$$

הערות:

- אילו היה מדובר באוט גאוסי אז חס"ק גורר בת"ס.

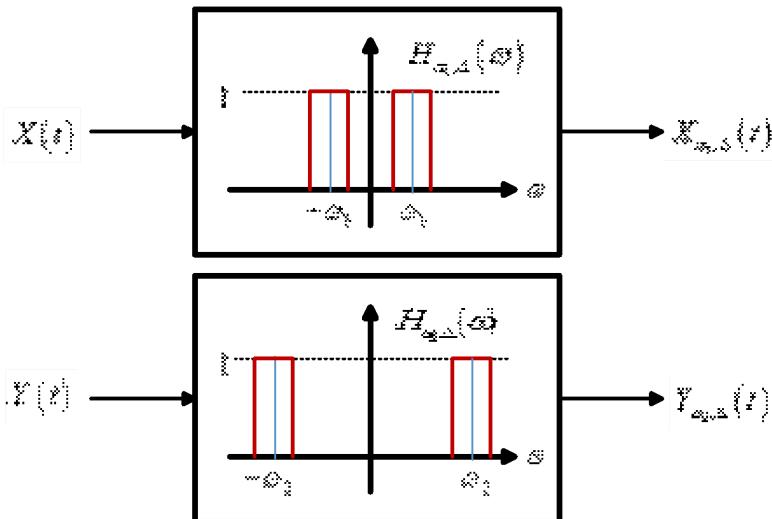
לכן למעשה כל תדר בפני עצמו ניתן לאפנו כ-  $\text{cos } \omega t$  כפול מ"א גאוסי.

- אילו היה מדובר באוט כללי אז נוכל לקטום לו קצחות לא רלוונטיים מתחום התדר (ע"י LPF ו-HPF) ואז לא להפריע לאותות אחרות או לתכנן בהתאם ולהשתמש בתדרים לפיזול תקשורת.

### **חומר קורולציה בין פסי-תדר זרים של עני תהליכי אקראיים WSS**

נרצה להראות כי עבור שני ת"א בזמן רציף  $(X(t), Y(t))$  אשר סטציונריים במשמעות WSS מתקיים שני האותות אשר נוצרו מחיתוך של כל אחד מהם בפס-תדר זר הם תמיד חסרי קורולציה.

נציג את המערכת הבאה:



טענה:

עבור חיתוך בפסי-תדר זרים, ככלمر עבור  $|f_1 - f_2| < \Delta$ , מתקיים כי אותן המזגויות  $X_{\omega_1,\Delta}(t), Y_{\omega_2,\Delta}(t)$  (שהם SWSJ כמוגן כפי שראינו בפיתוח במודל העוזר) הם חסרי קורולציה. זאת אומרת עבור חיתוך בפסי-תדר זרים מתקיים:

$$R_{X_{\omega_1,\Delta}Y_{\omega_2,\Delta}}(\tau) = E[X_{\omega_1,\Delta}(t+\tau) \cdot Y_{\omega_2,\Delta}(t)] = 0 \quad \forall \tau$$

הוכחה:

נזהה כי המערכת מהצורה של מודל העוזר (אפשר להשתמש בו לאחר שהכניות ה-SWSJ) ולכן:

$$\begin{aligned} W(t) &= X(t), h_1(t) = h_{\omega_1,\Delta}(t) \Rightarrow W'(t) = W(t) * h_1(t) = X(t) * h_{\omega_1,\Delta}(t) = X_{\omega_1,\Delta}(t) \\ Z(t) &= Y(t), h_2(t) = h_{\omega_2,\Delta}(t) \Rightarrow Z'(t) = Z(t) * h_2(t) = Y(t) * h_{\omega_2,\Delta}(t) = Y_{\omega_2,\Delta}(t) \\ R_{WZ'}(\tau) &= h_1(\tau) * R_{WZ}(\tau) * h_2(-\tau) \Rightarrow R_{X_{\omega_1,\Delta}Y_{\omega_2,\Delta}}(\tau) = h_{\omega_1,\Delta}(\tau) * R_{XY}(\tau) * h_{\omega_2,\Delta}^*(-\tau) \\ &\Rightarrow S_{X_{\omega_1,\Delta}Y_{\omega_2,\Delta}}(\omega) = S_{XY}(\omega) \cdot H_{\omega_1,\Delta}(\omega) \cdot H_{\omega_2,\Delta}^*(\omega) = 0 \end{aligned}$$

כאשר שיוויון (\*) נובע מכך שבתחום התדר אין למסננים חפיפה.

לכן אם הספקטורים ההספק מתאפסים לכל תדר אז התמרת פורייה הההפוכה שלו גם ולכן הוכחנו:

$$R_{X_{\omega_1,\Delta}Y_{\omega_2,\Delta}}(\tau) = F^{-1}\{S_{X_{\omega_1,\Delta}Y_{\omega_2,\Delta}}(\omega)\} = F^{-1}\{0\} \equiv 0$$

הערה - על מנת שתהיה קורולציה בין אותן נצטרכ שתהיה חפיפה בין פסי-התדר

(תנאי הכרחי אך לא מספיק כי יתכן שמאפייניו של אחד אותן מfasim את הקורולציה ללא קשר לחפיפה בתדר אך לצורך הדיון נתעלם מקרה זה). במילים

אחרות, אם נעבוד עם חפיפה בפסי-תדר או התהילcis לאיו חס"ק וכן נוכל לבצע שערוך ליניארי (כיו יש לנו סטטיסטיקה מסדר שני). אין הדבר נכון בתחום הזמן מאחר שלכל דגימת זמן יש קורולציה כלשהי לדגימות זמן אחרות (לפי הפרש).

מסקנה – שערוך ליניארי בין שני ת"א תקף אם דוגמים אחד בתדר מסוים ומשערכים את השני באותו התדר. ז"א נאוסף מידע על ת"א  $X(t)$  בתדר  $\omega_0$  וממנו נסיק מידע על התהיליך האקראי  $(t)Y$  באותו תדר  $\omega_0$ .

### שימוש מקבילי של פסי תדר

קייםנו כי אין קורולציה בין פסי תדר שונים. נציג כי הדבר מתקיים בין כל זוג פסי-תדר שונים. לדוגמה אם ניקח אותן ונעביר אותן דרך  $M$  מסנן ללא חפיפת תדר אז כל זוג מ-  $M$  אותן קיטומי-התדר יהיה חס"ק.

### שערוך ליניארי אופטימלי של תהיליך אקראי במובן MSE (MSN Wiener)

בහינתן זוג תהילcis אקראים  $X[n], Y[n]$  נרצה לשערך ת"א  $X[n]$  מתוך דגימותיו של  $Y[n]$  (במובן MSE).

כאשר שערכנו ו"א  $\underline{X}$  מתוך ו"א  $\underline{Y}$  למעשה שערכנו את רכיביו של  $\underline{X}$  אחד-אחד, כאשר כל אחד מהרכיבים  $X_i = \underline{X}(i)$  שערכך בעזרת כל הוקטור  $\underline{Y}$ .

כעת נרצה לשערך ת"א מתוך ו"א  $X_i$ . גם כעת נשערך כל איבר  $X_i$  מהסדרה  $\{X_n\}$  מתוך כל הידע שיש לנו על איברי סדרת  $\{Y_n\}$ .

לצורך שערכך כל איבר, נסמן  $X_i$ , נסתכל על אוסף דגימות מחלון זמן כלשהו:

$$\{Y_n\}_{n=i-k}^{i+k} = \{Y_{i-k}, Y_{i-k+1}, Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_{i+k-1}, Y_{i+k}\}$$

בහינתן דגימות אלו נוכל לשערך את  $X_i$  באופן אופטימלי במובן MSE כפי שערכנו מ"א מתוך ו"א (כי כמות האיברים סופית) בעזרת משערך התוחלת המותנית.

המשערך האופטימלי במובן MSE של  $X_i$  בהינתן חלון הזמן הוא:

$$\underline{X}_i^{opt,MSE} = \underline{X}_i^{MMSE} = E[X_i | Y_{i-k}, \dots, Y_{i+k}]$$

כך נוכל לעשות עבור כל חלון זמן שנרצה (גם לא סימטרי סביב  $i = n$ ) אך ככל שהחלון יגדל המטריצות תגדלנה והחישובים יארכו זמן רב יותר אך נקבל שערכך מדויק יותר.

אם נדע כי התהילכים האקראיים  $X[n], Y[n]$  הם SSS מושער  $\hat{X}[n]$  אז נוכל לבצע שערוך פשוט יותר באופן ליניארי (שערוך זה לא בהכרח יהיה MMSE, אנחנו נלמד משערוך LMMSE בלבד).

### שערוך ליניארי MMSE של ת"א מת"א מ- $\hat{X}[n]$

עבור זוג ת"א  $X[n], Y[n]$  אשר SS מושער LMMSE הינו אופטימלי ונთון ע"י מסנן ה- $\text{IDF}$  הבא (נקרא מסנן וינר – Wiener Filter –):

$$\begin{aligned}\hat{X}[n] &= \hat{X}^{\text{LMMSE}}[n] = Y[n] * h_{\text{LMMSE}}[n] + b_{\text{LMMSE}} \\ H_{\text{LMMSE}}(e^{j\omega}) &= \frac{S_{XY}^C(e^{j\omega})}{S_{YY}^C(e^{j\omega})} \quad S_{YY}^C(e^{j\omega}) \neq 0 \\ b_{\text{LMMSE}} &= \eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\end{aligned}$$

מהגדרת התמרת פורייה נוכל להזות כי הסכום מקיים למעשה  $F\{h[n]\}|_{\omega=0}$  ולכן:

$$b_{\text{LMMSE}} = \eta_X - \eta_Y \cdot H_{\text{LMMSE}}(\omega = 0)$$

לסיכום (גם עבור תהילכים SS מושער בזמן רצוי):

$$\begin{aligned}\hat{X}^{\text{LMMSE}}[n] &= Y[n] * h_{\text{LMMSE}}[n] + b_{\text{LMMSE}} & \hat{X}^{\text{LMMSE}}(t) &= Y(t) * h_{\text{LMMSE}}(t) + b_{\text{LMMSE}} \\ H_{\text{LMMSE}}(e^{j\omega}) &= \frac{S_{XY}^C(e^{j\omega})}{S_{YY}^C(e^{j\omega})} & H_{\text{LMMSE}}(\omega) &= \frac{S_{XY}^C(\omega)}{S_{YY}^C(\omega)} \\ b_{\text{LMMSE}} &= \eta_X - \eta_Y \cdot H_{\text{LMMSE}}(\omega = 0) & b_{\text{LMMSE}} &= \eta_X - \eta_Y \cdot H_{\text{LMMSE}}(\omega = 0)\end{aligned}$$

הוכחה:

נוכיח ע"י טענת העזר כי משערך ליניארי הינו אופטימלי אם "ם השגיאה ניצבת לכל פונקצייה ליניארית של המדידות".

כלומר אם "ם מתקיים  $e_n \perp f^{\text{Linear}}(\{Y_n\}, 1)$  (ההוכחה זהה למקרים של ו"א או מ"א) כאשר:

$$f^{\text{Linear}}(\{Y_n\}, 1) = \sum_i a_i \cdot Y_i + c \quad \forall n, a_i, c$$

ניצבות כזאת שקולה לשתי הדרישות הבאות:

$$\text{i. } e_n \perp 1 \text{ (או כל קבוע אחר מ-} \mathbb{R} \text{)}$$

$$\text{ii. } e_n \perp (Y_m - \eta_Y) \quad \forall n, m$$

לכן נרצה לבחור את המסנן הליניארי עם הפרמטרים  $h[n, b]$  אשר יקיים דרישות אלו. בעת נראה מה משמעות זוג דרישות אלו (כמובן שאנו משתמשים בשגיאה הפרשית כרגיל):

$$i \quad e_n \perp 1 \Leftrightarrow E[e_n \cdot 1] = 0 \\ E[X[n] - Y[n] * h[n] - b] = 0$$

$$\eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] - b = 0$$

$$b(h) = \eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

$$ii \quad E[e_n \cdot (Y_m - \eta_Y)] = 0 \\ E[(X[n] - Y[n] * h[n] - b) \cdot (Y_m - \eta_Y)] = 0$$

נציב את  $b(h)$  ונמשיך:

$$ii \quad E\left[\left(X[n] - Y[n] * h[n] - \eta_X + \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\right) \cdot (Y_m - \eta_Y)\right] = 0 \\ E\left[\left(X[n] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot Y[n-k] - \eta_X + \eta_Y \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\right) \cdot (Y_m - \eta_Y)\right] = 0 \\ E\left[\left((X[n] - \eta_X) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h[k] \cdot (Y[n-k] - \eta_Y))\right) \cdot (Y_m - \eta_Y)\right] = 0 \\ C_{XY}(n-m) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot C_{YY}(n-k-m) = 0$$

אך נזכור כי הדבר צריך להתקיים  $m, n \forall$  ולכך:

$$C_{XY}(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot C_{YY}(n-k) = 0$$

$$C_{XY}(n) - h[n] * C_{YY}(n) = 0$$

$$C_{XY}(n) = h[n] * C_{YY}(n)$$

$$S_{XY}^C(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot S_{YY}^C(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{S_{XY}^C(e^{j\omega})}{S_{YY}^C(e^{j\omega})}$$

וקיבלנו בדיקות את אותם המקדים כפי שטענו.

**מערכת לשערוך LMMSE של שני ת"א RSS**

ראינו כי מתקיים:

$$\hat{X}^{LMMSE}[n] = Y[n] * h_{LMMSE}[n] + b_{LMMSE}$$

$$H_{LMMSE}(e^{j\omega}) = \frac{S_{XY}^C(e^{j\omega})}{S_{YY}^C(e^{j\omega})}, \quad b_{LMMSE} = \eta_X - \eta_Y \cdot H_{LMMSE}(\omega = 0)$$

$$b_{LMMSE} = \eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

נציב את האיבר החופשי  $b_{LMMSE}$  ונקבל:

$$\hat{X}^{LMMSE}[n] = Y[n] * h_{LMMSE}[n] + \eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

ננfov אט המשוואה ונפתח:

$$Y[n] * h_{LMMSE}[n] + \eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \hat{X}^{LMMSE}[n]$$

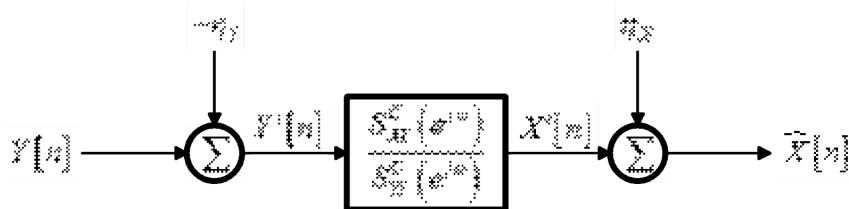
$$Y[n] * h_{LMMSE}[n] + \eta_X - \eta_Y * h_{LMMSE}[n] = \hat{X}^{LMMSE}[n]$$

$$(Y[n] - \eta_Y) * h_{LMMSE}[n] = \hat{X}^{LMMSE}[n] - \eta_X$$

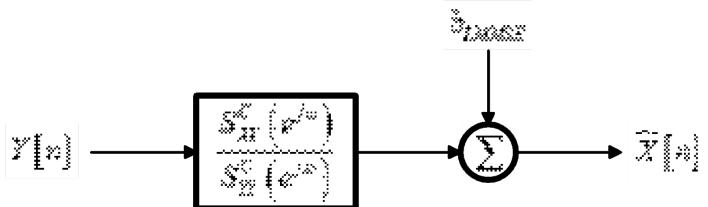
משמע אם נזין את  $\eta_Y - [n]$  לתוך מערכת  $h_{LMMSE}[n]$  צואת נקבל ביציאה שערוך LMMSE של

$$X[n] - \eta_X$$

ולכן מערכת השערוך LMMSE של שני ת"א SSWJ היא מהצורה:

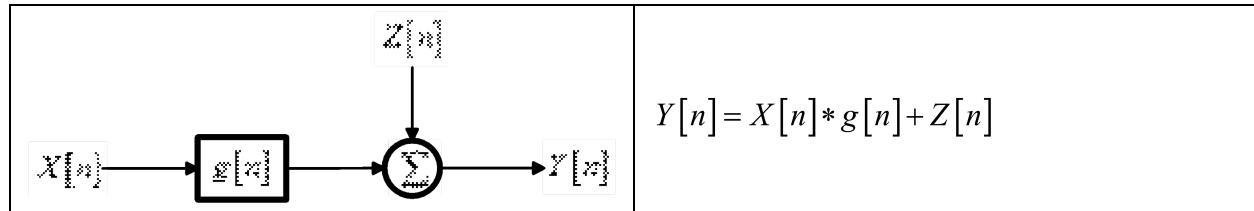


כמובן שנוכל לספק גם את המערכת ה"בסיסית":



דוגמא:

נתונה מערכת ולו המסומנת  $g$  אשר הבאה:



המשווה הוזת מתארת מערכת עם רעש אדיטיבי  $Z[n]$  (חיבורי). נרצה לשחזר (לשערך) את התהיליך  $X[n]$ .

