Analyse 1 pour Informaticiens, automne 2022

Année universitaire 2022-2023

Table des matières

Ces notes reprennent le cours de "Analyse 1 pour informaticiens" que j'ai donné à l'automne 2022.

Je propose aux étudiants motivés de taper eux-même le cours en LaTeX à partir du cours écrit au tableau. On peut retrouver les notes manuscrites scannées sur la page web du cours.

Le lien permettant de modifier ce document a été envoyé par mail en début de semestre. N'hésitez pas à le demander si vous ne l'avez pas.

Si tu as une question ou un doute à propos de ce document, que ce soit lié à LaTeX ou aux maths, n'hésitez pas à m'en faire part par mail ou sur discord afin que je t'aide.

Étudiants ayant participé à la rédaction de ce texte (rajoute ton nom si tu édites le document)

— Raphaël Heng [2]
— Racem Grab
— Lenny Chanrion
—

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Les ensembles de nombres

Le premier ensemble de nombres est l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

de tous les *entiers naturels*. Une variante est $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, l'ensemble des entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ correspondant à l'ensemble $\mathbb{N}$ auquel on a enlevé 0.

Le second ensemble de nombres est l'ensemble

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

de tous les *entiers relatifs*. On définit de même $\mathbb{Z}^*$ comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ auquel on a enlevé (privé de) 0.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est plus gros que $\mathbb{N}$. Ceci s'écrit en formule comme

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Le symbole $\subset$ est le symbole d'*inclusion*, qui se lit «est inclus dans». Si A et B sont des ensembles, on écrit $A \subset B$ lorsque tout élément de A est un élément de B. On a $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\mathbb{Z}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$, puisque par exemple le nombre -1 est dans $\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{N}$.

Il faut faire attention à ne pas confondre le symbole $\subset$ avec le symbole $\in$ qui lui ressemble. Le symbole $\in$ se lit «appartient à». Par exemple, la formule « $n \in \mathbb{N}$ » se lit « n appartient à $\mathbb{N}$ », c'est-à-dire que n est l'un des entiers qui sont dans la liste $\{0, 1, 2, \dots, \}$.

On a ainsi [1]

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$$

$$3 \in \mathbb{N}, \quad 3 \in \mathbb{Z}, \quad -4 \in \mathbb{Z}, \quad -4 \notin \mathbb{N}.$$

On continue notre visite du zoo des ensembles de nombres avec l'ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les *nombres rationnels*, c'est-à-dire de toutes les *fractions*. Ainsi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \text{quotients de la forme } \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

(On a pris soin de préciser $b \in \mathbb{Z}^*$ et non $b \in \mathbb{Z}$ afin de ne pas diviser par 0).

Remarque 1.1.1. On aurait pu aussi définir $\mathbb{Q}$ en demandant $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Vois-tu pourquoi ?

1. A l'inverse, une formule comme $5 \subset \mathbb{N}$ n'est ni vraie ni fausse, elle n'a *pas de sens* - on l'écrit en rouge pour insister. Un correcteur lisant cette formule va entrer dans le mode `syntax error`, ce qui est en général mauvais signe pour l'étudiant dont c'est la copie

Cette définition de $\mathbb{Q}$ pose une difficulté : en effet, un même nombre rationnel peut être représenté par plusieurs fractions. Par exemple, on a $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. On peut décrire précisément quand cela arrive. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $a' \in \mathbb{Z}$, $b' \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ si et seulement si } ab' = a'b.$$

Les mathématiciens utilisent souvent l'expression «si et seulement si», que tu peux écrire «ssi». Il faut bien comprendre son sens. Quand on écrit

$$P \text{ si et seulement si } Q,$$

cela veut dire deux choses à la fois. Tout d'abord,

$$\text{si } P \text{ est vraie, alors } Q \text{ est vraie,}$$

mais également

$$\text{si } Q \text{ est vraie, alors } P \text{ est vraie.}$$

Il y a un ensemble de nombres qu'il ne faut pas confondre avec $\mathbb{Q}$, c'est l'ensemble $\mathbb{D}$ de tous les nombres décimaux. Un nombre *décimal* est un nombre de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un nombre décimal s'écrit avec une suite finie de chiffres à droite de la virgule.

Par exemple le nombre $46,253$ est un nombre décimal car il peut s'écrire comme $\frac{46253}{10^3}$. Il est clair que tout nombre décimal est rationnel, c'est à dire que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. Cette inclusion est *stricte*, c'est-à-dire que $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$. En effet, il existe des rationnels non décimaux, comme la fraction

$$\frac{1}{3} = 0,\underbrace{333333333333333333333\ldots}_{\text{suite infinie de 3}}$$

Pour les mathématiciens, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est plus important que l'ensemble $\mathbb{D}$; en effet ce dernier fait jouer un rôle privélégié au nombre 10 sans justification autre que le fait que *Homo Sapiens* possède 10 doigts.

On arrive maintenant à l'ensemble qui donne le nom à ce chapitre, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un nombre réel est un nombre comme par exemple

$$-75,2828746\ldots$$

qui s'écrit en mettant bout à bout
— un signe $+$ ou $-$, que l'on sous-entend généralement lorsqu'il s'agit de $+$,
— un nombre entier,
— une virgule,
— une suite finie ou infinie de chiffres après la virgule.

Comme pour les rationnels, une difficulté vient du fait qu'un même nombre réel peut avoir plusieurs telles écritures. On a ainsi

$$+0 = -0 = 3.5 = 3.50000$$

$$1 = 0,\underbrace{9999999999999999999999999999999999\ldots}_{\text{suite infinie de 9}}$$

On n'insistera pas sur ces difficultés, qui seraient très problématiques si on voulait donner des *preuves* des propositions de la section suivante. Tu peux aller lire l'article `https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_r%C3%A9els` pour découvrir des façons plus efficaces que celle décrite ci-dessus d'introduire l'ensemble $\mathbb{R}$.

1.2 Opérations et relation d'ordre dans les réels

À l'école primaire, on apprend à ajouter, multiplier et comparer les entiers naturels. Ceci s'étend aux réels.

Proposition 1.2.1 (Addition et multiplication sur $\mathbb{R}$)**.** On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition (notée $+$) et une multiplication (notée $\times$ ou $\cdot$) qui prolonge l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes.

1. (Commutativité) pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, on a
$$a+b=b+a \text{ et } a\cdot b=b\cdot a.$$
2. (Associativité) pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, on a
$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ et } a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$
3. (Distributivité) pour tous a, b, c, on a
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$
4. (Éléments neutres ou absorbants) pour tout a dans $\mathbb{R}$, on a
$$a+0=a, \quad a\cdot 1=a, \quad a\cdot 0=0.$$

Démontrer la proposition serait fastidieux : il faudrait décrire un algorithme qui explique comment ajouter et multiplier deux nombres réels, puis vérifier toutes ces propriétés.

Proposition 1.2.2 (Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$)**.** On peut définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre, notée $\leqslant$, qui prolonge l'ordre de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes.

1. (Réflexivité) pour tout a dans $\mathbb{R}$, on a
$$a\leqslant a.$$
2. (Antisymétrie) pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,
$$\text{si } a\leqslant b \text{ et } b\leqslant a, \text{ alors } a=b.$$
3. (Transitivité) pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,
$$\text{si } a\leqslant b \text{ et } b\leqslant c, \text{ alors } a\leqslant c.$$
4. (Ordre total) pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, on a
$$a\leqslant b \text{ ou}^2 b\leqslant a.$$
5. (Compatibilité avec l'addition) pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,
$$\text{si } a\leqslant b \text{ alors } a+c\leqslant b+c.$$
6. (Compatibilité avec la multiplication par un réel **positif**) pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,
$$\text{si } a\leqslant b \text{ et } \boxed{c\geqslant 0}, \text{ alors } a\cdot c\leqslant b\cdot c.$$

1.3 Valeur absolue

Définition 1.3.1 (Valeur absolue)**.** Soit $x\in\mathbb{R}$, la valeur absolue, notée $|x|$ est définie ainsi :
$$|\, x\,| = \begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

2. pour les mathématiciens, le «ou» n'est pas exclusif, c'est-à-dire que «P ou Q» veut dire : soit P, soit Q, soit à la fois P et Q. Quand on dit «ou» dans la vie courante, c'est souvent implicitement exclusif. Ainsi un mathématicien pourra répondre «oui !» à des questions telles que «Est-ce une fille ou un garçon ?», «Fromage ou dessert ?», «Vous montez ou vous descendez ?»

Proposition 1.3.1. La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes, pour $\forall$ a,b $\in \mathbb{R}$:

1. $|a+b| \leqslant |a|+|b|$: **(Inégalité triangulaire)**
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a-b| \geqslant |a|-|b|$:**(Inégalité triangulaire inverse)**
4. $|a| = \sqrt{a^2}$

1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$) sans "trou"

Définition 1.4.1 (Intervalle)**.** Soit I $\subset \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle

$$\text{Si } \forall (x,y) \in I^2, \text{ alors } z \in I \text{ et } z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y$$

Proposition 1.4.1 (Intervalles de $\mathbb{R}$)**.** Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de type suivant :

- $\mathbb{R}$
- $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$
- $[a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$ ou $]a,b]$ (a, b) $\in \mathbb{R}$ avec a $<$ b $\in \mathbb{R}$
- $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$ avec a $\in \mathbb{R}$
- $\emptyset$, l'ensemble vide
- $\{a\}$ où a $\in \mathbb{R}$ **(un singleton)**

On a
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ tel\ que\ a \leqslant x < b\}$
$]-\infty,a]$=$\{x \in \mathbb{R}\ x \leqslant a\}$

1.5 Borne inférieure, borne supérieure

Soit A $\subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et m $\in \mathbb{R}$, un élément de $\mathbb{R}$
On dit que m est un majorant de A si

$$\forall x \in A,\ x \leqslant m$$

On dit que m est un minorant de A si

$$\forall x \in A,\ x \geqslant m$$

On dit qu'une partie de A $\subset \mathbb{R}$ est **majorée** si elle admet un **majorant**
On dit qu'une partie de A $\subset \mathbb{R}$ est **minorée** si elle admet un **minorant**
On dit qu'une partie de A $\subset \mathbb{R}$ est **bornée** si elle est **majorée et minorée**

Théorème 1.5.1 (Théorème de la borne supérieure)**.** Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ **non-vide** et **majorée** admet un **plus petit majorant** appelé la **borne supérieure** de A, notée : $\sup(A)$

Théorème 1.5.2 (Théorème de la borne inférieure)**.** Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ **non-vide** et **minorée** admet un **plus grand minorant** appelé la **borne inférieure** de A, notée : $\inf(A)$

Proposition 1.5.1. Par convention :

— Si A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide mais pas majorée : $\sup(A) = +\infty$.
— Si A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide mais pas minorée : $\inf(A) = -\infty$.

