Algèbre 1 pour les informaticiens

Année scolaire 2022-2023

Table des matières

Chapitre 1

Calcul Algébrique

1.1 Point sur les ensembles de nombres

Définition 1 (Ensemble des nombres entiers naturels).

$$\mathbb{N} = \{0; 1; ...\}$$

Définition 2 (Ensemble des nombres entiers relatifs).

$$\mathbb{Z} = \{...; -1; 0; 1; ...\}$$

Définition 3 (Ensemble des nombres rationnels).

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Définition 4. Ensemble des nombres réels

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

1.1.1 Axiomatique

Ici $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$

Proposition 1 (Loi de composition $+$).

1. Associativité :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3,\ a + (b + c) = (a + b) + c$$

2. Commutativité :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2,\ a + b = b + a$$

3. Existence d'un élément neutre :

$$\forall a \in \mathbb{K},\ a + 0 = a$$

4. Symétrie :

$$\forall (a, a') \in \mathbb{K}^2,\ a + a' = 0 \text{ avec } a' = -a$$

Remarque : Cette propriété ne s'applique pas dans $\mathbb{N}$

Proposition 2 (Loi de composition $\cdot$).

1. Associativité :

$$\forall(a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. Commutativité :

$$\forall(a,b) \in \mathbb{K}^3,\ a \cdot b = b \cdot a$$

3. Existence d'un élément neutre : $\forall a \in \mathbb{K}$

$$a \cdot 1 = a$$
$$a \cdot 0 = 0$$

4. Distributivité : $\forall(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.2 Opérations sur les fractions

Proposition 3 (Addition sur les fractions)**.**

$$\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Démonstration.
$\forall(a,b,c,d,a',b',c',d') \in \mathbb{Z}^8$
D'après la proposition on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

et :

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

Montrons que :

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

On suppose que :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff a'b = ab'$$
$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \iff c'd = cd'$$

On aurait donc :

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$
$$\iff (ad+bc)b'd' = bd(a'd'+b'c')$$
$$\iff (ad+bc)b'd' - bd(a'd'+b'c') = 0$$

$$
\begin{aligned}
(ad+bc)b'd' - bd(a'd'+b'c') &= (adb'd' + bcb'd') - (bda'd' + bdb'c') \\
&= adb'd' + bcb'd' - bda'd' - bdb'c' \\
&= adb'd' - a'd'bd + bcb'd' - b'c'bd \\
&= ab'dd' - a'bdd' + cd'bb' - c'dbb' \\
&= (ab' - a'b)dd' + (cd' - c'd)dd'
\end{aligned}
$$

D'après l'hypothèse de départ :

$$
\begin{aligned}
ab' = a'b &\iff ab' - a'b = 0 \\
cd' = c'd &\iff cd' - c'd = 0
\end{aligned}
$$

Donc :

$$(\underbrace{ab' - a'b}_{0})dd' + (\underbrace{cd' - c'd}_{0})dd' = 0$$

On obtient alors :

$$(ad+bc)b'd' - bd(a'd'+b'c') = 0$$

$\square$

Proposition 4 (Multiplication sur les fractions)**.**

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Démonstration.
$\forall (a,b,c,d,a',b',c',d') \in \mathbb{Z}^8$
D'après la proposition on a :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

et :

$$\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

Montrons que :

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

On suppose que :

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} &\iff a'b = ab' \\
\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} &\iff c'd = cd'
\end{aligned}
$$

On aurait donc :

$$
\begin{aligned}
&\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} \\
\iff &acb'd' = bda'c' \\
\iff &acb'd' - bda'c' = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
acb'd' - bda'c' &= (ab')(cd') - (a'b)(c'd) \\
&= (ab')(cd') - (a'b)(cd') + (a'b)(cd') - (a'b)(c'd) \\
&= (ab' - a'b)(cd') + (cd' - c'd)(a'b)
\end{aligned}
$$