נתון כי  $T$  הוא WSS עם  $S_{XX}(e^{j\omega}) = \eta_X$  וספקטrome הספק. כמו כן נתון כי  $T$  הוא WSS עם  $S_{ZZ}(e^{j\omega}) = \eta_Z$  וספקטrome הספק. בנוסף כי התהיליכים  $X[n], Z[n]$  הם בת"ס.

מהחר והთוחלות של התהיליכים  $X[n], Z[n]$  הוא אף גם תוחלוות של התהיליך המוצא  $Y[n]$ . יהיה אף מאחר שאין במערכת קבוע חיבורי או תהיליך אדיטיבי בעל תוחלה לא אפס. לכן עבור כל התהיליכים מתקיים כי פונקציית (העצמית והקרוס) הקורולציה והקוואריאנס זהות (למעשה הדבר היה מתקיים גם אם אחת התוחלות  $\eta_X$  הייתה אף אבל אז לא היו יכולם לקבוע כי  $\eta_Y = 0$ ). נראה באופן כללי עבור שני התהיליכים כלשהם עם תוחלות:

אפס:

$$C_{AB}(t_1, t_2) \triangleq E[(A(t_1) - \eta_A) \cdot (B(t_2) - \eta_B)] = E[A(t_1) \cdot B(t_2)] \triangleq R_{AB}(t_1, t_2)$$

ידוע כי שני התהיליכים  $X[n], Z[n]$  הם WSS בנפרד ובת"ס מכאן שהם WSS. נחשב את פונקציית הקروس-קורולציה שלהם:

$$R_{XZ}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Z(t_2)] \stackrel{\text{Independence}}{=} E[X(t_1)] \cdot E[Z(t_2)] = \eta_X \cdot \eta_Z = 0 \cdot 0 \equiv 0$$

קיבלונו כי היא שווה זהותית לאפס ולכן ניתן להגיד שהיא לא תלואה בזמןנים עצמים. מאחר שני התהיליכים WSS בנפרד ופונקציית הקروس-קורולציה שלהם לא תלואה בזמןנים הם WSS.

מאחר שמתקיים לתהיליכים אלו  $R(\tau) = C(\tau)$  (עצמי וקרוס) אז מתקיים  $S(e^{j\omega}) = S^C(e^{j\omega})$ .

נרצה להראות כי התהיליכים  $X[n], Y[n]$  הם WSS על מנת להשתמש במסנו וינר (זהו מסנו LMMSE).

תהליך  $[n] Y$  הינו WSS לאחר שהוא עבר של תהליך WSS במערכת וDOI עם אדייטיביות של תהליך WSS נוסף.

שני התהליכיים  $[n] X, [n] Y$  הינם SSWJ כפי שראינו במודל העזר. לכן נוכל להשתמש בשערק ויינר (משערק ליניארי אופטימלי במובן MSE):

$$\hat{Y}^{LMMSE}[n] = Y[n] * h_{LMMSE}[n] + b_{LMMSE}$$

$$H_{LMMSE}(e^{j\omega}) = \frac{S_{XY}^C(e^{j\omega})}{S_{YY}^C(e^{j\omega})}, \quad b_{LMMSE} = \eta_X - \eta_Y \cdot H_{LMMSE}(\omega = 0)$$

$$b_{LMMSE} = \eta_X - \eta_Y \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

נפתח את פונקציית התמסורת של המسان:

$$H_{LMMSE}(e^{j\omega}) = \frac{S_{XY}^C(e^{j\omega})}{S_{YY}^C(e^{j\omega})} \stackrel{C_{XY}=R_{XY}}{=} \frac{S_{XY}(e^{j\omega})}{S_{YY}(e^{j\omega})}$$

נמצא את פונקציות האוטוקורולציה על מנת שנוכל למצוא את ספקטרומי ההספק הדורושים

לביוטי המسان תוך שימוש במודל העזר. נסמן  $[n] Y' = X[n] * g[n]$  ונקבל:

$$R_{XY}(n) = R_{XY'+XZ}(n) = R_{XY'}(n) + R_{XZ}(n) = R_{XY'}(n) = \delta(n) * R_{XX}(n) * g(-n) = R_{XX}(n) * g(-n)$$

$$R_{YY}(n) = R_{(Y'+Z)(Y'+Z)}(n) = R_{YY'}(n) + R_{YZ}(n) + R_{ZY}(n) + R_{ZZ}(n)$$

אך מתקיים כי  $[n] Y', [n] Z$  הינם בת"ס לאחר שהזוג  $[n] X, [n] Z$  מתקיים

מעבר של מערכת DOI. בנוסף תוחלוטו של  $[n] Z$  הינה אפס (גם של  $[n] Y'$ ) ולכן מתקיים

$R_{YZ}(n) = 0$ . נוכל גם להראות:

$$R_{YZ}(n) \triangleq E[(X[n+\tau] * g[n+\tau]) \cdot Z[n]] \stackrel{\text{Independence}}{=} E[X[n+\tau] * g[n+\tau]] \cdot E[Z[n]] = 0$$

ולכן פונקציית האוטו-קורולציה של  $[n] Y$  תהיה:

$$R_{YY}(n) = R_{YY'}(n) + R_{ZZ}(n) = g(n) * R_{XX}(n) * g(-n) + R_{ZZ}(n)$$

ולכן ספקטרומי ההספק יהיה:

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = F\{R_{XY}(n)\} = S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot G^*(e^{j\omega})$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = F\{R_{YY}(n)\} = S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot |G(e^{j\omega})|^2 + S_{ZZ}(e^{j\omega})$$

ולbijוטי המسان יהיה:

$$H_{LMMSE}(e^{j\omega}) = \frac{S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot G^*(e^{j\omega})}{S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot |G(e^{j\omega})|^2 + S_{ZZ}(e^{j\omega})}$$

נבחן את ביצועי המערכת לפי נתון היחס אות לרעש (SNR = Sound\Signal to Noise Ratio)

- אם  $1 \gg SNR$  אז למעשה הספק הרעש  $S_{ZZ}(e^{j\omega})$  זניח מול הספק האות ומתקיים:

$$H_{LMMSE}(e^{j\omega}) = \frac{S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot G^*(e^{j\omega})}{S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot |G(e^{j\omega})|^2 + S_{ZZ}(e^{j\omega})} \approx \frac{1}{G(e^{j\omega})}$$

הדבר הגיוני כי אם הרעש זניח ביחס לאות אז מערכת השערוך רק צריכה "לבטל" את

פעולות מערכת  $(g(\cdot))$

- אם  $1 \ll SNR$  אז הספק האות זניח מול הספק הרעש  $S_{ZZ}(e^{j\omega})$  ומתקיים:

$$H_{LMMSE}(e^{j\omega}) = \frac{S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot G^*(e^{j\omega})}{S_{XX}(e^{j\omega}) \cdot |G(e^{j\omega})|^2 + S_{ZZ}(e^{j\omega})} \approx 0$$

הדבר הגיוני כי אם הרעש עצום יחסית לאות אז התהיליך  $[n]^Y$  אשר ממנו מנסים

לשערך את התהיליך  $[n]^X$  מזוהם מידי ולכון "כדי" למחוק אותו. במקרה זה השערוך יתבצע רק ע"י הקבוע החיבורו אשר אחראי על התוחלת וOMEM שזה השערוך הנבון ביותר במקרה זה.

#### שגיאת שערוך וינו

בשערוך מ"א ראיינו כי השגיאה היא מ"א עצמה. כנ"ל לגבי ווקטוריים אקראיים וOMEM לגבי תהיליכים אקראיים. אנו משתמשים בשגיאה הפרשית ולכון תהליך השגיאה נתון ע"י:

$$e[n] = X[n] - \hat{X}[n]$$

נרצה לבדוק את תהליך השגיאה.

טענה:

תהליך השגיאה  $[n]^e$  הינו SSW ומתקיים:

$$E[e[n]] = 0 \quad \forall n . \quad 1$$

$$R_{ee}(k) = R_{XX}(k) - R_{\hat{X}\hat{X}}(k) = C_{XX}(k) - C_{\hat{X}\hat{X}}(k) . \quad 2$$

הוכחה:

1. הדבר נובע מכך שמתקיים  $e_n \perp \text{תא}$ .
2. נראה כי הוא SSS וניתנו ביטוי עבור פונקציית האוטו-קורולציה של התהיליך. לצורך כך

נתחילה עם פונקציית האוטו-קורולציה של תהיליך המקור  $X[n]$ :

$$\begin{aligned} R_{XX}(k) &\triangleq E[X(n+k) \cdot X(n)] = E[(\bar{X}[n+k] + e[n+k]) \cdot (\bar{X}[n] + e[n])] = \\ &= E[\bar{X}[n+k] \cdot \bar{X}[n]] + E[\bar{X}[n+k] \cdot e[n]] + E[e[n+k] \cdot \bar{X}[n]] + E[e[n+k] \cdot e[n]] = \\ &\stackrel{\bar{X} = f^{Linear}(\{Y_n\}, 1)}{=} E[\bar{X}[n+k] \cdot \bar{X}[n]] + E[e[n+k] \cdot e[n]]^* = R_{\bar{X}\bar{X}}(k) + R_{ee}(n+k, n) \end{aligned}$$

שיווין (\*) מאשר המשערך  $\bar{X}$  הוא מוצר של מערכת וDOI אשר בכניסתה הת"א  $[n]$  אשר SSS ולכון גם המוצא הות"א T"א SSS. עבריר אגפים ונתקבל את פונקציית האוטו-קורולציה של השגיאה:

$$R_{ee}(n+k, n) = R_{XX}(k) - R_{\bar{X}\bar{X}}(k)$$

קיבלנו שפונקציית האוטו-קורולציה של השגיאה תלוייה בהפרש הזמן בלבד ולכון היא SSS.

נזכיר כי לפי טענה 1 מתקיים  $E[e[n]] = 0$  ולכון:

$$E[e[n]] = 0 \Rightarrow E[X[n] - \bar{X}[n]] = 0 \Rightarrow E[X[n]] = E[\bar{X}[n]] \Rightarrow \eta_X = \eta_{\bar{X}}$$

נשתמש בקשר בין פונקציית הקורולציה לפונקציית הקו-אוריאנס ונקבל:

$$C_{AB}(k) = R_{AB}(k) + \eta_A \cdot \eta_B$$

לכון נוכל להסיק:

$$\begin{aligned} R_{ee}(k) &= R_{ee}(n+k, n) = R_{XX}(k) - R_{\bar{X}\bar{X}}(k) = R_{XX}(k) - R_{\bar{X}\bar{X}}(k) + \eta_X^2 - \eta_X^2 = \\ &\stackrel{\eta_X = \eta_{\bar{X}}}{=} R_{XX}(k) - R_{\bar{X}\bar{X}}(k) + \eta_X^2 - \eta_{\bar{X}}^2 = R_{XX}(k) + \eta_X^2 - (R_{\bar{X}\bar{X}}(k) + \eta_{\bar{X}}^2) = C_{XX}(k) - C_{\bar{X}\bar{X}}(k) \end{aligned}$$

מסקנה:

ספקטromeם ההספק של תהיליך השגיאה נתון ע"י (התמרת פורייה של פונקציית האוטו-קורולציה של תהיליך SSS):

$$S_{ee}(e^{j\omega}) = F\{R_{ee}(k)\} = S_{XX}(e^{j\omega}) - S_{\bar{X}\bar{X}}(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) - S_{\bar{X}\bar{X}}^C(e^{j\omega})$$

אר המשערך נתון ע"י מעבר התהיליך  $Y[n]$  במשנן  $h_{LMMSE}[n]$  (מערכת DOI ולכון קונבולוציה בזמן ומשמעותה מכפלה בתדר) ולכון:

$$S_{ee}(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) - S_{YY}^C(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) - \left|H_{LMMSE}(e^{j\omega})\right|^2 \cdot S_{YY}^C(e^{j\omega})$$

נציב את ביטוי המשנן ונקבל:

$$S_{ee}(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) - \frac{\left|S_{XY}^C(e^{j\omega})\right|^2}{\left|S_{YY}^C(e^{j\omega})\right|^2} \cdot S_{YY}^C(e^{j\omega}) = S_{XX}^C(e^{j\omega}) - \frac{\left|S_{XY}^C(e^{j\omega})\right|^2}{S_{YY}^C(e^{j\omega})}$$

ולכן תוחלת השגיאה הריבועית היא:

$$MSE \triangleq E[e^2[n]] = R_{ee}(0) = F^{-1}\left\{S_{ee}(e^{j\omega})\right\}|_{n=0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S_{ee}(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S_{ee}(e^{j\omega}) d\omega$$

הערה:

נבחין כי הביטוי מזכיר את מבנה המשערק הרגיל של מ"א מתוך מ"א (שונות ↔ ספקטורים).

המשמעות של ביטוי ספקטורים הספק השגיאה היא למעשה שבל תדר משוערך בנפרד. בפועל עברו כל תדר מופעל משערק סקלרי.

## **תהליכיים אקראיים מתקדמים**

בחלק זה נזכיר שני תהליכיים אקראיים מוכרים ופשויטים, תהליך ויינר ותהליך פואסון. שני תהליכיים אלו הם תהליכיים בעלי תוספות בת"ס.

### תהליך אקראי בעל תוספות בת"ס

ת"א  $[n]$  יקרא בעל תוספות בת"ס (או בקיצור – תהליך תוספות בת"ס) אם מתקיים שתוספות זרות שלו הן בת"ס.

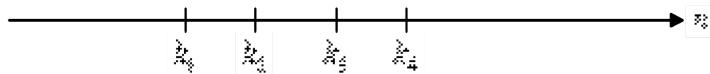
נסמן תוספה של תהליך  $[n]$  בזמן  $k_1$  לזמן  $k_2$  ע"י:

$$X(k_1, k_2) = X[k_2] - X[k_1]$$

תהליך  $[n]$  בעל תוספות בת"ס יקיים כי התוספות  $X(k_3, k_4)$  ו-  $X(k_1, k_2)$  הן בת"ס אם הקטועים  $(k_1, k_2), (k_3, k_4)$  זרים זה לזה (אם הקטועים לא זרים לא נדע להגיד על התוספות כלום).

דוגמא:

עבור ת"א  $[n]$  בעל תוספות בת"ס וציר הזמן המצורף מתקיים:



- התוספות  $X(k_3, k_4)$  ו-  $X(k_1, k_2)$  הן בת"ס.

- התוספות  $X(k_2, k_4)$  ו-  $X(k_1, k_3)$  הן לא בהכרח בת"ס.