Remarque 1.5.1. Il n'y a pas de théorème sur les bornes dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.5.2 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et m un majorant de A.

$$m = \sup(A) \iff \forall \varepsilon > 0,]m - \varepsilon, m] \cap A \neq \emptyset$$

ε : Lettre grecque , "Epsilon" utilisée pour désigner un réel très petit.
$\cap$: désigne qu'il a une intersection entre deux parties, (éléments en communs)

Exemple 1.5.1. Si x $\in R$
— A = [0,2[x $\in$ A ssi x $\geqslant$ 0 et x $<$ 2
— B =]1,3[x $\in B$ ssi x $>$ 1 et x $<$3
— A $\cap$ B ssi (x $\geqslant$ 0) et x $<$ 2 ici et 1 $<$ x (et x $<$3) donc A$\cap$ B =]1,2[

Chapitre 2

Fonctions réelles

2.1 Fonctions

Définition 2.1.1 (Fonction)**.** Une fonction est la donnée de :
- Un ensemble de départ E
- Un ensemble d'arrivée F
- Une flèche : $f : E \to F$ à tout élément $x \in E$ associe un élément $f(x) \in F$

Exemple 2.1.1.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x + 3 \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$|\cdot| : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 2.1.1. $f_2 \neq f_3$ car leurs ensembles d'arrivée sont différents.

Remarque 2.1.2 (Vocabulaire)**.** Si $f : E \to F$ est une fonction, on appelle parfois l'ensemble de départ E, le domaine de f et l'ensemble d'arrivée F, le codomaine de f.

Remarque 2.1.3. Lorsque que $E = F = \mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$, on parle de fonction réelles.

2.1.1 Produit cartésien et graphe

Définition 2.1.2 (Produit cartésien)**.** Si E et F sont deux ensembles, on appelle $E \times F$ leur produit cartésien.

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$$

Remarque 2.1.4. On écrit E^2 plutôt que $E \times E$

Définition 2.1.3 (Graphe d'une fonction)**.** Si $f : E \to F$ est une fonction, son graphe est défini comme

$$Gr(f) = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \subset E \times F$$

Remarque 2.1.5. Le graphe d'une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$. On peut le dessiner.

Remarque 2.1.6. Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est le graphe d'une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si et seulement si toute droite verticale intersecte A en un unique point.

2.2 Fonctions injectives, surjectives et bijectives

Définition 2.2.1 (Image et antécédent)**.** Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction. Si $x \in E$ et $y \in F$ vérifient $y = f(x)$ on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f.

Remarque 2.2.1. Les articles "l'" et "un" sont importants. Chaque image peut avoir plusieurs antécédents mais un antécédent a au plus une image.

Exemple 2.2.1.
Pour la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$
$y = 4$ a deux antécédents : $x = 2$ ou $x = -2$ mais $y = -4$ n'a pas d'antécédent.

Définition 2.2.2 (Surjectivité)**.** On dit qu'une fonction est **surjective** ou une **surjection** si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f.

$$\{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\} \iff f : E \to F \text{ est surjective}$$

Exemple 2.2.2.
$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$, n'est pas surjective, 0 n'a pas d'antécédent.
$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$, est surjective, un antécédent de $y \in \mathbb{R}^*$ est $\frac{1}{y}$

Remarque 2.2.2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est surjective $\iff$ toute ligne horizontale rencontre le graphe $Gr(f)$

Définition 2.2.3 (Injectivité)**.** On dit que $f : E \to F$ est **injective** (**une injection**) si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f. Ceci revient à dire :

$$\text{f injective} \iff \{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\}$$

Ou encore :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Remarque 2.2.3. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective si et seulement si toute ligne horizontale rencontre $Gr(f)$ en 0 ou 1 point.

Définition 2.2.4 (Bijectivité)**.** Une fonction $f : E \to F$ est **bijective** (**une bijection**) si elle est **injective** et **surjective**.
Cela revient à dire que tout élément de F admet exactement 1 antécédent positif.

$$\text{f bijective} \iff \{\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)\}$$

Définition 2.2.5 (Bijection réciproque)**.** Lorsque $f : E \to F$ est une bijection. On peut définir :

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \to E \\ y & \mapsto \text{ l'unique antécédent de } y \end{cases}$$

La fonction f^{-1} est une bijection, que l'on appelle bijection réciproque de f.

Exemple 2.2.3.
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ une fonction bijective.
Sa fonction réciproque est la fonction $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

Remarque 2.2.4. Ne pas confondre réciproque et inverse, la fonction inverse de f n'est pas f^{-1} mais $\frac{1}{f}$

Proposition 2.2.1. Si $f : E \to F$ est bijective,

$$\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$$

2.3 Composition

Définition 2.3.1 (Composition de fonctions)**.** Soient E, F, G des parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit la composée de g par f, notée $g \circ f$ ("g rond f") comme :

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to G \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. La composée de $g \circ f$ n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g.

Définition 2.3.2 (Fonction identité)**.** On appelle fonction identité de E

$$id_E : \begin{cases} E & \to F \\ x & \mapsto x \end{cases}$$

Proposition 2.3.1. Si $f : E \to F$ est une bijection :

$$f^{-1} \circ f = id_E$$
$$f \circ f^{-1} = id_F$$

Exemple 2.3.1.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x+2 \end{cases}$$

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x)+2 \end{cases} \qquad f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x+2) \end{cases}$$

$$f \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(\sin(x)) \end{cases} \qquad g \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x+2)+2 = x+4 \end{cases}$$

2.4 Image directe, image réciproque

Définition 2.4.1 (Image directe)**.** Soit $f : E \to F$ une fonction et A une partie de E. On définit l'image directe de A par f comme :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}, \; f(A) \subset F$$

Définition 2.4.2 (Image réciproque)**.** Si B est une partie de F. On décrit l'image réciproque de B par f comme :

$$f^{-1}(B) = \{\forall x \in E, \; f(x) \in B\}, \; f^{-1} \subset E$$

Exemple 2.4.1.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

— $f([1;2]) = [1;4]$
— $f^{-1}([-1;2]) = [-\sqrt{2};-1] \cup [1;\sqrt{2}]$
— $f(]-2;1[) = [0;4[$
— $f^{-1}(]-2;1[) =]-1;1[$

Remarque 2.4.1. L'image réciproque $f^{-1}(B)$ est toujours définie même si f n'est pas supposé bijective.

Remarque 2.4.2. Si f est bijective, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est aussi l'image directe de B par f^{-1}

Proposition 2.4.1 (Propriétés sur les images directes et réciproques)**.** Soient $f : E \to F$ une fonction, $A_1 \subset E, A_2 \subset E$ et $B_1 \subset F, B_2 \subset F$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Remarque 2.4.3. La proposition $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ est fausse.
Contre-exemple : $A_1 = [1;2], A_2 =]-2;1[$ et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

- $f(A_1) = [1;4],\ f(A_2) = [0;4[$
- $f(A_1) \cap f(A_2) = [1;4[$
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$
- $\emptyset \neq [1;4[$

2.5 Opérations sur les fonctions

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R},\ g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions

Proposition 2.5.1 (Somme de fonctions)**.**

$$f + g : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$$

Proposition 2.5.2 (Produit de fonctions)**.**

$$fg : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x)g(x) \end{cases}$$

Proposition 2.5.3 (Quotient de fonctions)**.** Si $g(x)$ ne s'annule pas sur A $\iff g(A) \subset \mathbb{R}^*$

$$\frac{f}{g} : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

2.6 Propriétés sur les fonctions

Définition 2.6.1 (Fonction majorée)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est majorée sur I si l'ensemble $f(I)$ est majoré.

$$f \text{ est majorée sur I} \iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leqslant m$$

Définition 2.6.2 (Fonction minorée)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est minorée sur I si l'ensemble $f(I)$ est minoré.

$$f \text{ est minorée sur I} \iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geqslant m$$

Définition 2.6.3 (Fonction bornée)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est bornée sur I si l'ensemble $f(I)$ est borné.

$$f \text{ est bornée sur I} \iff \exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, m_1 \leqslant f(x) \leqslant m_2$$

Définition 2.6.4 (Fonction croissante)**.** Soit f une fonction, on dit que f est croissante si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

Définition 2.6.5 (Fonction décroissante)**.** Soit f une fonction, on dit que f est décroissante si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$$

Définition 2.6.6 (Fonction monotone)**.** On dit qu'une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 2.6.7 (Fonction strictement croissante)**.** Soit f une fonction, on dit que f est strictement croissante si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$$

Définition 2.6.8 (Fonction strictement décroissante)**.** Soit f une fonction, on dit que f est strictement décroissante si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$$

Définition 2.6.9 (Fonction strictement monotone)**.** On dit qu'une fonction est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 2.6.1.
- Une fonction est croissante si toute droite passant par deux points de son graphe a un coefficient directeur positif.
- Une fonction est décroissante si toute droite passant par deux points de son graphe a un coefficient directeur négatif.