D'après l'hypothèse de départ :

$$
\begin{aligned}
ab' = a'b &\iff ab' - a'b = 0 \\
cd' = c'd &\iff cd' - c'd = 0
\end{aligned}
$$

Donc :

$$(\underbrace{ab' - a'b}_{0})(cd') + (\underbrace{cd' - c'd}_{0})(a'b) = 0$$

On obtient alors :

$$acb'd' - bda'c' = 0$$

$\square$

1.3 Sommes

Définition 5 (Définition de la somme)**.** $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Remarque 1. L'indice de sommation est important car :

$$\sum_{k=m}^{n} a_l = \underbrace{a_l + a_l + \cdots + a_l}_{n-m+1 \text{termes}} = (n-m+1)a_l$$

Proposition 5 (Linéarité de la somme)**.** $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

Démonstration. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots (a_n + b_n) \\
&= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n) \\
&= \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposition 6 (Linéarité de la multiplication de la somme par une constante)**.** $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, \lambda \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Démonstration. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k, \lambda \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) &= \lambda a_m + \lambda a_{m+1} + \cdots + \lambda a_n \\
&= \lambda(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)
\end{aligned}
$$

$\square$

1.3.1 Quelques sommes importantes

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d) = \frac{1}{2} n\,(2a + (n-1)\,d)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a, d \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a, r \in \mathbb{R}$

Démonstration. 1 On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a donc :

$$\begin{aligned} S =& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 =& S \end{aligned}$$

En additionnant les termes du "dessus" et du "dessous" on obtient :

$$\begin{aligned} 2S &= n \cdot (n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Démonstration. 2 On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d)$ avec $n \in \mathbb{N},\ a, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d) &= \sum_{k=1}^{n} (a - d + dk) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a - d) + \sum_{k=1}^{n} dk \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a - d) + d \sum_{k=1}^{n} k \\ &= n(a-d) + d\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n\left((a-d) + \frac{d(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} n\,(2\,(a-d)) + d(n+1)) \\ &= \frac{1}{2} n(2a - 2d + nd + d) \\ &= \frac{1}{2} n(2a - d + nd) \\ &= \frac{1}{2} n(2a + (n-1)d) \end{aligned}$$

□

Démonstration. 3 On pose S $= \sum_{k=0}^{n-1} ar^k$ avec $n \in \mathbb{N},\ a, r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} \\ rS &= ar + ar^2 + \cdots + ar^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S - rS = (a{+}ar + \cdots + ar^{n-1}) \\ -(ar + \cdots + ar^{n-1} + ar^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-r)S &= a - ar^n \\ S &= a \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

□

1.3.2 Sommes téléscopiques

Proposition 7 (Somme téléscopique)**.** $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n,\ a_k \in \mathbb{R}$ avec $m \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$$

Démonstration. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n,\ a_k \in \mathbb{R}$ avec $m \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} (a_k + a_{k-1}) = &(\underline{a_m} - a_{m-1}) \\ &+(\underline{a_{m+1}} - \underline{a_m}) \\ &+(a_{m+2} - \underline{a_{m+1}}) \\ &\vdots \\ &+(\underline{a_{n-1}} - \underline{a_{n-2}}) \\ &+(a_n - \underline{a_{n-1}}) \\ \sum_{k=m}^{n} (a_k + a_{k-1}) = &\ a_n - a_{m-1} \end{aligned}$$

□

1.4 Puissances

Définition 6 (Puissance d'un réel)**.** $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n fois}$$

Proposition 8 (Propriétés des puissances)**.** $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall m, n \in \mathbb{N}$

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$

4. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, a \neq 0$
5. $a^0 = 1$

Démonstration. 1 $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n fois} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n fois} \end{aligned}$$

□

Démonstration. 2 $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois} \times \cdots \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m fois}}_{n fois} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \times n fois}$$

