

# Analyse 1 pour Informaticiens, automne 2022

Année universitaire 2022-2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>3</b>
1.1	Les ensembles de nombres . . . . .	3
1.2	Opérations et relation d'ordre dans les réels . . . . .	4
1.3	Valeur absolue . . . . .	5
1.4	Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . . .	5
1.5	Borne inférieure, borne supérieure . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Fonctions réelles</b>	<b>7</b>
2.1	Fonctions . . . . .	7
2.1.1	Produit cartésien et graphe . . . . .	7
2.2	Fonctions injectives, surjectives et bijectives . . . . .	8
2.3	Composition . . . . .	9
2.4	Image directe, image réciproque . . . . .	10
2.5	Opérations sur les fonctions . . . . .	11
2.6	Propriétés sur les fonctions . . . . .	11
2.7	Propriétés géométriques du graphe . . . . .	13
2.8	Dérivation . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>16</b>
3.1	Fonctions polynomiales . . . . .	16
3.2	Fonction partie entière $E$ . . . . .	17
3.3	Fonctions trigonométriques . . . . .	17
3.4	Fonctions trigonométriques réciproques . . . . .	19
3.5	Fonctions exponentielle et logarithme . . . . .	21
3.6	Fonctions hyperboliques . . . . .	23
3.7	Fonctions puissance . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Suites réelles</b>	<b>27</b>
4.1	Définitions . . . . .	27
4.1.1	Suites classiques . . . . .	28
4.2	Convergence d'une suite . . . . .	29
4.2.1	Opérations sur les suites convergentes . . . . .	31
4.2.2	Suites et inégalités . . . . .	32
4.2.3	Convergence et monotonie . . . . .	34
4.3	Suites extraites . . . . .	36
4.3.1	Limites infinies . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Continuité et limites de fonctions</b>	<b>40</b>
5.1	Limites . . . . .	40
5.2	Continuité . . . . .	42
5.3	Limites, continuité et monotonie . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>47</b>
6.1	Correction du CC1 Blanc . . . . .	47
6.2	Correction CC Blanc 2 . . . . .	51

Ces notes reprennent le cours de "Analyse 1 pour informaticiens" que j'ai donné à l'automne 2022.

Je propose aux étudiants motivés de taper eux-même le cours en LaTeX à partir du cours écrit au tableau. On peut retrouver les notes manuscrites scannées sur la page web du cours.

Le lien permettant de modifier ce document a été envoyé par mail en début de semestre. N'hésitez pas à le demander si vous ne l'avez pas.

Si tu as une question ou un doute à propos de ce document, que ce soit lié à LaTeX ou aux maths, n'hésitez pas à m'en faire part par mail ou sur discord afin que je t'aide.

Étudiants ayant participé à la rédaction de ce texte (rajoute ton nom si tu édites le document)

— Raphaël Heng [2]

— Racem Grab

— Lenny Chanrion

—

# Chapitre 1

## Nombres réels

### 1.1 Les ensembles de nombres

Le premier ensemble de nombres est l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

de tous les *entiers naturels*. Une variante est  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ , l'ensemble des entiers naturels non nuls. L'ensemble  $\mathbb{N}^*$  correspondant à l'ensemble  $\mathbb{N}$  auquel on a enlevé 0.

Le second ensemble de nombres est l'ensemble

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

de tous les *entiers relatifs*. On définit de même  $\mathbb{Z}^*$  comme l'ensemble  $\mathbb{Z}$  auquel on a enlevé (privé de) 0.

L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est plus gros que  $\mathbb{N}$ . Ceci s'écrit en formule comme

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Le symbole  $\subset$  est le symbole d'*inclusion*, qui se lit «est inclus dans». Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles, on écrit  $A \subset B$  lorsque tout élément de  $A$  est un élément de  $B$ . On a  $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{Z}$  n'est pas inclus dans  $\mathbb{N}$ , puisque par exemple le nombre  $-1$  est dans  $\mathbb{Z}$  mais pas dans  $\mathbb{N}$ .

Il faut faire attention à ne pas confondre le symbole  $\subset$  avec le symbole  $\in$  qui lui ressemble. Le symbole  $\in$  se lit «appartient à». Par exemple, la formule « $n \in \mathbb{N}$ » se lit « $n$  appartient à  $\mathbb{N}$ », c'est-à-dire que  $n$  est l'un des entiers qui sont dans la liste  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

On a ainsi <sup>1</sup>

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$$

$$3 \in \mathbb{N}, \quad 3 \in \mathbb{Z}, \quad -4 \in \mathbb{Z}, \quad -4 \notin \mathbb{N}.$$

On continue notre visite du zoo des ensembles de nombres avec l'ensemble  $\mathbb{Q}$  de tous les *nombres rationnels*, c'est-à-dire de toutes les *fractions*. Ainsi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \text{quotients de la forme } \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

(On a pris soin de préciser  $b \in \mathbb{Z}^*$  et non  $b \in \mathbb{Z}$  afin de ne pas diviser par 0).

*Remarque 1.1.1.* On aurait pu aussi définir  $\mathbb{Q}$  en demandant  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$ . Vois-tu pourquoi ?

Cette définition de  $\mathbb{Q}$  pose une difficulté : en effet, un même nombre rationnel peut être représenté par plusieurs fractions. Par exemple, on a  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ . On peut décrire précisément quand cela arrive. En effet, si  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$ ,  $a' \in \mathbb{Z}$ ,  $b' \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ si et seulement si } ab' = a'b.$$

Les mathématiciens utilisent souvent l'expression «si et seulement si», que tu peux écrire «ssi». Il faut bien comprendre son sens. Quand on écrit

$$P \text{ si et seulement si } Q,$$

---

1. A l'inverse, une formule comme  $5 \subset \mathbb{N}$  n'est ni vraie ni fausse, elle n'a *pas de sens* - on l'écrit en rouge pour insister. Un correcteur lisant cette formule va entrer dans le mode **syntax error**, ce qui est en général mauvais signe pour l'étudiant dont c'est la copie

cela veut dire deux choses à la fois. Tout d'abord,

si  $P$  est vraie, alors  $Q$  est vraie,

mais également

si  $Q$  est vraie, alors  $P$  est vraie.

Il y a un ensemble de nombres qu'il ne faut pas confondre avec  $\mathbb{Q}$ , c'est l'ensemble  $\mathbb{D}$  de tous les nombres décimaux. Un nombre *décimal* est un nombre de la forme  $\frac{a}{10^n}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Un nombre décimal s'écrit avec une suite finie de chiffres à droite de la virgule.

Par exemple le nombre 46,253 est un nombre décimal car il peut s'écrire comme  $\frac{46253}{10^3}$ . Il est clair que tout nombre décimal est rationnel, c'est à dire que  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ . Cette inclusion est *stricte*, c'est-à-dire que  $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$ . En effet, il existe des rationnels non décimaux, comme la fraction

$$\frac{1}{3} = 0, \underbrace{333333333333333333 \dots}_{\text{suite infinie de 3}}$$

Pour les mathématiciens, l'ensemble  $\mathbb{Q}$  est plus important que l'ensemble  $\mathbb{D}$ ; en effet ce dernier fait jouer un rôle privilégié au nombre 10 sans justification autre que le fait que *Homo Sapiens* possède 10 doigts.

On arrive maintenant à l'ensemble qui donne le nom à ce chapitre, l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Un nombre réel est un nombre comme par exemple

$$-75,2828746 \dots$$

qui s'écrit en mettant bout à bout

- un signe + ou −, que l'on sous-entend généralement lorsqu'il s'agit de +,
- un nombre entier,
- une virgule,
- une suite finie ou infinie de chiffres après la virgule.

Comme pour les rationnels, une difficulté vient du fait qu'un même nombre réel peut avoir plusieurs telles écritures. On a ainsi

$$+0 = -0 = 3.5 = 3.50000$$

$$1 = 0, \underbrace{99999999999999999999999999999999 \dots}_{\text{suite infinie de 9}}$$

On n'insistera pas sur ces difficultés, qui seraient très problématiques si on voulait donner des *preuves* des propositions de la section suivante. Tu peux aller lire l'article [https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction\\_des\\_nombres\\_r%C3%A9els](https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_r%C3%A9els) pour découvrir des façons plus efficaces que celle décrite ci-dessus d'introduire l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Opérations et relation d'ordre dans les réels

À l'école primaire, on apprend à ajouter, multiplier et comparer les entiers naturels. Ceci s'étend aux réels.

**Proposition 1.2.1** (Addition et multiplication sur  $\mathbb{R}$ ). *On peut définir sur  $\mathbb{R}$  une addition (notée +) et une multiplication (notée  $\times$  ou  $\cdot$ ) qui prolonge l'addition et la multiplication de  $\mathbb{N}$  et vérifie les règles suivantes.*

1. (Commutativité) pour tous  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$a + b = b + a \text{ et } a \cdot b = b \cdot a.$$

2. (Associativité) pour tous  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ et } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. (Distributivité) pour tous  $a, b, c$ , on a

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

4. (Éléments neutres ou absorbants) pour tout  $a$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0.$$

Démontrer la proposition serait fastidieux : il faudrait décrire un algorithme qui explique comment ajouter et multiplier deux nombres réels, puis vérifier toutes ces propriétés.

**Proposition 1.2.2** (Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ ). On peut définir sur  $\mathbb{R}$  une relation d'ordre, notée  $\leq$ , qui prolonge l'ordre de  $\mathbb{N}$  et vérifie les règles suivantes.

1. (Réflexivité) pour tout  $a$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$a \leq a.$$

2. (Antisymétrie) pour tous  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a, \text{ alors } a = b.$$

3. (Transitivité) pour tous  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c, \text{ alors } a \leq c.$$

4. (Ordre total) pour tous  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

5. (Compatibilité avec l'addition) pour tous  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } a + c \leq b + c.$$

6. (Compatibilité avec la multiplication par un réel **positif**) pour tous  $a, b, c$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } \boxed{c \geq 0}, \text{ alors } a \cdot c \leq b \cdot c.$$

## 1.3 Valeur absolue

**Définition 1.3.1** (Valeur absolue). Soit  $x \in \mathbb{R}$ , la valeur absolue, notée  $|x|$  est définie ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Proposition 1.3.1.** La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes, pour  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  :

1.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  : (Inégalité triangulaire)
2.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3.  $|a - b| \geq |a| - |b|$  : (Inégalité triangulaire inverse)
4.  $|a| = \sqrt{a^2}$

## 1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle est une partie de  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire dans  $\mathbb{R}$ ) sans "trou"

**Définition 1.4.1** (Intervalle). Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est un intervalle

$$\text{Si } \forall (x, y) \in I^2, \text{ alors } z \in I \text{ et } z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y$$

**Proposition 1.4.1** (Intervalles de  $\mathbb{R}$ ). Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont de type suivant :

—  $\mathbb{R}$

2. pour les mathématiciens, le «ou» n'est pas exclusif, c'est-à-dire que « $P$  ou  $Q$ » veut dire : soit  $P$ , soit  $Q$ , soit à la fois  $P$  et  $Q$ . Quand on dit «ou» dans la vie courante, c'est souvent implicitement exclusif. Ainsi un mathématicien pourra répondre «oui!» à des questions telles que «Est-ce une fille ou un garçon?», «Fromage ou dessert?», «Vous montez ou vous descendez?»