Supposons qu'un intervalle I est symétrique, c'est-à-dire que :

$$x \in I \iff -x \in I$$

Définition 2.6.10 (Fonction paire)**.** On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est paire si :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(-x)$$

Définition 2.6.11 (Fonction impaire)**.** On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est impaire si :

$$\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$$

Remarque 2.6.2. Si f est impaire alors $f(0) = 0$

Définition 2.6.12 (Fonction T-périodique)**.** Soit $T > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(x + nT) = f(x)$$

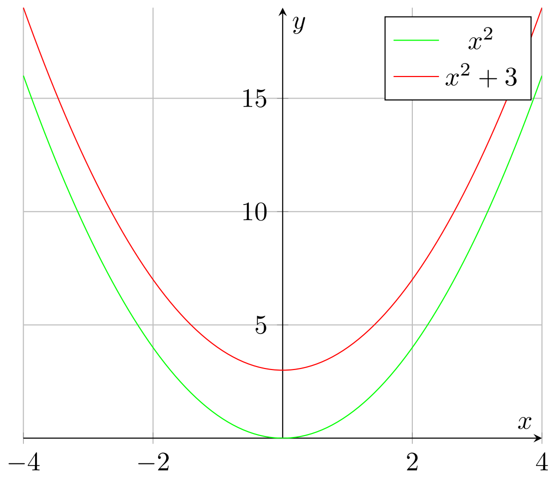
2.7 Propriétés géométriques du graphe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

— $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) + a,\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$

$Gr(f_1)$ se déduit de $Gr(f)$ par translation de vecteur $a\vec{j}$, (j est le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées).

$$\begin{aligned} (x, y) \in Gr(f_1) &\iff y = f_1(x) \\ &\iff y = f(x) + a \\ &\iff y - a = f(x) \\ &\iff (x, y - a) \in Gr(f) \end{aligned}$$



— $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x + a),\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$

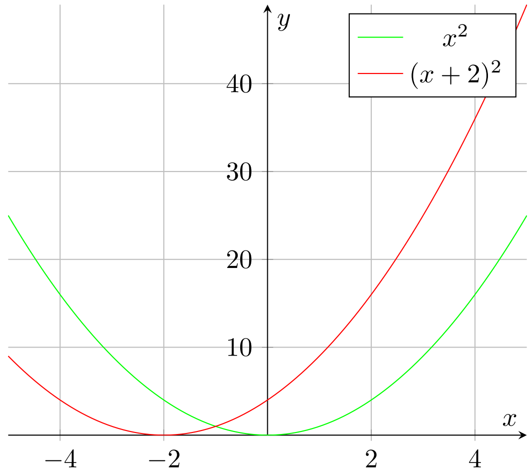
$Gr(f_2)$ se déduit de $Gr(f)$ par translation de vecteur $-a\vec{i}$, (i est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses).

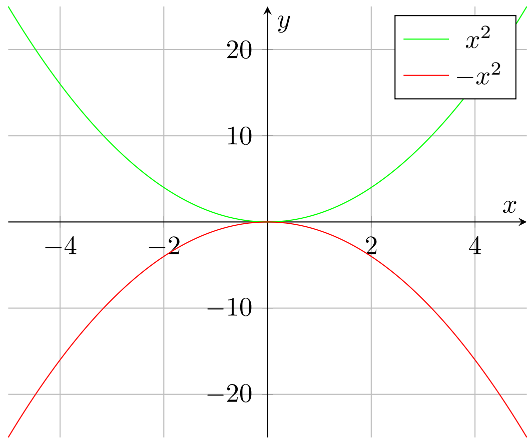
$$\begin{aligned} (x, y) \in Gr(f_2) &\iff y = f_2(x) \\ &\iff y = f(x + a) \\ &\iff (x + a, y) \in Gr(f) \end{aligned}$$

— $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -f(x) \end{cases}$

$Gr(f_3)$ se déduit de $Gr(f)$ par symétrie axiale par rapport à l'axe horizontal.

$$\begin{aligned} (x, y) \in Gr(f_3) &\iff y = f_3(x) \\ &\iff y = -f(x) \\ &\iff (x, -y) \in Gr(f) \end{aligned}$$

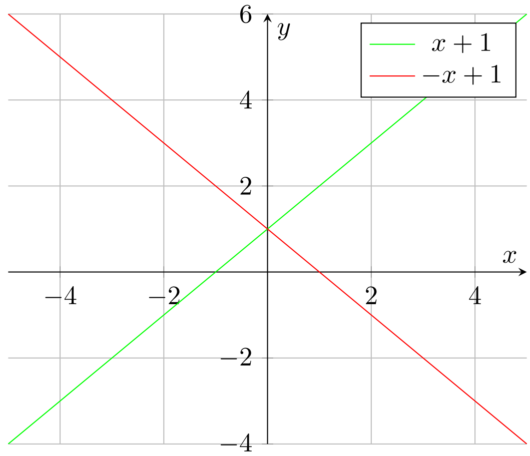




— $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(-x) \end{cases}$

$Gr(f_4)$ se déduit de $Gr(f)$ par symétrie axiale par rapport à l'axe vertical.

$$\begin{aligned} (x,y) \in Gr(f_4) &\iff y = f_4(x) \\ &\iff y = f(-x) \\ &\iff (-x,y) \in Gr(f) \end{aligned}$$



— f est paire $\iff Gr(f)$ subit une symétrie axiale par rapport à (O_y)
— f est impaire $\iff Gr(f)$ subit une symétrie centrale par rapport à l'origine du repère

2.8 Dérivation

Définition 2.8.1 (Dérivabilité)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **dérivable** si $\forall x \in I$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe}$$

On la note $f'(x)$ et f' s'appelle la dérivée de f.
Graphiquement $f'(x)$ est la pente de la tangente en $(x, f(x))$ au graphe de f.

Proposition 2.8.1 (Propriété fondamentale)**.** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérviable
- f est croissante $\iff f' \geqslant 0$
- f est décroissante $\iff f' \leqslant 0$
- Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante
- Si $f' < 0$ alors f est strictement décroissante

Proposition 2.8.2 (Formules de dérivation)**.** Soient I un intervalle et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $t \in \mathbb{R}$
On a les formules suivantes :
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(tf)' = tf'$

Proposition 2.8.3 (Dérivation d'une fonction composée)**.** Soient I et J deux intervalles
Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$$

Chapitre 3

Fonctions usuelles

3.1 Fonctions polynomiales

Définition 3.1.1 (Fonction polynomiale)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels.
La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \end{cases}$$

est une fonction polynomiale de degré n.
Cette fonction est dérivable.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

Remarque 3.1.1. La somme, le produit et la composition de fonctions polynomiales sont des fonctions polynomiales.

Proposition 3.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré n

— $n = 0$, on obtient les fonctions constantes, pour $a_0 \in \mathbb{R}$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a_0 \end{cases}$$

— $n = 1$, on obtient les fonctions affines, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + b \end{cases}$$

— $n = 2$, on obtient les fonctions trinômes, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Remarque 3.1.2.

— Les fonctions constantes sont les seules fonctions à la fois croissantes et décroissantes.
— Une fonction dérivable de dérivée nulle est constante.
— Une fonction dérivable de dérivée constante est affine.

3.2 Fonction partie entière E

Définition 3.2.1 (Fonction partie entière E).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! E(x) \in \mathbb{Z}, E(x) \leqslant x < E(x+1)$$

$E(x)$ est la partie entière de x

$$E : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{Z} \\ x & \mapsto E(X) \end{cases}$$

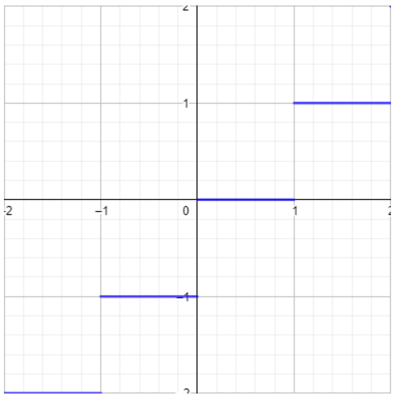


Figure 3.1 – Partie entière

Remarque 3.2.1.
- E est croissante.
- E est non-continue en tout point de $\mathbb{Z}$.
- $x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique.
- $E^{-1}(\{0\}) = [0, 1[$.

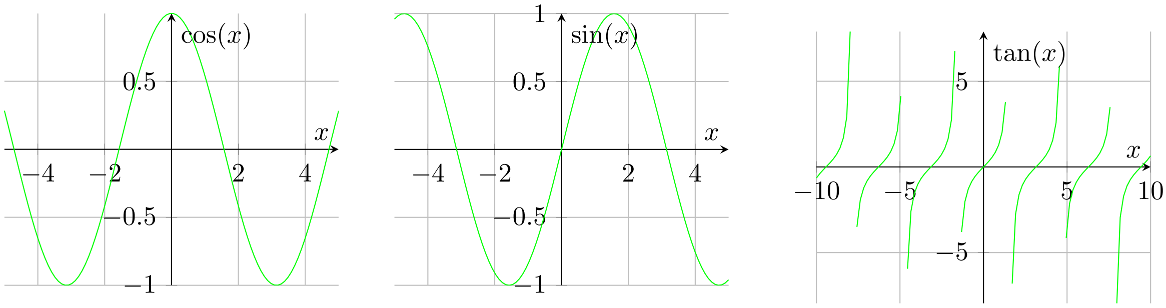
3.3 Fonctions trigonométriques

Fonction	$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos x \end{cases}$	$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin x \end{cases}$	$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$
Parité	Paire	Impaire	Impaire
Périodicité	2π-périodique	2π-périodique	π-périodique
Dérivée	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Primitive	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$

Table 3.1 – Fonctions trigonométriques

Remarque 3.3.1. On peut éventuellement considérer l'ensemble d'arrivée de sin et cos comme étant $[-1, 1]$

Proposition 3.3.1 (Formules trigonométriques). $\forall x \in \mathbb{R}$ (il est possible de retrouver ces formules géométriquement)
- $\cos x = \cos(-x)$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$



(a) Fonction $\cos x$ (b) Fonction $\sin x$ (c) Fonction $\tan x$

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

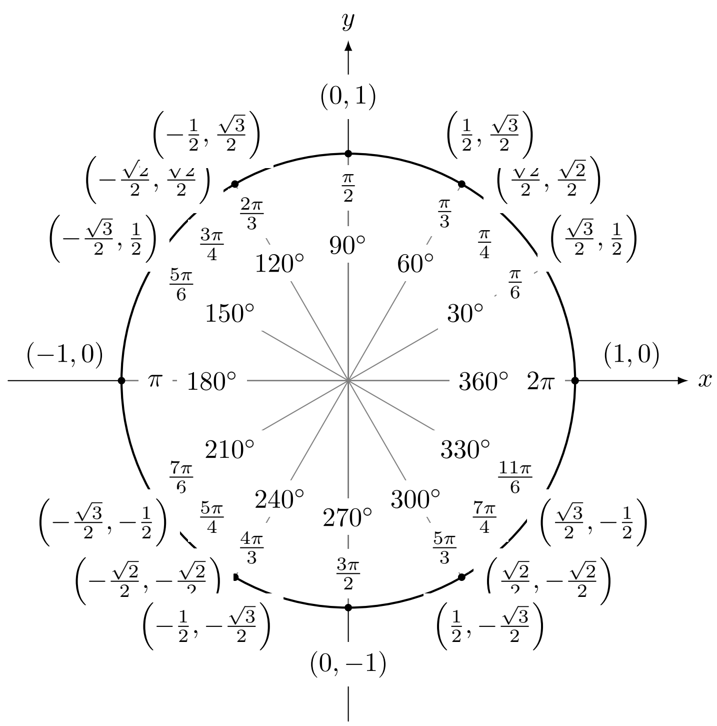


FIGURE 3.3 – Cercle trigonométrique : [1]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^2 x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

TABLE 3.2 – Valeurs remarquables

Proposition 3.3.2 (Formules d'addition)**.** $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Remarque 3.3.2. En particulier pour $a = b$
- $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

On en déduit :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Remarque 3.3.3 (Mnémotechnique)**.**
"cosinus est une fonction **raciste** et **menteuse**"
- **Menteuse** : Elle change le signe
- **Raciste** : Elle ne mélange pas sinus et cosinus

3.4 Fonctions trigonométriques réciproques

Remarque 3.4.1. On cherche à changer l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre les fonctions trigonométriques bijectives.