### תהליך Wiener / תנועת Brown

תהליך ויינר (Wiener) הוא מודל מתמטי לתיאור תנועת בראון (Brownian Motion) אשר נפגשנו בה כאשר רצינו לקבל מוטיביה על תהליכיים אקראיים – דוגמת "הילוך שכור". תנועת בראון היא תנואה מרוחבית אשר בכל רגע (זהו תהליך בזמן רציף) יכולה להיות תנואה לאחד משני הכוונים בכל אחד מן הציריים. על מנת לפתח את המודל נתחיל עם תהליך הילוך שכור חד-מימדי בזמן בדיד.

### תהליך שכור חד-מימדי בזמן בדיד

תהליך שכור חד-מימדי בזמן בדיד נתון ע"י:

$$X[n] = X[n-1] + d \cdot W[n], \quad X[0] = 0$$

$$W[n] = W_n = \begin{cases} 1 & w.p. \frac{1}{2} \\ -1 & w.p. \frac{1}{2} \end{cases} \quad \{W_n\} \quad i.i.d$$

בכל רגע מתקבל "החלטה" עברו כיוון הצעד. הצעדים קבועים בגודל  $d$ . למעשה מתקיים:

$$X[n] = d \cdot \sum_{k=1}^n W_k$$

אנו יכולים להזמין לפי נוסחת הנסיגה כי זהו תהליך R.A. ליניארי עם מקדם  $1 = \alpha$  ולכן הוא לא סטציוני.

נבחין כי תהליך השיכור הוא תהליך בעל תוספות בת"ס (נצח זוג תוספת)  $X(l, m), X(i, j)$  כאשר נניח ללא הגבלת הכלליות  $j < m, i < l$ :

$$X(l, m) = X[l] - X[m] = d \cdot \sum_{k=1}^l W_k - d \cdot \sum_{k=1}^m W_k = d \cdot \sum_{k=l+1}^m W_k$$

$$X(i, j) = X[i] - X[j] = d \cdot \sum_{k=1}^i W_k - d \cdot \sum_{k=1}^j W_k = d \cdot \sum_{k=i+1}^j W_k$$

מכיוון ש-  $\{W_n\}$  סדרה p.i. אז איבריה בת"ס הדדית. אם הקטעים  $(l, m), (i, j)$  הם קטעים זרים אז בתוספות המתאימות לקטעים אלו, אשר בנויות מן הסכומים הנ"ל, אין איברים זרים מן הסדרה  $\{W_n\}$ .

התוספת  $X(l, m)$  היא פונקציה (סכום) של איברים  $W_{l+1}, W_m, \dots, W_{i+1}$  אשר בת"ס הדדית. התוספת  $X(i, j)$  היא פונקציה (סכום) של איברים שונים  $W_j, \dots, W_{i+1}$  אשר בת"ס הדדית. מכיוון שגם משתנים הם בת"ס אז גם פונקציות שלהם הן בת"ס (ומאחר שאם הקטעים זרים אין בתוספות איבר  $W_k$  משותף) אז נקבל  $X(l, m) \neq X(i, j)$ .

סטטיסטיקה עד סדר שני של תהליכי שיכור חד-מימדי בזמן בדיד:

$$X[n] = d \cdot \sum_{k=1}^n W_k \quad \text{התהליכי נתון ע"י}$$

תוחלת התהליכי מתאפס לכל  $n$ :

$$E[X[n]] = E\left[d \cdot \sum_{k=1}^n W_k\right] = d \cdot E\left[\sum_{k=1}^n W_k\right] = d \cdot \sum_{k=1}^n E[W_k] = d \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)\right) = 0$$

פונקציית הקורולציה נתונה ע"י (נניח לשם הפיתוח  $m > n$ ):

$$\begin{aligned}
 R_{XX}(n, m) &\triangleq E[X[n] \cdot X[m]]^* = E[(X[m] + X(m, n)) \cdot X[m]] = \\
 &= E[(X[m])^2] + E[X(m, n) \cdot X[m]]^{**} = E[(X[m])^2] + E[X(m, n) \cdot X(0, m)] = \\
 &= \stackrel{\text{Independence}}{=} E[(X[m])^2] + E[X(m, n)] \cdot E[X(0, m)] = E[(X[m])^2] + 0 \cdot 0 = \\
 &= E[(X[m])^2] = E\left[\left(d \cdot \sum_{k=1}^m W_k\right)^2\right] = d^2 \cdot E\left[\left(\sum_{k=1}^m W_k\right)^2\right]
 \end{aligned}$$

שיוויון (\*) לאחר שמתקיים  $X[n] = X[n] + X[m] - X[m] = X[m] + X(m, n)$

שיוויון (\*\*) לאחר שמתקיים  $X[m] = X[m] + X[0] - X[0] = X(0, m) + X[0] \stackrel{X[0]=0}{=} X(0, m)$

עבור  $E\left[\left(\sum_{k=1}^m W_k\right)^2\right]$  מתקיים למעשה ריבוע של סכום איברי סדרה p.i. כל המכפלות

המעורבות בתאפסנה לאחר שמתקיים  $E[W_i \cdot W_j] \stackrel{\text{Independence}}{=} E[W_i] \cdot E[W_j] = 0 \cdot 0 = 0$ . לכן נישאר רק עם המכפלות הלא-מעורבות ונקבל:

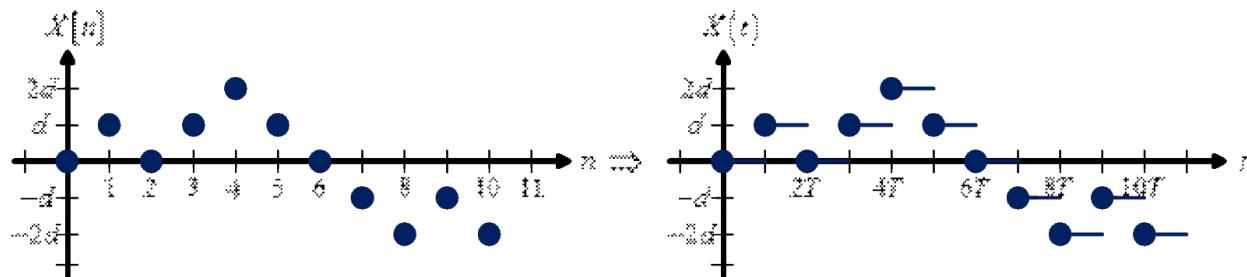
$$R_{XX}(n, m) \triangleq d^2 \cdot E\left[\left(\sum_{k=1}^m W_k\right)^2\right] \stackrel{\{W_n\} \text{ i.i.d.}}{=} d^2 \cdot E\left[\sum_{k=1}^m (W_k)^2\right] = d^2 \cdot m$$

פונקציית הקורולציה תלויה רק בהפרש הזמן ולכן התהיליך לא סטציוני. באופן כללי עבור  $m, n$  כלשהם נקבל:

$$R_{XX}(n, m) \triangleq d^2 \cdot \min(n, m)$$

### תהליך שיכון חד-מימדי בזמן רציף

נרצה "להרציף" את התהליך השיכון בזמן בדיד כך שהשיכון יבצע את הצעד (עדין בסיכוי חצי) בזמןים שהם מכפלה של  $T$ , כלומר בזמןים  $nT$  (ובשאר הזמן לא יוז). באופן זה ריאלייזציה של התהיליך תיראה באופן הבא:



נסמן את התהיליך ע"י  $X_{T,d}(t)$ . נזהה כי עד זמן  $t$  למשה מתבצעים  $\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$  צעדים נסמן גודל

$$N(t) = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$$

ביטוי מתמטי לתהיליך השיכור יהיה:

$$X_{T,d}(t) = X[N(t)] = X\left[\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right] = d \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k = d \cdot \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor} W_k = d \cdot \sum_{k=1}^{\infty} W_k \cdot U(t - kT)$$

תפקיד המדרגה הוא "להתעלם" מההחלטות המאוחרות מזמן  $t$  (להתחשב רק ב-  $N(t)$  החלטות הראשונות) הרי המדרגה מתאפשרת עבור החלטות  $k$  אשר גדולות מהחלטה מס'  $T$

$$N(t)$$

سطטיסטיקה עד סדר שני של תהיליך שיכור חד-מיידי בזמן רציף:

$$X_{T,d}(t) = d \cdot \sum_{k=1}^{\infty} W_k \cdot U(t - kT)$$

כמובן שגם בעת תוחלת התהיליך תטאפס לכל  $n$  מאותן סיבות:

$$E[X_{T,d}(t)] = 0$$

פונקציית הקורולציה נתונה ע"י (עבור  $m, n$  כלשהם):

$$R_{XX}(t_1, t_2) = d^2 \cdot \min(N(t_1), N(t_2)) = d^2 \cdot \min\left(\left\lfloor \frac{t_1}{T} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_2}{T} \right\rfloor\right)$$

כמובן שהטהיליך לא סטציונירי (גם התהיליך בזמן בדיד לא וגם ניתן לראות שוב כי הקורולציה תלוי בזמן עצם).

אם מתקיים  $T \gg t_1, t_2$  אז למשה (מאחר שמתקיים  $\left\lfloor \frac{x}{A} \right\rfloor \approx \frac{x}{A}$  :

$$R_{XX}(t_1, t_2) \underset{t_1, t_2 \gg T}{\approx} d^2 \cdot \min\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right)$$

### טהיליך וינר (פיתוח)

נרצה לדמות את תהיליך השיכור לתהיליך אקראי בזמן רציף ולא מקוונט. נרצה להפוך את השיכור לחלקיק אשר "בוחר" תנויות אינפיטיסימליות לאורך הציר כל פרק זמן אשר שואף לאפס.

אנו למעשה רוצים את גבול התהיליך כאשר  $0 \rightarrow d \rightarrow T$  (ואז נקבל גרען תנועה חלק) באופן כזה שלסטטיסטיקה מסדר שני של התהיליך יהיה גבול. התנאי לכך הוא כמובן **שיתקיים הגבול**:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \left( d^2 \cdot \frac{1}{T} \right)$$

דרישה לכך היא שביטויו הגבול יהיה קבוע חיובי סופי, כלומר  $\frac{d^2}{T} = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

למעשה מתקיים  $T \cdot \alpha = d^2$ . באופן זה אם אחד הפרמטרים  $T, d$  שוואף לאפס אז גם השני. נגידר בעת את התהיליך וינר ונסמן:

נסמן את התהיליך וינר ע"י  $X_\alpha(t)$ . ביטוי מתמטי לתהיליך יהיה:

$$X_\alpha(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ d^2 = \alpha \cdot T}} (X_{T,d}(t))$$

**סטטיסטיקה עד סדר שני של תהיליך וינר:**

$$X_\alpha(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ d^2 = \alpha \cdot T}} (X_{T,d}(t))$$

התהיליך נתון ע"י .

סטטיסטיקה עד סדר שני נתונה ע"י (כמובן שהטהיליך לא סטצionario):

$$E[X_\alpha(t)] = 0 \quad \forall t$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \alpha \cdot \min(t_1, t_2)$$

**הפיילוג של תהיליך וינר:**

נרצה לבחון את הפילוג של תהיליך וינר. לצורך כך נבחן את התהיליך לפני השאפת הגבול, ז"א

את  $X_{T,d}(t)$ .

נקפיד על היחס  $d^2 = \alpha \cdot T$ , ולכן נוכל לסמן פשוט  $X_T(t)$ .

$$\begin{aligned} X_T(t) &= X_{T,d}(t) \Big|_{d^2 = \alpha \cdot T} = \sqrt{\alpha \cdot T} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k = \sqrt{\alpha \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{t}{T}} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k = \sqrt{\alpha \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{T}{t}} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{t}}} \cdot \frac{\sqrt{N(t)}}{\sqrt{N(t)}} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k = \sqrt{\alpha \cdot t} \cdot \frac{\sqrt{N(t)}}{\sqrt{\frac{T}{t}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N(t)}} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot t} \cdot \frac{\sqrt{\frac{t}{T}}}{\sqrt{\frac{T}{t}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N(t)}} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k \end{aligned}$$

כעת נחיל את הגבול  $0 \rightarrow T$  מכיוון שאנו רוצים לדון בתהיליך וינר.  
אם קיים הגבול כלו נוכל להחיל אותו בחלוקת לפי מכפלה:

$$\left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \right)_{T \rightarrow 0} \stackrel{t \gg T}{\approx} \frac{t}{T} \quad (\text{מכיוון שמתקיים}) \quad \frac{\sqrt{\frac{t}{T}}}{\sqrt{\frac{t}{T}}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 1.$$

$$.2. \quad \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{N(t)}} \cdot \sum_{k=1}^{N(t)} W_k \right) \sim N(0,1) \quad (\text{לפי משפט הגבול המרכזי}).$$

ולכן קיבלנו כי הפיגוג של תהיליך וינר מקיים:

$$X_\alpha(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ d^2 = \alpha \cdot T}} (X_{T,d}(t)) \sim \sqrt{\alpha \cdot t} \cdot N(0,1) = N(0, \alpha \cdot t)$$

שה"כ קיבלנו כי תהיליך וינר מתפלג נורמלית עם תוחלת  $0 = \mu_X$  ושונות  $\sigma_X^2 = \alpha \cdot t$ .  
כਮובן שתהיליך וינר הוא בעל תוספות בת"ס כמו שתהיליך הילוק השיכור כזה ולכון:

$$X_\alpha(t_1, t_2) = X_\alpha(t_2) - X_\alpha(t_1) \stackrel{*}{\sim} X_\alpha(t_2 - t_1) \sim N(0, \alpha \cdot (t_2 - t_1))$$

הסביר מעבר (\*) : הפרש הדגימות  $X_\alpha(t_2) - X_\alpha(t_1)$  מתפלג כמו דגימת התהיליך  $(t_2 - t_1)$   
מאחר שעזהו תהיליך תוספות בת"ס לכן למעשה הפרש מייצג התנהגות זהה לו שהתהיליך  
עשה מזמן  $t_1$  עד זמן  $t_2$ .

המשמעות היא שגם התוספות מתפלגות גאוסית.

כעת נראה כי תהיליך וינר הינו תהיליך אקראי גauss (תזכורת: תא"ג הוא ת"א שככל קבוצת  
דגימות שלו היא קבוצה גאוסית במשמעות – כל קומבינציה ליניארית שלו הוא מ"א גauss).

נבחן זוג דגימות של התהיליך בזמנים  $t_1, t_2$  (נניח  $t_2 > t_1$ ) ונבחין כי מתקיים:

$$\begin{aligned} X_\alpha(t_1) &= X_\alpha(0, t_1) \\ X_\alpha(t_2) &= X_\alpha(t_1) + X_\alpha(t_1, t_2) = X_\alpha(0, t_1) + X_\alpha(t_1, t_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_\alpha(t_1) \\ X_\alpha(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\alpha(0, t_1) \\ X_\alpha(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

אנו יודעים כי זוג התוספות  $X_\alpha(0, t_1), X_\alpha(t_1, t_2)$  הינם בת"ס כי הן על קטיעי זמן זרים, בנוסף אנו  
יודעים כי כל אחת מן התוספות מתפלגת גאוסית כפי שכבר רأינו.

מאחר שהוקטור  $[X_\alpha(t_1) \ X_\alpha(t_2)]^T$  נוצר מטרנספורמציה ליניארית של וא"ג גם הוא וא"ג  
ולכן כל איבריו גaussים. נוכל לבצע זאת עבור כל סט זמנים ולכן כל דגימותיו של התהיליך  
יכולות להרכיב וא"ג – ממשע התהיליך הוא תהיליך אקראי גauss (תא"ג).

### תהליך ויינר (הגדרה פורמלית)

תהליך ויינר  $(X(t))$  עם מקדם  $\alpha$  הוא ת"א בעל תוספות בת"ס גאוסיות המקיים (ולמעשה תא"ג):

$$X(t_1, t_2) \sim N(0, \alpha \cdot (t_2 - t_1))$$

ואשר מקיים את תנאי ההתחלה  $X(0) = 0$ .

הסתטיסטיקה של התהליך (מדובר בתא"ג ולכן סטטיסטיקה מסדר שני מאפיינת את התהליך):

$$E[X_\alpha(t)] = 0 \quad \forall t$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \alpha \cdot \min(t_1, t_2)$$

ניתן לראות כי התהליך לא סטציונירי (פונקציית הקורולציה שלו תלויות בזמן עצם).

