Algèbre 1

Année scolaire 2022-2023

Table des matières

Chapitre 1

Calcul Algébrique

1.1 Point sur les ensembles de nombres

Définition. 1.1.1: Ensemble des nombres entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0; 1; ...\}$$

Définition. 1.1.2: Ensemble des nombres entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{...; -1; 0; 1; ...\}$$

Définition. 1.1.3: Ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Définition. 1.1.4: Ensemble des nombres réels

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

1.1.1 Axiomatique

Ici $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$

Proposition. 1.1.1: Loi de composition +

1. Associativité :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3,\ a + (b + c) = (a + b) + c$$

2. Commutativité :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2,\ a + b = b + a$$

3. Existence d'un élément neutre :

$$\forall a \in \mathbb{K},\ a + 0 = a$$

4. Symétrie :

$$\forall (a, a') \in \mathbb{K}^2,\ a + a' = 0 \text{ avec } a' = -a$$

Remarque : Cette propriété ne s'applique pas dans $\mathbb{N}$

Proposition. 1.1.2: Loi de composition ·

1. Associativité :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. Commutativité :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^3,\ a \cdot b = b \cdot a$$

3. Existence d'un élément neutre :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot 1 &= a \\ a \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

4. Distributivité :

$$\begin{aligned} \forall (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

1.2 Opérations sur les fractions

Proposition. 1.2.1: Addition sur les fractions

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Démonstration.
$\forall (a,b,c,d,a',b',c',d') \in \mathbb{Z}^8$
D'après la proposition on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

et :

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

Montrons que :

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

On suppose que :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} &\iff a'b = ab' \\ \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} &\iff c'd = cd' \end{aligned}$$

On aurait donc :

$$\begin{aligned} &\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \\ \iff &(ad+bc)b'd' = bd(a'd'+b'c') \\ \iff &(ad+bc)b'd' - bd(a'd'+b'c') = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' - bd(a'd'+b'c') &= (adb'd'+bcb'd') - (bda'd'+bdb'c')\\ &= adb'd'+bcb'd'-bda'd'-bdb'c'\\ &= adb'd'-a'd'bd+bcb'd'-b'c'bd\\ &= ab'dd'-a'bdd'+cd'bb'-c'dbb'\\ &= (ab'-a'b)dd'+(cd'-c'd)dd'\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de départ :

$$\begin{aligned}ab'=a'b &\iff ab'-a'b=0\\ cd'=c'd &\iff cd'-c'd=0\end{aligned}$$

Donc :

$$(\underbrace{ab'-a'b}_{0})dd'+(\underbrace{cd'-c'd}_{0})dd'=0$$

On obtient alors :

$$(ad+bc)b'd'-bd(a'd'+b'c')=0$$

□

Proposition. 1.2.2: Multiplication sur les fractions

$$\forall (a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4,\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Démonstration.
$\forall (a,b,c,d,a',b',c',d')\in\mathbb{Z}^8$
D'après la proposition on a :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

et :

$$\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}=\frac{a'c'}{b'd'}$$

Montrons que :

$$\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} &\iff a'b=ab'\\ \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'} &\iff c'd=cd'\end{aligned}$$

On aurait donc :

$$\begin{aligned}&\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}\\ \iff& acb'd'=bda'c'\\ \iff& acb'd'-bda'c'=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} acb'd' - bda'c' &= (ab')(cd') - (a'b)(c'd) \\ &= (ab')(cd') - (a'b)(cd') + (a'b)(cd') - (a'b)(c'd) \\ &= (ab' - a'b)(cd') + (cd' - c'd)(a'b) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de départ :

$$\begin{aligned} ab' = a'b &\iff ab' - a'b = 0 \\ cd' = c'd &\iff cd' - c'd = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$(\underbrace{ab' - a'b}_{0})(cd') + (\underbrace{cd' - c'd}_{0})(a'b) = 0$$