Proposition 3.4.1. Les fonctions :
- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$
- $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$
- $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

sont bijectives.

Proposition 3.4.2. On peut définir leurs bijections réciproques :
- $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
- $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Proposition 3.4.3. On a alors :
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x$

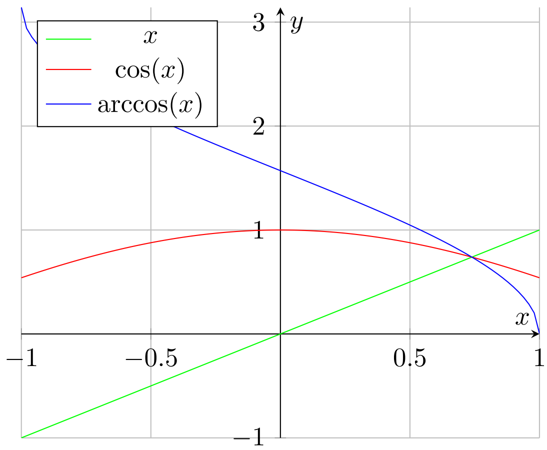
Proposition 3.4.4.

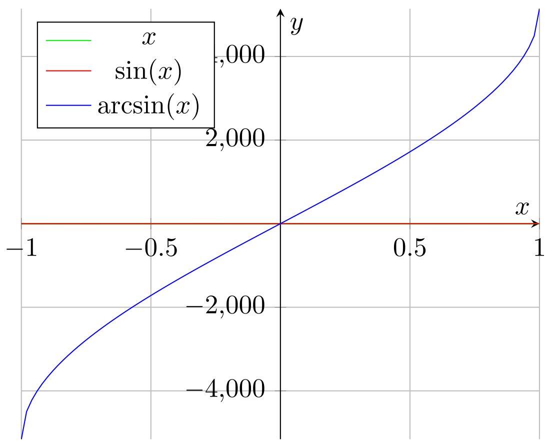
$$\forall y \in [-1,1] \begin{cases} \sin(\arcsin y) = y \\ \cos(\arccos y) = y \end{cases}$$
$$\forall y \in \mathbb{R} \tan(\arctan y) = y$$

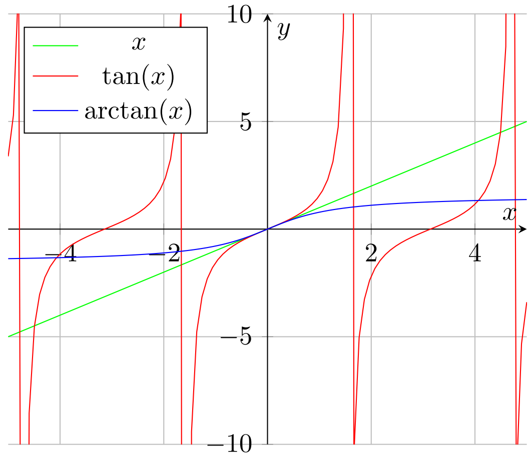
Remarque 3.4.2. Les graphes des fonctions réciproques s'obtiennent par réflexion par rapport à la droite $y = x$

Proposition 3.4.5. Valeurs remarquables

- $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(0) = 0$
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$
- $\arccos(1) = 0$
- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
- $\arccos(-1) = \pi$







Fonction	arcsin	arccos	arctan
Monotonie	Croissante	Décroissante	Croissante
Parité	Impaire	$\emptyset$	Impaire

TABLE 3.3 – Monotonie et parité des fonctions trigonométriques réciproques

Proposition 3.4.6 (Limite de arctan)**.**

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Proposition 3.4.7 (Dérivées)**.**

1. $\forall x \in]-1,1[\ \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\forall x \in [-1,1] \ \ \arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
&\forall y \in [-1,1] \text{ on a : } \sin(\arcsin(y)) = y\\
&\text{Donc on a : } \cos^2(\arcsin(y)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(y))}_{=y^2} = 1\\
&\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2\\
&\arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ donc } \cos(\arcsin(y)) > 0\\
&\text{on en déduit } \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}\\
&\text{En dérivant on obtient : } \arcsin'(y) \times \underbrace{(-\sin(\arcsin(y)))}_{-y} = -\frac{2}{2\sqrt{1-y^2}}\\
&\arcsin'(y)y = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\\
&y \neq 0, \ \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

□

Démonstration. 2. Même principe que pour la 1. □

Démonstration. 3. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\arctan'(x)\tan'(\arctan(x)) = 1\\
\iff &\arctan'(x)(1+\tan^2(\arctan(x))) = 1\\
\iff &\arctan'(x)(1+x^2) = 1
\end{aligned}$$

Comme $1 + x^2 > 0$ on en déduit :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

□

3.5 Fonctions exponentielle et logarithme

Théorème 3.5.1. Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est la fonction exponentielle, notée :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto \exp(x) \text{ ou } e^x \end{cases}$$

Proposition 3.5.1 (Monotonie de la fonction exponentielle)**.** La fonction exponentielle est strictement croissante et $\exp(0) = 1$

Proposition 3.5.2 (Limites de la fonction exponentielle)**.**

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Proposition 3.5.3 (Propriétés de la fonction exponentielle)**.** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Définition 3.5.1 (Logarithme néperien)**.** La fonction exponentielle est bijective, on définit sa bijection réciproque :

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x)$ est l'unique réel tel que $\exp(\ln(x)) = x$
On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}, \ln(\exp(y)) = y$.

Proposition 3.5.4 (Monotonie du logarithme néperien)**.** La fonction logarithme néperien est croissante et $\ln(1) = 0$.

Proposition 3.5.5 (Limites du logarithme néperien)**.**

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

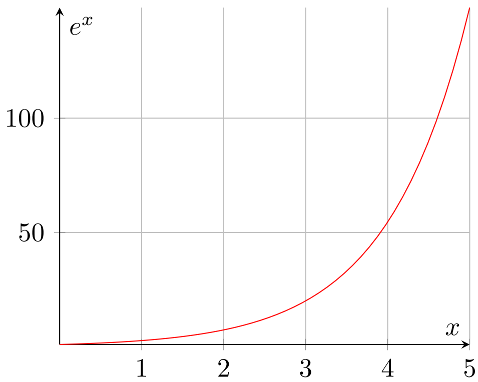
Proposition 3.5.6 (Propriétés fondamentales)**.** $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Proposition 3.5.7 (Dérivée de la fonction ln)**.** La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$

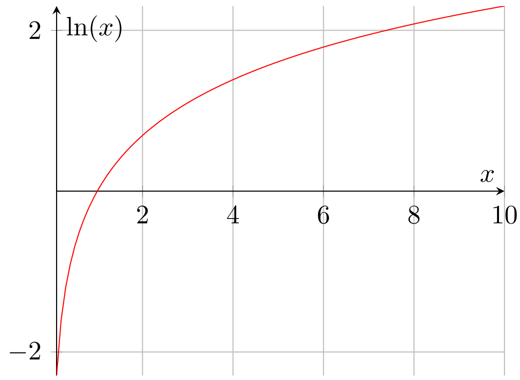
Démonstration. On dérive la relation $\exp(\ln(x)) = x$

$$\begin{aligned}
&\ln'(x)\exp'(\ln(x)) = 1\\
&\ln'(x)\exp(\ln(x)) = 1\\
&\ln'(x)x = 1\\
&\ln'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$\square$



(a) Fonction exponentielle



(b) Fonction logarithme népérien

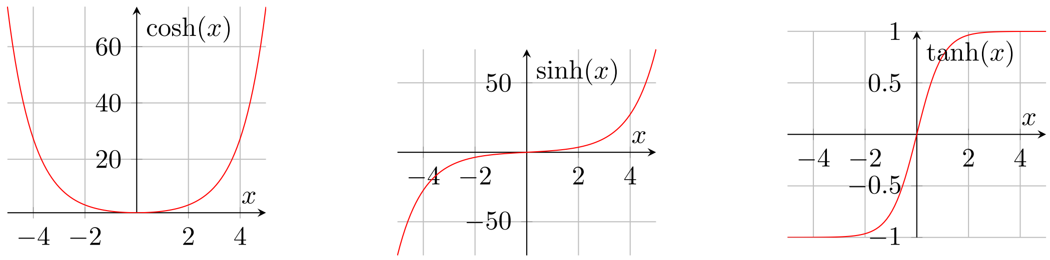
3.6 Fonctions hyperboliques

Définition 3.6.1 (Fonctions hyperboliques)**.** On définit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Remarque 3.6.1. $\cosh = \text{ch}, \ \sinh = \text{sh}, \ \tanh = \text{th}$

Fonction	ch	sh	th
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	paire	impaire	impaire
Dérivée	sh	ch	$1 - \text{th}^2$
$\lim_{+\infty}$	$+\infty$	$+\infty$	1
$\lim_{-\infty}$	$+\infty$	$-\infty$	-1



(a) Fonction cosh [3] (b) Fonction sinh [3] (c) Fonction tanh [3]

Proposition 3.6.1. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Proposition 3.6.2. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$$

Démonstration. $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$

$$\begin{aligned}\tanh'(x) &= \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)\end{aligned}$$

□

Proposition 3.6.3. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \exp(x)$$
$$\cosh(x) - \sinh(x) = \exp(-x)$$

On dit que cosh est la partie paire et sinh la partie impaire de l'exponentielle.