למעשה כעת ניתן להסביר אינטואיטיבית את הסטטיסטיקה מסדר שני (נניח  $t_1 < t_2$ ):

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &\triangleq E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = E[X(t_1) \cdot (X(t_1) + X(t_1, t_2))] = E[X^2(t_1)] + \\ &+ E[X(t_1) \cdot X(t_1, t_2)] = E[X^2(t_1)] + E[X(0, t_1) \cdot X(t_1, t_2)] \stackrel{\text{Independence}}{=} E[X^2(t_1)] + \\ &+ E[X(0, t_1)] \cdot E[X(t_1, t_2)] = E[X^2(t_1)] + 0 \cdot 0 = E[X^2(t_1)] \stackrel{\text{**}}{=} \text{Var}(X(t_1)) \stackrel{\text{***}}{=} \sigma_X^2 = \alpha \cdot t_1 \end{aligned}$$

шиוISON (\*) לאחר שזהו התהליך בעל תוספות בת"ס והקטעים  $(0, t_1), (t_1, t_2)$  הינם זרים (תוחלת כל תוספת אפס).

шибיוון (\*\*) לאחר שידוע  $\eta_X = 0$  ולכן  $E[X^2(t_1)] - \eta_X^2 = E[X^2(t_1)]$ .

шибיוון (\*\*\*) לאחר שדגימת התהליך ברגע מסוים  $t_1$  שköלה לתוספת מרגע אפס ועד אותה רגע.

הדבר אינטואיטיבי לאחר שעבור שתי דוגמאות של התהליך קיימת קורולציה רק בתחום החיפוי ולכן למעשה מדובר בקורסולציה עצמית של תחום זה, תחום החיפוי הינו תוספת כלשהי ולכן מתפלג גאוסית. קורולציה עצמית של מא"ג היא למעשה השונות ולכן קיבלנו

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \alpha \cdot \min(t_1, t_2)$$

### תהליך הנגזרת של תהליך ויינר

נרצה לבדוק את תהליכי הנגזרת של תהליכי ויינר. לצורך כך נתבונן תחילת בתהליכי השיפוע של תהליכי ויינר ונגידו:

$$X_\varepsilon(t) = \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} = \frac{X(t, t+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

תהליכי השיפוע הינו ת"א (מאחר שהוא פונקציה של ת"א) גaussiy (בינוי כקומבינציה ליניארית של זוג דגימות מתא"ג – כל דגימותיו של תא"ג הינו גaussiy במשותף).  
ולכן תהליכי הנגזרת הוא:

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(t)$$

תהליכי הנגזרת גם הוא תא"ג מכיוון שהוא גבול של תא"ג (זו לא הוכחה פורמלית אך טענה נכונה).

מכיוון שתהליכי הנגזרת  $(t')^X$  הינו תא"ג אז מספיק למצוא סטטיסטיקה עד סדר שני כדי לאפיין אותו.

מצוא את הסטטיסטיקה עבור תהליכי השיפוע ואז נפעיל את הגבול.  
תוחלת התהליכי:

פונקציית הקורולציה של תהליכי (נניח לשם פשוטות כי  $\tau > 0$ ):

$$\begin{aligned} E[X_\varepsilon(t)] &= E\left[\frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\left(E[X(t+\varepsilon)] - E[X(t)]\right) \stackrel{Wiener}{=} \frac{1}{\varepsilon}(0 - 0) = 0 \\ R_{X_\varepsilon X_\varepsilon}(t+\tau, t) &\triangleq E[X_\varepsilon(t+\tau) \cdot X_\varepsilon(t)] = E\left[\frac{X(t+\tau+\varepsilon) - X(t+\tau)}{\varepsilon} \cdot \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon}\right] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} E[X(t+\tau, t+\tau+\varepsilon) \cdot X(t, t+\varepsilon)] \end{aligned}$$

נבחן כי הצגנו את פונקציית הקורולציה ע"ז זוג תוספות של תהליכי ויינר (זהו תהליכי בעל תוספות בת"ס).

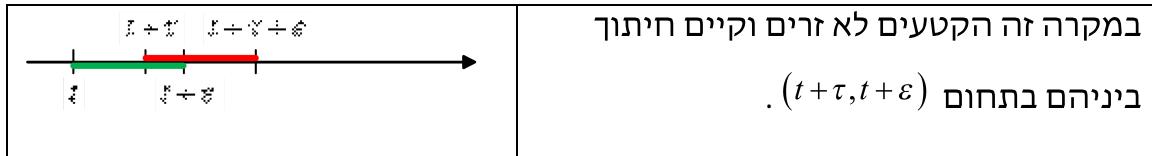
נפריד את הפיתוח לשני מקרים:

1.  $\tau < \varepsilon < 0$  (אין חפיפה בין הזמןים של שני תהליכי הנגזרת):

	<p>במקרה זה הקטעים זרים. לכן התוספות בת"ס, כי בעל תוחלת אפס.</p>
--	--

לכן במקרה זה פונקציית הקורולציה מתאפסת, כלומר  $R_{X_\varepsilon X_\varepsilon}(t+\tau, t) = 0$ .

2.  $\varepsilon < \tau < 0$  (קיים חפיפה בין הזמןים של שני תהליכי הנגזרת):



נפריד את התוספות לחלקם נפרדים:

$$X(t, t+\epsilon) = X(t, t+\tau) + X(t+\tau, t+\epsilon)$$

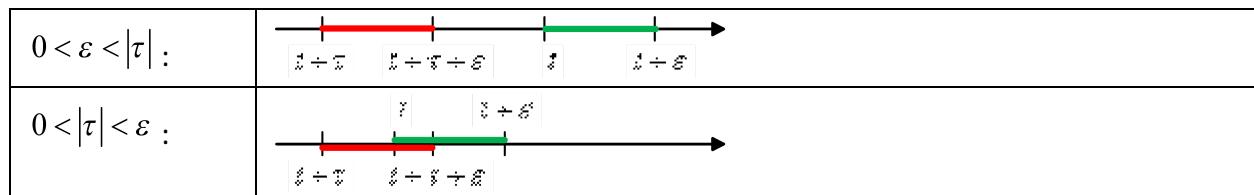
$$X(t+\tau, t+\epsilon) = X(t+\tau, t+\epsilon) + X(t+\epsilon, t+\tau+\epsilon)$$

לאחר המכפלה כל התוספות של קטעים זרים נופלות כי מדובר בתוספות בת"ס בעל תוחלת אפס ונקבל:

$$\begin{aligned} R_{X_\epsilon X_\epsilon}(t+\tau, t) &= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot E[X(t+\tau, t+\tau+\epsilon) \cdot X(t, t+\epsilon)] = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot E[X^2(t+\tau, t+\epsilon)] = \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot E[X^2((t+\epsilon) - (t+\tau))] = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot E[X^2(\epsilon - \tau)] = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot a \cdot (\epsilon - \tau) \end{aligned}$$

שיוויוניים  $(*)$ ,  $(**)$  לפि תכונות תהליך ויינר (בעל תוספות בת"ס + פילוג התוספות) כפי שנייתן לראות שביצענו בפיתוח הסטטיסטייה של תהליך ויינר תחת ההגדרה הפורמלית.

פיתחנו עבורו  $0 < \tau$ , אם מתקיים  $0 < \tau$  אז הקטעים יראו:



גם במקרה הראשון, אין כלל חפיפה ולכן פונקציית הקורולציה תתאפס ובמקרה השני יש

חפיפה בקטע  $(t, t+\tau+\epsilon)$ , אורכו קטע זה הוא  $\tau + \epsilon$  בעוד שעבור  $0 < \tau$  קיבלנו קטע באורך

$\tau - \epsilon$ . כזכור במקרה שלנו  $\tau$  שלילי ולכן בשני המקרים נוכל לרשום באופן שקול  $|\tau| - \epsilon$ .

בשני המקרים קיבלנו כי פונקציית הקורולציה תלויות בהפרש הזמן בלבד ולכן התהליך SSSW.

בזה"כ נוכל לרשום:

$$R_{X_\epsilon X_\epsilon}(t+\tau, t) = R_{X_\epsilon X_\epsilon}(\tau) = \begin{cases} 0 & |\tau| > \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon^2} \cdot a \cdot (|\tau| - \epsilon) & |\tau| < \epsilon \end{cases}$$

נציג את פונקציית הקורולציה באופן גרפי:

	<p>נזהה כי שטח המשולש הוא <math>\alpha</math> וככל לא תלוי ב- <math>\varepsilon</math> אלא ביחס בין הפרמטרים <math>T, d</math>.</p> <p>בגבול הנגזרת, כאשר <math>0 \rightarrow \varepsilon</math>, נקבל דלתא בגובה <math>\alpha</math> ז"א:</p> $R_{XX'}(t+\tau,t) = a \cdot \delta(\tau)$ <p>חשוב להזכיר כי זו לא פונקציית הלם רגילה כי השטח סופי.</p> <p>אנו מקבלים למעשה:</p>
--	---

$$R_{XX'}(t+\tau,t) = R_{XX'}(\tau) = \begin{cases} 0 & |\tau| > \varepsilon \\ a \cdot \delta(\tau) & |\tau| < \varepsilon \end{cases}$$

כזכור, פונקציית קורולציה כזוpta מתאימה לרעש לבן (בין כל זוג דגימות), קרובות ככל שנרצה לא תהיה קורולציה) עם ספקטרום הספק (צפיפות הספק ספקטרלית)  $\alpha$ . אנו נהגים לסמנו

$$\alpha = \frac{N_0}{2} \text{ ע"מ ליאציג צפיפות הספק חצי ספקטרלי.}$$

רעש לבן הוא בעל הספק קבוע (בעוצמת גובה הדלתא) על כל התדרים. הספק הגדל הזה נובע מתחילה השיכור המקורי אשר מכיל בתוכו הרבה אנרגיה.

## תהליך אקראי Poisson

תהליך אקראי פואסן הוא תהליך המ寧יה פשוט ביותר, התהליך מונה את כמות האירועים בזמן עברו אירועים המתרחשים באופן אקראי לא תלות הדדי. זהו תהליך אקראי בזמן רציף עם ערכים בדים.

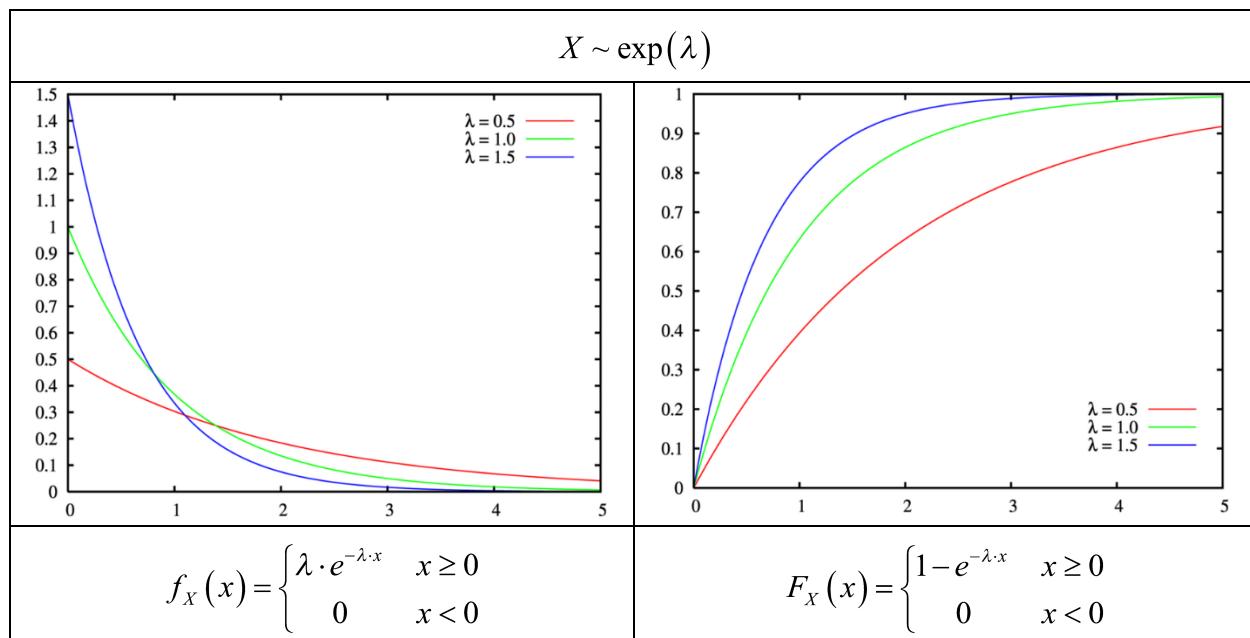
דוגמאות לתהליכיים פואסוניים טבויים:

- מספר טיפות גשם הנופלת בתוך כוס (או חתך עגול מוגדר)
- התפרキות רדיואקטיביות
- תורים (בקירוב סדר ראשון)

בת"א פואסן התפלגות הזמן בין שני מאירועים עוקבים היא התפלגות מעריכית והתפלגות מספר האירועים המתרחשים בפרק זמן כלשהו היא התפלגון פואסן.

### התפלגות מעריכית

התפלגות מעריכית היא התפלגות רציפה על המספרים הא-שליליים. התפלגות זו מאופיינת בתכונת חוסר-זיכרון ולכן מתארת תופעות אקטיות שהסיכוי להתרחשותן קבוע בזמן. להתפלגות פרמטר אחד אשר מייצג את קצב הדעיכה.



תכונת חוסר הזיכרון של משתנה אקראי אקספוננציאלי:

כאמור, מ"א אקספוננציאלי מתאפיין בתכונת חוסר הזיכרון, כלומר, עבור מתקיים:

$$\Pr(X > x_1 + x_2 | X > x_1) = \Pr(X > x_2)$$

- הוכחה -

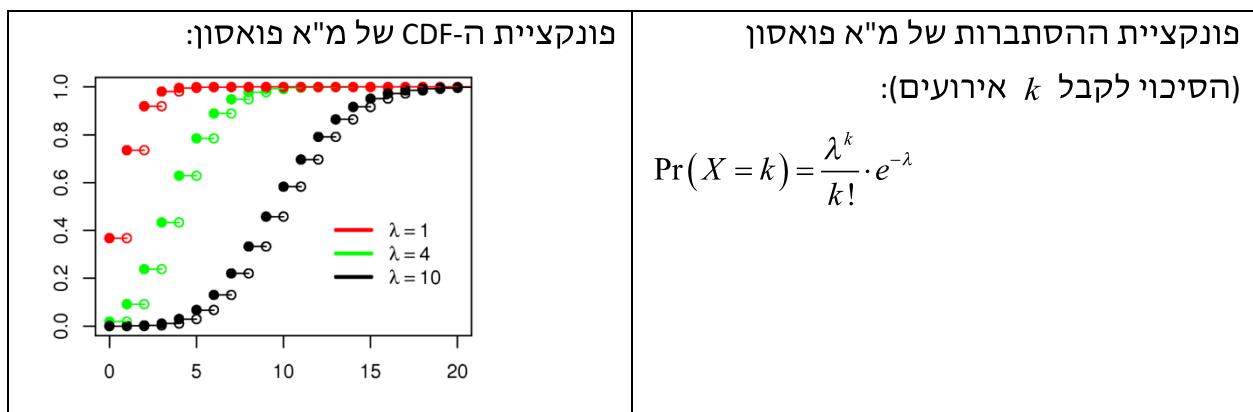
$$\begin{aligned} \Pr(X > x_1 + x_2 | X > x_1) &= \frac{\Pr(X > x_1 + x_2 \cap X > x_1)}{\Pr(X > x_1)} = \frac{\Pr(X > x_1 + x_2)}{\Pr(X > x_1)} \underset{X \sim \exp(\lambda)}{=} \frac{1 - [1 - e^{-(x_1 + x_2) \cdot \lambda}]}{1 - [1 - e^{-x_1 \cdot \lambda}]} = \\ &= \frac{e^{-(x_1 + x_2) \cdot \lambda}}{e^{-x_1 \cdot \lambda}} = e^{-x_2 \cdot \lambda} = \Pr(X > x_2) \end{aligned}$$

### התפלגות פואסון

התפלגות פואסון היא התפלגות של משתנה מקרי בדיד. ההתפלגות מתארת את הסיכוי לקיים מספר אירועים בפרק זמן מסוים כאשר האירועים מתרחשים בקצב מוגדר ובאופן בלתי תלוי.