- $[a, +\infty[$  ou  $]a, +\infty[$
- $[a, b]$  ou  $[a, b[$  ou  $]a, b[$  ou  $]a, b]$  ( $a, b) \in \mathbb{R}$  avec  $a < b \in \mathbb{R}$
- $] - \infty, a]$  ou  $] - \infty, a[$  avec  $a \in \mathbb{R}$
- $\emptyset$ , l'ensemble vide
- $\{a\}$  où  $a \in \mathbb{R}$  (**un singleton**)

On a

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x < b\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq a\}$$

## 1.5 Borne inférieure, borne supérieure

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{R}$ , un élément de  $\mathbb{R}$

On dit que  $m$  est un majorant de  $A$  si

$$\forall x \in A, x \leq m$$

On dit que  $m$  est un minorant de  $A$  si

$$\forall x \in A, x \geq m$$

On dit qu'une partie de  $A \subset \mathbb{R}$  est **majorée** si elle admet un **majorant**

On dit qu'une partie de  $A \subset \mathbb{R}$  est **minorée** si elle admet un **minorant**

On dit qu'une partie de  $A \subset \mathbb{R}$  est **bornée** si elle est **majorée et minorée**

**Théorème 1.5.1** (Théorème de la borne supérieure). *Toute partie  $A \subset \mathbb{R}$  non-vide et majorée admet un plus petit majorant appelé la borne supérieure de  $A$ , notée :  $\sup(A)$*

**Théorème 1.5.2** (Théorème de la borne inférieure). *Toute partie  $A \subset \mathbb{R}$  non-vide et minorée admet un plus grand minorant appelé la borne inférieure de  $A$ , notée :  $\inf(A)$*

**Proposition 1.5.1.** *Par convention :*

- Si  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non-vide mais pas majorée :  $\sup(A) = +\infty$ .
- Si  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non-vide mais pas minorée :  $\inf(A) = -\infty$ .

*Remarque 1.5.1.* Il n'y a pas de théorème sur les bornes dans  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 1.5.2** (Caractérisation de la borne supérieure). *Soit  $A \subset \mathbb{R}$  non-vide et  $m$  un majorant de  $A$ .*

$$m = \sup(A) \iff \forall \varepsilon > 0, ]m - \varepsilon, m] \cap A \neq \emptyset$$

$\varepsilon$  : Lettre grecque , "Epsilon" utilisée pour désigner un réel très petit.

$\cap$  : désigne qu'il y a une intersection entre deux parties, (éléments en communs)

*Exemple 1.5.1.* Si  $x \in \mathbb{R}$

- $A = [0, 2[$   $x \in A$  ssi  $x \geq 0$  et  $x < 2$
- $B = ]1, 3]$   $x \in B$  ssi  $x > 1$  et  $x \leq 3$
- $A \cap B$  ssi ( $x \geq 0$ ) et  $x < 2$  ici et  $1 < x$  (et  $x \leq 3$ ) donc  $A \cap B = ]1, 2[$

# Chapitre 2

## Fonctions réelles

### 2.1 Fonctions

**Définition 2.1.1** (Fonction). Une fonction est la donnée de :

- Un ensemble de départ  $E$
- Un ensemble d'arrivée  $F$
- Une flèche :  $f : E \rightarrow F$  à tout élément  $x \in E$  associe un élément  $f(x) \in F$

*Exemple 2.1.1.*

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x + 3 \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$|\cdot| : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

*Remarque 2.1.1.*  $f_2 \neq f_3$  car leurs ensembles d'arrivée sont différents.

*Remarque 2.1.2* (Vocabulaire). Si  $f : E \rightarrow F$  est une fonction, on appelle parfois l'ensemble de départ  $E$ , le domaine de  $f$  et l'ensemble d'arrivée  $F$ , le codomaine de  $f$ .

*Remarque 2.1.3.* Lorsque que  $E = F = \mathbb{R}$  ou une partie de  $\mathbb{R}$ , on parle de fonction réelles.

#### 2.1.1 Produit cartésien et graphe

**Définition 2.1.2** (Produit cartésien). Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles, on appelle  $E \times F$  leur produit cartésien.

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$$

*Remarque 2.1.4.* On écrit  $E^2$  plutôt que  $E \times E$



**Définition 2.1.3** (Graphe d'une fonction). Si  $f : E \rightarrow F$  est une fonction, son graphe est défini comme

$$Gr(f) = \{(x, f(x)), x \in E\} \subset E \times F$$

*Remarque 2.1.5.* Le graphe d'une fonction réelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On peut le dessiner.

*Remarque 2.1.6.* Une partie  $A \subset \mathbb{R}^2$  est le graphe d'une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si et seulement si toute droite verticale intersecte A en un unique point.

## 2.2 Fonctions injectives, surjectives et bijectives

**Définition 2.2.1** (Image et antécédent). Soient E et F des parties de  $\mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow F$  une fonction. Si  $x \in E$  et  $y \in F$  vérifient  $y = f(x)$  on dit que  $y$  est l'**image** de  $x$  par  $f$  et que  $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$ .

*Remarque 2.2.1.* Les articles "l'" et "un" sont importants. Chaque image peut avoir plusieurs antécédents mais un antécédent a au plus une image.

*Exemple 2.2.1.*

Pour la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$

$y = 4$  a deux antécédents :  $x = 2$  ou  $x = -2$  mais  $y = -4$  n'a pas d'antécédent.

**Définition 2.2.2** (Surjectivité). On dit qu'une fonction est **surjective** ou une **surjection** si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par  $f$ .

$$\{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\} \iff f : E \rightarrow F \text{ est surjective}$$

*Exemple 2.2.2.*

$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ , n'est pas surjective, 0 n'a pas d'antécédent.

$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ , est surjective, un antécédent de  $y \in \mathbb{R}^*$  est  $\frac{1}{y}$

*Remarque 2.2.2.*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  est surjective  $\iff$  toute ligne horizontale rencontre le graphe  $Gr(f)$

**Définition 2.2.3** (Injectivité). On dit que  $f : E \rightarrow F$  est **injective** (**une injection**) si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par  $f$ . Ceci revient à dire :

$$f \text{ injective} \iff \{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\}$$

Ou encore :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

*Remarque 2.2.3.* Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est injective si et seulement si toute ligne horizontale rencontre  $Gr(f)$  en 0 ou 1 point.

**Définition 2.2.4** (Bijectivité). Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est **bijective** (**une bijection**) si elle est **injective** et **surjective**.

Cela revient à dire que tout élément de F admet exactement 1 antécédent positif.

$$f \text{ bijective} \iff \{\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)\}$$

**Définition 2.2.5** (Bijection réciproque). Lorsque  $f : E \rightarrow F$  est une bijection. On peut définir :

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \rightarrow E \\ y & \mapsto \text{l'unique antécédent de } y \end{cases}$$

La fonction  $f^{-1}$  est une bijection, que l'on appelle bijection réciproque de  $f$ .

*Exemple 2.2.3.*

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$  une fonction bijective.

Sa fonction réciproque est la fonction  $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

*Remarque 2.2.4.* Ne pas confondre réciproque et inverse, la fonction inverse de  $f$  n'est pas  $f^{-1}$  mais  $\frac{1}{f}$

**Proposition 2.2.1.** Si  $f : E \rightarrow F$  est bijective,

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) &= x \\ \forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) &= y \end{aligned}$$

## 2.3 Composition

**Définition 2.3.1** (Composition de fonctions). Soient  $E, F, G$  des parties de  $\mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . On définit la composée de  $g$  par  $f$ , notée  $g \circ f$  ("g rond f") comme :

$$g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow G \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

*Remarque 2.3.1.* La composée de  $g \circ f$  n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de  $f$  est inclus dans l'ensemble de départ de  $g$ .

**Définition 2.3.2** (Fonction identité). On appelle fonction identité de  $E$

$$id_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x \end{cases}$$

**Proposition 2.3.1.** Si  $f : E \rightarrow F$  est une bijection :

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_E \\ f \circ f^{-1} &= id_F \end{aligned}$$

*Exemple 2.3.1.*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + 2 \end{cases}$$

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x) + 2 \end{cases}$$

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x + 2) \end{cases}$$

$$f \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(\sin(x)) \end{cases}$$

$$g \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x + 2) + 2 = x + 4 \end{cases}$$

## 2.4 Image directe, image réciproque

**Définition 2.4.1** (Image directe). Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction et  $A$  une partie de  $E$ . On définit l'image directe de  $A$  par  $f$  comme :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}, \quad f(A) \subset F$$

**Définition 2.4.2** (Image réciproque). Si  $B$  est une partie de  $F$ . On décrit l'image réciproque de  $B$  par  $f$  comme :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}, \quad f^{-1} \subset E$$

*Exemple 2.4.1.*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

- $f([1; 2]) = [1; 4]$
- $f^{-1}([-1; 2]) = [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$
- $f(]-2; 1]) = [0; 4[$
- $f^{-1}(]-2; 1]) = ]-1; 1[$

*Remarque 2.4.1.* L'image réciproque  $f^{-1}(B)$  est toujours définie même si  $f$  n'est pas supposé bijective.

*Remarque 2.4.2.* Si  $f$  est bijective, l'ensemble  $f^{-1}(B)$  est aussi l'image directe de  $B$  par  $f^{-1}$

**Proposition 2.4.1** (Propriétés sur les images directes et réciproques). Soient  $f : E \rightarrow F$  une fonction,  $A_1 \subset E, A_2 \subset E$  et  $B_1 \subset F, B_2 \subset F$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

*Remarque 2.4.3.* La proposition  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$  est fausse.  
Contre-exemple :  $A_1 = [1; 2], A_2 = ]-2; 1[$  et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

- $f(A_1) = [1; 4], f(A_2) = [0; 4[$
- $f(A_1) \cap f(A_2) = [1; 4[$
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$
- $\emptyset \neq [1; 4[$

## 2.5 Opérations sur les fonctions

Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions

**Proposition 2.5.1** (Somme de fonctions).

$$f + g : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$$

**Proposition 2.5.2** (Produit de fonctions).

$$fg : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x)g(x) \end{cases}$$

**Proposition 2.5.3** (Quotient de fonctions). Si  $g(x)$  ne s'annule pas sur  $A \iff g(A) \subset \mathbb{R}^*$

$$\frac{f}{g} : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

## 2.6 Propriétés sur les fonctions

**Définition 2.6.1** (Fonction majorée). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est majorée sur  $I$  si l'ensemble  $f(I)$  est majoré.

$$f \text{ est majorée sur } I \iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq m$$

**Définition 2.6.2** (Fonction minorée). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est minorée sur  $I$  si l'ensemble  $f(I)$  est minoré.

$$f \text{ est minorée sur } I \iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$$

**Définition 2.6.3** (Fonction bornée). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est bornée sur  $I$  si l'ensemble  $f(I)$  est borné.

$$f \text{ est bornée sur } I \iff \exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, m_1 \leq f(x) \leq m_2$$

**Définition 2.6.4** (Fonction croissante). Soit  $f$  une fonction, on dit que  $f$  est croissante si

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

**Définition 2.6.5** (Fonction décroissante). Soit  $f$  une fonction, on dit que  $f$  est décroissante si

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

**Définition 2.6.6** (Fonction monotone). On dit qu'une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante.

**Définition 2.6.7** (Fonction strictement croissante). Soit  $f$  une fonction, on dit que  $f$  est strictement croissante si

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y)$$

**Définition 2.6.8** (Fonction strictement décroissante). Soit  $f$  une fonction, on dit que  $f$  est strictement décroissante si

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y)$$

**Définition 2.6.9** (Fonction strictement monotone). On dit qu'une fonction est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

*Remarque 2.6.1.*

- Une fonction est croissante si toute droite passant par deux points de son graphe a un coefficient directeur positif.
- Une fonction est décroissante si toute droite passant par deux points de son graphe a un coefficient directeur négatif.