Proposition 3.6.4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
2. $\sinh(x + y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\
&= \frac{e^xe^y+e^xe^{-y}+e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}}{4}+\\
&\quad \frac{e^xe^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}}{4}\\
&= \frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}\\
&= \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.6.2. En prenant $y = x$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2(x)+\sinh^2(x)\\
&= 1+2\sinh^2(x)\\
&= 2\cosh^2(x)-1\\
\sinh(2x) &= 2\cosh(x)\sinh(x)
\end{aligned}$$

Remarque 3.6.3. On verra avec les complexes :

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$$

qui expliquent la parenté entre cos / cosh et sin / sinh

3.7 Fonctions puissance

Dans quel cas peut-on définir x^a ?

1. Si $a \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$x^a = \underbrace{x \times x \times \cdots x}_{a\ fois}$$

Par convention $x^0 = 1$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^a \end{cases}$$

est la fonction polynomiale de même parité que a.

2. Si $a \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ et $x \neq 0$ On pose

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}$$

3. Si $a = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
   — est la racine n-ième de x
   — x^a est toujours défini quand $x \geqslant 0$, comme l'unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^n = x$
   — Si n est impair : x^a est défini pareillement pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. Si $a \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, +\infty[$ On pose : $x^a = \exp(a \ln x)$
   Les propriétés suivantes sont vraies dans tous les cas :
   — $1^a = 1$
   — $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
   — $(xy)^a = x^a y^a$
   — $(x^a)^b = x^{ab}$
   Si $x = e$, on retrouve la formule : $\exp(a)^b = \exp(ab)$

Proposition 3.7.1 (Dérivée de la fonction puissance)**.** Soit la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^a \end{cases}$$

f est dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{x} \exp(a \ln a) \\ &= ax^{-1}x^a \\ &= ax^{a-1} \end{aligned}$$

Exemple 3.7.1. Quelle est la dérivée de $g : x \mapsto 2^x$?
On a : $g(x) = \exp(x \ln(2))$

$$g'(x) = \ln(2) \exp(x \ln(2))$$
$$g'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$$

Théorème 3.7.1 (Croissances comparées)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln x)^c} = +\infty$$

Chapitre 4

Suites réelles

4.1 Définitions

Définition 4.1.1 (Suite réelle)**.** On appelle **suite réelle** une fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction $x \mapsto u_n$

Exemple 4.1.1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 7$$

— $u_0 = 7$
— $u_1 = 10$
— $u_2 = 13$

Remarque 4.1.1. On met des parenthèses pour parler de la suite dans son intégralité. On ne met pas de parenthèses pour parler d'un seul terme de la suite.

Remarque 4.1.2. On peut définir une suite par récurrence.

Exemple 4.1.2.

$$\forall n \geqslant 1 : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{3} \end{cases}$$

Remarque 4.1.3. Le vocabulaire des fonctions s'applique aussi aux suites.

Définition 4.1.2 (Monotonie d'une suite)**.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
— On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$
— On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$
— $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
— $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$
— $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$

Remarque 4.1.4. Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante $\iff \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \leqslant n \implies u_m \leqslant u_n$ On dit aussi que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 4.1.5. L'ensemble d'indices est parfois $\mathbb{N}^*$ plutôt que $\mathbb{N}$, d'où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On peut aussi avoir $(u_n)_{n\geqslant 2}$. Les résultats du cours seront énoncés par des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ mais aussi valables pour des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$

Remarque 4.1.6. Soit $P(x)$ une propriété qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On dit que $P(n)$ est vraie **à partir d'un certain rang**, si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 4.1.3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 10n$

— $u_0 = 1$
— $u_1 = -8$
— $u_2 = -16$
— $u_3 = -22$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas croissante. Mais elle est croissante à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - 10(n+1) - 2^n + 10n \\ &= u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 2^n - 2^n - 10 \\ &= u_{n+1} - u_n = 2^n - 10 \text{ qui est } \geqslant 0 \text{ pour } n \geqslant 4\end{aligned}$$

Proposition 4.1.1 (Propriétés des suites)**.** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites. On peut former :

— La somme : $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$
— Le produit : $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$
— Pour $\lambda \in \mathbb{R}, (\lambda u_n)_{n\geqslant 0}$

4.1.1 Suites classiques

Proposition 4.1.2 (Suite arithmétique)**.** Suite arithmétique de progression $r \in \mathbb{R}$ donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ est la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0 + nr$$

On peut aussi calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(u_0 + kr) \\ &= (n+1)u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Proposition 4.1.3 (Suite géométrique)**.** Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$ donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n, \forall n \in \mathbb{N}$ On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$ On peut aussi calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k \\ &= u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1$$

On a :

$$\text{Si } q \neq 1 : \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\text{Si } q = 1 : \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$$

Proposition 4.1.4 (Suite arithmético-géométrique)**.** Suites arithmético-géométrique de progression $r \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}^*$ donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$ Comment calculer u_n ?

— Si $q = 1$ c'est une suite arithmétique

— Si $q \neq 1$, on cherche le réel a tel que $a = qa + r$ et on regarde la suite $(u_n - a)_{n \geqslant 0}$

$$\begin{aligned} a = qa + r &\iff a - qa = r \\ &\iff a = \frac{r}{1-q} \text{ (Possible car } q \neq 1) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= qu_n + r \\ u_{n+1} - a &= qu_n + r - a \\ v_{n+1} &= q(v_n + a) + r - a \\ &= qv_n + \underbrace{qa + r - a}_{=0} \end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison q, donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 q^n \\ &= (u_0 - a)q^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + a \\ u_n &= a + (u_0 - a)q^n \end{aligned}$$

4.2 Convergence d'une suite

Définition 4.2.1. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \text{ ou } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Remarque 4.2.1. ε : epsilon s'utilise pour un réel > 0 petit

Remarque 4.2.2. La valeur de N dépend de ε car le $\exists$ vient après le $\forall$

Remarque 4.2.3. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ revient à dire que $-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon$ ou encore $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ ou bien $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ Ainsi, dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ revient à dire que tout intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient les termes de $(u_n)_{n \geqslant 0}$ à partir d'un certain rang.

Exemple 4.2.1. La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ tend vers 0.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ Si $\ell = 0$

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon &\iff \left|\frac{1}{n+1}\right| \leqslant \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} \leqslant n + 1 \end{aligned}$$

Posons $N = E(\frac{1}{\varepsilon})$ alors $N \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < N+1$ et alors :

$$\forall n \geqslant N, n+1 \geqslant N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

donc $n+1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ et $|u_n - \ell| < \varepsilon$ On a bien vérifié que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ □

Remarque 4.2.4. Pour démontrer une assertion de type $\forall \varepsilon > 0 \ldots$ on commence par "Soit $\varepsilon > 0$"

Exemple 4.2.2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si n pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si n impair} \end{cases}$$

La suite tend vers 0

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ Posons : $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, alors $\frac{1}{\varepsilon} \leqslant N$
Soit $n \geqslant N$

- Si n est pair : $|u_n - 0| = 0 < \varepsilon$
- Si n est impair : $|u_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ □

Définition 4.2.2. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si $\exists \ell \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\infty\}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge } \iff \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Sinon on dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge } \iff \forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ ne converge pas vers } \ell &\iff \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| > \varepsilon \\ &\iff \exists \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } |u_n - \ell| > \varepsilon\} \\ &\quad \text{est un ensemble infini} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est fini}$$

Exemple 4.2.3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si n pair} \\ -1 & \text{si n impair} \end{cases}$$

Cette suite diverge.
En effet, soit $\ell \in \mathbb{R}$

- Si $\ell < 0$

  $$|u_n - \ell| = |1 - \ell| \geqslant 1$$

  quand n est pair et donc aucun nombre pair n vérifie

  $$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$$

  et donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers ℓ puisque l'ensemble

  $$\left\{ n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| > \frac{1}{2} \right\}$$

  est infini.
- Si $\ell > 0$, de même $|u_n - \ell| \geqslant 1$ pour n impair et donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers ℓ

Théorème 4.2.1 (Unicité de la limite)**.** La limite d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique. Pour $\forall(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2 \text{ alors } \ell_1 = \ell_2$$

Démonstration. Procédons à un raisonnement par l'absurde.

On suppose que $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2| > 0$.
D'après la définition de limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$ Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$$
$$|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Alors $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n + \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$. On en déduit $\frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 0$, ce qui est absurde.
Ainsi, on a montré que $\ell_1 = \ell_2$ □

Théorème 4.2.2. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
On applique la définition de convergence avec $\varepsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant 1 \vee \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

Posons $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, \ell + 1)$ et $m = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, \ell - 1)$.

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N} \\
&\text{Si } n < N, m \leqslant u_n \leqslant M \\
&\text{Si } n > N, m \leqslant \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1 \leqslant M
\end{aligned}$$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par M et minorée par m, elle est donc bornée. □

Remarque 4.2.5. La réciproque n'est pas vraie, il existe des suites bornées non convergentes comme par exemple : $u_n = (-1)^n$

4.2.1 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 4.2.3. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes.
On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1, \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2, (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$
Posons :

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} > 0, \text{ avec } |\alpha| + |\beta| > 0$$

Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon'$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$, alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon' \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

Alors

$$\begin{aligned}|\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)| &= |\alpha(u_n - \ell_1) + \beta(v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |\alpha||u_n - \ell_1| + |\beta||v_n - \ell_2| \\ &\leqslant (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon' = \varepsilon\end{aligned}$$

On a montré que $\alpha u_n + \beta v_n$ converge vers $\alpha\ell_1 + \beta\ell_2$. □

Remarque 4.2.6. En particulier :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ convergente et } (v_n)_{n\geqslant 0} \text{ convergente } \implies (u_n + v_n)_{n\geqslant 0} \text{ convergente}$$

La réciproque est fausse :
$u_n = n$ divergente et $v_n = -n$ divergente mais $u_n + v_n = 0$ convergente.