התפלגות פרמטר בודד אשר מייצג את קצב האירועים.

מ"א פואסון עם פרמטר  $\lambda$  מסומן ע"י  $X \sim Poisson(\lambda)$ .



### בנייה תחילה פואסון

בנאה את ת"א פואסון ע"י גבול של ת"א בדיד. נתחיל עם ת"א ברנולי p.i.i.

תהליכי אקראי "חיי בבלון" בזמן בדיד:

חיי הבלון מתרחשים עד אירוע פיצוץ הבלון (פיצוץ הבלון משול לאירוע המעניין – טיפה שנפלה בкус לדוגמא).

נגדיר תהליכי אקראי  $W_n$  של "ילד מעצבן" אשר בכל פרק זמן כלשהו הוא מנסה לפוצץ את הבלון. כל ניסיון הוא בעל סיכוי הצלחה  $p$  והמאורע יסומן  $W_n = 1$ . א-הצלחה לא "מחלישה" את הבלון ולכן לא פוגעת בסיכויי הבלון בהמשך מכאן שסדרת הניסיונות הינה p.i.i.

$$W_n = \begin{cases} 1 & w.p. \quad p \quad \{W_n\} \text{ is i.i.d} \\ 0 & w.p. \quad 1-p \quad W_n \sim Ber(p) \end{cases}$$

לצורך הגדרת הניסוי נניח שהילד "דפק" והוא ממשיך עם הניסיונות גם לאחר שהבלון כבר התפוצז.

נסמן את זמן חייו הבלון ע"י  $S^D$ , זמן חייו הבלון הוא מספר הניסיונות עד ההצלחה הראשונה.

אחר שכל הניסיונות מתפלגים זהה  $Ber(p)$  והם p.i.i. אז זמן "הפיוץ" הראשון (הצלחה ראשונה מנקודת המבט של התפלגות ברנולי) מתפלגת גאומטרית עם מקדם  $p$ . לכן מתקיים:

$$S^D = \min_n(W_n = 1) \sim Geo(p)$$

$$\Rightarrow E[S^D] = \frac{1}{p}$$

$$Var(S^D) = \frac{1-p}{p^2}$$

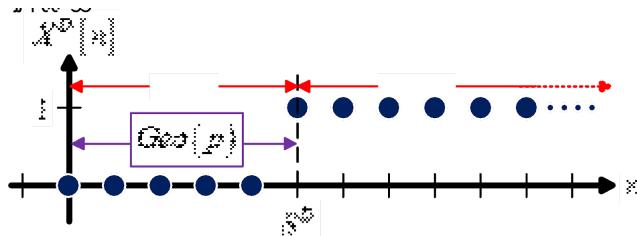
אם נרצה הצלחה ראשונה בזמן  $n$  הדבר שקול ל- $(1-p)^{n-1} \cdot p$  כישלונות קודמים ואז הצלחה:

$$\Pr(S^D = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

נגידר את תהליך "חיי בלון" בזמן בדיד ע"י:

$$X^D[n] = U(n - S^D)$$

פונקציית מדגם של התהליך נראית כך:



הערה - נבחין כי בדומה לת"א וינר יצרנו את התהליך מת"א ברנולי, אך בשונה לקחנו זמן מינימלי מבין השינויים בעוד שבת"א וינר סכמנו את השינויים (בנוסף בפיתוח ת"א וינר ל"כישלון" היה סיכוי שווה וערך  $1-p$ ).

תהליך אקראי "חיי בלון" בזמן רציף:

נרצה להרציף את תהליך "חיי בלון" בזמן בדיד. נניח כי ניסויי הפיצוץ מתרחשים בכל פרק זמן  $T$ .

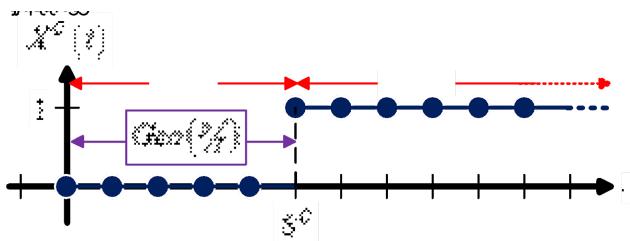
לכן זמן הפיצוץ יהיה  $S^C = T \cdot S^D$ . כתעת "צפיפות הצלחת הפיצוץ" היא סיכוי הצלחה  $p$  בזמן

$$T \text{ ולכן זמן הפיצוץ מתפלג } S^C \sim Geo\left(\frac{p}{T}\right).$$

נגידר את תהליך אקראי "חיי בלון" בזמן רציף:

$$X_{p,T}^C(t) = X^C(t) = U(n - T \cdot S^D) = U(n - S^C)$$

פונקציית מדגם של התהיליך נראית כך:



תהליך אקראי "חיי בבלון" בגבול:

נרצה להקטין את כך שהילד ינסה לפוצץ את הבלון "כל הזמן" אך באופן כזה שסיכוי ההצלחה שלו ליחידת זמן ישאר קבוע. לצורך כך נצטרך להקטין את  $T$  ואת  $p$  באותו האופן (אם נקטינו רק אחד מהם או שהבלון יתפוצץ ישר או שהוא יהיה לנצח).

בכל יחידת זמן יש  $\frac{1}{T}$  ניסיונות פיצוץ בעלי סיכוי  $p$ , לכן תוחלת ההצלחות ביחס לזמן  $T$  היא סכום של  $\frac{p}{T}$  (סבירות ע"י  $\frac{p}{T} = \frac{1}{T} \cdot p$ ).

על מנת לשמר על הדרישה נשמר על הקשר  $T \cdot \frac{p}{T} = p$ . באופן זה נוכל להשאיר את אחד מהפרמטרים  $T, p$  לאפס וגם השני ישאף לאפס וישמר היחס (מייחס זה נוכל לקבוע את פרקי הזמן  $T$  אם ידוע  $p$  ומקדם  $\frac{p}{T}$  הרצוי).

$$X(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ p = \frac{t}{T}}} (X_{p,T}^C(t))$$

אנו יודעים כי התפלגות גיאומטרית (בדידה) שואפת להתפלגות אקספוננציאלית (רציפה) בגבול זה. לצורך כך נחשב את הסיכוי שהפיזוץ הראשון לא יתרחש עד רגע מסוים, ככלומר יתרחש אחריו:

$$\begin{aligned} \Pr(S^C > t) &= \Pr(T \cdot S^D > t) = \Pr\left(S^D > \frac{t}{T}\right) = \Pr\left(S^D > \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) \underset{S^D \sim Geo(p)}{=}^* (1-p)^{\lfloor t/T \rfloor} \underset{p = \frac{t}{T}}{=}^* (1 - \frac{t}{T})^{\lfloor t/T \rfloor} = \\ &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lfloor t/T \rfloor \frac{t/T}{t/T}} = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{\lfloor t/T \rfloor}{t/T} (t/T)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{1(t/T)} = \left(\left[ \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{T}} \right]_T\right)_T^{**} = \left(e^{-\frac{t}{T}}\right)^t = e^{-t} \end{aligned}$$

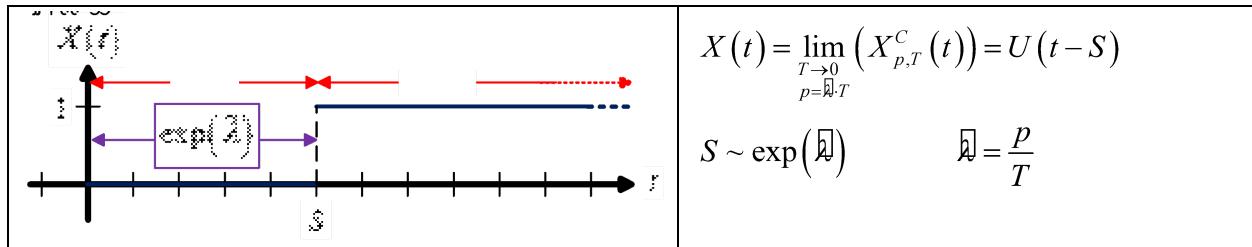
שוויון (\*) מתקיים לאחר ש-  $S^D \sim Geo(p)$  ואנו מחפשים את ההיפך-M-CDF ולכן התשובה היא:

$$1 - F_{S^D} \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \right) = 1 - \left[ 1 - (1-p)^{\lfloor t/T \rfloor} \right] = (1-p)^{\lfloor t/T \rfloor}$$

שיויון (\*\*\*) מתקיים לפי קיום האבול (עבור  $n=1/T$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \right] = e^x$$

ביטוי ופונקציית מדגם של התהילה:



תהליך אקראי "חיי A בלוניים":

פעם ניקח אוסף של  $N$  בלוניים בת"ס הדדי (זמן הפיצוץ בלתיה תלויים הדדי) ונסמן את זמן הפיצוץ של כל בלון:

$$S_1, \dots, S_N \sim \exp(\beta), \quad \{S_i\}_{i=1}^N \text{ i.i.d}$$

עכשו יש גם  $N$  "ילדים מעצבנים". אם ילד מסוים פוצץ את הבלון שלו הוא לא מקבל בלון חדש ולכן אפקטיבית הוא יצא מן המשחק, שאר הילדים ממשיכים ב"משחק" ללא תלות עד שבסוף כל אחד מצליח לפוצץ את הבלון שלו.  
לכן התהיליך נתון ע"י (יראה כמו גורם מדרגות):

$$X(t) = \sum_{i=1}^N U(t - S_i)$$

נתעניין לדעת סיכויים לגבי זמן התרחשות הפיצוץ הראשון, השני וכן הלאה. באופן כללי נרצה לדעת סיכויים לגבי זמן הפיצוץ ה-  $i$  (אנחנו לא מחפשים לדעת מתי הבלון ה-  $i$  התרופץ כי זו פשוט התרפלגות אקספוננציאלית מאחר שהם p.i.o. אלא מתי הפיצוץ ה-  $i$  מבין כל  $N$  הבלוניים התרחש). אנו מתחננים בזמניהם אלו מאחר שלא מענין אותנו מתי טיפול לכוס טיפה מסוימת אשר נמצא באוויר אלא מתי טיפול לכוס הטיפה הבאה.

נסמן את סדרת זמני הפיצוץ מבין כל  $N$  הבלוניים ע"י (זו למעשה דוגמא של Order Statistics):

$$S^1, \dots, S^N$$

נבחן כי מתקיים:

$$S^1 = \min(S_1, \dots, S_N), S^2 = \min(S_1, \dots, S_N \setminus S^1), \dots$$

נמצא את הפילוג של זמן הפיצוץ הראשון, כלומר של  $S^1$ :

$$\Pr(S^1 > t) = \Pr(S_1 > t \cap S_2 > t \cap \dots \cap S_N > t) \stackrel{\text{Independence}}{=} \prod_{i=1}^N \Pr(S_i > t) \stackrel{i.i.d.}{=} [\Pr(S_i > t)]^N = \exp(-\lambda \cdot N)$$

שוויון (\*) מאשר שע"מ שהפיצוץ הראשון יהיה אחרי זמן  $t$  אז כל הבלוניים צריכים להתרפוץ לאחר זמן  $t$ .

נגידר מוקדם אפקטיבי  $N \cdot \lambda_{eff} = \lambda$ , אנו מבחינים כי ככל שהוא יותר ילדים ככה המקדם האפקטיבי יגדל, הדבר הגיוני לתיאור הניסוי כי אם יש יותר ילדים אז סביר שהפיצוץ הראשון יתרחש מוקדם יותר.

סה"כ קיבלנו כי הפילוג של הפיצוץ הראשון הוא:

$$S^1 \sim \exp(\lambda), \quad \lambda = \lambda_{eff} = \frac{\lambda}{N}, \quad \left( \lambda = \frac{p}{T} \right)$$

משמעות תכונת חוסר הזיכרון של מ"א אקספוננציאלי בניסוי שלנו היא שהסיכוי שהפיצוץ לא התרחש עד זמן  $t_1 + t_2$  בהינתן הידיעה שהוא לא התרפוץ עד זמן  $t_1$  שווה להסתברות שהוא לא יתפוץץ זמן  $t_2$ . כלומר, נשאר לו לשרוד  $t_2$  זמן והעובדת שהוא כבר שרד  $t_1$  זמן לא משפיעה. כלומר:

$$\Pr(S^1 > t_1 + t_2 | S^1 > t_1) = \Pr(S^1 > t_2)$$

בלון התרפוץץ ראשוני. לא ידועים איזה בלון אבל יודעים שהפיצוץ התרחש בזמן  $t_1$ . נרצה לבדוק את המצב של בלון  $i$ , נזהה כי הטענה  $S_i < S^1 \neq S^1$  שcolaה לכך שלמעשה מתקיים  $S_i > S^1$  מכיוון שאם זמן הפיצוץ שלו הוא לא זמן הפיצוץ הראשון אז הוא לא התרפוץץ עד זמן זה. בהינתן המצב הזה נרצה לדעת מה הסיכוי שבلون זה ישרוד עד  $t$  זמן, מתכונת חוסר הזיכרון נקבל שההתשובה היא ספירת הזמן מהרגע האחרון שאנו יודעים עליו – כלומר הסיכוי שהוא ישרוד תקופה של  $t$  זמן.

$$\Pr(S_i > S^1 + t | S_i \neq S^1) = \Pr(S_i > S^1 + t | S_i \neq S^1) = \Pr(S_i > S^1 + t | S_i > S^1)_{S_i \sim \exp(\lambda)} = \Pr(S_i > t) = e^{-\lambda t}$$

לכן הפילוג של זמן הפיצוץ השני, ככלומר של  $S^2$ , הוא:

$$\begin{aligned} \Pr(S^2 > S^1 + t) &= \Pr\left(\left(S_1 > S^1 + t \mid S_1 > S^1\right) \cap \dots \cap \left(S_{N-1} > S^1 + t \mid S_{N-1} > S^1\right)\right) = \\ &\stackrel{\text{i.i.d}}{=} \prod_{i=1}^{N-1} \Pr\left(S_i > S^1 + t \mid S_i > S^1\right) = \stackrel{\text{i.i.d}}{=} \left[\Pr\left(S_i > S^1 + t \mid S_i > S^1\right)\right]^{N-1} \underset{S_i \sim \exp(\lambda)}{=} \left[\Pr(S_i > t)\right]^{N-1} = \\ &\underset{S_i \sim \exp(\lambda)}{=} \left(e^{-\lambda t}\right)^{N-1} = e^{-\lambda(N-1)t} \end{aligned}$$

שיוויון (\*) מבהיר שעד מה הפיצוץ השני יהיה אחרי זמן  $t + S^1$  אנו בעצם דורשים שככל הבלונים שנוטרו (מספרם לא באמת משנה אלא רק הכמות שנותרה) ישרדו כ"א את הזמן הנדרש. קיבלנו כי הסיכוי שהפיצוץ השני יקרה מאוחר מ-  $t$  זמן אחרי הפיצוץ הראשון (ז"א לפחות  $t + S^1$  זמן) הוא למעשה כמו הייררכיות הפיצוץ הראשון במשך זמן  $t$  במערכת של בלוניים  $N-1$ .