On obtient alors :

$$acb'd' - bda'c' = 0$$

□

1.3 Sommes

Définition. 1.3.1: Définition de la somme

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Remarque 1. *L'indice de sommation est important car :*

$$\sum_{k=m}^{n} a_l = \underbrace{a_l + a_l + \cdots + a_l}_{n-m+1 \text{termes}} = (n - m + 1)a_l$$

Proposition. 1.3.1: Linéarité de la somme

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

Démonstration. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots (a_n + b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k \end{aligned}$$

□

Proposition. 1.3.2: Linéarité de la multiplication de la somme par une constante

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, \lambda \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Démonstration. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, \lambda \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) &= \lambda a_m + \lambda a_{m+1} + \cdots + \lambda a_n \\ &= \lambda(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)\end{aligned}$$

□

1.3.1 Quelques sommes importantes

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d) = \frac{1}{2} n\,(2a + (n-1)\,d)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a, d \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a, r \in \mathbb{R}$

Démonstration. 1 On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a donc :

$$\begin{aligned}S =& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ & n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = S\end{aligned}$$

En additionnant les termes du "dessus" et du "dessous" on obtient :

$$\begin{aligned}2S &= n \cdot (n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

□

Démonstration. 2 On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d)$ avec $n \in \mathbb{N},\ a, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d) &= \sum_{k=1}^{n} (a - d + dk) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a-d) + \sum_{k=1}^{n} dk \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a-d) + d\sum_{k=1}^{n} k \\ &= n(a-d) + d\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n\left((a-d) + \frac{d(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}n\left(2\left(a-d\right)\right) + d(n+1)) \\ &= \frac{1}{2}n(2a - 2d + nd + d) \\ &= \frac{1}{2}n(2a - d + nd) \\ &= \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d) \end{aligned}$$

□

Démonstration. 3 On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k$ avec $n \in \mathbb{N},\ a, r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} \\ rS &= ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ \\ S - rS &= (a{+}ar + \cdots + ar^{n-1}) \\ &\qquad -(ar + \cdots + ar^{n-1} + ar^n) \\ \\ (1-r)S &= a - ar^n \\ S &= a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \end{aligned}$$

□

1.3.2 Sommes téléscopiques

Proposition. 1.3.3: Somme téléscopique

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n,\ a_k \in \mathbb{R}$ avec $m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$$

Démonstration. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n,\ a_k \in \mathbb{R}$ avec $m \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(a_k + a_{k-1}) =& (\underline{a_m} - a_{m-1})\\ &+(\underline{a_{m+1}} - \underline{a_m})\\ &+(a_{m+2} - \underline{a_{m+1}})\\ &\vdots\\ &+(\underline{a_{n-1}} - \underline{a_{n-2}})\\ &+(a_n - \underline{a_{n-1}})\\ \sum_{k=m}^{n}(a_k + a_{k-1}) =& a_n - a_{m-1}\end{aligned}$$

□

1.4 Puissances

Définition. 1.4.1: Puissance d'un réel

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n fois}$$

Proposition. 1.4.1: Propriétés des puissances

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall m, n \in \mathbb{N}$

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
4. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, a \neq 0$
5. $a^0 = 1$

Démonstration. 1 $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n fois} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n fois} \end{aligned}$$

□

Démonstration. 2 $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois} \times \cdots \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois}}_{n fois} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \times n fois}$$

□

Démonstration. 3 $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \cdots \times a}^{n fois}}{\underbrace{a \times a \cdots \times a}_{m fois}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-m fois}$$

□

Démonstration. 4 $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a^{-m} &= a^{0-m} \\ &= \frac{a^0}{a^m} \\ &= \frac{1}{a^m} \end{aligned}$$

□

Démonstration. 5 $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^0 &= \frac{a}{a} = 1 \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Ensembles