□

Démonstration. 3 $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \cdots \times a}^{n fois}}{\underbrace{a \times a \cdots \times a}_{m fois}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-m fois}$$

□

Démonstration. 4 $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a^{-m} &= a^{0-m} \\ &= \frac{a^0}{a^m} \\ &= \frac{1}{a^m} \end{aligned}$$

□

Démonstration. 5 $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^0 &= \frac{a}{a} = 1 \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Ensembles

Définition 7 (Définition intuitive d'un ensemble)**.** Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. Si E contient un élément x, on dit que x appartient à E, noté $x \in E$

Définition 8 (Ensemble vide)**.** L'ensemble vide noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 9 (Inclusion)**.**

$$\text{Un ensemble F est inclus dans un ensemble E} \iff \forall x \in F,\ x \in E.$$
$$\text{On note : } F \subset E \text{ On dit aussi que F est un sous-ensemble, une partie de E}$$

Définition 10 (Egalité d'ensembles)**.**

$$\text{Deux ensembles E et F sont égaux} \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Définition 11 (Singleton)**.** Un singleton est un ensemble de ne contenant qu'un seul élément (noté entre accolades).

Définition 12 (Réunion d'ensembles)**.** Soient E et F deux ensembles.

$$E \cup F \text{ (lu E union F) } = \{\forall x,\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Définition 13 (Intersection d'ensembles)**.** Soient E et F deux ensembles.

$$E \cap F \text{ (lu E inter F) } = \{\forall x,\ x \in E \text{ et } x \in F\}$$

Proposition 9 (Propriétés sur les ensembles)**.** Soient A, B, C, E des ensembles

1. Associativité :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2. Elément neutre :

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap A = A$$

3. Intersection d'un ensemble et d'une partie :

$$A \subset E \iff A \cap E = E \cap A = A$$

4. Commutativité :

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

5. Distributivité :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Définition 14 (Complémentaire d'un ensemble)**.**

$$E \backslash F = \{\forall x,\ x \in E \text{ et } x \notin F\}$$

Remarque 2. Soient E, F des ensembles.
- $(E \backslash F) \subset E$
- $(E \backslash F) \cap F = \emptyset$
- $E \backslash F \neq F \backslash E$

Remarque 3. Soient E et A des ensembles.

$$A \subset E$$
$$A^C = E \backslash A$$
$$(A^C)^C = A$$

Proposition 10 (Lois de Morgan)**.** Soient A et B des ensembles.
1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Démonstration. 1
Soient A et B des ensembles et x un élément quelconque.
$\boxed{\subset}$ Par définition du complémentaire :

$$x \in (A \cup B)^C \iff x \notin (A \cup B)$$

$x \notin A$ car $A \subset (A \cup B)$ ce qui impliquerait que $x \in (A \cup B)$ et donc il y aurait une contradiction. On obtient une contradiction similaire si on suppose que $x \in B$. Ainsi on a $x \in A^C$ et $x \in B^C$, donc par la définition de l'intersection on a :

$$x \in (A^C \cap B^C)$$

d'où :

$$(A \cup B)^C \subset (A^C \cap B^C)$$

$\boxed{\supset}$ Par définition de l'intersection :

$$\begin{aligned} x \in (A^C \cap B^C) &\iff x \in A^C \text{ et } x \in B^C \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in (A \cup B)^C \end{aligned}$$

d'où :

$$(A^C \cap B^C) \subset (A \cup B)^C$$

Ainsi :

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$\square$

Démonstration. 2
Soient A et B des ensembles et x un élément quelconque.
$\boxed{\subset}$ Par définition du complémentaire :

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in A^C \text{ et } x \in B^C \\ &\iff x \in (A^C \cap B^C) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$(A^C \cap B^C) \subset (A^C \cup B^C)$$