Supposons qu'un intervalle  $I$  est symétrique, c'est-à-dire que :

$$x \in I \iff -x \in I$$

**Définition 2.6.10** (Fonction paire). On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est paire si :

$$\forall x \in I, f(x) = f(-x)$$

**Définition 2.6.11** (Fonction impaire). On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est impaire si :

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$$

*Remarque 2.6.2.* Si  $f$  est impaire alors  $f(0) = 0$

**Définition 2.6.12** (Fonction T-périodique). Soit  $T > 0$ . Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est T-périodique si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x + nT) = f(x)$$

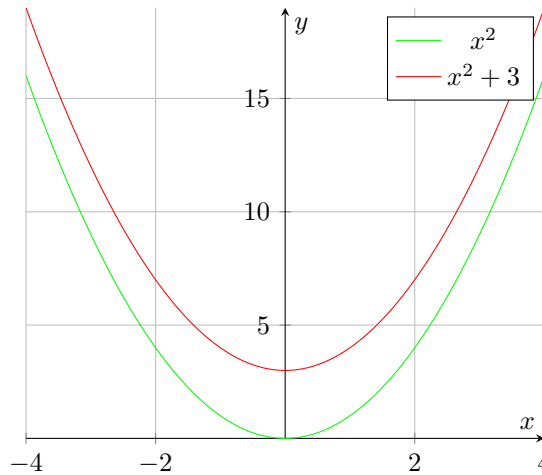
## 2.7 Propriétés géométriques du graphe

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$- f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) + a, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$Gr(f_1)$  se déduit de  $Gr(f)$  par translation de vecteur  $a\vec{j}$ , ( $j$  est le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées).

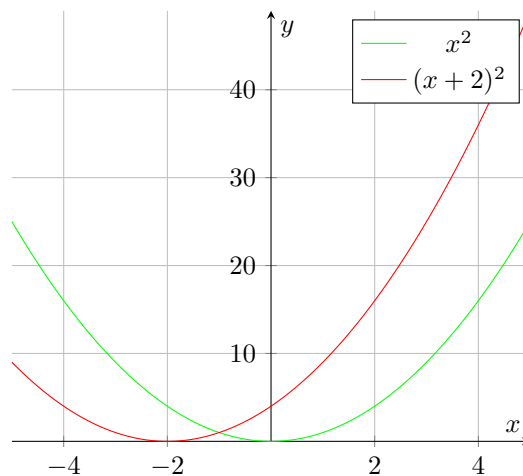
$$\begin{aligned} (x, y) \in Gr(f_1) &\iff y = f_1(x) \\ &\iff y = f(x) + a \\ &\iff y - a = f(x) \\ &\iff (x, y - a) \in Gr(f) \end{aligned}$$



$$- f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x + a), \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$Gr(f_2)$  se déduit de  $Gr(f)$  par translation de vecteur  $-a\vec{i}$ , ( $i$  est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses).

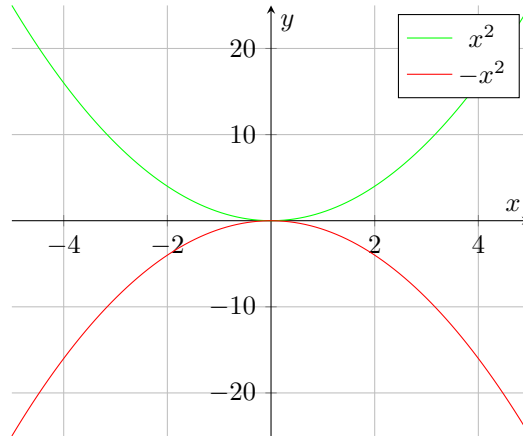
$$\begin{aligned} (x, y) \in Gr(f_2) &\iff y = f_2(x) \\ &\iff y = f(x + a) \\ &\iff (x + a, y) \in Gr(f) \end{aligned}$$



$$- f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto -f(x) \end{cases}$$

$Gr(f_3)$  se déduit de  $Gr(f)$  par symétrie axiale par rapport à l'axe horizontal.

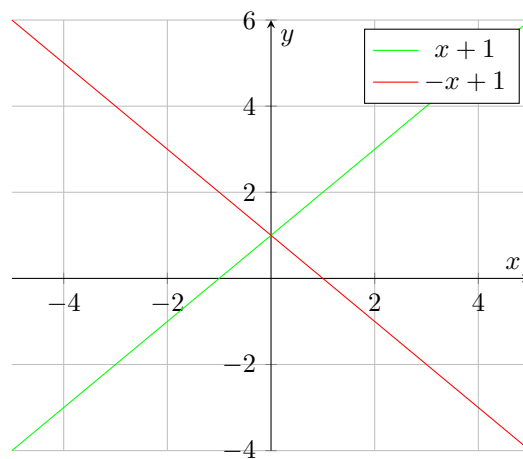
$$\begin{aligned}(x, y) \in Gr(f_3) &\iff y = f_3(x) \\ &\iff y = -f(x) \\ &\iff (x, -y) \in Gr(f)\end{aligned}$$



$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(-x) \end{cases}$$

$Gr(f_4)$  se déduit de  $Gr(f)$  par symétrie axiale par rapport à l'axe vertical.

$$\begin{aligned}(x, y) \in Gr(f_4) &\iff y = f_4(x) \\ &\iff y = f(-x) \\ &\iff (-x, y) \in Gr(f)\end{aligned}$$



- $f$  est paire  $\iff Gr(f)$  subit une symétrie axiale par rapport à  $(O_y)$
- $f$  est impaire  $\iff Gr(f)$  subit une symétrie centrale par rapport à l'origine du repère

## 2.8 Dérivation

**Définition 2.8.1** (Dérivabilité). Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est **dérivable** si  $\forall x \in I$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe}$$

On la note  $f'(x)$  et  $f'$  s'appelle la dérivée de  $f$ .  
Graphiquement  $f'(x)$  est la pente de la tangente en  $(x, f(x))$  au graphe de  $f$ .

**Proposition 2.8.1** (Propriété fondamentale). *Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable*

- $f$  est croissante  $\iff f' \geq 0$
- $f$  est décroissante  $\iff f' \leq 0$
- Si  $f' > 0$  alors  $f$  est strictement croissante
- Si  $f' < 0$  alors  $f$  est strictement décroissante

**Proposition 2.8.2** (Formules de dérivation). *Soient  $I$  un intervalle et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables et  $t \in \mathbb{R}$*

*On a les formules suivantes :*

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(tf)' = tf'$

**Proposition 2.8.3** (Dérivation d'une fonction composée). *Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles Si  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$*

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

*Autrement dit :*

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$$



# Fonctions usuelles

## 3.1 Fonctions polynomiales

**Définition 3.1.1** (Fonction polynomiale). Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels.  
La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \end{cases}$$

est une fonction polynomiale de degré  $n$ .  
Cette fonction est dérivable.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

*Remarque 3.1.1.* La somme, le produit et la composition de fonctions polynomiales sont des fonctions polynomiales.

**Proposition 3.1.1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré  $n$   
—  $n = 0$ , on obtient les fonctions constantes, pour  $a_0 \in \mathbb{R}$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto a_0 \end{cases}$$

—  $n = 1$ , on obtient les fonctions affines, pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + b \end{cases}$$

—  $n = 2$ , on obtient les fonctions trinômes, pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax^2 + bx + c \end{cases}$$

*Remarque 3.1.2.*

- Les fonctions constantes sont les seules fonctions à la fois croissantes et décroissantes.
- Une fonction dérivable de dérivée nulle est constante.
- Une fonction dérivable de dérivée constante est affine.

### 3.2 Fonction partie entière $E$

**Définition 3.2.1** (Fonction partie entière  $E$ ).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! E(x) \in \mathbb{Z}, E(x) \leq x < E(x+1)$$

$E(x)$  est la partie entière de  $x$

$$E : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ x & \mapsto E(x) \end{cases}$$

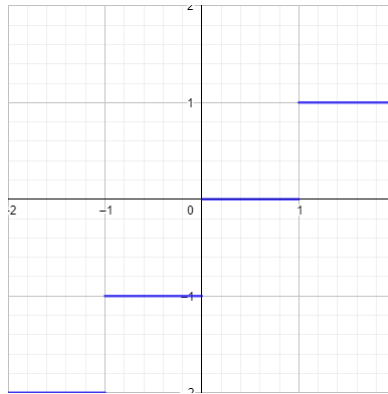


FIGURE 3.1 – Partie entière

*Remarque 3.2.1.*

- $E$  est croissante.
- $E$  est non-continue en tout point de  $\mathbb{Z}$ .
- $x \mapsto x - E(x)$  est 1-périodique.
- $E^{-1}(\{0\}) = [0, 1[$ .

### 3.3 Fonctions trigonométriques

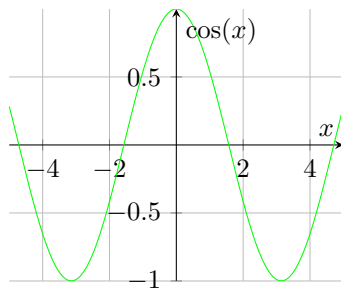
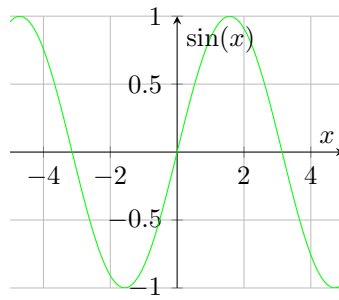
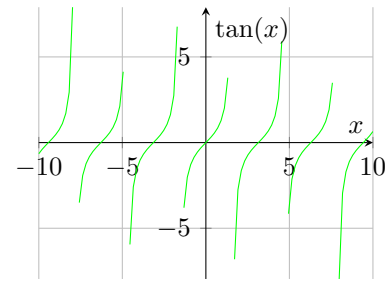
Fonction	$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos x \end{cases}$	$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin x \end{cases}$	$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$
<b>Parité</b>	Paire	Impaire	Impaire
<b>Périodicité</b>	$2\pi$ -périodique	$2\pi$ -périodique	$\pi$ -périodique
<b>Dérivée</b>	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
<b>Primitive</b>	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$x \mapsto -\ln  \cos x $

TABLE 3.1 – Fonctions trigonométriques

*Remarque 3.3.1.* On peut éventuellement considérer l'ensemble d'arrivée de  $\sin$  et  $\cos$  comme étant  $[-1, 1]$

**Proposition 3.3.1** (Formules trigonométriques).  $\forall x \in \mathbb{R}$  (il est possible de retrouver ces formules géométriquement)

- $\cos x = \cos(-x)$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

(a) Fonction  $\cos x$ (b) Fonction  $\sin x$ (c) Fonction  $\tan x$ 

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

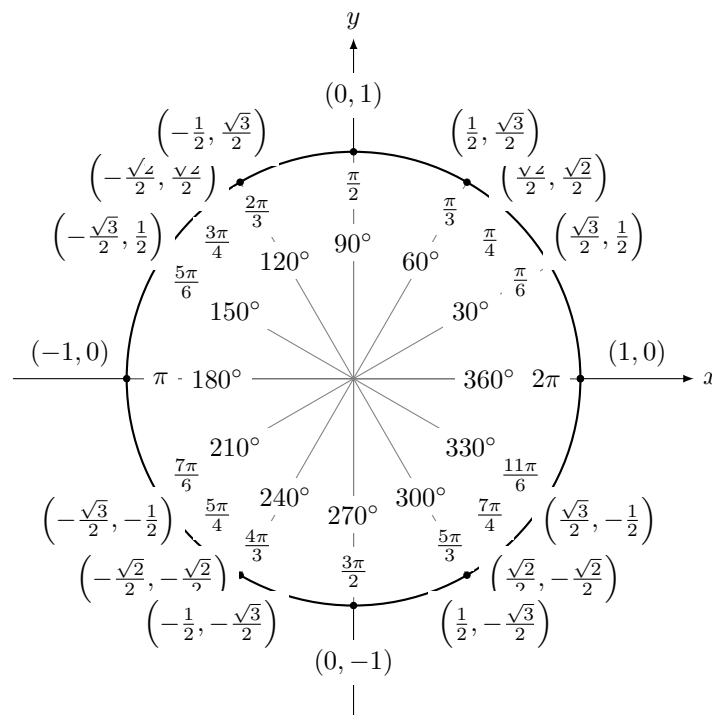


FIGURE 3.3 – Cercle trigonométrique : [1]

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^2 x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

TABLE 3.2 – Valeurs remarquables

**Proposition 3.3.2** (Formules d'addition).  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

*Remarque 3.3.2.* En particulier pour  $a = b$

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$

On en déduit :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

*Remarque 3.3.3* (Mnémotechnique).