Définition. 2.1.1: Définition intuitive d'un ensemble

Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. Si E contient un élément x, on dit que x appartient à E, noté $x \in E$

Définition. 2.1.2: Ensemble vide

L'ensemble vide noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition. 2.1.3: Inclusion

$$\text{Un ensemble F est inclus dans un ensemble E} \iff \forall x \in F,\ x \in E.$$
$$\text{On note : } F \subset E \text{ On dit aussi que F est un sous-ensemble, une partie de E}$$

Définition. 2.1.4: Egalité d'ensembles

$$\text{Deux ensembles E et F sont égaux} \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Définition. 2.1.5: Singleton

Un singleton est un ensemble de ne contenant qu'un seul élément (noté entre accolades).

Définition. 2.1.6: Réunion d'ensembles

Soient E et F deux ensembles.

$$E \cup F \text{ (lu E union F) } = \{\forall x,\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Définition. 2.1.7: Intersection d'ensembles

Soient E et F deux ensembles.

$$E \cap F \text{ (lu E inter F) } = \{\forall x,\ x \in E \text{ et } x \in F\}$$

Proposition. 2.1.1: Propriétés sur les ensembles

Soient A, B, C, E des ensembles

1. Associativité :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2. Elément neutre :

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap A = A$$

3. Intersection d'un ensemble et d'une partie :

$$A \subset E \iff A \cap E = E \cap A = A$$

4. Commutativité :

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

5. Distributivité :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Définition. 2.1.8: Complémentaire d'un ensemble

$$E \backslash F = \{\forall x,\ x \in E \text{ et } x \notin F\}$$

Remarque 2. *Soient E, F des ensembles.*

— $(E \backslash F) \subset E$
— $(E \backslash F) \cap F = \emptyset$
— $E \backslash F \neq F \backslash E$

Remarque 3. *Soient E et A des ensembles.*

$$A \subset E$$
$$A^C = E \backslash A$$
$$(A^C)^C = A$$

Proposition. 2.1.2: Lois de Morgan

Soient A et B des ensembles.

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Démonstration. 1
Soient A et B des ensembles et x un élément quelconque.

$\boxed{\subset}$ Par définition du complémentaire :

$$x \in (A \cup B)^C \iff x \notin (A \cup B)$$

$x \notin A$ car $A \subset (A \cup B)$ ce qui impliquerait que $x \in (A \cup B)$ et donc il y aurait une contradiction. On obtient une contradiction similaire si on suppose que $x \in B$. Ainsi on a $x \in A^C$ et $x \in B^C$, donc par la définition de l'intersection on a :

$$x \in (A^C \cap B^C)$$

d'où :

$$(A \cup B)^C \subset (A^C \cap B^C)$$

$\boxed{\supset}$ Par définition de l'intersection :

$$\begin{aligned} x \in (A^C \cap B^C) &\iff x \in A^C \text{ et } x \in B^C \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in (A \cup B)^C \end{aligned}$$

d'où :

$$(A^C \cap B^C) \subset (A \cup B)^C$$

Ainsi :

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

□

Démonstration. 2
Soient A et B des ensembles et x un élément quelconque.
$\boxed{\subset}$ Par définition du complémentaire :

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in A^C \text{ et } x \in B^C \\ &\iff x \in (A^C \cap B^C) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$(A^C \cap B^C) \subset (A^C \cup B^C)$$

On a :

$$x \in (A^C \cap B^C) \implies x \in (A^C \cup B^C)$$

d'où :

$$(A \cap B)^C \subset (A^C \cup B^C)$$

$\boxed{\supset}$ Par définition de la réunion :

$$\begin{aligned} x \in (A^C \cup B^C) &\iff x \in A^C \text{ ou } x \in B^C \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in (A \cap B)^C \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(A^C \cap B^C) \subset (A \cup B)^C$$

Donc :

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

□

Définition. 2.1.9: Produit cartésien

Soient E et F des ensembles

$$- \ E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$$
$$- \ E \times E = E^2$$
$$- \ E \times E \times E = E^3$$