On a :

$$x \in (A^C \cap B^C) \implies x \in (A^C \cup B^C)$$

d'où :

$$(A \cap B)^C \subset (A^C \cup B^C)$$

$\boxed{\supset}$ Par définition de la réunion :

$$\begin{aligned} x \in (A^C \cup B^C) &\iff x \in A^C \text{ ou } x \in B^C \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in (A \cap B)^C \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(A^C \cap B^C) \subset (A \cup B)^C$$

Donc :

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

□

Définition 15 (Produit cartésien)**.** Soient E et F des ensembles
- $E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$
- $E \times E = E^2$
- $E \times E \times E = E^3$

2.2 Applications

Définition 16 (Application)**.** Soient E et F deux ensembles. $f : E \to F$ est une application si pour chaque $x \in E$, on associe un élément de F noté $f(x)$

Définition 17 (Injectivité)**.** Soit $f : E \to F$, on dit que f est injective si pour chaque élément de F, il y a au plus un élément de E qui y est associé. Autrement dit :

$$\text{f injective} \iff \{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\}$$

Définition 18 (Surjectivité)**.** Soit $f : E \to F$, on dit que f est surjective si pour chaque élément de F, il y a au moins un élément de E qui y est associé. Autrement dit :

$$\text{f surjective} \iff \{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Définition 19 (Bijectivité)**.** Soit $f : E \to F$, on dit que f est bijective si elle est injective et surjective, c'est-à-dire que pour chaque élément de F, il y a exactement un élément de E qui y est associé. Autrement dit :

$$\text{f bijective} \iff \{\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)\}$$

Définition 20 (Ensemble fini)**.** Un ensemble E est un ensemble fini non-vide si et seulement si pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une application bijective de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans E.

Définition 21 (Fonction réciproque)**.** Soient E et F deux ensembles. Supposons que $f : E \to F$ est une application bijective. On peut définir l'application

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \to E \\ y & \mapsto x \end{cases}$$

comme étant la réciproque de f.

Définition 22 (Composition)**.** Soient f et g deux applications telles que : $f : E \to F$ et $g : F \to G$ on a l'application $g \circ f : E \to G$ qui est définie comme étant la composée de f et de g.

Définition 23 (Image directe et image réciproque)**.** Soient $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Nous avons :
- $f(A) = \{f(x), x \in A\}$: image directe
- $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$: image réciproque

Proposition 11 (Propriétés sur les images directes et réciproques)**.** Soient $f : E \to F$ une application et A, B des parties de F.

1. $f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
5. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration. 5 : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $y \in f(A \cap B) = \{f(x), x \in A \cap B\}$, par définition : $\exists x \in A \cap B, y = f(x)$

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B \\ x \in A &\implies y = f(x) \subset f(A) \\ x \in B &\implies y = f(x) \subset f(B) \end{aligned}$$

d'où $y \in f(A) \cap f(B)$ □

Remarque 4.

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

Chapitre 3

Logique

Définition 24 (Assertion)**.** Une **assertion** est une affirmation mathématique qui peut être vraie pou fausse.

Définition 25 (Prédicat)**.** Un **prédicat** est une "assertion" dépendant d'une ou plusieurs variables.

Exemple 1.
— "Tous les entiers sont des nombres rationnels" est une assertion.
— "L'entier n est pair" est un prédicat.
— "Le réel x est le carré d'un nombre réel" est un prédicat.

3.1 Opérations sur les prédicats

P	Q	P et Q	P ou Q	non(P)	P $\implies$ Q
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

3.1.1 Négation

1. $P \implies Q$ est équivalent à non(P) ou Q
2. non(P ou Q) est équivalent à non(P) et non(Q)
3. non(P et Q) est équivalent à non(P) ou non(Q)

Remarque 5.