"cosinus est une fonction **raciste** et **menteuse**"

- **Menteuse** : Elle change le signe
- **Raciste** : Elle ne mélange pas sinus et cosinus

### 3.4 Fonctions trigonométriques réciproques

*Remarque 3.4.1.* On cherche à changer l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre les fonctions trigonométriques bijectives.

**Proposition 3.4.1.** *Les fonctions :*

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$
- $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
- $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$

*sont bijectives.*

**Proposition 3.4.2.** *On peut définir leurs bijections réciproques :*

- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**Proposition 3.4.3.** *On a alors :*

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \arctan(\tan x) = x$

**Proposition 3.4.4.**

$$\forall y \in [-1, 1] \begin{cases} \sin(\arcsin y) = y \\ \cos(\arccos y) = y \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \tan(\arctan y) = y$$

*Remarque 3.4.2.* Les graphes des fonctions réciproques s'obtiennent par réflexion par rapport à la droite  $y = x$

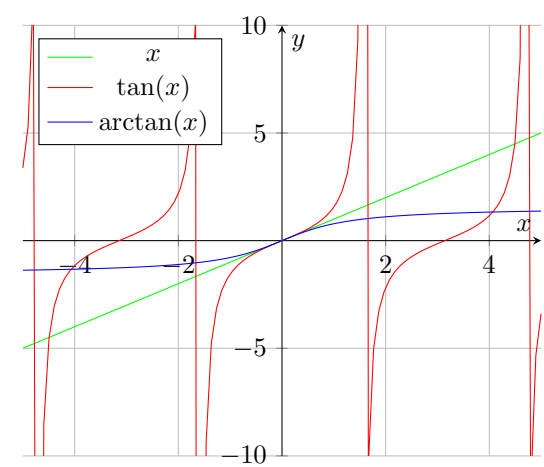
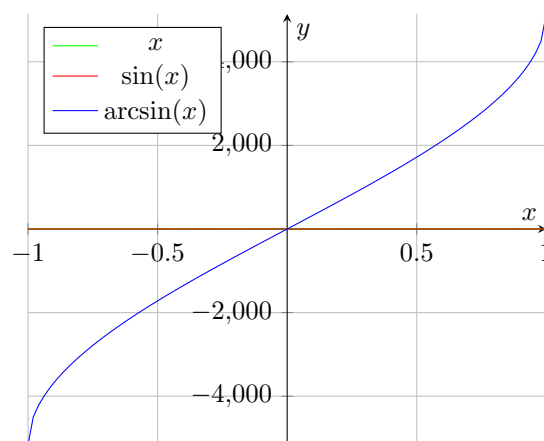
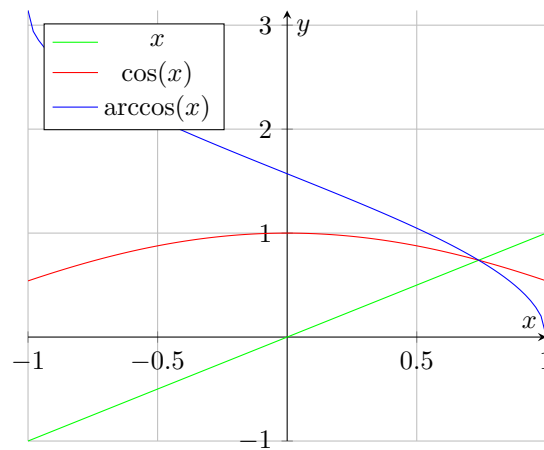
**Proposition 3.4.5.** *Valeurs remarquables*

- $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(0) = 0$
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$
- $\arccos(1) = 0$
- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
- $\arccos(-1) = \pi$

**Proposition 3.4.6** (Limite de arctan).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



Fonction	arcsin	arccos	arctan
Monotonie	Croissante	Décroissante	Croissante
Parité	Impaire	$\emptyset$	Impaire

TABLE 3.3 – Monotonie et parité des fonctions trigonométriques réciproques

**Proposition 3.4.7** (Dérivées).

$$1. \forall x \in ]-1, 1[ \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2. \forall x \in [-1, 1] \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. 1.

$$\forall y \in [-1, 1] \text{ on a : } \sin(\arcsin(y)) = y$$

$$\text{Donc on a : } \cos^2(\arcsin(y)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(y))}_{=y^2} = 1$$

$$\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2$$

$$\arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ donc } \cos(\arcsin(y)) > 0$$

$$\text{on en déduit } \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$$

$$\text{En dérivant on obtient : } \arcsin'(y) \times \underbrace{(-\sin(\arcsin(y)))}_{-y} = -\frac{2}{2\sqrt{1-y^2}}$$

$$\arcsin'(y)y = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$y \neq 0, \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

Démonstration. 2. Même principe que pour la 1.

□

Démonstration. 3.  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arctan'(x) \tan'(\arctan(x)) &= 1 \\ \iff \arctan'(x)(1 + \tan^2(\arctan(x))) &= 1 \\ \iff \arctan'(x)(1 + x^2) &= 1 \end{aligned}$$

Comme  $1+x^2 > 0$  on en déduit :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

□

### 3.5 Fonctions exponentielle et logarithme

**Théorème 3.5.1.** Il existe une unique fonction dérivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est la fonction exponentielle, notée :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto \exp(x) \text{ ou } e^x \end{cases}$$

**Proposition 3.5.1** (Monotonie de la fonction exponentielle). La fonction exponentielle est strictement croissante et  $\exp(0) = 1$

**Proposition 3.5.2** (Limites de la fonction exponentielle).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

**Proposition 3.5.3** (Propriétés de la fonction exponentielle).  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

**Définition 3.5.1** (Logarithme népérien). La fonction exponentielle est bijective, on définit sa bijection réciproque :

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x)$  est l'unique réel tel que  $\exp(\ln(x)) = x$   
On a aussi  $\forall y \in \mathbb{R}, \ln(\exp(y)) = y$ .

**Proposition 3.5.4** (Monotonie du logarithme népérien). *La fonction logarithme népérien est croissante et  $\ln(1) = 0$ .*

**Proposition 3.5.5** (Limites du logarithme népérien).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

**Proposition 3.5.6** (Propriétés fondamentales).  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$

**Proposition 3.5.7** (Dérivée de la fonction  $\ln$ ). *La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$*

*Démonstration.* On dérive la relation  $\exp(\ln(x)) = x$

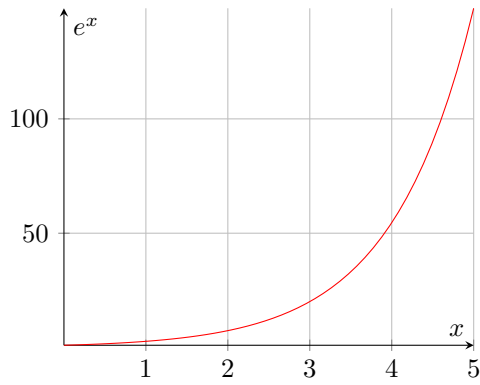
$$\begin{aligned} \ln'(x) \exp'(\ln(x)) &= 1 \\ \ln'(x) \exp(\ln(x)) &= 1 \\ \ln'(x)x &= 1 \\ \ln'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

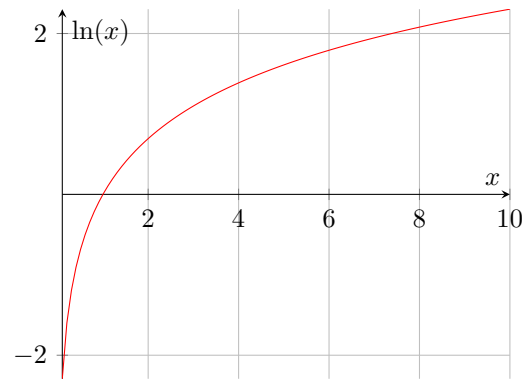
## 3.6 Fonctions hyperboliques

**Définition 3.6.1** (Fonctions hyperboliques). On définit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

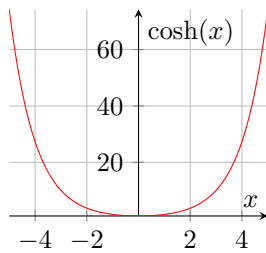


(a) Fonction exponentielle

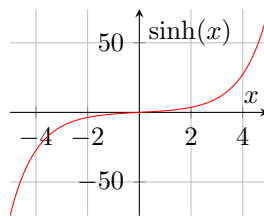


(b) Fonction logarithme népérien

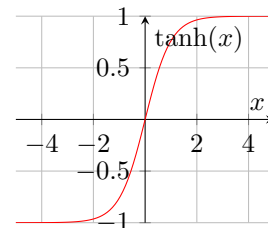
Remarque 3.6.1.  $\cosh = \text{ch}$ ,  $\sinh = \text{sh}$ ,  $\tanh = \text{th}$



(a) Fonction cosh [3]



(b) Fonction sinh [3]



(c) Fonction tanh [3]

Fonction	ch	sh	th
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	paire	impaire	impaire
Dérivée	sh	ch	$1 - \text{th}^2$
$\lim_{+\infty}$	$+\infty$	$+\infty$	1
$\lim_{-\infty}$	$+\infty$	$-\infty$	-1

**Proposition 3.6.1.**  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\
 &= \frac{4}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.6.2.**  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$$



*Démonstration.*  $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$

$$\begin{aligned}\tanh'(x) &= \frac{\sinh'(x) \cosh(x) - \sinh(x) \cosh'(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.6.3.**  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cosh(x) + \sinh(x) &= \exp(x) \\ \cosh(x) - \sinh(x) &= \exp(-x)\end{aligned}$$

On dit que  $\cosh$  est la partie paire et  $\sinh$  la partie impaire de l'exponentielle.

**Proposition 3.6.4.**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

1.  $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$
2.  $\sinh(x + y) = \cosh(x) \sinh(y) + \sinh(x) \cosh(y)$

*Démonstration.* 1.

$$\begin{aligned}\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} + \\ &\quad \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\ &= \cosh(x + y)\end{aligned}$$

□

*Remarque 3.6.2.* En prenant  $y = x$  on obtient :

$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\ &= 1 + 2\sinh^2(x) \\ &= 2\cosh^2(x) - 1 \\ \sinh(2x) &= 2\cosh(x) \sinh(x)\end{aligned}$$

*Remarque 3.6.3.* On verra avec les complexes :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

qui expliquent la parenté entre  $\cos / \cosh$  et  $\sin / \sinh$

## 3.7 Fonctions puissance

Dans quel cas peut-on définir  $x^a$  ?

1. Si  $a \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$x^a = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{a \text{ fois}}$$

Par convention  $x^0 = 1$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^a \end{cases}$$

est la fonction polynomiale de même parité que  $a$ .

2. Si  $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  et  $x \neq 0$  On pose

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}$$

3. Si  $a = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$   
 — est la racine  $n$ -ième de  $x$   
 —  $x^a$  est toujours défini quand  $x \geq 0$ , comme l'unique  $y \in \mathbb{R}^+$  tel que  $y^n = x$   
 — Si  $n$  est impair :  $x^a$  est défini pareillement pour tout  $x \in \mathbb{R}$

4. Si  $a \in \mathbb{R}$  et  $x \in ]0, +\infty[$  On pose :  $x^a = \exp(a \ln x)$

Les propriétés suivantes sont vraies dans tous les cas :

- $1^a = 1$
- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$

Si  $x = e$ , on retrouve la formule :  $\exp(a)^b = \exp(ab)$

**Proposition 3.7.1** (Dérivée de la fonction puissance). *Soit la fonction :*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^a \end{cases}$$

$f$  est dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{x} \exp(a \ln x) \\ &= ax^{-1} x^a \\ &= ax^{a-1} \end{aligned}$$

*Exemple 3.7.1.* Quelle est la dérivée de  $g : x \mapsto 2^x$  ?