2.2 Applications

Définition. 2.2.1: Application

Soient E et F deux ensembles. $f : E \to F$ est une application si pour chaque $x \in E$, on associe un élément de F noté $f(x)$

Définition. 2.2.2: Injectivité

Soit $f : E \to F$, on dit que f est injective si pour chaque élément de F, il y a au plus un élément de E qui y est associé. Autrement dit :

$$\text{f injective} \iff \{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\}$$

Définition. 2.2.3: Surjectivité

Soit $f : E \to F$, on dit que f est surjective si pour chaque élément de F, il y a au moins un élément de E qui y est associé. Autrement dit :

$$\text{f surjective} \iff \{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Définition. 2.2.4: Bijectivité

Soit $f : E \to F$, on dit que f est bijective si elle est injective et surjective, c'est-à-dire que pour chaque élément de F, il y a exactement un élément de E qui y est associé. Autrement dit :

$$\text{f bijective} \iff \{\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)\}$$

Définition. 2.2.5: Ensemble fini

Un ensemble E est un ensemble fini non-vide $\iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists$une application bijective de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans E

Définition. 2.2.6: Fonction réciproque

Soient E et F deux ensembles. Supposons que $f : E \to F$ est une application bijective. On peut définir l'application

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \to E \\ y & \mapsto x \end{cases}$$

comme étant la réciproque de f.

Définition. 2.2.7: Composition

Soient f et g deux applications telles que : $f : E \to F$ et $g : F \to G$ on a l'application $g \circ f : E \to G$ qui est définie comme étant la composée de f et de g.

Définition. 2.2.8: Image directe et image réciproque

Soient $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Nous avons :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} : \text{image directe}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} : \text{image réciproque}$$

Proposition. 2.2.1: Propriétés sur les images directes et réciproques

Soient $f : E \to F$ une application et A, B des parties de F.

1. $f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
5. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration. 5 : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $y \in f(A \cap B) = \{f(x), x \in A \cap B\}$, par définition : $\exists x \in A \cap B, y = f(x)$

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B \\ x \in A &\implies y = f(x) \subset f(A) \\ x \in B &\implies y = f(x) \subset f(B) \end{aligned}$$

d'où $y \in f(A) \cap f(B)$ $\square$

Remarque 4.

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

Chapitre 3

Logique

Définition. 3.0.1: Assertion

Une **assertion** est une affirmation mathématique qui peut être vraie pou fausse.

Définition. 3.0.2: Prédicat

Un **prédicat** est une "assertion" dépendant d'une ou plusieurs variables.

Exemple 1.
— *"Tous les entiers sont des nombres rationnels" est une assertion.*
— *"L'entier n est pair" est un prédicat.*
— *"Le réel x est le carré d'un nombre réel" est un prédicat.*

3.1 Opérations sur les prédicats

P	Q	P et Q	P ou Q	non(P)	P $\implies$ Q
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

3.1.1 Négation

1. $P \implies Q$ est équivalent à non(P) ou Q
2. non(P ou Q) est équivalent à non(P) et non(Q)
3. non(P et Q) est équivalent à non(P) ou non(Q)

Remarque 5.

1. *Pour contredire "tous les éléments de E ont une propriété P", il suffit de trouver un contre-exemple*

$$non(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, non(P(x))$$

2. *Pour contredire "il existe un élément de E vérifiant une propriété P", il faut montrer que tous les éléments de E ne vérifient pas la propriété P.*

$$non(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, non(P(x))$$

3. *Une affirmation de type :*

$$\exists ! x \in E, P(x) \iff \begin{cases} \exists x \in E, P(x) \\ \textit{Si } P(x) \textit{ et } P(y) \textit{ sont vrais, alors } x = y \end{cases}$$

Remarque 6.
$\{(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$
A. Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, |a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geqslant N$$

Chapitre 4

Nombres complexes

$$(\mathbb{N},+,\times) \subset (\mathbb{Z},+,\times) \subset (\mathbb{Q},+,\times) \subset (\mathbb{R},+,\times) \subset (\mathbb{C},+,\times)$$

L'ensemble des nombres complexes est adapté à la résolution des équations algébriques.