1. Pour contredire "tous les éléments de E ont une propriété P", il suffit de trouver un contre-exemple

$$non(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, non(P(x))$$

2. Pour contredire "il existe un élément de E vérifiant une propriété P", il faut montrer que tous les éléments de E ne vérifient pas la propriété P.

$$non(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, non(P(x))$$

3. Une affirmation de type :

$$\exists ! x \in E, P(x) \iff \begin{cases} \exists x \in E, P(x) \\ \text{Si } P(x) \text{ et } P(y) \text{ sont vrais, alors } x = y \end{cases}$$

Remarque 6.
$\{(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$
A. Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, |a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geqslant N$$

Chapitre 4

Nombres complexes

$$(\mathbb{N}, +, \times) \subset (\mathbb{Z}, +, \times) \subset (\mathbb{Q}, +, \times) \subset (\mathbb{R}, +, \times) \subset (\mathbb{C}, +, \times)$$

L'ensemble des nombres complexes est adapté à la résolution des équations algébriques.

4.1 Vision algébrique des nombres complexes

Définition 26 (Forme algébrique des nombres complexes).

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}, \text{ avec } i = \sqrt{-1}$$

Proposition 12 (Opérations sur les nombres complexes).

1. Somme : Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}, \omega = c + id \in \mathbb{C}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$z + \omega = a + c + i(b + d)$$

   (a) Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$

   (b) Elément neutre : $0 = 0 + i0 \implies z + 0 = 0 + z = z, \ z \in \mathbb{C}$

   (c) Symétrique : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z', z + z' = z' + z = 0, z' = -z$

$$z = a + ib \implies -z = -a + i(-b)$$

   (d) Commutativité : $z + \omega = \omega + z$

2. Produit : Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}, \omega = c + id \in \mathbb{C}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$z \cdot \omega = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

   (a) Associativité :

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$$

   (b) Elément neutre :

$$1 = 1 + i0 \implies z \times 1 = 1 \times z = z$$
$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, \exists z' \in \mathbb{C}, z \cdot z' = z' \cdot z = 1$$

   (c) Commutativité :

$$z \cdot \omega = \omega \cdot z, \forall (z, \omega) \in \mathbb{C}^2$$

(d) Distributivité :

$$\begin{aligned}
&(z_1 + z_2) \cdot \omega = z_1 \cdot \omega + z_2 \cdot \omega \\
&z \cdot (\omega_1 + \omega_2) = z \cdot \omega_1 + z \cdot \omega_2 \\
&\forall (z, z_1, z_2, \omega, \omega_1, \omega_1) \in \mathbb{C}^6
\end{aligned}$$

Démonstration. Produit

$$\begin{aligned}
z \cdot \omega &= (a + ib) \cdot (c + id) \\
&\text{“=”}\ a \cdot (c + id) + ib \cdot (c + id) \\
&\text{“=”}\ a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id \\
&\text{“=”}\ ac + i(ad) + i(bc) + i^2 bd \\
&\text{“=”}\ ac - bd + i(ad + bc)
\end{aligned}$$

□

Remarque 7. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif

Définition 27 (Conjugué d'un nombre complexe)**.** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, le nombre $\overline{z} = a - ib$ est dit le conjugué de z.

Proposition 13. Soient $z = a + ib, z' = a - ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{C}$

$$z \cdot z' = a^2 + b^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
z \cdot z' &= (a + ib)(a - ib) \\
&= a^2 - iab + iab - i^2 b^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

□

Définition 28 (Module d'un nombre complexe)**.** Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, on définit son module comme étant :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition 14 (Propriétés des modules)**.** Soient $z = a + ib$ et $z = a' + ib'$ des nombres complexes, on a les propriétés suivantes sur les modules :
— $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
— $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
— $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
— $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
— $|z| \geqslant 0$
— $|z| = 0 \iff z = 0$
— $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

Définition 29 (Partie réelle et partie imaginaire)**.** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\Re(z) = Re(z) = a \text{ (Partie réelle)} \\
&\Im(z) = Im(z) = b \text{ (Partie imaginaire)}
\end{aligned}$$

Proposition 15.
— $z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a \implies \Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
— $z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib \implies \Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

4.2 Vision géométrique des nombres complexes

Définition 30 (Argument d'un nombre complexe)**.** Soit z un nombre complexe, l'argument de z, noté $\arg(z)$ représente l'angle entre la droite des réels et celle issue de l'origine et passant par z.