On a :  $g(x) = \exp(x \ln(2))$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln(2) \exp(x \ln(2)) \\ g'(x) &= \ln 2 \cdot 2^x \end{aligned}$$

**Théorème 3.7.1** (Croissances comparées).  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln x)^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b \exp(ax) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$$

cd

# Chapitre 4

## Suites réelles

### 4.1 Définitions

**Définition 4.1.1** (Suite réelle). On appelle **suite réelle** une fonction de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la fonction  $x \mapsto u_n$

*Exemple 4.1.1.* On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 7$$

- $u_0 = 7$
- $u_1 = 10$
- $u_2 = 13$

*Remarque 4.1.1.* On met des parenthèses pour parler de la suite dans son intégralité. On ne met pas de parenthèses pour parler d'un seul terme de la suite.

*Remarque 4.1.2.* On peut définir une suite par récurrence.

*Exemple 4.1.2.*

$$\forall n \geq 1 : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{3} \end{cases}$$

*Remarque 4.1.3.* Le vocabulaire des fonctions s'applique aussi aux suites.

**Définition 4.1.2** (Monotonie d'une suite). Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite.

- On dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- On dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$
- $(u_n)_{n \geq 0}$  est **majorée** si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- $(u_n)_{n \geq 0}$  est **minorée** si  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- $(u_n)_{n \geq 0}$  est **bornée** si elle est majorée et minorée  $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

*Remarque 4.1.4.* Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante  $\iff \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \implies u_m \leq u_n$ . On dit aussi que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est monotone si elle est croissante ou décroissante.

*Remarque 4.1.5.* L'ensemble d'indices est parfois  $\mathbb{N}^*$  plutôt que  $\mathbb{N}$ , d'où la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ . On peut aussi avoir  $(u_n)_{n \geq 2}$ . Les résultats du cours seront énoncés par des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  mais aussi valables pour des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$

*Remarque 4.1.6.* Soit  $P(x)$  une propriété qui dépend de  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $P(n)$  est vraie **à partir d'un certain rang**, si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(n)$  est vraie.

*Exemple 4.1.3.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 10n$

- $u_0 = 1$
- $u_1 = -8$
- $u_2 = -16$
- $u_3 = -22$

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'est pas croissante. Mais elle est croissante à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - 10(n+1) - 2^n + 10n \\ &= u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 2^n - 2^n - 10 \\ &= u_{n+1} - u_n = 2^n - 10 \text{ qui est } \geq 0 \text{ pour } n \geq 4\end{aligned}$$

**Proposition 4.1.1** (Propriétés des suites). Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites. On peut former :

- La somme :  $(u_n + v_n)_{n \geq 0}$
- Le produit :  $(u_n v_n)_{n \geq 0}$
- Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda u_n)_{n \geq 0}$

#### 4.1.1 Suites classiques

**Proposition 4.1.2** (Suite arithmétique). Suite arithmétique de progression  $r \in \mathbb{R}$  donnée par  $u_0 \in \mathbb{R}$  est la relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N}$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0 + nr$$

On peut aussi calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (u_0 + kr) \\ &= (n+1)u_0 + r \sum_{k=0}^n k \\ &= (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

**Proposition 4.1.3** (Suite géométrique). Suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}^*$  donnée par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = qu_n, \forall n \in \mathbb{N}$  On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$  On peut aussi calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n u_0 q^k \\ &= u_0 \sum_{k=0}^n q^k\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

On a :

$$\begin{aligned}\text{Si } q \neq 1 : \sum_{k=0}^n u_k &= u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ \text{Si } q = 1 : \sum_{k=0}^n u_k &= (n+1)u_0\end{aligned}$$

**Proposition 4.1.4** (Suite arithmético-géométrique). Suites arithmético-géométrique de progression  $r \in \mathbb{R}$  et de raison  $q \in \mathbb{R}^*$  donnée par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$  Comment calculer  $u_n$  ?

- Si  $q = 1$  c'est une suite arithmétique

— Si  $q \neq 1$ , on cherche le réel  $a$  tel que  $a = qa + r$  et on regarde la suite  $(u_n - a)_{n \geq 0}$

$$\begin{aligned} a = qa + r &\iff a - qa = r \\ &\iff a = \frac{r}{1-q} \quad (\text{Possible car } q \neq 1) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= qu_n + r \\ u_{n+1} - a &= qu_n + r - a \\ v_{n+1} &= q(v_n + a) + r - a \\ &= qv_n + \underbrace{qa + r - a}_{=0} \end{aligned}$$

Ainsi  $(v_n)_{n \geq 0}$  est une suite géométrique de raison  $q$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 q^n \\ &= (u_0 - a)q^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + a \\ u_n &= a + (u_0 - a)q^n \end{aligned}$$

## 4.2 Convergence d'une suite

**Définition 4.2.1.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $\ell$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

*Remarque 4.2.1.*  $\varepsilon$  : epsilon s'utilise pour un réel  $> 0$  petit

*Remarque 4.2.2.* La valeur de  $N$  dépend de  $\varepsilon$  car le  $\exists$  vient après le  $\forall$

*Remarque 4.2.3.*  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$  revient à dire que  $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$  ou encore  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$  ou bien  $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ . Ainsi, dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  revient à dire que tout intervalle  $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$  contient les termes de  $(u_n)_{n \geq 0}$  à partir d'un certain rang.

*Exemple 4.2.1.* La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$  tend vers 0.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  Si  $\ell = 0$

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| \leq \varepsilon &\iff \left| \frac{1}{n+1} \right| \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n+1 \end{aligned}$$

Posons  $N = E(\frac{1}{\varepsilon})$  alors  $N \leq \frac{1}{\varepsilon} < N+1$  et alors :

$$\forall n \geq N, n+1 \geq N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

donc  $n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$  et  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  On a bien vérifié que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  □

*Remarque 4.2.4.* Pour démontrer une assertion de type  $\forall \varepsilon > 0 \dots$  on commence par "Soit  $\varepsilon > 0$ "

*Exemple 4.2.2.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

La suite tend vers 0

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  Posons :  $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ , alors  $\frac{1}{\varepsilon} \leq N$

Soit  $n \geq N$

- Si  $n$  est pair :  $|u_n - 0| = 0 < \varepsilon$
- Si  $n$  est impair :  $|u_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

□

**Définition 4.2.2.** On dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge si  $\exists \ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ converge} \iff \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Sinon on dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ diverge} \iff \forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \geq 0} \text{ ne converge pas vers } \ell &\iff \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon \\ &\iff \exists \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } |u_n - \ell| > \varepsilon\} \\ &\quad \text{est un ensemble infini} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est fini}$$

*Exemple 4.2.3.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$u_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Cette suite diverge.

En effet, soit  $\ell \in \mathbb{R}$

- Si  $\ell < 0$

$$|u_n - \ell| = |1 - \ell| \geq 1$$

quand  $n$  est pair et donc aucun nombre pair  $n$  vérifie

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}$$

et donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers  $\ell$  puisque l'ensemble

$$\left\{ n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| > \frac{1}{2} \right\}$$

est infini.

- Si  $\ell > 0$ , de même  $|u_n - \ell| \geq 1$  pour  $n$  impair et donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers  $\ell$

**Théorème 4.2.1** (Unicité de la limite). La limite d'une suite convergente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est unique. Pour  $\forall (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_2 \text{ alors } \ell_1 = \ell_2$$

*Démonstration.* Procédons à un raisonnement par l'absurde.

On suppose que  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Posons  $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$ .

D'après la définition de limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$  Si  $n \geq N$  alors :

$$|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$$

$$|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Alors  $|\ell_1 - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$ . On en déduit  $\frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| \leq 0$ , ce qui est absurde. Ainsi, on a montré que  $\ell_1 = \ell_2$   $\square$

**Théorème 4.2.2.** *Toute suite convergente est bornée.*

*Démonstration.* Supposons qu'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On applique la définition de convergence avec  $\varepsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq 1 \vee \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$

Posons  $M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \ell + 1)$  et  $m = \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \ell - 1)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Si } n < N, m \leq u_n \leq M$$

$$\text{Si } n > N, m \leq \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1 \leq M$$

$(u_n)_{n \geq 0}$  est majorée par  $M$  et minorée par  $m$ , elle est donc bornée.  $\square$

*Remarque 4.2.5.* La réciproque n'est pas vraie, il existe des suites bornées non convergentes comme par exemple :  $u_n = (-1)^n$

## 4.2.1 Opérations sur les suites convergentes

**Théorème 4.2.3.** *Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites convergentes.*

*On suppose que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell_2, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$$

*Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\alpha \ell_1 + \beta \ell_2$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$

Posons :

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} > 0, \text{ avec } |\alpha| + |\beta| > 0$$

Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon'$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon'$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Si  $n \geq N$ , alors :

$$|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon' \text{ et } |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon'$$

Alors

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha \ell_1 + \beta \ell_2)| &= |\alpha(u_n - \ell_1) + \beta(v_n - \ell_2)| \\ &\leq |\alpha||u_n - \ell_1| + |\beta||v_n - \ell_2| \\ &\leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon' = \varepsilon \end{aligned}$$

On a montré que  $\alpha u_n + \beta v_n$  converge vers  $\alpha \ell_1 + \beta \ell_2$ .  $\square$



Remarque 4.2.6. En particulier :

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ convergente et } (v_n)_{n \geq 0} \text{ convergente} \implies (u_n + v_n)_{n \geq 0} \text{ convergente}$$

La réciproque est fautive :

$u_n = n$  divergente et  $v_n = -n$  divergente mais  $u_n + v_n = 0$  convergente.

**Théorème 4.2.4.** Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites convergentes. On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell_2$$

Alors la suite  $(u_n v_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell_1 \ell_2$

Démonstration. Comme  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge, elle est bornée.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Posons

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M + |\ell_2|} > 0$$

Par définition de la limite

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon'$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2, |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon'$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Si  $n \geq N$  alors

$$|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon' \text{ et } |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon'$$

Par le calcul préliminaire :

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon'(M + |\ell_2|) = \varepsilon$$

□

**Théorème 4.2.5.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite qui ne s'annule pas et qui converge vers  $\ell \neq 0$ . Alors la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 0}$  converge vers  $\frac{1}{\ell}$

Démonstration. Soit  $\varepsilon > 0$

On pose  $\varepsilon' = \frac{|\ell|}{2} \varepsilon > 0$

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ,  $\exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Par ailleurs, posons  $\varepsilon'' = \frac{|\ell|}{2} > 0$

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ,  $\exists N_2, \forall n \geq N_2, |u_n - \ell| \leq \varepsilon''$  implique  $|u_n| \geq |\ell| - |u_n - \ell| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$

Soit  $N = \max(N_1, N_2)$

Si  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$  et  $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$ , alors :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| |\ell|} \leq \frac{\varepsilon'}{|\ell| \frac{|\ell|}{2}} = \frac{2\varepsilon'}{|\ell|^2} = \varepsilon$$

On a montré que  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 0}$  converge vers  $\frac{1}{\ell}$

□

Remarque 4.2.7.

- On peut avoir  $u_n > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  exemple :  $u_n = \frac{1}{n}$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$  alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang

## 4.2.2 Suites et inégalités

On peut passer à la limite dans les inégalités larges.

**Théorème 4.2.6.** Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites convergentes et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

*Démonstration.* Posons

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

On veut montrer  $\ell_1 \leq \ell_2$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $\ell_2 < \ell_1$ .  
Posons :

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$$

On a  $\ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon$ .