4.1 Vision algébrique des nombres complexes

Définition. 4.1.1: Forme algébrique des nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}, \text{ avec } i = \sqrt{-1}$$

Proposition. 4.1.1: Opérations sur les nombres complexes

1. Somme : Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}, w = c + id \in \mathbb{C}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$z + w = a + c + i(b + d)$$

   (a) Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$
   (b) Elément neutre : $0 = 0 + i0 \implies z + 0 = 0 + z = 0, z \in \mathbb{C}$
   (c) Symétrique : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z', z + z' = z' + z = 0, z' = -z$

$$z = a + ib \implies -z = -a + i(-b)$$

   (d) Commutativité : $z + w = w + z$

2. Produit : Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}, w = c + id \in \mathbb{C}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + ib) \cdot (c + id) \\ &\text{``=''}\ a \cdot (c + id) + ib \cdot (c + id) \\ &\text{``=''}\ a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id \\ &\text{``=''}\ ac + i(ad) + i(bc) + i^2 bd \\ &\text{``=''}\ ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

□

   (a) Associativité :

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$$

   (b) Elément neutre :

$$\begin{aligned} 1 = 1 + i0 &\implies z \times 1 = 1 \times z = z \\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \exists z' &\in \mathbb{C}, z \cdot z' = z' \cdot z = 1 \end{aligned}$$

   (c) Commutativité :

$$z \cdot w = w \cdot z, \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2$$

   (d) Distributivité :

$$\begin{aligned} &(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 \cdot w \\ &z \cdot (w_1 + w_2) = z \cdot w_1 + z \cdot w_2 \\ &\forall (z, z_1, z_2, w, w_1, w_1) \in \mathbb{C}^6 \end{aligned}$$

Remarque 7. $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un corps commutatif*

Définition. 4.1.2: Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, le nombre $\overline{z} = a - ib$ est dit le conjugué de z.

Proposition. 4.1.2:

Soient $z = a + ib, z' = a - ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{C}$

$$z \cdot z' = a^2 + b^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - iab + iab - i^2 b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

□

Définition. 4.1.3: Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on définit son module comme étant :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition. 4.1.3: Propriétés des modules

Soient $z = a + ib$ et $z = a' + ib'$ des nombres complexes, on a les propriétés suivantes sur les modules :

— $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
— $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
— $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
— $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
— $|z| \geqslant 0$
— $|z| = 0 \iff z = 0$
— $|z| = |\overline{z}| = | - z| = | - \overline{z}|$

Définition. 4.1.4: Partie réelle et partie imaginaire

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &\Re(z) = Re(z) = a \text{ (Partie réelle)} \\ &\Im(z) = Im(z) = b \text{ (Partie imaginaire)} \end{aligned}$$

Proposition. 4.1.4: Propriétés

— $z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a \implies \Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
— $z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib \implies \Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

4.2 Vision géométrique des nombres complexes

Définition. 4.2.1: Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe, l'argument de z, noté $\arg(z)$ représente l'angle entre la droite des réels et celle issue de l'origine et passant par z.