Théorème 4.2.4. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1, \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors la suite $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell_1\ell_2$

Démonstration. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, elle est bornée.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Posons

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M + |\ell_2|} > 0$$

Par définition de la limite

$$\exists N_1, \forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon'$$
$$\exists N_2, \forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon' \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

Par le calcul préliminaire :

$$|u_n v_n - \ell_1\ell_2| < \varepsilon'(M + |\ell_2|) = \varepsilon$$

□

Théorème 4.2.5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui ne s'annule pas et qui converge vers $\ell \neq 0$. Alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$
On pose $\varepsilon' = \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon > 0$
Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell, \exists N_1, \forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Par ailleurs, posons $\varepsilon'' = \frac{|\ell|}{2} > 0$
Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell, \exists N_2, \forall n \geqslant N_2, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon''$ implique $|u_n| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| \geqslant |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$
Si $n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'$ et $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$, alors :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| - |\ell|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|\ell|\frac{|\ell|}{2}} = \frac{2\varepsilon'}{|\ell|^2} = \varepsilon$$

On a montré que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ □

Remarque 4.2.7.
— On peut avoir $u_n > 0$ est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ exemple : $u_n = \frac{1}{n}$.
— Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang

4.2.2 Suites et inégalités

On peut passer à la limite dans les inégalités larges.

Théorème 4.2.6. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites convergentes et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration. Posons

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_n$$
$$\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

On veut montrer $\ell_1 \leqslant \ell_2$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell_2 < \ell_1$.
Posons :

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$$

On a $\ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon$.
Comme $u_n \to \ell_1, \exists N_1, \forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
Comme $v_n \to \ell_2, \exists N_2, \forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Soit $n \leqslant \max(N_1, N_2)$, alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ donc } u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon$$
$$|v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon \text{ donc } v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Alors $v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n$ donc $v_n < u_n$ il y a donc une contradiction. □

Remarque 4.2.8. Les inégalités strictes deviennent larges à la limite.

Exemple 4.2.4. $n \geqslant 1, u_n = \frac{1}{2n}, v_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Corollaire 4.2.1. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$, alors $\ell \leqslant M$
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$, alors $\ell \geqslant m$

Démonstration. On applique le théorème au cas où une des suites est constante. □

Théorème 4.2.7 (Théorème des gendarmes)**.** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n\geqslant 0}, (w_n)_{n\geqslant 0}$ des suites.
On suppose que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists N_1, \forall n \geqslant N_1, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$
$\exists N_2, \forall n \geqslant N_2, \ell - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$
Si $n \geqslant N$ $\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$ □

Exemple 4.2.5. Soit $v_n = \frac{\sin n}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} = 0$.
Par le théorème des gendarmes, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

4.2.3 Convergence et monotonie

Il existe :
— des suites monotones non convergentes
 Exemple 4.2.6. $u_n = n$
— des suites convergentes non monotones
 Exemple 4.2.7. $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Théorème 4.2.8. Toute suite croissante majorée converge.
De même, toute suite décroissante minorée converge.

Remarque 4.2.9. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante majorée. La preuve (hors-programme) consiste à montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la borne supérieure : $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.}_{<+\infty \text{ car } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est majorée}}$

Théorème 4.2.9 (Théorème des suites adjacentes)**.** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites telles que :

1. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante
2. $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante
3. $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration. Posons $w_n = v_n - u_n$.
La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et est décroissante.
Ceci implique $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant v_n$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par v_0, donc elle converge.
La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge.
Posons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 = \ell_2 - \ell_1$, alors $\ell_2 = \ell_1$
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
— $u_n \leqslant \ell_1$ car (u_n) est croissante
— $v_n \geqslant \ell_2$ car (v_n) est décroissante

□

Remarque 4.2.10. Si on suppose de plus que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent, on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Exemple 4.2.8. $u_n = n$ et $v_n = n + \frac{1}{n}$

1. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante
2. $(v_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas décroissante
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Mais on ne peut pas écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exemple 4.2.9. Moyenne arithmético-géométrique
Soit $a, b \geqslant 0$, $\frac{a+b}{2}$ moyenne arithmétique, $\sqrt{ab}$ moyenne géométrique.
On a $\forall a, b \geqslant 0, \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
En effet :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$$
$$a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$$
$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \tag{4.1}$$

Supposons $a \leqslant b$ et définissons deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = a$ et $v_0 = b$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite à l'aide du théorème des suites adjacentes.
Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leqslant v_n$$

Cela est vrai si $n = 0$ car $a < b$ Si $n > 0$ en appliquant (4.1) a u_{n-1} et v_{n-1}
Vérifions que u_n est croissante, puis que v_n est croissante et que $(v_n - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n v_n} - u_n \\ &= \sqrt{u_n}\,(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Car $v_n \geqslant u_n$. (u_n) est donc croissante

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Car $v_n \geqslant u_n$. (v_n) est donc décroissante

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &\leqslant v_{n+1} - u_n \text{ car } u_n \leqslant u_{n+1} \\ &\leqslant \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &\leqslant \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur n la propriété

$$P_n = "v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}"$$

— P_0 est vraie

— Supposons que P_n vraie pour un entier n. Alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant \frac{\frac{v_0 - u_0}{2^n}}{2} = \frac{v_0 - u_0}{2^{n+1}}$$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant v_n u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2} = \frac{b - a}{2}$$

Comme

$$\lim_{n \to +\infty} 0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{b - a}{2} = 0$$

par le théorème des gendarmes, on a :

$$(v_n - u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par le théorème des suites adjacentes, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4.3 Suites extraites

Principe : On part d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et on ne garde que certains des termes (en nombre infini) pour former une nouvelle suite qu'on appelle suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$

Exemple 4.3.1.
- $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est une sous-suite/suite-extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$
- $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ aussi
- $(u_{3^n})_{n\geqslant 0}$ l'est également

Définition 4.3.1 (Extraction)**.** Une **extraction** est une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante.

Définition 4.3.2 (Suite extraite)**.** Une **suite extraite** ou une **sous-suite** d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ où φ est une extraction.

Proposition 4.3.1 (Propriétés)**.** Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est converge vers ℓ, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ aussi.

Remarque 4.3.1 (Important)**.** Même si (u_n) ne converge pas, il se peut que des sous-suites convergent.

Exemple 4.3.2. $u_n = (-1)^n$
- $u_{2n} = 1$ donc la sous-suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 1
- $u_{2n+1} = -1$ donc la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers -1

Mais (u_n) ne converge pas car si elle convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$ on aurait

$$u_{2n} \to \ell \text{ donc } \ell = 1$$
$$u_{2n+1} \to \ell \text{ donc } \ell = -1$$

Ce serait absurde.

Proposition 4.3.2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite, alors :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge } \iff (u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0} \text{ convergent vers la même limite}$$

Théorème 4.3.1 (Théorème de Ramsey)**.** Toute suite admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. Soit $E = \{n \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant n, u_m \leqslant u_n\}$
<u>1er cas</u>
E est fini, donc majoré par un entier N, $\forall n \leqslant N, n \notin E$ donc $\exists m > n, u_m > u_n$(*) On définit alors par récurrence une extraction $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $\varphi(0) = N + 1$, puis, étant donnés $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(K)$, on choisit $\varphi(K+1)$ (possible par (*)) tel que $u_{\varphi(K+1)} > u_{\varphi(K)}$ et la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est croissante.
<u>2e cas</u>
E est infini. On pose alors $E = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ avec $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \in E$ Comme $\varphi(K+1) > \varphi(K)$, on a (par définition de E)

$$u_{\varphi(K+1)} \leqslant u_{\varphi(K)}$$

et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante □

Théorème 4.3.2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. D'après le théorème de Ramsey, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ il existe une sous-suite monotone $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$. Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est monotone et bornée, elle converge. □

Exemple 4.3.3.
— $u_n = (-1)^n$ On a (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui convergent
— $u_n = \cos(n)$ par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet des sous-suites convergentes, mais pas aussi simples à définir

4.3.1 Limites infinies

Définition 4.3.3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers l'infini, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$$

On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Remarque 4.3.2. Ne pas utiliser le mot "converger" pour une limite infinie. Il est réservé aux limites finies. On parlera de "diverger" vers l'infini.

Définition 4.3.4. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A \in R, \exists N \in N, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A$$

Remarque 4.3.3. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers l'infini, toute sous-suite aussi

Théorème 4.3.3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante. Alors :
— ou bien $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge (vers une limite finie)
— ou bien $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$

Démonstration.
— Si (u_n) est majorée, elle converge d'après le théorème de convergence monotone car elle est croissante et majorée.
— Si (u_n) n'est pas majorée, montrons qu'elle tend vers $+\infty$
Soit A un réel.
Comme (u_n) n'est pas majorée,

$$\exists N \in \mathbb{N}, u_N \geqslant A$$
$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N \geqslant A$$

On a montré que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

□

Exemple 4.3.4. Un autre exemple de suite : $u_n = n(-1)^n$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite finie ou infinie.

$$u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \;\; u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Théorème 4.3.4 (Théorèmes de comparaison).
— Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

— Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque 4.3.4 (Formes indéterminées des sommes de limites). Les résultats pour les limites finies ne s'étendent pas tous aux limites infinies.

HYPOTHESES	CONCLUSION
$\lim u_n$ et $\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$
$\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$
$\ell \in \mathbb{R}$ et $+\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$ et $-\infty$	$-\infty$
$+\infty$ et $+\infty$	$+\infty$
$-\infty$ et $-\infty$	$-\infty$
$-\infty$ et $+\infty$	FI

Table 4.1 – Formes indéterminées pour les sommes de limites

Quand on a une forme indéterminée, la suite concernée peut avoir tous les comportements possibles.

Exemple 4.3.5. $u_n = n$
— $v_n = n + 3$
— $v'_n = n + \sqrt{n}$
— $v''_n = n + (-1)^n$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v'_n = \lim_{n\to+\infty} v''_n = +\infty$$

$$v_n - u_n,\ v'_n - u_n,\ v''_n - u_n \text{ sont des formes indéterminées}$$

$$v_n - u_n = 3 \implies \lim_{n\to+\infty} = 3$$
$$v'_n - u_n = \sqrt{n} \implies \lim_{n\to+\infty} = +\infty$$
$$v''_n - u_n = (-1)^n \text{ n'a pas de limite finie ou infinie}$$

Remarque 4.3.5 (Formes indéterminées des produits des limites).