Comme  $u_n \rightarrow \ell_1, \exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ .

Comme  $v_n \rightarrow \ell_2, \exists N_2, \forall n \geq N_2, |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon$ .

Soit  $n \leq \max(N_1, N_2)$ , alors :

$$|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon \text{ donc } u_n \geq \ell_1 - \varepsilon$$

$$|v_n - \ell_2| \leq \varepsilon \text{ donc } v_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

Alors  $v_n \leq \ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon \leq u_n$  donc  $v_n < u_n$  il y a donc une contradiction. □

*Remarque 4.2.8.* Les inégalités strictes deviennent larges à la limite.

*Exemple 4.2.4.*  $n \geq 1, u_n = \frac{1}{2n}, v_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$  et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

**Corollaire 4.2.1.** Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$

1. Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ , alors  $\ell \leq M$

2. Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ , alors  $\ell \geq m$

*Démonstration.* On applique le théorème au cas où une des suites est constante. □

**Théorème 4.2.7** (Théorème des gendarmes). Soient  $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0}, (w_n)_{n \geq 0}$  des suites.

On suppose que

$$1. \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2, \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

Soit  $N = \max(N_1, N_2)$

Si  $n \geq N$   $\ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$  □

*Exemple 4.2.5.* Soit  $v_n = \frac{\sin n}{n}$  pour  $n \geq 1$ . On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \frac{1}{n} = 0$ .

Par le théorème des gendarmes, on en conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

### 4.2.3 Convergence et monotonie

Il existe :

- des suites monotones non convergentes

*Exemple 4.2.6.*  $u_n = n$

- des suites convergentes non monotones

*Exemple 4.2.7.*  $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**Théorème 4.2.8.** *Toute suite croissante majorée converge.*

*De même, toute suite décroissante minorée converge.*

*Remarque 4.2.9.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante majorée. La preuve (hors-programme) consiste à montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers la borne supérieure :  $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n}_{< +\infty \text{ car } (u_n)_{n \geq 0} \text{ est majorée}}$

**Théorème 4.2.9** (Théorème des suites adjacentes). *Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites telles que :*

1.  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante
2.  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante
3.  $(v_n - u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.

*Alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  convergent vers la même limite  $\ell$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$ .*

*Démonstration.* Posons  $w_n = v_n - u_n$ .

La suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0 et est décroissante.

Ceci implique  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$ , c'est-à-dire  $u_n \leq v_n$ .

On a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et majorée par  $v_0$ , donc elle converge.

La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée par  $u_0$ , donc elle converge.

Posons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell_2$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 = \ell_2 - \ell_1$ , alors  $\ell_2 = \ell_1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :

- $u_n \leq \ell_1$  car  $(u_n)$  est croissante
- $v_n \geq \ell_2$  car  $(v_n)$  est décroissante

□

*Remarque 4.2.10.* Si on suppose de plus que  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  convergent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{aligned}$$

*Exemple 4.2.8.*  $u_n = n$  et  $v_n = n + \frac{1}{n}$

1.  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante
2.  $(v_n)_{n \geq 0}$  n'est pas décroissante
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Mais on ne peut pas écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

*Exemple 4.2.9.* Moyenne arithmético-géométrique

Soit  $a, b \geq 0$ ,  $\frac{a+b}{2}$  moyenne arithmétique,  $\sqrt{ab}$  moyenne géométrique.

On a  $\forall a, b \geq 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

En effet :

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0 \\ a + b - 2\sqrt{ab} &\geq 0 \\ a + b &\geq 2\sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (4.1)$$

Supposons  $a \leq b$  et définissons deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  par  $u_0 = a$  et  $v_0 = b$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrons que  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  convergent vers la même limite à l'aide du théorème des suites adjacentes. Remarquons que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq v_n$$

Cela est vrai si  $n = 0$  car  $a < b$ . Si  $n > 0$  en appliquant (4.1) à  $u_{n-1}$  et  $v_{n-1}$

Vérifions que  $u_n$  est croissante, puis que  $v_n$  est décroissante et que  $(v_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n v_n} - u_n \\ &= \sqrt{u_n} (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0 \end{aligned}$$

Car  $v_n \geq u_n$ .  $(u_n)$  est donc croissante

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \end{aligned}$$

Car  $v_n \geq u_n$ .  $(v_n)$  est donc décroissante

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &\leq v_{n+1} - u_n \text{ car } u_n \leq u_{n+1} \\ &\leq \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &\leq \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur  $n$  la propriété

$$P_n = "v_n - u_n \leq \frac{v_0 - u_0}{2^n}"$$

—  $P_0$  est vraie

— Supposons que  $P_n$  vraie pour un entier  $n$ . Alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{\frac{v_0 - u_0}{2^n}}{2} = \frac{v_0 - u_0}{2^{n+1}}$$

On a donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_0 - u_0}{2} = \frac{b - a}{2}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2} = 0$$

par le théorème des gendarmes, on a :

$$(v_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par le théorème des suites adjacentes,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.

### 4.3 Suites extraites

**Principe :** On part d'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  et on ne garde que certains des termes (en nombre infini) pour former une nouvelle suite qu'on appelle suite extraite de  $(u_n)_{n \geq 0}$

Exemple 4.3.1.

- $(u_{2n})_{n \geq 0}$  est une sous-suite/suite-extraite de  $(u_n)_{n \geq 0}$
- $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$  aussi
- $(u_{3n})_{n \geq 0}$  l'est également

**Définition 4.3.1** (Extraction). Une **extraction** est une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui est strictement croissante.

**Définition 4.3.2** (Suite extraite). Une **suite extraite** ou une **sous-suite** d'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  où  $\varphi$  est une extraction.

**Proposition 4.3.1** (Propriétés). Soit  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  une sous-suite de  $(u_n)_{n \geq 0}$

- Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante, alors  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  aussi.
- Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante, alors  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  aussi.
- Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est majorée, alors  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  aussi.
- Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est minorée, alors  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  aussi.
- Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente vers  $\ell$ , alors  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  aussi.

Remarque 4.3.1 (Important). Même si  $(u_n)$  ne converge pas, il se peut que des sous-suites convergent.

Exemple 4.3.2.  $u_n = (-1)^n$

- $u_{2n} = 1$  donc la sous-suite  $(u_{2n})_{n \geq 0}$  converge vers 1
- $u_{2n+1} = -1$  donc la sous-suite  $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$  converge vers -1

Mais  $(u_n)$  ne converge pas car si elle convergerait vers  $\ell \in \mathbb{R}$  on aurait

$$\begin{aligned} u_{2n} &\rightarrow \ell \text{ donc } \ell = 1 \\ u_{2n+1} &\rightarrow \ell \text{ donc } \ell = -1 \end{aligned}$$

Ce serait absurde.

**Proposition 4.3.2.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite, alors :

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ converge} \iff (u_{2n})_{n \geq 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n \geq 0} \text{ convergent vers la même limite}$$

**Théorème 4.3.1** (Théorème de Ramsey). Toute suite admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite. Soit  $E = \{n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, u_m \leq u_n\}$

1er cas

$E$  est fini, donc majoré par un entier  $N$ ,  $\forall n \leq N, n \notin E$  donc  $\exists m > n, u_m > u_n$  (\*) On définit alors par récurrence une extraction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  en posant  $\varphi(0) = N + 1$ , puis, étant donné  $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(K)$ , on choisit  $\varphi(K+1)$  (possible par (\*)) tel que  $u_{\varphi(K+1)} > u_{\varphi(K)}$  et la suite extraite  $(u_{\varphi(n)})$  est croissante.

2e cas

$E$  est infini. On pose alors  $E = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$  avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \in E$  Comme  $\varphi(K+1) > \varphi(K)$ , on a (par définition de  $E$ )

$$u_{\varphi(K+1)} \leq u_{\varphi(K)}$$

et la sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante □

**Théorème 4.3.2** (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite bornée. D'après le théorème de Ramsey,  $(u_n)_{n \geq 0}$  il existe une sous-suite monotone  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ . Comme  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  est monotone et bornée, elle converge. □

Exemple 4.3.3.

- $u_n = (-1)^n$  On a  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  qui convergent
- $u_n = \cos(n)$  par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet des sous-suites convergentes, mais pas aussi simples à définir

### 4.3.1 Limites infinies

**Définition 4.3.3.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite. On dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers l'infini, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Remarque 4.3.2. Ne pas utiliser le mot "converger" pour une limite infinie. Il est réservé aux limites finies. On parlera de "diverger" vers l'infini.

**Définition 4.3.4.** On dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $-\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$$

Remarque 4.3.3. Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers l'infini, toute sous-suite aussi

**Théorème 4.3.3.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante. Alors :

- ou bien  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge (vers une limite finie)
- ou bien  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $+\infty$

Démonstration.

- Si  $(u_n)$  est majorée, elle converge d'après le théorème de convergence monotone car elle est croissante et majorée.
- Si  $(u_n)$  n'est pas majorée, montrons qu'elle tend vers  $+\infty$   
Soit  $A$  un réel.  
Comme  $(u_n)$  n'est pas majorée,

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}, u_N \geq A \\ \forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq A \end{aligned}$$

On a montré que :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

□

Exemple 4.3.4. Un autre exemple de suite :  $u_n = n(-1)^n$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'a pas de limite finie ou infinie.

$$u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty, \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

**Théorème 4.3.4** (Théorèmes de comparaison).

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

HYPOTHESES	CONCLUSION
$\lim u_n$ et $\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$
$\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$
$\ell \in \mathbb{R}$ et $+\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$ et $-\infty$	$-\infty$
$+\infty$ et $+\infty$	$+\infty$
$-\infty$ et $-\infty$	$-\infty$
$-\infty$ et $+\infty$	FI

TABLE 4.1 – Formes indéterminées pour les sommes de limites

*Remarque 4.3.4* (Formes indéterminées des sommes de limites). Les résultats pour les limites finies ne s'étendent pas tous aux limites infinies.

Quand on a une forme indéterminée, la suite concernée peut avoir tous les comportements possibles.

*Exemple 4.3.5.*  $u_n = n$

$$- v_n = n + 3$$

$$- v'_n = n + \sqrt{n}$$

$$- v''_n = n + (-1)^n$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v''_n = +\infty$$

$v_n - u_n$ ,  $v'_n - u_n$ ,  $v''_n - u_n$  sont des formes indéterminées

$$v_n - u_n = 3 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} = 3$$

$$v'_n - u_n = \sqrt{n} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$$

$v''_n - u_n = (-1)^n$  n'a pas de limite finie ou infinie

HYPOTHESES	CONCLUSION
$\lim u_n$ et $\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$\ell > 0$ et $+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$ et $+\infty$	$-\infty$
$0$ et $+\infty$	FI
$\ell > 0$ et $-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$ et $-\infty$	$+\infty$
$0$ et $-\infty$	FI
$+\infty$ et $+\infty$	$+\infty$
$+\infty$ et $-\infty$	$-\infty$
$-\infty$ et $-\infty$	$+\infty$

TABLE 4.2 – Formes indéterminées des produits de limites

*Remarque 4.3.5* (Formes indéterminées des produits des limites).