מסקנה:

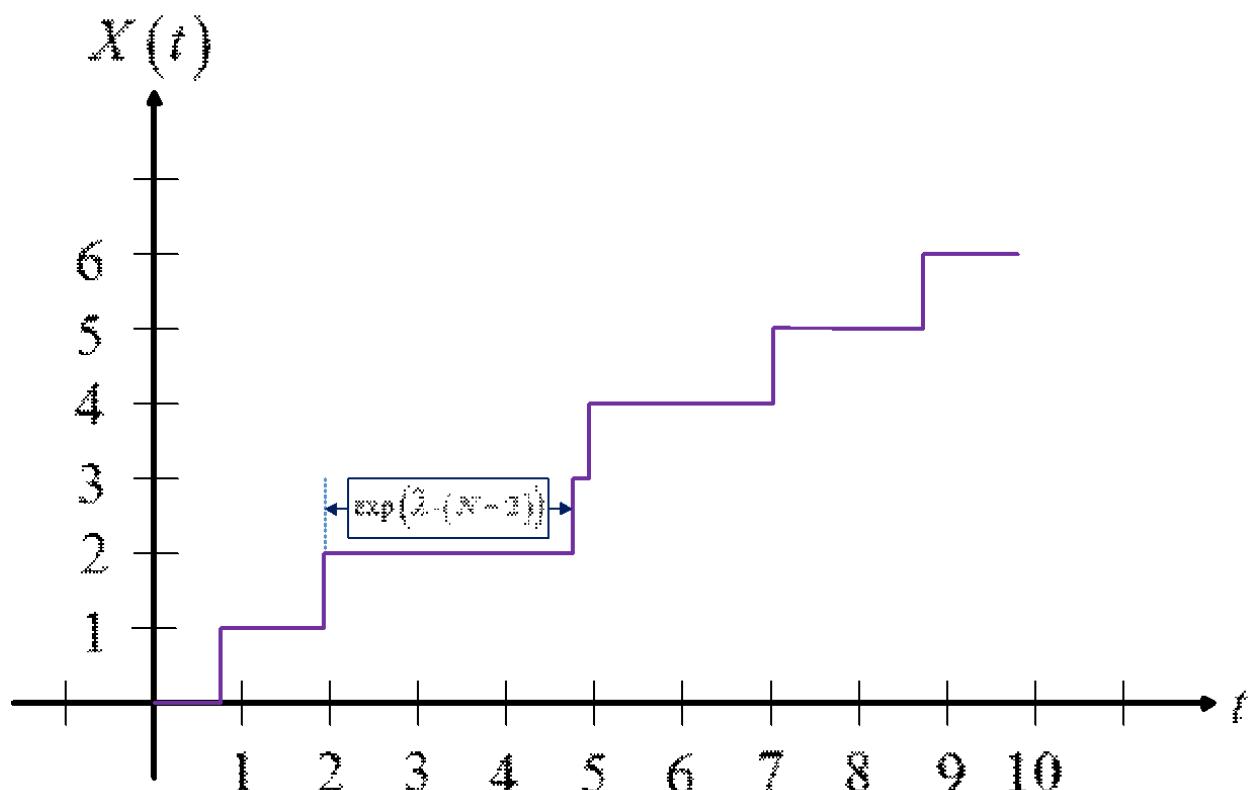
$$\begin{aligned} S^1 &\sim \exp(\lambda \cdot N) \\ S^2 - S^1 &\sim \exp(\lambda \cdot (N-1)) \Rightarrow S^k - S^{k-1} \sim \exp(\lambda \cdot (N+1-k)) \quad \forall 1 \leq k \leq N \\ &\vdots \\ S^N - S^{N-1} &\sim \exp(\lambda) \end{aligned}$$

נראה שעבור הפיצוצים המאוחרים יש קבוע דעיכה קטן יותר מאשר המוקדמים, לכל הפרשנים בין הפיצוצים הולכים וגדלים. הדבר הגיוני כי יש פחות ילדים שימושיים ולכן פחות סיכוי (הם בת"ס הדדי). הדבר מתישב גם מתמטית לאחר שתוחלת של  $(\lambda) \sim X$  מקיימת

$\frac{1}{\lambda} = E[X]$ , כלומר ככל שקבוע הדעיכה קטן יותר כך יהיה יותר זמן במנזע. oczywiście כאשר נתונם לנו פילוגי זמני הפיצוץ נוכל לרשום את התהליך על פיהם ולא על פי זמני הפיצוץ של כל בלון (השוינו תקף לאחר שימושה הקבועות  $\{S_i\}_{i=1}^N$  מחזיקות בהם איברים אך בסדר שונה):

$$X(t) = \sum_{i=1}^N U(t - S_i) = \sum_{i=1}^N U(t - S^i)$$

מכיוון שאנו יודעים את התפלגיות נוכל להציג פונקציית מוגם של התהיליך באופן איקוני:



תהליך אקראי "חיי A בלוניים" עם החזרה:

נניח כעת שכאשרILD מצליח לפוצץ בלון הוא לא יוצא מהמשחק אלא מקבל מידית בלון חדש בשביל להמשך משחק. כעת زمنי הפיצוץ יתפלגו כולם באופן זהה. המשחק זה אין סוף ולכון התהילה ימשיך לנצח (דוגמא טבعت שcola היא אנודה-קטודה בהן אנו מחזיקים מתחים קבועים והארועים הם קפיצות האלקטרון). נקבל:

$$S^k - S^{k-1} \sim \exp\left(\frac{\lambda}{N} \cdot N\right)$$

הדבר נכון ל蹶ה הטבעי בו  $1 \ll N$  ואז נקבל שמתקיים  $N \approx 1 - N$ , לכן קבוע הדעיכה של

שני זמני הפיצוץ הראשונים שווה  $N \cdot \frac{\lambda}{N} \approx \lambda \cdot (N-1)$ . למעשה מתקיים  $N \approx k - N$  עד ערך  $k$  מסויים. המשמעות היא שככל הפיצוצים ה" $k$ -ראשונים" מתפלגים באותו אופן:

$$S^k - S^{k-1} \underset{\text{approx.}}{\sim} \exp\left(\frac{\lambda}{N} \cdot N\right) \quad \frac{N-k}{N} \approx 1$$

תהליך אקראי פואסוני:

נניח  $0 \rightarrow \lambda = \lambda_{\text{eff}} = N \cdot \frac{\lambda}{N} \rightarrow \infty$ . כך שמתקיים שמכפלתם מניבה קבוע דעיכה קבוע וסופי  $\lambda \cdot N$ .

נקבל שככל מרוחקי המדרגות יתפלגו באופן זהה  $\exp(\lambda \cdot t)$ . התהילה יסומן  $(\lambda)$  ונתן ע"י הביטוי:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} U(t - S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} U(t - S^i), \quad S^i - S^{i-1} \sim \exp(\lambda), S^0 = 0$$

הערה:

נווכל להתייחס לתהליך ככזה אשר נבנה מן התוספות  $S^{i-1} - S^i$ . תוספות אלו מקיימות:

$$\begin{aligned} S^i &= S^{i-1} + Z_i & Z_i &\sim \exp(\lambda) \quad \forall i \\ S^0 &= 0 & \{Z_i\} &\text{i.i.d} \end{aligned}$$

כאשר  $\{Z_i\}$  הם למעשה מרוחקי הפיצוצים. זהו תהליך R.A. ליניארי עם מקדם  $1 = \alpha$  ולכן לא סטציונרי.

### תהליך תוספות של תהליך אקראי פואסן

עבור תהליך פואסן עם פרמטר  $\lambda$ , נגידר תהליך תוספת  $X(t) \sim Poisson(\lambda \cdot t)$ .

תוספת  $X(t_1, t_2) = X(t_2) - X(t_1)$  מעשה מייצגת את מספר הפיצוצים באינטראול זמן  $[t_1, t_2]$ . תהליך התוספות זהה מתפלג באופן זהה לתהליך כולם (מחוסר הזיכרון ומון הגבול, הרוי בכל נקודת זמן יש אותה כמות ילדיים עם אותה כמות בלוניים וכשלונות/התלחחות העבר לא משפיעות) ובנוסף הוא תהליך בעל תוספות בת"ס. לכן מתקיים:

$$X(t_1, t_2) \sim Poisson(\lambda(t_2 - t_1)), \quad X(t_1, t_1 + t) \sim Poisson(\lambda t)$$

#### פילוג של תהליך תוספות של ת"א פואסן.

נפתח את הפילוג של תהליך התוספות של ת"א פואסן על מודל ה"חיי"  $N$  בלוניים עם החזרה כאשר  $N \rightarrow \infty$ .

$$\Pr(X(t_1, t_1 + t) = k) = \Pr(X(t) = k)^*$$

שיוויון (\*) מתקיים מתכונת חוסר הזיכרון של תהליך פואסן, ז"א הסיכוי שבפרק זמן באורך  $t$  התפוצצו  $k$  בלוניים לא תלוי במקום הזמן כלומר אין חשיבות אם באינטראול הזמן  $[t_1, t_1 + t]$  או באינטראול הזמן  $[0, t]$ .

על מנת לקבל בדיקות  $k$  פיצוצים אנחנו דורשים ש-  $(N-k)$  בלוניים ישרדו (לא משנה איזה יתפוצטו/ישרדו).

$$\Pr(X(t_1, t_1 + t) = k) = \Pr(X(t) = k) = \binom{N}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^k \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{N-k} \underset{\lambda = \frac{\lambda t}{N}}{=} \binom{N}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^k \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{N-k}$$

נרצה לסדר את הביטוי לפני השאפת  $\infty \rightarrow N$ . נסדר ביטויים אשר ישאפו לאחד.

$$\begin{aligned} \binom{N}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^k \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{N-k} &= \frac{N!}{k!(N-k)!} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^k \cdot \frac{\left(\lambda t/N\right)^k}{\left(\lambda t/N\right)^k} \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^N \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{N \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{N^k} \cdot \frac{(N-k)!}{(N-k)!} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^k}{\left(\lambda t/N\right)^k} \cdot (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{-k} \end{aligned}$$

נזכיר כי מתקיים  $\dots e^x = 1 + x + \dots$  ולכן  $e^{-x} \approx 1 - x$ .

$$\begin{aligned}\Pr(X(t_1, t_1+t) = k) &\approx \frac{1}{k!} \cdot \frac{N \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{N^k} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda t}{N}\right)^k}{\left(\frac{\lambda t}{N}\right)^k} \cdot (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{N \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{N^k} \cdot (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left(e^{-\frac{\lambda t}{N}}\right)^{-k} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} \cdot 1 = \frac{1}{k!} \cdot (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

וקיבלנו כי לתהליק התוספות פילוג זהה כצפוי.

### תהליך פואסון (הגדרה פורמלית)

ונכל לשכוח מתהליק הבניה המפרק שבירצנו ו"לקבל" הגדרות (שколоות) לתהליק פואסון.

תהליך פואסון  $(X(t)) \sim Poisson(\lambda \cdot t)$  (מוגדר לכל  $t \geq 0$ ) הוא למעשה:

1. בניית מתהליק R.A. של זמני פיצוץ (R.A. ליניארי עם מקדם  $1 = \alpha$  ולכן לא סטציונירי):

$$\begin{aligned}S^i &= S^{i-1} + Z_i & Z_i \sim \exp(\lambda) & \forall i \\ S^0 &= 0 & \{Z_i\}_{i.i.d.}\end{aligned}$$

כך שזמן הפיצוץ בונים את התהליק עצמו ע"י:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U(t - S^n), \quad X(0) = 0$$

הערה - **זמן הפיצוץ נזהה כי:**

$$S^n = \sum_{i=1}^n Z_i$$

הסדרה הינה p.i.o. ולכן זמן הפיצוץ הוא סכום של  $n$  מ"א p.i.o. מכאן שמתתקיים:

$$f_{S^n} = f_{Z_1} * \dots * f_{Z_n}$$

זהו סכום  $n$  של מ"א אספוננציאליים p.i.o. סכום כזה מתפלג לפי פילוג Erlang:

$$f_{S^n}(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{(n-1)!}$$

ונכל להזות שפילוג ארלינג מתכנס לפילוג אקספוננציאלי עבור  $1 = n$ .

2. תהליק אשר:

a. מקיים תנאי התחלה  $X(0) = 0$ .

b. Non-negative-integer-valued monotonically non-decreasing step-function. ז"א מקבל ערכים אי-שליליים שלמים בלבד, מונוטוני לא יורך ועשוי מדרגות.

c. בעל תוספות בת"ס אשר מתפלגות פואסונית  $X(t_1, t_2) \sim Poisson(\lambda \cdot (t_2 - t_1))$ .

הערה - תוספת  $X(t_1, t_2) = X(t_2) - X(t_1)$  למעשה מייצגת את מספר הפיצוצים

באיינטראול זמן  $[t_1, t_2]$ , תהליך התוספות מתפלג בעצמו פואסונית (הרוי בכל נקודת זמן יש אותה כמות ילדים עם אותה כמות בלוניים וכשלונות/התלחות העבר לא משפיעות).

תכונות (ללא הוכחה):

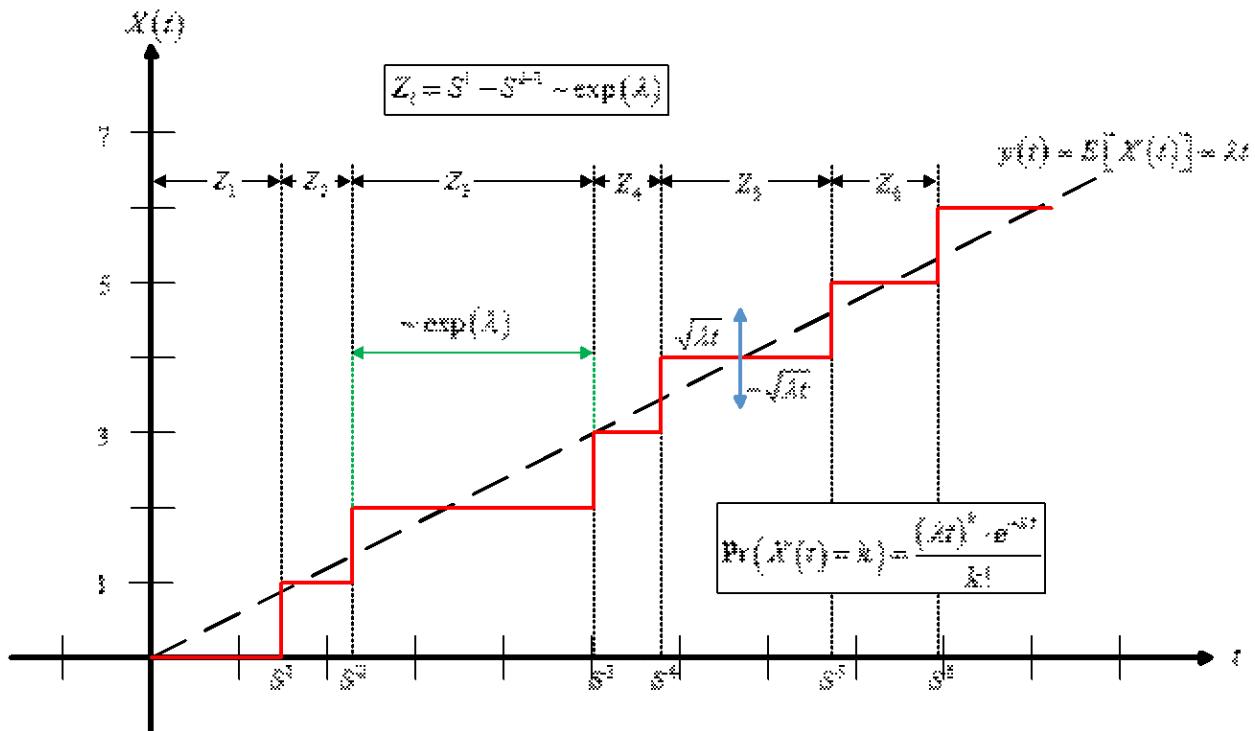
•  $E[X(t)] = \lambda t$ , תוחלת התהליך לניראית בזמן. למעשה נצפה שפונקציית המדרגות

תתיישר עם הישר  $y = \lambda t$ . הדבר הגיוני זה תהליך מונוטוני לא- יורך שכן ברור שהתחלה צריכה לעלות, בנוסף התהליך מתנהג אותו דבר כל הזמן וכן גם נצפהuko夷 (אשר מתחילה בראשית כמו ערך ההתחלה של התהליך).