Remarque 4.3.6 (Formes indéterminées des quotients de limites). Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$

Remarque 4.3.7. Une autre forme indéterminée est "1^∞, autrement dit, si :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

le comportement de $u_n^{v_n}$ est indéterminé. Un bon réflexe pour étudier ces suites est d'utiliser la formule

$$a^b = \exp(b \ln a)$$

On a :

$$u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln u_n)$$

HYPOTHESES	CONCLUSION
$\lim u_n$ et $\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$\ell > 0$ et $+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$ et $+\infty$	$-\infty$
0 et $+\infty$	FI
$\ell > 0$ et $-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$ et $+\infty$	$-\infty$
0 et $-\infty$	FI
$+\infty$ et $+\infty$	$+\infty$
$+\infty$ et $-\infty$	$-\infty$
$-\infty$ et $-\infty$	$+\infty$

Table 4.2 – Formes indéterminées des produits de limites

HYPOTHESES	CONCLUSION
$\lim u_n$ et $\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
0 et 0	FI
$\pm\infty$ et $\pm\infty$	FI
0 et $\pm\infty$	0
$+\infty$ et 0	$\begin{cases} +\infty \text{ si } \forall n, v_n > 0 \\ -\infty \text{ si } \forall n, v_n < 0 \end{cases}$
$-\infty$ et 0	$\begin{cases} -\infty \text{ si } \forall n, v_n > 0 \\ +\infty \text{ si } \forall n, v_n < 0 \end{cases}$

Table 4.3 – Formes indéterminées des quotients de limites

Exemple 4.3.6. On peut montrer que la suite :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$$

Remarque 4.3.8 (Notations asymptotiques)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ On dit que (u_n) est négigeable devant (v_n), ou

$$u_n = o(v_n), \text{ lorsque } \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Exemple 4.3.7.
— $\sqrt{n} = o(n)$
— $\ln n = o(n^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$

Remarque 4.3.9. On dit que $u_n = O(v_n)$ si la suite $\frac{u_n}{v_n}$ est majorée

Exemple 4.3.8.

$$3n^2 + 2n + 5 = O(n^2)$$

Si P est un polynôme de degré d

$$P(n) = O(n^d)$$

Remarque 4.3.10. Ces notations sont très utilisées en informatique

$$u_n = o(v_n), v_n = O(w_n) \implies u_n = o(w_n)$$
$$u_n = O(v_n), v_n = O(w_n) \implies u_n = O(w_n)$$

Définition 4.3.5 (Suite de Cauchy)**.** C'est un moyen de parler de suites convergentes sans mentionner la limite.
Une suite (u_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1 \geqslant N, \forall n_2 \geqslant N, |u_{n_1} - u_{n_2}| \leqslant \varepsilon$$

Chapitre 5

Continuité et limites de fonctions

5.1 Limites

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$ ou x_0 une borne de I (possiblement $\pm\infty$). On veut définir ce que veut dire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,\ \ \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \ell = \pm\infty$$

Définition 5.1.1 (Limite d'une fonction en un point).
1er cas
$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$
On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$$\text{Si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } |x - x_0| \leqslant \delta, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

2e cas
$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = \pm\infty$
On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\text{Si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } |x - x_0| \leqslant \delta \text{ alors } f(x) \geqslant A$$

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\text{Si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } |x - x_0| \leqslant \delta \text{ alors } f(x) \leqslant A$$

Définition 5.1.2 (Limite d'une fonction en l'infini).
1er cas
$x_0 = \pm\infty,\ \ell \in \mathbb{R}$
On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$$\text{Si } \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x \geqslant B \text{ alors } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On dit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

$$\text{Si} \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x \leqslant B \text{ alors } |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

2e cas
$x_0 = \pm\infty$, $\ell = \pm\infty$

On dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

$$\text{Si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x \geqslant B \text{ alors } f(x) \geqslant A$$

On dit que $\lim_{x\to+\infty} = -\infty$

$$\text{Si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x \geqslant B \text{ alors } f(x) \leqslant A$$

On dit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{Si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x \leqslant B \text{ alors } f(x) \geqslant A$$

on dit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\text{Si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que si } x \leqslant B \text{ alors } f(x) \leqslant A$$

Remarque 5.1.1. Lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$ la droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale au graphe de f

Remarque 5.1.2. Lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, la droite horizontale d'équation $y = \ell$ une asymptote horizontale au graphe de f

Théorème 5.1.1 (Caractérisation séquentielle des limites)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f \colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ou une borne de I (éventuellement $\pm\infty$), $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

$$\text{Alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \text{Pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n\to\infty} u_n = x_0, \text{ on a } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$$

Par conséquent, les théorèmes sur les limites de suites ont des analogues immédiats pour les limites de fonctions.

Théorème 5.1.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.. $f, g, h \colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ou une borne de I.

1. Si $\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \end{cases}$ alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$
   — $\lim_{x\to x_0}(af + bg)(x) = a\ell_1 + b\ell_2$
   — $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$
   — Si g ne s'annule pas et $\ell_2 \neq 0$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$
2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1, \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ et $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$
3. Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

Exemple 5.1.1. Considérons la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$$

On a $\forall x > 0$

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$
$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Par théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Théorème 5.1.3 (Composition des limites)**.** Soient I, J deux intervalles et les fonctions $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ou une borne de I. On suppose

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y \text{ avec } y \in I \text{ ou avec une borne de } J$$
$$\lim_{y\to z} g(z) = \ell \text{ existe}$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$$

Exemple 5.1.2. Soit

$$h\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{\frac{3}{x}+7} \end{cases}$$

On pose h comme étant une composée avec :

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{3}{x}+7 \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 7 \text{ puis } \lim_{x\to 7} g(x) = \sqrt{7} \implies \lim_{x\to+\infty} h(x) = \sqrt{7}$$

Définition 5.1.3 (Limite à gauche / à droite)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$

$$f\colon I \to \mathbb{R}\ell \in \mathbb{R}$$
$$\text{ou } f\colon I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R} \text{ ou } \ell = +\infty \text{ ou } \ell = -\infty$$

On dit que ℓ est la limite à gauche de f en x_0

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$$

Si la limite de $f_{|I\cap]-\infty,x_0]}$ en x_0 vaut ℓ
Si $\ell \in \mathbb{R}$ cela équivaut à

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On dit que ℓ est la limite de f en x_0,

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

Si la limite de $f_{|I\cap]x_0,+\infty]}$ en x_0 vaut ℓ

Remarque 5.1.3. $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$
$f_{|J}\colon \begin{cases} J & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ est la restriction de f à J.

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ (pas une borne)
— Si $f\colon I \to \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0 x < x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$

— Si $f\colon I \to \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0 x < x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$

5.2 Continuité

Définition 5.2.1. Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$
— On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Avec les quantificateurs, on a :

$$f \text{ continue } \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } x \in I \text{ vérifie } |x - x_0| \leqslant \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_0| \leqslant \varepsilon$$

— On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } x \in I \text{ vérifie } |x - x_0| \leqslant \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_0| \leqslant \varepsilon$$

— On dit que f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

et continue à droite en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Ainsi f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de x_0

Exemple 5.2.1. $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ partie entière.
— Si $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, E est continue en x_0
— Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, E est continue à droite en x_0 mais pas continue à gauche en x_0

Exemple 5.2.2. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$ cette fonction n'est continue en aucun point.

Remarque 5.2.1. Les fonctions usuelles
— exp
— ln
— cos
— sin
— tan
— arcsin
— arccos

— arctan
— cosh
— sinh
— tanh
— $\sqrt{x}$
sont continues dans leurs domaines de définition.

Théorème 5.2.1 (Opérations sur les fonctions continues)**.** La somme, le produit, la composition, le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue.

Exemple 5.2.3. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x^2-3)\exp(2\cos(x-1)) \end{cases}$ est continue comme produit de fonctions continues.

Théorème 5.2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit $I=[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a<b$ et $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $y\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)\leqslant y\leqslant f(b)$ ou $f(b)\leqslant y\leqslant f(a)$. Alors il existe un point $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=y$

Démonstration. On utilise la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide majorée $A\subset\mathbb{R}$ admet une borne supérieure $\sup(A)$

— Quitte à changer f en $-f$ et y en $-y$ on peut supposer

$$f(a)\leqslant y\leqslant f(b)$$

— Soit $E=\{x\in I \text{ tel que } f(x)\leqslant y\}$, $a\in E$ donc E est non vide, $E\subset I$ donc E est majoré donc on peut poser $c=\sup(E)$
Puisque $c=\sup(E)$, il existe une suite (c_n) d'éléments de E telle que $\lim_{n\to+\infty} c_n=c$
Comme f est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(c_n)=f(c)$$

Puisque $c_n\in E$, on a $f(c_n)\leqslant y$. En passant à la limite, on a

$$f(c)\leqslant y$$

Il reste à montrer $f(c)\geqslant y$
— Si $c=b$, on a bien

$$f(c)=f(b)\leqslant y$$

— Si $c<b$, pour n assez grand,

$$c<\underbrace{c+\frac{1}{n}}_{\substack{\text{pas dans } E,\\ \text{car } c=\sup(E)}}\leqslant b$$

$$c+\frac{1}{n}\notin E \implies f\left(c+\frac{1}{n}\right)>y$$

On a $\lim_{n\to+\infty} c+\frac{1}{n}=c$ et f étant continue

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(c+\frac{1}{n}\right)=f(c)$$

Comme $f\left(c+\frac{1}{n}\right)>y$, on en déduit en passant à la limite $f(c)\geqslant y$

□

Exemple 5.2.4. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^4 + x^2 - 6 \end{cases}$ On veut montrer que f s'annule sur $[0,2]$ f est continue.

$$f(0) = -6 \qquad\qquad f(2) = 14$$

Comme $-6 \leqslant 0 \leqslant 14$, par le TVI, il existe $c \in [0,2]$ tel que $f(c) = 0$

Remarque 5.2.2. Il est important que I soit un intervalle pour utiliser le TVI.