Proposition 16 (Propriétés des arguments)**.** Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^3, n \in \mathbb{N}$
- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
- $\arg z^n = n \arg z$
- $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$
- $\arg \frac{1}{z} = -\arg z$

Définition 31 (Forme trigonométrique d'un nombre complexe)**.** Soit z un nombre complexe, on peut l'écrire sous sa forme trigonométrique ainsi :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Avec :
- $r = |z|$
- $\theta = \arg(z)$

Proposition 17. Soient $z_1 = r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))$, deux nombres complexes. Nous avons la propriété suivante :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\
&= (r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2) \\
&= (r_1\cos\theta_1 \cdot r_2\cos\theta_2) + (r_1\cos\theta_1 \cdot ir_2\sin\theta_2) + (ir_1\sin\theta_1 \cdot r_2\cos\theta_2) + (ir_1\cos\theta_1 + ir_2\sin\theta_2) \\
&= (r_1\cos\theta_1)(r_2\cos\theta_2) - (r_1\sin\theta_1)(r_2\sin\theta_2) + i((r_1\cos\theta_1)(r_2\sin\theta_2) + (r_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2)) \\
&= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

□

Proposition 18 (Formule de Moivre)**.**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Définition 32 (Forme exponentielle d'un nombre complexe)**.** On peut écrire un nombre complexe sous une forme exponentielle :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Proposition 19 (Identité d'Euler)**.**

$$e^{i\pi} = -1$$

Proposition 20 (Formules d'Euler)**.**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{-i\theta} &= (\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= 2\cos\theta \\ \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} &= \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta}-e^{-i\theta} &= (\cos\theta+i\sin\theta)-(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= 2i\sin\theta \\ \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} &= \sin\theta \end{aligned}$$

□

Remarque 8 (Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique)**.**
Soit $z=a+ib, (a,b)\in\mathbb{R}^2$ un nombre complexe sous sa forme algébrique, on peut passer sous la forme trigonométrique ainsi :

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|} \qquad\qquad \sin\theta=\frac{b}{|z|}$$

Exemple 2. $z=1+i$
On a : $|z|=\sqrt{1^2+1^2}$
On a donc :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\theta=\frac{\pi}{4}$.
Ainsi $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Définition 33 (Racine n-ième d'un nombre complexe)**.** Soit $z\in\mathbb{C}$. On appelle racine n-ième du nombre complexe z tout nombre complexe $\omega\in\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\omega^n=z$$

Proposition 21. Un complexe non nul $z=\rho e^{i\theta}$ $(\rho=|z|)$ admet n racines n-ièmes données par :

$$\omega=\rho^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Démonstration. On cherche à résoudre

$$\omega^n=z,\ (n\in\mathbb{N})$$

Posons

$$\begin{cases}\omega=|\omega|e^{i\theta_1}\\ z=|z|e^{i\theta_2}\end{cases} \iff \begin{cases}\omega^n=|\omega^n|e^{in\theta_1}\\ z=|z|e^{i\theta_2}\end{cases}$$

Par identification :

$$\begin{cases}|\omega|^n=|z|\\ n\theta_1=\theta_2+2k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases} \iff \begin{cases}|\omega|=|z|^{\frac{1}{n}}\\ \theta_1=\frac{\theta_2}{n}+\frac{2k\pi}{n},\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} \rho = |z| \\ \theta_2 = \theta \end{cases}$$

on obtient :

$$\omega = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ (k \in \mathbb{Z})$$

$\square$

Définition 34 (Racine n-ième de l'unité)**.** On appelle racine n-ième de l'unité, une racine n-ième de 1, on notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$$