*Remarque 4.3.6* (Formes indéterminées des quotients de limites). Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$

*Remarque 4.3.7.* Une autre forme indéterminée est  $\infty \cdot 0$ , autrement dit, si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

le comportement de  $u_n^{v_n}$  est indéterminé. Un bon réflexe pour étudier ces suites est d'utiliser la formule

$$a^b = \exp(b \ln a)$$

On a :

$$u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln u_n)$$

HYPOTHESES	CONCLUSION
$\lim u_n$ et $\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
0 et 0	FI
$\pm\infty$ et $\pm\infty$	FI
0 et $\pm\infty$	0
$+\infty$ et 0	$\left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ si } \forall n, v_n > 0 \\ -\infty \text{ si } \forall n, v_n < 0 \end{array} \right.$
$-\infty$ et 0	
	$\left\{ \begin{array}{l} -\infty \text{ si } \forall n, v_n > 0 \\ +\infty \text{ si } \forall n, v_n < 0 \end{array} \right.$

TABLE 4.3 – Formes indéterminées des quotients de limites

*Exemple 4.3.6.* On peut montrer que la suite :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

*Remarque 4.3.8* (Notations asymptotiques). Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites avec  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $v_n > 0$ . On dit que  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ , ou

$$u_n = o(v_n), \text{ lorsque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

*Exemple 4.3.7.*

- $\sqrt{n} = o(n)$
- $\ln n = o(n^\alpha)$  pour tout  $\alpha > 0$

*Remarque 4.3.9.* On dit que  $u_n = O(v_n)$  si la suite  $\frac{u_n}{v_n}$  est majorée

*Exemple 4.3.8.*

$$3n^2 + 2n + 5 = O(n^2)$$

Si  $P$  est un polynôme de degré  $d$

$$P(n) = O(n^d)$$

*Remarque 4.3.10.* Ces notations sont très utilisées en informatique

$$\begin{aligned} u_n = o(v_n), v_n = O(w_n) &\implies u_n = o(w_n) \\ u_n = O(v_n), v_n = O(w_n) &\implies u_n = O(w_n) \end{aligned}$$

**Définition 4.3.5** (Suite de Cauchy). C'est un moyen de parler de suites convergentes sans mentionner la limite.

Une suite  $(u_n)$  est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1 \geq N, \forall n_2 \geq N, |u_{n_1} - u_{n_2}| \leq \varepsilon$$



# Chapitre 5

## Continuité et limites de fonctions

### 5.1 Limites

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit  $x_0 \in I$  ou  $x_0$  une borne de  $I$  (possiblement  $\pm\infty$ ). On veut définir ce que veut dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \ell = \pm\infty$$

**Définition 5.1.1** (Limite d'une fonction en un point).

**1er cas**

$x_0 \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

Si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que si  $|x - x_0| \leq \delta$ , alors  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

**2e cas**

$x_0 \in \mathbb{R}, \ell = \pm\infty$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$  tel que si  $|x - x_0| \leq \delta$  alors  $f(x) \geq A$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$  tel que si  $|x - x_0| \leq \delta$  alors  $f(x) \leq A$

**Définition 5.1.2** (Limite d'une fonction en l'infini).

**1er cas**

$x_0 = \pm\infty, \ell \in \mathbb{R}$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Si  $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}$  tel que si  $x \geq B$  alors  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

Si  $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}$  tel que si  $x \leq B$  alors  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

**2e cas**

$x_0 = \pm\infty, \ell = \pm\infty$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}$  tel que si  $x \geq B$  alors  $f(x) \geq A$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}$  tel que si  $x \geq B$  alors  $f(x) \leq A$

On dit que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}$  tel que si  $x \leq B$  alors  $f(x) \geq A$

on dit que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}$  tel que si  $x \leq B$  alors  $f(x) \leq A$

**Remarque 5.1.1.** Lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$  la droite verticale d'équation  $x = x_0$  est une asymptote verticale au graphe de  $f$

**Remarque 5.1.2.** Lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , la droite horizontale d'équation  $y = \ell$  est une asymptote horizontale au graphe de  $f$

**Théorème 5.1.1** (Caractérisation séquentielle des limites). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  ou une borne de  $I$  (éventuellement  $\pm\infty$ ),  $\ell \in \mathbb{R}$  ou  $\ell = +\infty$  ou  $\ell = -\infty$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff$  Pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$

Par conséquent, les théorèmes sur les limites de suites ont des analogues immédiats pour les limites de fonctions.

**Théorème 5.1.2.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  ou une borne de  $I$ .

- Si  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \end{cases}$  alors  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 
  - $\lim_{x \rightarrow x_0} (af + bg)(x) = a\ell_1 + b\ell_2$
  - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$
  - Si  $g$  ne s'annule pas et  $\ell_2 \neq 0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$
- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$  et  $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$  alors  $\ell_1 \leq \ell_2$
- Si  $\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$

**Exemple 5.1.1.** Considérons la fonction

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$$

On a  $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ \frac{-1}{x} &\leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Par théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

**Théorème 5.1.3** (Composition des limites). Soient  $I, J$  deux intervalles et les fonctions  $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  ou une borne de  $I$ . On suppose

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \text{ avec } y \in I \text{ ou avec une borne de } J$$

$$\lim_{y \rightarrow z} g(z) = \ell \text{ existe}$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$$

Exemple 5.1.2. Soit

$$h: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{\frac{3}{x} + 7} \end{cases}$$

On pose  $h$  comme étant une composée avec :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{3}{x} + 7 \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7 \text{ puis } \lim_{x \rightarrow 7} g(x) = \sqrt{7} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \sqrt{7}$$

**Définition 5.1.3** (Limite à gauche / à droite). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $x_0 \in I$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \ell \in \mathbb{R}$$

ou  $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\ell = +\infty$  ou  $\ell = -\infty$

On dit que  $\ell$  est la limite à gauche de  $f$  en  $x_0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

Si la limite de  $f|_{I \cap ]-\infty, x_0]}$  en  $x_0$  vaut  $\ell$

Si  $\ell \in \mathbb{R}$  cela équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $x_0$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Si la limite de  $f|_{I \cap [x_0, +\infty]}$  en  $x_0$  vaut  $\ell$

Remarque 5.1.3.  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $J \subset I$

$$f|_J: \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases} \text{ est la restriction de } f \text{ à } J.$$

Soit  $I$  un intervalle,  $x_0 \in I$  (pas une borne)

— Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$

— Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$

## 5.2 Continuité

**Définition 5.2.1.** Soit  $I$  un intervalle,  $x_0 \in I$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

— On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Avec les quantificateurs, on a :

$$f \text{ continue} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } x \in I \text{ vérifie } |x - x_0| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

— On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } x \in I \text{ vérifie } |x - x_0| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

— On dit que  $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

et continue à droite en  $x_0$  si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Ainsi  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de  $x_0$

*Exemple 5.2.1.*  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  partie entière.

— Si  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $E$  est continue en  $x_0$

— Si  $x_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $E$  est continue à droite en  $x_0$  mais pas continue à gauche en  $x_0$

*Exemple 5.2.2.*  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$  cette fonction n'est continue en aucun point.

*Remarque 5.2.1.* Les fonctions usuelles

- exp
- ln
- cos
- sin
- tan
- arcsin
- arccos
- arctan
- cosh
- sinh
- tanh
- $\sqrt{x}$

sont continues dans leurs domaines de définition.

**Théorème 5.2.1** (Opérations sur les fonctions continues). *La somme, le produit, la composition, le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue.*

*Exemple 5.2.3.*  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x^2 - 3) \exp(2 \cos(x - 1)) \end{cases}$  est continue comme produit de fonctions continues.

**Théorème 5.2.2** (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soit  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) \leq y \leq f(b)$  ou  $f(b) \leq y \leq f(a)$ . Alors il existe un point  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = y$*

*Démonstration.* On utilise la propriété de la borne supérieure de  $\mathbb{R}$ . Toute partie non vide majorée  $A \subset \mathbb{R}$  admet une borne supérieure  $\sup(A)$

— Quitte à changer  $f$  en  $-f$  et  $y$  en  $-y$  on peut supposer

$$f(a) \leq y \leq f(b)$$

— Soit  $E = \{x \in I \text{ tel que } f(x) \leq y\}$ ,  $a \in E$  donc  $E$  est non vide,  $E \subset I$  donc  $E$  est majoré donc on peut poser  $c = \sup(E)$

Puisque  $c = \sup(E)$ , il existe une suite  $(c_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$

Comme  $f$  est continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n) = f(c)$$

Puisque  $c_n \in E$ , on a  $f(c_n) \leq y$ . En passant à la limite, on a

$$f(c) \leq y$$

Il reste à montrer  $f(c) \geq y$

— Si  $c = b$ , on a bien

$$f(c) = f(b) \leq y$$

— Si  $c < b$ , pour  $n$  assez grand,

$$c < \underbrace{c + \frac{1}{n}}_{\substack{\text{pas dans } E, \\ \text{car } c = \sup(E)}} \leq b$$

$$c + \frac{1}{n} \notin E \implies f\left(c + \frac{1}{n}\right) > y$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c + \frac{1}{n} = c$  et  $f$  étant continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$$

Comme  $f\left(c + \frac{1}{n}\right) > y$ , on en déduit en passant à la limite  $f(c) \geq y$

□

*Exemple 5.2.4.*  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^4 + x^2 - 6 \end{cases}$  On veut montrer que  $f$  s'annule sur  $[0, 2]$   $f$  est continue.

$$f(0) = -6$$

$$f(2) = 14$$

Comme  $-6 \leq 0 \leq 14$ , par le TVI, il existe  $c \in [0, 2]$  tel que  $f(c) = 0$

*Remarque 5.2.2.* Il est important que  $I$  soit un intervalle pour utiliser le TVI.

*Exemple 5.2.5.*  $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$  même si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f(-1) = -1$  et  $f(1) = 1$ , il n'existe pas de  $c \in [-1, 1]$  tel que  $f(c) = 0$ , le TVI ne s'applique pas car  $f$  n'est pas définie sur  $[-1, 1]$

*Exemple 5.2.6.* Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + \cos(x) - 3 \end{cases}$

Montrer que  $f$  s'annule sur  $[-5, 5]$   $f(-5) = f(5) = 22 + \cos(5) > 0$ .

Mais comme  $f(0) = -2$ , on peut appliquer le TVI sur  $[0, 5]$ ,  $f(0) \leq 0 \leq f(5)$  et conclure que  $\exists c \in [0, 5]$  tel que  $f(c) = 0$ .

*Remarque 5.2.3.* Le même énoncé serait faux pour  $\mathbb{Q}$  à la place de  $\mathbb{R}$ .

*Exemple 5.2.7.*  $f: \begin{cases} \mathbb{Q} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 4$$

$$f(0) \leq 2 \leq f(2)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $c \in [0, 2]$  tel que  $f(c) = 2$ ,  $c = \sqrt{2}$ , mais il n'existe pas de rationnel  $c$  tel que  $f(c) = 2$

*Remarque 5.2.4.* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

*Exemple 5.2.8.*  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$

$$f([-1, 4]) = [1, 17]$$

$$f'(x) = 2x \text{ donc } \begin{cases} f'(x) \leq 0 \text{ si } x \in [-1, 0] \\ f'(x) \geq 0 \text{ si } x \in [0, 4] \end{cases}$$

## 5.3 Limites, continuité et monotonie

Les fonctions monotones ont des propriétés spécifiques

**Théorème 5.3.1** (Théorème de la "limite monotone"). Soit  $I = ]a, b[$  avec  $a < b$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  croissante.

1.  $f$  admet une limite en  $b$ , qui est finie si et seulement si  $f$  est majorée.
2.  $f$  admet une limite en  $a$ , qui est finie si et seulement si  $f$  est minorée.
3. Pour tout  $x_0 \in I$ ,  $f$  a une limite à gauche et à droite en  $x_0$  et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Enoncé analogue pour  $f$  décroissante.

**Théorème 5.3.2** (Stricte monotonie et bijectivité). Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue

- Si  $f$  est strictement croissante,  $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$  est une bijection.
- Si  $f$  est strictement décroissante,  $f: [a, b] \rightarrow [f(b), f(a)]$  est une bijection. Ce théorème a été utilisé pour définir par exemple  $\arcsin$  car il montre que  $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est bijective. En effet strictement monotone  $\implies$  injective et on montre que  $f$  est surjective grâce au TVI.