•  $Var(X(t)) = \lambda t$ , השונות שווה לתוחלת. למעשה  $\sqrt{\lambda t}$  זה הגודל ה"סביר" להתרחק מן ישר התחלה.

ניתן לבדוק כי התהליך לא סטציונירי (התהליך הנגזרת כן – נראה בהמשך) הרוי הואריאנס תלוי בזמן.

• התהליך פואסון מקיים את תכונות האדיטיביות – נראה בהמשך.



### בנייה אלטרנטיבית של תהליך פואסון מסכום ברנולי

נראה כי נוכל לבנות את תהליך פואסון ע"י סכימות מ"א ברנולי p.i.o. כך שנבצע החלטות ממש מהר עם סיכויים נמוכים מאוד אך גודל ההחלטה מוצלחת יהיה אחד. לצורך הבניה נראה כי בתהליך פואסון יכול להתרחש לכל היותר אירוע ייחד בזמן אפסי כלשהו.

ניקח ת"א  $X(t) \sim Poisson(\lambda \cdot t)$  וננתח את מספר הפיצוצים בזמן קצר. נזכיר:

$$\Pr(X(\Delta) = k) = \frac{(\lambda\Delta)^k \cdot e^{-\lambda\Delta}}{k!}$$

נראה את הסיכויים לאפס/אחד/יותר פיצוצים כאשר  $\Delta \ll t$  ונפתח את כאשר הביטוי

$O(\Delta^2)$  מסמן זניח של  $\Delta$  ולמעשה מייצג את המשך הטוור (כולל בתוכו את כל הרכיבים אשר מסדר  $\Delta^2$  ומעלה):

$$\Pr(X(\Delta) = 0) = \frac{(\lambda\Delta)^0 \cdot e^{-\lambda\Delta}}{0!} = e^{-\lambda\Delta} \stackrel{\text{Taylor Series}}{=} 1 - \frac{\lambda\Delta}{1} + O(\Delta^2) = 1 - \lambda\Delta + O(\Delta^2)$$

$$\Pr(X(\Delta) = 1) = \frac{(\lambda\Delta)^1 \cdot e^{-\lambda\Delta}}{1!} = \lambda\Delta \cdot e^{-\lambda\Delta} = \lambda\Delta \cdot (1 - \lambda\Delta + O(\Delta^2)) = \lambda\Delta + O(\Delta^2)$$

$$\Pr(X(\Delta) > 1) = 1 - (1 - \lambda\Delta + O(\Delta^2)) - (\lambda\Delta + O(\Delta^2)) = O(\Delta^2)$$

למעשה קיבלנו כי בזמן סופי יכול להתרחש לכל היותר אירוע ייחד.

נבחין כי מתקיים עבור זמן  $t = \Delta$   $\Delta \ll 1$ :

$$\Pr(X(\Delta) = 0) \approx 1 - \lambda\Delta, \quad \Pr(X(\Delta) = 1) \approx \lambda\Delta$$

זה פילוג ברנולי עם סיכוי הצלחה  $p = \lambda\Delta$ .  
לכן נוכל לבנות את התהיליך ע"י:

$$X^T(t) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot U(t - nT) \quad \begin{aligned} B_n &\sim Ber(\lambda T) \\ \{B_n\} &i.i.d \end{aligned}$$

נבע הגרלה כל זמן  $T$  (שקלול לכך שכל אינטראול  $T$  נחליט אם התפוצץ בלוון או לא בסיכוי  $p = \lambda\Delta$ ).

ניקח את הגבול  $T \rightarrow 0$  תוך שמירה על היחס  $\lambda T = p$  (ולכן גם  $0 \rightarrow p$ ).

נראה כי פילוג התהיליך  $\lim_{T \rightarrow 0, p = \lambda T} (X^T(t))$  שווה לפילוג ת"א פואסן:

$$\Pr(X^T(t) = k) = \Pr\left(\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} B_n = k\right) \underset{Bin(\lfloor \frac{t}{T} \rfloor, \lambda T)}{=} \binom{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor}{k} \cdot (1 - \lambda T)^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor - k} \cdot (\lambda T)^k$$

נסדר את הביטוי לפני ההשאפה כך שחלקים רבים ישאפו לאחד:

$$\begin{aligned} \Pr(X^T(t) = k) &= \frac{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{t}{T} \rfloor - 1) \cdots (\lfloor \frac{t}{T} \rfloor - k + 1)}{k!} \cdot (1 - \lambda T)^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} \cdot \frac{1}{(1 - \lambda T)^k} \cdot (\lambda T)^k = \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \left(\lfloor \frac{t}{T} \rfloor\right)^k \cdot \frac{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{t}{T} \rfloor - 1) \cdots (\lfloor \frac{t}{T} \rfloor - k + 1)}{\left(\lfloor \frac{t}{T} \rfloor\right)^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{1/T}\right)^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} \cdot \left(\frac{\lambda T}{1 - \lambda T}\right)^k = \\ &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^k \cdot 1 \cdot e^{-\lambda t} \cdot (\lambda T)^k = \frac{1}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו:  $X(t) = \lim_{T \rightarrow 0, p = \lambda T} (X^T(t))$ ,  $X(t) \sim Poisson(\lambda t)$

הערה - בניית התהיליך כסכום משתני מרנולי מזכיר את בניית תהליך ויינר. נבחין כי בפיתוח תהליך ויינר עם סדרת ברנולי בכל החלטה היה צעד קטן בכיוון לצדדים, בפיתוח תהליך פואסן עם סדרת ברנולי לא בכל החלטה מתרחשת תנועה הצעד הוא גדול קבוע ושווה לאחד אך בסיכוי נמוך. הסכומים שונים מאוד.

### אפשרויות סימולז של תהליך אקראי פואסון

מאחר שתהליכי פואסון הינו תהליכי טבאי נרצה לא פעם לבצע סימולציות ולצורך כך נדרש להציג תוצאות של תהליכי פואסון. יש מספר דרכים לסמלז תהליכי פואסון ואנו נלמד כמה:

1. נגיד סדרת משתנים אקראיים  $Z_i \sim \exp(\lambda), \{Z_i\} i.i.d$  ומתוכה נבנה את  $\{S^i\}$  לפי נוסחת הנסיגה.

יתרון: לפי הגדלה. חסרון: הגרלת מ"א אקספוננציאלי היא לא משימה פשוטה.

2. נגיד סדרת מ"א ברנולי,  $B_n$  לפי הבניה האלטרנטטיבית ונסכום אותם

יתרון: פשוט לימוש. חסרון: לפי קירוב.

3. לשימולז ת"א פואסון עם פרמטר  $\lambda$  עד זמן  $T_{tot}$  נגיד מ"א פואסוני בעל פילוג

$$N(T_{tot}) \text{ Poisson}(\lambda \cdot T_{tot})$$

$$\text{אם } N(T_{tot}) = 0 \text{ אז סיים.}$$

אחרת, הגרל  $n = N(T_{tot})$  משתנים  $Uniform(0, T_{tot}]$  אשר p.i.o. וסמנם  $u_1, \dots, u_n$ . סדר

אתם בסדר עולה  $\{o_i\}_{i=1}^{N(T_{tot})}$  ( $o_1, \dots, o_n$ ). סדרה  $(o_1 < \dots < o_n)$  היא סדרת אירועי הפואסון

$$\text{באינטראול } [0, T_{tot}]$$

יתרון: מדויק ודורש הגרלה אחת "קשה". חסרון: דרוש מיזון.  
הוכחת נכונות:

$$N(T_{tot}) = 0 \quad \bullet$$

$$(0, T_{tot}], \text{ קיים אירוע אחד, נראה שמיומו מתפלג יוניפורמי בקטע} \quad \bullet$$

$$\Pr(o_1 \leq s | n=1) = \frac{\Pr(o_1 \leq s \cap n=1)}{\Pr(n=1)} = \frac{\Pr(X(s)=1 \cap X(T_{tot})-X(s)=0)}{\Pr(X(T_{tot})=1)} =$$

$$= \frac{\Pr(X(s)=1) \cdot \Pr(X(T_{tot})-X(s)=0)}{\Pr(X(T_{tot})=1)} = \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\lambda(T_{tot}-s)} (\lambda(T_{tot}-s))^0}{0!}.$$

$$\cdot \frac{1!}{e^{-\lambda T_{tot}} (\lambda T_{tot})^1} = \frac{s}{T_{tot}} = CDF(Unif(0, T_{tot}])(s)$$

שוויון (\*) לאחר שהמשמעות היא שהיא אירוע אחד באינטראול  $(0, s)$  ואפס

אירועים באינטראול  $(s, T_{tot})$ . שוויון (\*\*\*) לאחר שבמונח יש איחוד של קטעים זרים והם בת"ס ולכן ניתנים להפרדה.

$$N(T_{tot}) \geq 2 \bullet$$

$$\text{OrderedUniform}(0, T_{tot}]$$

$$\Pr(t_1 = o_1, \dots, t_n = o_n | N(T_{tot}) = n) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\Pr(t_1 = o_1, \dots, t_n = o_n \cap N(T_{tot}) = n)}{\Pr(N(T_{tot}) = n)} = \gamma$$

נחליף את המאורע על הסדרה  $t_1, t_2, \dots, t_n$  למאורע המסדר על סדרת ההפרשים

$$x_1 = o_1 - 0, x_2 = o_2 - o_1, \dots, x_n = o_n - o_{n-1}$$

אנו מחפשים חיתוך עם כך שיש לבדוק  $n$  אירועים עד זמן  $T_{tot}$ , המשמעות היא

שהאירוע "הבא" התרחש אחרי זמן  $T_{tot}$ . וכך מתקיים:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\Pr(x_1 = o_1 - 0, \dots, x_n = o_n - o_{n-1}, x_{n+1} > T_{tot} - o_n)}{\Pr(N(T_{tot}) = n)} = \\ &= \frac{\Pr(x_1 = o_1) \cdot \Pr(x_2 = o_2 - o_1) \cdot \dots \cdot \Pr(o_n - o_{n-1}) \cdot \Pr(x_{n+1} > T_{tot} - o_n)}{\Pr(X(T_{tot}) = n)} = \\ &\stackrel{x_i \sim \exp(\lambda)}{=} \lambda e^{-\lambda \cdot o_1} \cdot \lambda e^{-\lambda \cdot (o_2 - o_1)} \cdot \dots \cdot \lambda e^{-\lambda \cdot (o_n - o_{n-1})} \cdot [1 - F_{\exp(\lambda)}(T_{tot} - o_n)] \cdot \frac{n!}{e^{-\lambda T_{tot}} \cdot (\lambda T_{tot})^n} = \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \cdot o_n} \cdot [1 - (1 - e^{-\lambda(T_{tot} - o_n)})] \cdot \frac{n!}{e^{-\lambda T_{tot}} \cdot (\lambda T_{tot})^n} = \frac{n!}{T_{tot}^n} = \text{OrderedUniform}(0, T_{tot}) \end{aligned}$$

כאשר שווין (\*) לאחר שידוע  $\{u_i\}_{i=1}^n$  ולכך:

$$f_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_{tot}} & x \in (0, T_{tot}] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ומכאן שמתקיים עבור הפילוג המשותף:

$$f_{u_1, \dots, u_n}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{i.i.d.}{=} f_{u_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{u_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_u(x_i) = \left(\frac{1}{T_{tot}}\right)^n = \frac{1}{T_{tot}^n}$$

אך עליינו לזכור כי עבור קבלת הסדר הממוינית  $o_n, \dots, o_1$  יש למעשה!  
אפשרויות בחירה לפני מיוון ולכון:

$$f_{u_1, \dots, u_n}^{Ordered}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{T_{tot}^n} \cdot n!$$

### סטטיסטיקה מסדר שני של תהליך פואסון

נציג את הסטטיסטיקה עד סדר שני של תהליך פואסון עם פרמטר  $\lambda$ , ז"א של  $X(t) \sim Poisson(\lambda \cdot t)$ .

את התוחלת והשונות כבר ראיינו:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \lambda t \\ Var(X(t)) &= \lambda t \end{aligned} \Rightarrow E[X^2(t)] = Var(X(t)) + E[X(t)] = \lambda t \cdot (1 + \lambda t)$$

נפתח את פונקציית הקורולציה (נניח  $t_1 \leq t_2$ ):

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &\triangleq E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = E[X(0, t_1) \cdot (X(0, t_1) + X(t_1, t_2))] = \\ &= E[X^2(0, t_1) + X(0, t_1) \cdot X(t_1, t_2)] = E[X^2(0, t_1)] + E[X(0, t_1) \cdot X(t_1, t_2)] = \\ &\stackrel{*}{=} E[X^2(0, t_1)] + E[X(0, t_1)] \cdot E[X(t_1, t_2)] = \lambda t_1 \cdot (1 + \lambda t_1) + \lambda t_1 \cdot \lambda (t_2 - t_1) = \\ &= \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda^2 \cdot (t_1 t_2 - t_1^2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda^2 \cdot t_1 t_2 - \lambda^2 t_1^2 = \lambda t_1 + \lambda^2 \cdot t_1 t_2 \end{aligned}$$

נפתח את פונקציית הקו-ויריאנס (נניח  $t_1 \leq t_2$ ):

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - E[X(t_1)] \cdot E[X(t_2)] = \lambda t_1 + \lambda^2 \cdot t_1 t_2 - \lambda t_1 \cdot \lambda t_2 = \lambda t_1$$

ובאופן כללי:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2, \quad C_{XX}(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$$

זהה כי קיבלנו של תהליך פואסון ולהליך וינר יש אותה פונקציית קו-ויריאנס (בהתהליך וינר התוחלת בכל נקודת זמן שווה לאפס ולכון פונקציית הקורולציה והקו-ויריאנס של תהליך וינר זהות) אך אלו תהליכיים שונים לחלווטין הרוי תהליך וינר זו כל הזמן אך נשאר סביב אפס ותהליך פואסון זו "מידי פעם" (בזמן האירועים בלבד) אך תמיד עולה.

המשמעות של הדבר היא שאנו לא יכולים להסיק הרבה על תהליכי מסתטיסטיקה של סדר שני (או מומנט ייחיד או קבוצה סופית) בלבד.