Proposition. 4.2.1: Propriétés des arguments

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^3, n \in \mathbb{N}$

— $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
— $\arg z^n = n \arg z$
— $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$
— $\arg \frac{1}{z} = -\arg z$

Définition. 4.2.2: Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe, on peut l'écrire sous sa forme trigonométrique ainsi :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Avec :
— $r = |z|$
— $\theta = \arg(z)$

Proposition. 4.2.2:

Soient $z_1 = r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))$, deux nombres complexes. Nous avons la propriété suivante :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\
&= (r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2) \\
&= (r_1\cos\theta_1 \cdot r_2\cos\theta_2) + (r_1\cos\theta_1 \cdot ir_2\sin\theta_2) + (ir_1\sin\theta_1 \cdot r_2\cos\theta_2) + (ir_1\cos\theta_1 + ir_2\sin\theta_2) \\
&= (r_1\cos\theta_1)(r_2\cos\theta_2) - (r_1\sin\theta_1)(r_2\sin\theta_2) + i((r_1\cos\theta_1)(r_2\sin\theta_2) + (r_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2)) \\
&= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

□

Proposition. 4.2.3: Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Définition. 4.2.3: Forme exponentielle d'un nombre complexe

On peut écrire un nombre complexe sous une forme exponentielle :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Proposition. 4.2.4: Identité d'Euler

$$e^{i\pi} = -1$$

Proposition. 4.2.5: Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= 2\cos\theta \\ \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= 2i\sin\theta \\ \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \sin\theta \end{aligned}$$

□

Remarque 8 (Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique)**.**
Soit $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe sous sa forme algébrique, on peut passer sous la forme trigonométrique ainsi :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Exemple 2. $z = 1 + i$
On a : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2}$
On a donc :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Définition. 4.2.4: Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine n-ième du nombre complexe z tout nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$w^n = z$$

Un complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes données par :

$$Z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Définition. 4.2.5: Racine n-ième de l'unité

On appelle racine n-ième de l'unité, une racine n-ième de 1, on notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme :

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]$$

4.3 Géométrie des nombres complexes

— $z \mapsto z + a, (a \in \mathbb{C})$: translation de vecteur u d'affixe a
— $z \mapsto az, (a \in \mathbb{R}^*)$: homothétie de rapport a
— $z \mapsto e^{i\theta} z, (\theta \in \mathbb{R})$: rotation d'angle θ et de centre 0
— $z \mapsto \overline{z}$: réflexion par rapport à l'axe des réels
— $z \mapsto a + e^{i\theta}(z - a)$: rotation d'angle θ de centre a
— $z \mapsto e^{2i\theta} \cdot \overline{z}$: réflexion par rapport à la droite formant un angle θ avec l'axe des réels.

4.3.1 Equation d'une droite

— L'axe des réels : $\overline{z} = z$
— Un axe formant un angle θ avec l'axe des réels : $\overline{e^{-i\theta} z} = e^{-i\theta} z$
— L'asymptote verticale de partie réelle a : $z + \overline{z} = 2a$

Exemple 3. $z \mapsto \frac{1}{z}$
On pose : $w = \frac{1}{z}$
On a donc : $z = \frac{1}{w}$
$z + \overline{z} = 2 \implies \frac{1}{w} + \overline{\frac{1}{w}} = 2 \implies \frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} = 2$
$w\overline{w}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}\right) = 2w\overline{w}$
On a donc : $\overline{w} + w = 2w\overline{w} \implies 2w\overline{w} - w - \overline{w} = 0$
C'est à dire : $w\overline{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\overline{w} = \left(w - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0$
Ce qui équivaut à $\left|w - \frac{1}{2}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff \left|w - \frac{1}{2}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)$

Exemple 4. $P = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ *: le demi-plan de Poincaré*
Déterminer l'image de P *par la transformation* $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

1. *$w = \frac{z-i}{z+i}$, exprimer z en fonction de w.*

$$\begin{aligned}
& w = \frac{z-i}{z+i} \\
\iff & w(z+i) = z - i \\
\iff & w(z+i) + i = z \\
\iff & wz + wi + i = z \\
\iff & wz - z = -wi - i \\
\iff & z(w+1) = -wi - i \\
\iff & z = \frac{-wi - i}{w+1} \\
\iff & z = \frac{-i(w+1)}{w+1}
\end{aligned}$$