Proposition 22. Les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme :

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]$$

Démonstration. On cherche à résoudre

$$z^n = 1,\ n \in \mathbb{N}$$

Posons $z = |z|e^{i\theta}$. On obtient donc en elevant à la puissance n

$$\begin{aligned} z^n &= |z^n|e^{in\theta} = 1 \\ \iff |z|^n e^{in\theta} &= e^{i0} \end{aligned}$$

Par identification

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

On obtient alors

$$\theta = \frac{2k\pi}{n},\ (k \in \mathbb{Z})$$

Finalement on obtient bien

$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ (k \in \mathbb{Z})$$

que l'on peut également écrire

$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ (k \in [\![0, n-1]\!])$$

car il y a un cycle. $\square$

4.3 Géométrie des nombres complexes

- $z \mapsto z + a, (a \in \mathbb{C})$: translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a
- $z \mapsto az, (a \in \mathbb{R}^*)$: homothétie de rapport a
- $z \mapsto e^{i\theta}z, (\theta \in \mathbb{R})$: rotation d'angle θ et de centre 0
- $z \mapsto \overline{z}$: réflexion par rapport à l'axe des réels
- $z \mapsto a + e^{i\theta}(z - a)$: rotation d'angle θ de centre a
- $z \mapsto e^{2i\theta} \cdot \overline{z}$: réflexion par rapport à la droite formant un angle θ avec l'axe des réels.

4.3.1 Equation d'une droite

- L'axe des réels : $\overline{z} = z$
- Un axe formant un angle θ avec l'axe des réels : $\overline{e^{-i\theta}z} = e^{-i\theta}z$
- L'asymptote verticale de partie réelle a : $z + \overline{z} = 2a$

Exemple 3. $z \mapsto \frac{1}{z}$
On pose : $\omega = \frac{1}{z}$
On a donc : $z = \frac{1}{\omega}$
$z + \overline{z} = 2 \implies \frac{1}{\omega} + \overline{\frac{1}{\omega}} = 2 \implies \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\overline{\omega}} = 2$
$\omega\overline{\omega}\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\overline{\omega}}\right) = 2\omega\overline{\omega}$
On a donc : $\overline{\omega} + \omega = 2\omega\overline{\omega} \implies 2\omega\overline{\omega} - \omega - \overline{\omega} = 0$
C'est à dire : $\omega\overline{\omega} - \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\overline{\omega} = \left(\omega - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{\omega} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0$
Ce qui équivaut à $\left|\omega - \frac{1}{2}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff \left|\omega - \frac{1}{2}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)$

Exemple 4. $P = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$: le demi-plan de Poincaré
Déterminer l'image de P par la transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

1. $\omega = \frac{z-i}{z+i}$, exprimer z en fonction de ω.

$$\begin{aligned}
&\omega = \frac{z-i}{z+i} \\
\iff &\omega(z+i) = z - i \\
\iff &\omega(z+i) + i = z \\
\iff &\omega z + \omega i + i = z \\
\iff &\omega z - z = -\omega i - i \\
\iff &z(\omega + 1) = -\omega i - i \\
\iff &z = \frac{-\omega i - i}{\omega + 1} \\
\iff &z = \frac{-i(\omega + 1)}{\omega + 1}
\end{aligned}$$

2. $z \in P \iff \Im(z) > 0$
   $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, on a : $z - \overline{z} = 2iy$
   Si on a $\Im(z) = y > 0 \iff \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) > 0$
   A la fin on obtient : $\omega\overline{\omega} < 1 \implies |\omega| < 1$

Chapitre 5

Arithmétique

5.1 Divisibilité

Définition 35. Soient $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$. On dit que :

- a est un multiple de $b \iff \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq$
- b est un diviseur de $a \iff \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq$
- b divise $a \iff b \mid a$

Théorème 1 (Division euclidienne)**.** Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Alors

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2, a = bq + r, \ (0 \leqslant r < |b|)$$