### ميزוג ופיקול של תהליך פואסון

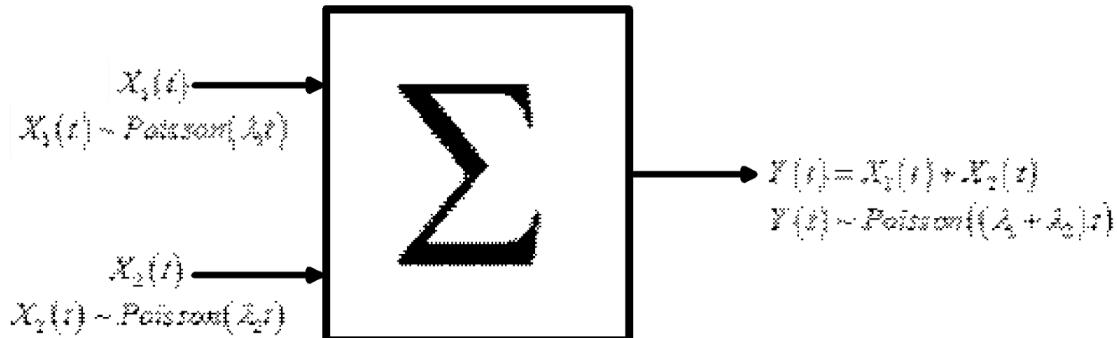
נזכיר בבניה האלטרנטיבית של תהליכי פואסון ע"י סדרת ברנולי:

$$X^T(t) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot U(t-nT) \quad B_n \sim Ber(\lambda T) \\ \{B_n\} i.i.d$$

$$X(t) = \lim_{T \rightarrow 0, P=\lambda T} (X^T(t)), \quad X(t) \sim Poisson(\lambda t)$$

### ミゾグ タヒリチ ポアソン:

נסתכל על סכימת (ミゾグ) שני תהליכי פואסון עם קבועים שונים  $\lambda$ :



נראה כי המוצא הוא גם תהליך פואסון אשר מתפלג עם קבוע  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

$$Y^T(t) = X_1^T(t) + X_2^T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^1 \cdot U(t-nT) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \cdot U(t-nT) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^1 + B_n^2) \cdot U(t-nT) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot U(t-nT) \\ B_n = B_n^1 + B_n^2 = \begin{cases} 0 & (1-\lambda_1 T) \cdot (1-\lambda_2 T) \\ 1 & \lambda_1 T \cdot (1-\lambda_2 T) + \lambda_2 T \cdot (1-\lambda_1 T) \\ 2 & \lambda_1 T \cdot \lambda_2 T \end{cases}$$

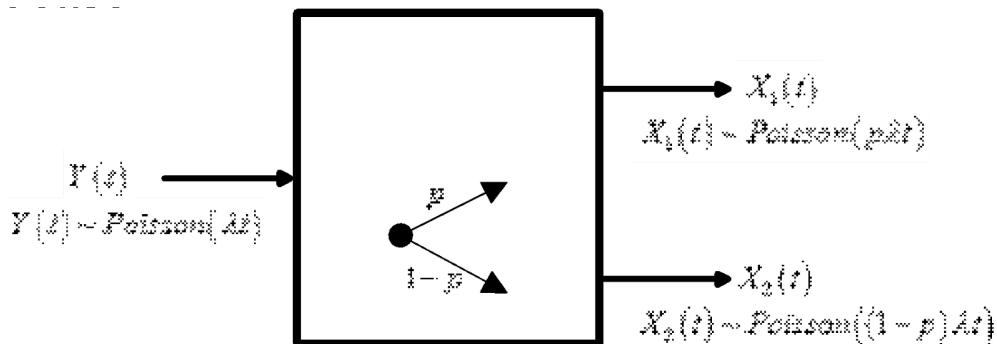
כאשר מרוחק הזמן  $T$  הוא מאוד קטן ( $\ll T$ ) אז נוכל לבצע קירוב סדר ראשון:

$$B_n = \begin{cases} 0 & (1-\lambda_1 T) \cdot (1-\lambda_2 T) \\ 1 & \lambda_1 T \cdot (1-\lambda_2 T) + \lambda_2 T \cdot (1-\lambda_1 T) \\ 2 & \lambda_1 T \cdot \lambda_2 T \end{cases} = \begin{cases} 0 & 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)T + O(T^2) \\ 1 & (\lambda_1 + \lambda_2)T + O(T^2) \\ 2 & 0 + O(T^2) \end{cases} \approx \begin{cases} 0 & 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)T \\ 1 & (\lambda_1 + \lambda_2)T \end{cases}$$

וקיבלנו שהמקדם  $B_n$  הוא למעשה מ"א ברנולי עם סיכוי הצלחה  $p = (\lambda_1 + \lambda_2)T$

פיקול תהליק פואסון:

נסתכל על המערכת הבאה:



המערכת מונעת ע"י תהליק פואסון עם מקדם  $\lambda$  ומחליטה לנוטו אותו לאחד משני מוצאים לפי .Decider  
נדיר מ"א לייצור החלטות:

$$I_n = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

ולכן נוכל להציג את המוצאים באופן הבא (רק אחד מהם מקבל את הכניסה בהסתברות המתאימה):

$$X_1^T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cdot B_n \cdot U(t-nT), \quad X_2^T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cdot B_n \cdot U(t-nT)$$

ולכן נוכל לזיהות:

$$B_n^1 = I_n \cdot B_n = \begin{cases} 1 & p \cdot \lambda T \\ 0 & (1-p) \cdot \lambda T \end{cases} \quad B_n^2 = I_n \cdot B_n = \begin{cases} 1 & (1-p) \cdot \lambda T \\ 0 & p \cdot \lambda T \end{cases}$$

ואכן קיבלנו כי שניהם משתנים ברנוליים ולכון

$$. \quad X_1(t) \sim \text{Poisson}(p\lambda t), \quad X_2(t) \sim \text{Poisson}((1-p)\lambda t)$$

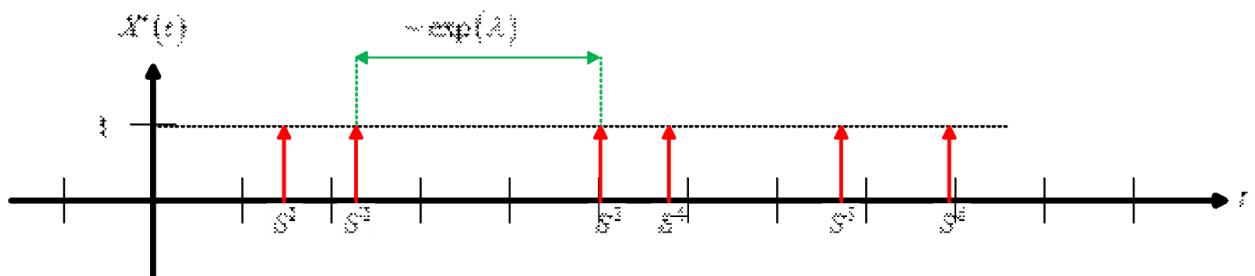
### תהליך הנגזרת של תהליך פואסן

כמו שביריצנו עבור תהליך ויינר נגידיר תחילת את תהליך השיפוע:

$$X_\varepsilon(t) = \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} = \frac{X(t, t+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

ולכן תהליך הנגזרת הוא  $X'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(t)$ .

פונקציית מוגם של תהליך הנגזרת ייראה באופן הבא (הלים בגובה אחד כגובה המדרגות בתהליך פואסן בזמןי הקפיצות):



נרצה לבחון את הסטטיסטיקה מסדר שני של תהליך הנגזרת.

בתהליך פואסן יש פונקציית קו-ואריאנס זהה (nthif α ב- λ) לזו של תהליך ויינר ולכן מתקיים כי גם לתהליכי הנגזרת שלהם הדבר נכון:

$$C_{XX'}(\tau) = \lambda \cdot \delta(\tau)$$

נרצה גם לפתח את פונקציית הקורולציה של תהליך הנגזרת של פואסן (ולשם כך נctract את תוחלתת תהליך הנגזרת). נראה כי מתקיים שתוחלתת תהליך השיפוע לא תלוי ב- ε ולכן היא שווה לתוחלתת תהליך הנגזרת.

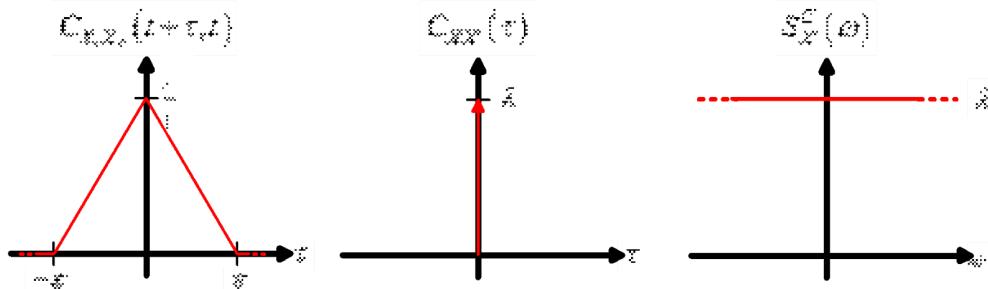
$$E[X_\varepsilon(t)] = E\left[\frac{X(t, t+\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = \frac{1}{\varepsilon} \cdot E[X(t, t+\varepsilon)] = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \lambda(t+\varepsilon - t) = \lambda$$

$$\Rightarrow E[X'(t)] = \lambda$$

ולכן:

$$R_{XX'}(\tau) = R_{XX'}(\tau, 0) = C_{XX'}(\tau) + E[X'(\tau)] \cdot E[X'(0)] = \lambda \cdot \delta(\tau) + \lambda^2$$

נבחן כי מתקיים:



ז"א לתהlik הנגזרת של תהlik פואסון יש ספקטורום הפסק שטוח על כל התדרים, משמע שתהlik הנגזרת של תהlik פואסון הוא רעש לבן.

זהו רעש לבן ממש שונה מרעה גausי לבן מאחר שהוא רק בזמןי אירובי הפואסון (בניגוד לרעש גausי לבן אשר תמיד קיים). זהו גם לא רעש לבן טהור מאחר שההתוחלת שלו שונה מzero.

רועל לבן כזה מתאים למכרים של רמת חלקיק בודד כמו מגע ליזיר בעובי פוטון בודד או זרימת אלקטרוני בחתך בעל שטח פנים בסדר גודל של שטח הפנים של האלקטרון עצמו.

### תהליך פואסון-C-Renewal Process

קיים מחלוקת של תהליכיים מסוג Renewal Processes. ת"א פואסון שייך למחלוקת זו והוא מקרה פרטי שלה.

הסתכלנו על ת"א פואסון כוסף אינסופי של בלוניים עם פיצוצים (התראחות אירוע) במקביל. נרצה להסתכל על ת"א מניטי אך בטור, ככלומר יש בלון אחד וכאשר הוא מתפוץץ מחליפים אותו אחר.

לצורך הדיוון נדונו בתהlik של החלפת נורה (כאשר נורה נשרפת היא מוחלפת מחדש מן הארץ). כמובן שלזמן חי המנורה יש פילוג בלבדו, נניח  $f_z(z)$ . לכן נגדיר את התהlik ע"י:

$$\{Z_i\}_{i.i.d} \quad X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} U(t - S^i) \\ S^i = S^{i-1} + Z_i$$

כאשר התהlik  $X(t)$  יציג בכל זמן את מספר הנורות אשר הוחלפו עד אותו זמן.

תהליכי Renewal מוביילים לtorrent התורים (לדוגמא נציג בודד אשר מטפל במספר לקוחות באופן טורי כאשר זמן הטיפול יש פילוג בלבדו).

אופי התהlik תלוי בפילוג הסדרה  $\{Z_i\}$ , באופן כללי  $f_z(z)$  הוא לא בהכרח פילוג אקספוננציאלי. במקרה בו מתקיים  $Z_i \sim \text{exp}(\lambda)$  אז מקבל ת"א פואסון  $X(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ .

במקרה הזה גם קיבל כי התהlik יהיה בעל תוספות בת"ס (הפילוג האקספוננציאלי בעל תכונת חסר זיכרון והדבר לא נכון עבור כל פילוג, בעודנו הוכיחו כי עבור פילוג תוספות

אקספוננציאלי מתקיים נוסחת R.A. ליניארית אך אין הדבר אומר שאמ מתקיים נוסחת R.  
ליניאריות התוספות בהכרח היו מפולגות אקספוננציאלית).

#### פרודוקס הנורה:

פרודוקס הנורה (מכור גם כפרודוקס הטרומפייט/האוטובוס) מראה סוגיה מעניינת לגבי תוחלת של מ"א אקספוננציאלי.

אנו מתייחסים Renewal Process של החלפת נורה בטוור. נניח שזמן חיים של כל נורה מתפלג

אקספוננציאלית עם  $\frac{1}{\lambda} = 1month$ . לכן מרגע שהוא חוברה תוחלת החיים שלה היא חדש אחד. אנו נכנסים לחדר ומצבאים על נורה שעובדת, נרצה לדעת מה תוחלת החיים שלה (מרגע שהיא הוחלפה).  
תוחלת החיים של מנורה צו הוא שני חודשים.  
הסבירים:

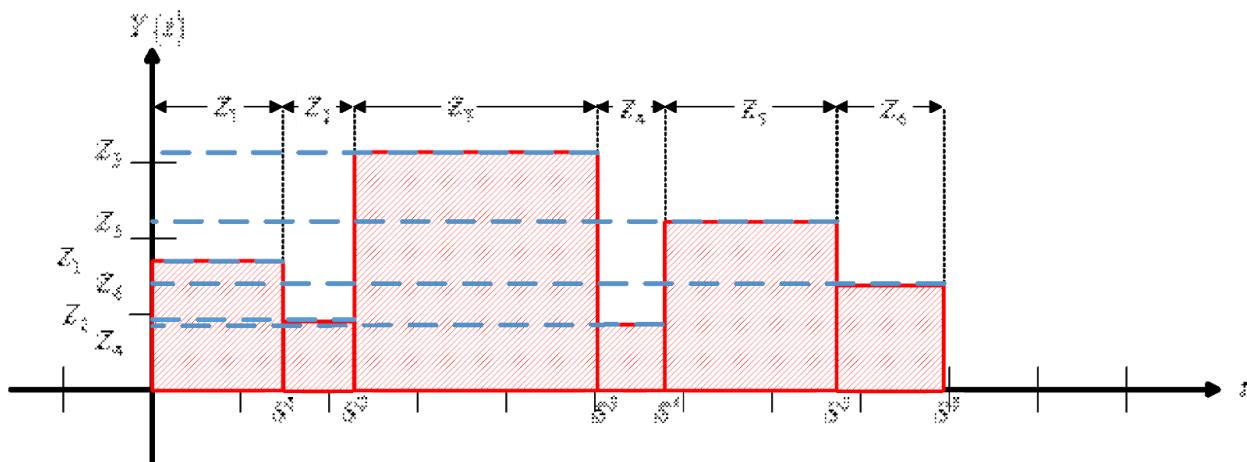
- הפילוג האקספוננציאלי חסר זיכרון ולכן גם התהיליך. לכן גם הזמן אחרה וגם הזמן

קדימה מתפלג  $\exp(-\lambda t)$ . מכאן שיש לנו תוחלת של חדש לכל אחד מן כיווני הזמן –  
סה"כ חודשים.

- מדובר בתהיליך פואסון. אנחנו יודעים כי נקודות האירועים מתפלגות באופן אחיד על הציר (ואינו באפשרות סימולז'). לכן כאשר ניכנס לחדר הדבר שcolo נקודה אקראית על הציר ו"סביר" יותר שניפול על קטע ארוך מאשר קצר (כי יש להם הסתברות מותנית גבוהה יותר כי אורכם ארוך יותר):



- נציג ת"א אשר מראה את משך החיים של כל מנורה (בכל רגע  $t$  יציג את זמן החיים של מנורה נוכחית):



התהיליך זה הינו תהיליך ריבועים. נניח וההתהיליך ארוך עבור מספיק זמן ומון נורות.

נבוֹא ברגע אקראי  $T$  מסוים. נרצה לדעת מה ממוצע זמן החיים של המנורות עד זמן זה:

$$\bar{Y}(T) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T Y(t) \cdot dt$$

כמובן שהממוצע הזה חסום משני הצדדים ע"י הממוצע בתחילת אותו ריבוע ובסוף אותו ריבוע.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)} Z_i^2 &\leq \bar{Y}(T) \leq \frac{1}{T+1} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)+1} Z_i^2 \leq \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)+1} Z_i^2 \\ \frac{1}{T} \cdot \frac{X(T)}{X(T)} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)} Z_i^2 &\leq \bar{Y}(T) \leq \frac{1}{T} \cdot \frac{X(T)}{X(T)} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)+1} Z_i^2 \end{aligned}$$

נסתכל על חלק מהביטוי:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{X(T)}{X(T)} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)} Z_i^2 = \left( \frac{1}{X(T)} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)} Z_i^2 \right) \cdot \left( \frac{X(T)}{T} \right)^{LLN} = E[Z_i^2] \cdot \left( \frac{X(T)}{T} \right) = E[Z_i^2] \cdot \frac{1}{E[Z_i]}$$

עד כה הפיתוח היה כללי עבור כל Renewal Process, נציג פנים כי (ונקבל):

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{X(T)}{X(T)} \cdot \sum_{i=1}^{X(T)} Z_i^2 = E[Z_i^2] \cdot \frac{1}{E[Z_i]} = \frac{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda} = 2 \cdot E[Z_i]$$

הוכחנו כי התוחלת כפולה.