*Exemple 5.3.1.*  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 \end{cases}$   $f$  est continue,

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - 9 + 12 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 16 - 36 + 24 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Si  $x \neq 0$ ,  $f(x) = x^3 \left( 2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$  et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $[1, 2]$ , c'est une bijection de  $[1, 2]$  sur  $[3, 4]$ . Le théorème est également vrai pour un intervalle  $]a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  si  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et

- strictement croissante, c'est une bijection de  $]a, b[$  sur  $] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$
- strictement décroissante, c'est une bijection de  $]a, b[$  sur  $] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

Dans l'exemple précédent,  $f$  est une bijection de  $] - \infty, 1[$  sur  $] - \infty, 4[$ .

*Exemple 5.3.2.*  $f: \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x^2 + x} \end{cases}$   $f$  est continue et strictement décroissante car la fonction  $x \mapsto x^2 + x$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

donc  $f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Théorème 5.3.3.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue injective. Alors  $f$  est strictement monotone, donc bijective. Si on pose  $J = f(I)$ , la bijection réciproque  $f^{-1}: J \rightarrow I$  est continue.

Remarque 5.3.1. Dans le théorème précédent,  $f^{-1}$  est aussi strictement monotone.

### Fonctions continues sur un segment

Remarque 5.3.2. Segment = intervalle fermé borné.

**Théorème 5.3.4.** Soient  $a < b$  des réels et  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et elle atteint ses bornes.

$$\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M \text{ et } \exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = m, \exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = M$$

La preuve repose sur le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque 5.3.3. Il est important de considérer un intervalle fermé.

Exemple 5.3.3. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0, 1[$ , mais pas bornée.

**Prolongement par continuité**  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $x_0 \in I$ ,  $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  existe. Alors la fonction

$$\tilde{f}: \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

On dit que  $\tilde{f}$  est le prolongement par continuité de  $f$  en  $x_0$ .

Exemple 5.3.4. Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$  continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?

Pour  $x \neq 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

c'est le taux d'accroissement donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$ . On peut donc prolonger  $f$  par continuité en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction  $\tilde{f}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

# Annexes

## 6.1 Correction du CC1 Blanc

### Exercice 6.1.1.

1.  $A = \frac{4^4 \cdot 3^3}{6^6 \cdot 2^2}$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4^4 \cdot 3^3}{6^6 \cdot 2^2} \\
 &= \frac{(2^2)^4 \cdot 3^3}{(2 \cdot 3)^6 \cdot 2^2} \\
 &= \frac{2^8 \cdot 3^3}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^2} \\
 &= 2^{8-6-2} \cdot 3^{3-6} \\
 &= 3^{-3} \\
 &= \frac{1}{3^3}
 \end{aligned}$$

$A = \frac{1}{27}$

2.  $B = 6^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt[5]{6})^3 \cdot -2 \cdot 6^{\frac{1}{11}}$

$$\begin{aligned}
 B &= 6^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt[5]{6})^3 \cdot -2 \cdot 6^{\frac{1}{11}} \\
 &= 6^{\frac{1}{2}} \cdot (6^{\frac{1}{5}})^3 \cdot -2 \cdot 6^{\frac{1}{11}} \\
 &= 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{5}} \cdot -2 \cdot 6^{\frac{1}{11}}
 \end{aligned}$$

$B = 6^{\frac{11}{10}} - 2 \cdot 6^{\frac{1}{11}}$

3.  $C = \frac{2\sqrt{23}\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{6\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{9}}$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{2\sqrt{23}\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{6\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{9}} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{6}}} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} \\
 &= 2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$C = 6^{\frac{1}{6}}$

### Exercice 6.1.2.



1. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient :

$$(E) : 2x^2 + 6x + 4 \leq 0$$

$$\stackrel{\times \frac{1}{2}}{\iff} x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme :

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1\end{aligned}$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2}$$

$$\boxed{x_1 = -2}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2}$$

$$\boxed{x_2 = -1}$$

On a donc le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$+\infty$	
$x^2+3x+2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\boxed{(E) \iff x \in [-2, -1]}$$

2. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient

$$(E_1) : x^2 + 5x + 7 \geq x + 5$$

$$\stackrel{-(x+5)}{\iff} x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

On cherche les racines du trinôme :

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2 = 8$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{x_1 = -2 - \sqrt{2}}$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{x_2 = -2 + \sqrt{2}}$$

On a le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 + 4x + 2$	+	0	-	0	+

On en conclut donc que :

**Exercice 6.1.3.** Déterminer l'ensemble des réels  $x$  qui vérifient

$$(E) : |(x+1)(x+2)| = 10$$

$$(E_1) \iff x \in ]-\infty, -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2}, +\infty[$$

puis :

$$(E') : |(x+1)(x+2)| \leq 10$$

On sait que d'après la définition de la valeur absolue :

$$(E) \iff \begin{cases} (E_1) : (x+1)(x+2) = 10 \\ ou \\ (E_2) : (x+1)(x+2) = -10 \end{cases}$$

$$(E_1) : (x+1)(x+2) = 10$$

$$\iff x^2 + 3x + 2 = 10$$

$$\iff x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$\Delta_1 = 3^2 - 4 \times (-8) \times 1 \\ = 41$$

$$(E_2) : (x+1)(x+2) = -10$$

$$\iff x^2 + 3x + 2 = -10$$

$$\iff x^2 + 3x + 12 = 0$$

$$\Delta_2 = 3^2 - 4 \times 12 \times 1 \\ = -39$$

On remarque  $(E_2)$  n'a pas de solution donc on cherche les racines de  $(E_1)$ .

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}$$

L'ensemble des solutions de  $(E)$  est :  $\left\{ \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right\}$

$$|(x+1)(x+2)| = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x \in ]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[ \\ -(x+1)(x+2) & \text{si } x \in [-2; -1] \end{cases}$$

$$- (x+1)(x+2) \leq 10$$

$$(x+1)(x+2) \leq 10$$

$$\iff x^2 + 3x - 8 \leq 0$$

$$\iff x \in \left[ \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right]$$

Sachant que  $\frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \leq \frac{-9}{2}$  car  $-\sqrt{41} \leq 6$  et  $\frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \geq 0$  car  $\sqrt{41} \geq 6$

Les solutions de  $(x+1)(x+2) \leq 10$  dans  $] -\infty, -2] \cup [1, +\infty[$  sont :

$$x \in \left[ \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, -2 \right] \cup \left[ -1, \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right]$$

$$- (x+1)(x+2) \leq 10$$

$$- (x+1)(x+2) \leq 10$$

$$\iff x^2 + 3x + 12 \geq 0$$

Ce qui est toujours vrai car ce trinôme n'a pas de racines.

Ainsi, tout nombre de  $[-2, -1]$  est solution de  $-(x+1)(x+2) \leq 10$ .

Ainsi, l'ensemble des solutions de  $(E')$  est :

$$x \in \left[ \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, -2 \right] \cup \left[ -1, \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right] \cup [-2, -1]$$

$$x \in \left[ \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right]$$

**Exercice 6.1.4.** Déterminer l'ensemble des réels  $x$  tels que les deux membres de (E) soient bien définis, et que (E) soit vraie

$$(E) : \frac{1}{x-1} \leq \frac{x+4}{x+1}$$

(E) est bien définie si  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} \leq \frac{x+4}{x+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-1} - \frac{x+4}{x+1} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+1) - (x+4)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+4)(x-1) - (x+1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 + 2x - 5}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe sachant qu'on a :

$$- \quad x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$- \quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

puis :

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times (-5) \times 1$$

$$= 4 + 20$$

$$= 24$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = -1 - \sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_2 = -1 + \sqrt{6}}$$

$x$	$-\infty$	$-1-\sqrt{6}$	$-1$	$1$	$-1+\sqrt{6}$	$+\infty$	
$(x+1)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	
$x^2+2x-5$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$\frac{x^2+2x-5}{(x+1)(x-1)}$	$+$	$0$	$-$	$+$	$-$	$0$	$+$

On en conclut que :

$$x \in ]-\infty, -1 - \sqrt{6}] \cup ]-1, 1[ \cup [-1 + \sqrt{6}, +\infty[$$

**Exercice 6.1.5.** Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in J, \exists x \in I, f(x) = y$$

## 6.2 Correction CC Blanc 2

**Exercice 6.2.1.**

Rappel :

$$(u \circ v)' = v' \cdot u' \circ v$$

1.  $f(x) = \sin^3(x^2 + 1)$  Domaine de définition :  $\mathbb{R}$  Pour calculer  $f'$ , on peut écrire

$$f(x) = u \circ v(x) \begin{cases} v(x) = x^2 + 1 \\ u(x) = \sin^3(x) \end{cases} \begin{cases} v'(x) = 2x \\ u'(x) = 3 \cos(x) \sin^2(x) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot 3 \cos(x) \sin^2(x) \\ &= 6x \cos(x) \sin^2(x) \end{aligned}$$

2.  $g(x) = \ln(\tan(x))$

$\tan$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$   $\tan(x) > 0 \iff x \in [0, \frac{\pi}{2}[$  Comme  $\tan$  est  $\pi$ -périodique, pour  $x \in ]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$

$\tan(x) > 0 \iff x \in ]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$

Domaine de définition :  $]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Par composition :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\tan'(x)}{\tan(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x) \tan(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} \end{aligned}$$

**Exercice 6.2.2.**  $u_0 = u_1 = 1$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq n^2$

Soit  $P_n$  la propriété " $u_n \leq n^2$ "

Montrons  $P_n$  par récurrence double.

**Initialisation :**

$u_1 = 1 \leq 1^2$  donc  $P_1$  est vraie

$u_2 = u_1 + \frac{2}{1+1}u_0 = 2 \leq 2^2$  donc  $P_2$  est vraie

**Hérédité :**

Pour  $n \geq 2$ , supposons que  $P_{n-1}$  et  $P_n$  vraies.

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \\ &\leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &\leq n^2 + 2(n-1) \text{ car } \frac{n-1}{n+1} \leq 1 \\ &\leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $P_{n+1}$  est vérifiée. Par récurrence double, on a montré  $P_n$  pour tout  $n \geq 1$

**Exercice 6.2.3.**

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$$

1. On résout

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{2} \\ \Leftrightarrow \alpha &= 2\end{aligned}$$

et on étudie  $v_n = u_n - 2$

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 1 + \frac{u_n}{2} - 2 \\ &= \frac{u_n}{2} - 1 \\ &= \frac{u_n - 2}{2} = \frac{v_n}{2}\end{aligned}$$

$v_0 = u_0 - 2 = -1$  La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est géométrique de premier terme  $-1$  et de raison  $\frac{1}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}v_n &= -\frac{1}{2^n} \\ u_n &= 2 - \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \left(2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0\end{aligned}$$

3. Comme  $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge vers 2.

**Exercice 6.2.4.**  $n > 0$ ,  $u_n \frac{\sin}{\sqrt{n}} + \frac{n+1}{n+2}$ 

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

OU

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{2}{n})} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$$

Sachant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(x)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ car } -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{n}} = 0$$

Finalement

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

**Exercice 6.2.5.** Résoudre

$$\sqrt{3} \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2} \quad (6.1)$$

Méthode : se ramener à une équation de type  $\sin(\dots) = \sin(\dots)$  ou  $\cos(\dots) = \cos(\dots)$  à l'aide des formules d'addition.

$$\begin{aligned} (6.1) &\iff \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(3x) - \frac{1}{2} \cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ a = \pi - b + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$(6.1) \iff \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

# Bibliographie

- [1] Supreme Aryal. Unit circle : <https://texample.net/tikz/examples/unit-circle/>. 2010.
- [2] Tex StackExchange et Youtube et Overleaf et CTAN. Documentation.
- [3] Logiciel Geogebra. <https://www.geogebra.org/?lang=fr>.