Démonstration. Soit $b > 0$, $\mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([kb, kb + |b|[\cap \mathbb{Z})$ On peut écrire la réunion disjointe $\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}}$
Alors

$$\begin{aligned} \exists! q \in \mathbb{Z}, \ a \in [qb, qb + |b|[\iff qb \leqslant a < qb + |b| \\ 0 \leqslant r = a - qb < |b| \end{aligned}$$

$$\bigsqcup_{\lambda \in A} A_\lambda = \bigcup_{k \in A} A_\lambda$$

$$\begin{aligned} A_\lambda \cap A_\mu = \phi, \ \lambda \neq \\ [2k, 2k + 2[, \ b = 2, \ k = 1, 2 \\ [2, 4[\cap \mathbb{Z} = \{2, 3\} \\ [4, b[\cap \mathbb{Z} = \{4, 5\} \end{aligned}$$

□

5.2 PGCD et PPCM

Définition 36 (PPCM et PGCD)**.** Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tel que $ab \neq 0$

$$\mathcal{M} \colon = \{m \in \mathbb{Z} \mid a \mid m \text{ et } b \mid m\} \Rightarrow \mathcal{M} \neq \phi \text{ car } ab \in \mathcal{M}$$

$$\mathcal{M} \cap \mathbb{N}^* \leftarrow \text{ il y a le plus petit commun multiple (PPCM)}$$

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z} \mid d \mid a \text{ et } d \mid b\} \Rightarrow \mathcal{D} \neq \emptyset \text{ car } 1 \in \mathcal{D}$$

On a : $d \mid a, b \implies |d| \leqslant m \min(|a|, |b|)$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{D}) < \infty$ Il y a le plus grand élément $\leftarrow$ le plus grand commun diviseur (PGCD)

Théorème 2 (PPCM)**.** Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ et $m \in \mathbb{Z},\ a \mid m$ et $b \mid m$. Alors $\mathrm{ppcm}(a,b) \mid m$

Démonstration. Posons $\ell = \mathrm{ppcm}(a,b)$

$$\begin{aligned}
&\exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ m = q\ell + r,\ 0 \leqslant r < \ell \\
&\qquad\qquad \iff r = m - q\ell,\ m \text{ et } \ell \text{ sont multiples de } a \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad r \text{ est aussi un multiple de } a \text{ et } b
\end{aligned}$$

Par la minimalité de ℓ, $r = 0 \implies m = q\ell$ □

Théorème 3 (PGCD)**.** Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ et $d \in \mathbb{Z},\ d \mid a$ et $d \mid b$. Alors $d \mid \mathrm{pgcd}(a,b)$

Démonstration. Posons $m = \mathrm{pgcd}(a,b)$. Il suffit de montrer que

$$\mathrm{pgcd}(m,d) = m$$

Soit $\ell = \mathrm{ppcm}(m,d)$, $\ell \geqslant m$, a et b sont multiples de m et d
D'après le théorème précédent :

$$\ell \mid a \text{ et } \ell \mid b,\ l \leqslant m$$

Sachant qu'on a $\ell \geqslant m$ et $\ell \leqslant m$, on en conclut que $\ell = m$ □

Théorème 4. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \implies ab = \mathrm{pgcd}(a,b)\mathrm{ppcm}(a,b)$

Définition 37 (Nombres premiers entre eux)**.** Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$

$$a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \iff \mathrm{pgcd}(a,b) = 1$$

5.3 Algorithme d'Euclide

Proposition 23 (Algorithme d'Euclide)**.** Soient $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$|a| > |b| \implies \exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2, a = bq + r, 0 \leqslant r < |b|$$
$$\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,a) = \mathrm{pgcd}(b, a - qb) = \mathrm{pgcd}(b,r)$$

$$\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$$

Si $r = 0 \implies a = qb,\ \mathrm{pgcd}(a,b) = b$