Exemple 5.2.5. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ même si f est continue sur R^*, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, il n'existe pas de $c \in [-1,1]$ tel que $f(c) = 0$, le TVI ne s'applique pas car f n'est pas définie sur $[-1,1]$

Exemple 5.2.6. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + \cos(x) - 3 \end{cases}$
Montrer que f s'annule sur $[-5,5]$ $f(-5) = f(5) = 22 + \cos(5) > 0$.
Mais comme $f(0) = -2$, on peut appliquer le TVI sur $[0,5]$, $f(0) \leqslant 0 \leqslant f(5)$ et conclure que $\exists c \in [0,5]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque 5.2.3. Le même énoncé serait faux pour $\mathbb{Q}$ à la place de $\mathbb{R}$.

Exemple 5.2.7. $f\colon \begin{cases} \mathbb{Q} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(2) = 4$$
$$f(0) \leqslant 2 \leqslant f(2)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0,2]$ tel que $f(c) = 2, c = \sqrt{2}$, mais il n'existe pas de rationnel c te lque $f(c) = 2$

Remarque 5.2.4. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple 5.2.8. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$

$$f([-1,4]) = [1,17]$$

$f'(x) = 2x$ donc $\begin{cases} f'(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in [-1,0] \\ f'(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in [0,4] \end{cases}$

5.3 Limites, continuité et monotonie

Les fonctions monotones ont des propriétés spécifiques

Théorème 5.3.1 (Théorème de la "limite monotone"). Soit $I =]a,b[$ avec $a < b$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ croissante.

1. f admet une limite en b, qui est finie si et seulement si f est majorée.
2. f admet une limite en a, qui est finie si et seulement si f est minorée.
3. Pour tout $x_0 \in I$, f a une limite à gauche et à droite en x_0 et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Enoncé analogue pour f décroissante.

Théorème 5.3.2 (Stricte monotonie et bijectivité)**.** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
- Si f est strictement croissante, $f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$ est une bijection.
- Si f est strictement décroissante, $f\colon [a,b] \to [f(b), f(a)]$ est une bijection. Ce théorème a été utilisé pour définir par exemple arcsin car il montre que $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est bijective. En effet strictement monotone $\implies$ injective et on montre que f est injective grâce au TVI.

Exemple 5.3.1. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 \end{cases}$ f est continue,

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - 9 + 12 - 1 \\ &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2) &= 16 - 36 + 24 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Comme f est strictement décroissante sur $[1,2]$, c'est une bijection de $[1,2]$ sur $[3,4]$. Le théorème est également vrai pour un intervalle $]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et
- strictement croissante, c'est une bijection de $]a,b[$ sur $]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)[$
- strictement décroissante, c'est un bijection de $]a,b[$ sur $]\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x)[$

Dans l'exemple précédent, f est une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]-\infty, 4[$.

Exemple 5.3.2. $f\colon \begin{cases}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x^2+x} \end{cases}$ f est continue et strictement décroissante car la fonction $x \mapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

donc f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Théorème 5.3.3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue injective.
Alors f est strictement monotone, donc bijective.
Si on pose $J = f(I)$, la bijection réciproque $f^{-1}\colon J \to I$ est continue.

Remarque 5.3.1. Dans le théorème précédent, f^{-1} est aussi strictement monotone.

Fonctions continues sur un segment

Remarque 5.3.2. Segment = intervalle fermé borné.

Théorème 5.3.4. Soient $a < b$ des réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

$$\exists n \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ et } \exists x_0 \in [a,b], f(x_0) = m, \exists x_1 \in [a,b], f(x_1) = M$$

La preuve repose sur le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque 5.3.3. Il est important de considérer un intervalle fermé.

Exemple 5.3.3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1[$, mais pas bornée.

Prolongement par continuité $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$, $f\colon I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$.
On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ existe. Alors la fonction

$$\tilde{f}\colon \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

On dit que f est le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 5.3.4. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$ continue sur $\mathbb{R}^*$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?
Pour $x \neq 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

c'est le taux d'accroissement donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 6

Annexes

6.1 Correction du CC1 Blanc

Exercice 6.1.1.

1. $A = \dfrac{4^4 \cdot 3^3}{6^6 \cdot 2^2}$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{4^4 \cdot 3^3}{6^6 \cdot 2^2} \\
&= \frac{(2^2)^4 \cdot 3^3}{(2 \cdot 3)^6 \cdot 2^2} \\
&= \frac{2^8 \cdot 3^3}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^2} \\
&= 2^{8-6-2} \cdot 3^{3-6} \\
&= 3^{-3} \\
&= \frac{1}{3^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{27}}$$

2. $B = 6^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt[5]{6})^3 \cdot -2 \cdot 6^{\frac{1}{11}}$

$$\begin{aligned}
B &= 6^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt[5]{6})^3 \cdot -2 \cdot 6^{\frac{1}{11}} \\
&= 6^{\frac{1}{2}} \cdot (6^{\frac{1}{5}})^3 - 2 \cdot 6^{\frac{1}{11}} \\
&= 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{5}} - 2 \cdot 6^{\frac{1}{11}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B = 6^{\frac{11}{10}} - 2 \cdot 6^{\frac{1}{11}}}$$

3. $C = \dfrac{2\sqrt{2}3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{6\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{9}}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\sqrt{2}3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{6\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{9}} \\ &= \frac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2\cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot (3^2)^{\frac{1}{6}}} \\ &= \frac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2\cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{C = 6^{\frac{1}{6}}}$$

Exercice 6.1.2.

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient :

$$\begin{aligned} &(E) : 2x^2 + 6x + 4 \leqslant 0 \\ &\overset{\times\frac{1}{2}}{\iff} x^2 + 3x + 2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

On cherche les racines du trinôme :

$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4\times 1\times 2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2}$$

$$\boxed{x_1 = -2} \qquad \boxed{x_2 = -1}$$

On a donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{(E) \iff x \in [-2, -1]}$$

2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient

$$\begin{aligned} &(E_1) : x^2 + 5x + 7 \geqslant x + 5 \\ &\overset{-(x+5)}{\iff} x^2 + 4x + 2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

On cherche les racines du trinôme :

$$\begin{aligned} &x^2 + 4x + 2 = 0 \\ &\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 2 = 8 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2} \qquad \boxed{x_1 = -2-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2} \qquad \boxed{x_2 = -2+\sqrt{2}}$$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en conclut donc que :

$$\boxed{(E_1) \iff x \in]-\infty, -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}, +\infty[}$$

Exercice 6.1.3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient

$$(E) : |(x+1)(x+2)| = 10$$

puis :

$$(E') : |(x+1)(x+2)| \leqslant 10$$

On sait que d'après la définition de la valeur absolue :

$$(E) \iff \begin{cases} (E_1) : (x+1)(x+2) = 10 \\ ou \\ (E_2) : (x+1)(x+2) = -10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (E_1) :&(x+1)(x+2) = 10 \\ \iff& x^2+3x+2 = 10 \\ \iff& x^2+3x-8 = 0 \\ \Delta_1 &= 3^2 - 4 \times (-8) \times 1 \\ &= 41 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (E_2) :&(x+1)(x+2) = -10 \\ \iff& x^2+3x+2 = -10 \\ \iff& x^2+3x+12 = 0 \\ \Delta_2 &= 3^2 - 4 \times 12 \times 1 \\ &= -39 \end{aligned}$$

On remarque (E_2) n'a pas de solution donc on cherche les racines de (E_1).

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{2}$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\boxed{\{\frac{-3-\sqrt{41}}{2}, \frac{-3+\sqrt{41}}{2}\}}$

$$|(x+1)(x+2)| = \begin{cases} (x+1)(x+2) \text{ si } x \in]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[\\ -(x+1)(x+2) \text{ si } x \in [-2; -1] \end{cases}$$

— $(x+1)(x+2) \leqslant 10$

$$\begin{aligned} &(x+1)(x+2) \leqslant 10 \\ \iff& x^2+3x-8 \leqslant 0 \\ \iff& x \in \left[\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; \frac{-3+\sqrt{41}}{2}\right] \end{aligned}$$

Sachant que $\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} \leqslant \dfrac{-9}{2}$ car $-\sqrt{41} \leqslant 6$ et $\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \geqslant 0$ car $\sqrt{41} \geqslant 6$

Les solutions de $(x+1)(x+2) \leqslant 10$ dans $]-\infty,-2] \cup [1,+\infty[$ sont :

$$x \in \left[\frac{-3-\sqrt{41}}{2}, -2\right] \cup \left[-1, \frac{-3+\sqrt{41}}{2}\right]$$

— $-(x+1)(x+2) \leqslant 10$

$$\begin{aligned} & -(x+1)(x+2) \leqslant 10 \\ \iff & x^2+3x+12 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai car ce trinôme n'a pas de racines.
Ainsi, tout nombre de $[-2,-1]$ est solution de $-(x+1)(x+2) \leqslant 10$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') est :

$$x \in \left[\frac{-3-\sqrt{41}}{2}, -2\right] \cup \left[-1, \frac{-3+\sqrt{41}}{2}\right] \cup [-2,-1]$$

$$\boxed{x \in \left[\frac{-3-\sqrt{41}}{2}, \frac{-3+\sqrt{41}}{2}\right]}$$

Exercice 6.1.4. Déterminer l'ensemble des réels x tels que les deux membres de (E) soient bien définis, et que (E) soit vraie

$$(E) : \frac{1}{x-1} \leqslant \frac{x+4}{x+1}$$

(E) est bien définie si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} \leqslant \frac{x+4}{x+1} \\ \iff & \frac{1}{x-1} - \frac{x+4}{x+1} \leqslant 0 \\ \iff & \frac{(x+1)-(x+4)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \\ \overset{\times(-1)}{\iff} & \frac{(x+4)(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0 \\ \iff & \frac{x^2+2x-5}{(x+1)(x-1)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe sachant qu'on a :
- $x+1=0 \iff x=-1$
- $x-1=0 \iff x=1$

puis :

$$x^2+2x-5=0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4-4\times(-5)\times 1 \\ &= 4+20 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2-\sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{-2-2\sqrt{6}}{2} \\ & \boxed{x_1 = -1-\sqrt{6}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-2+\sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{-2+2\sqrt{6}}{2} \\ & \boxed{x_2 = -1+\sqrt{6}} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{6}$		-1		1		$-1+\sqrt{6}$		$+\infty$
$(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2x-5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+2x-5}{(x+1)(x-1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en conclut que :

$$\boxed{x \in]-\infty, -1-\sqrt{6}] \cup]-1, 1[\cup [-1+\sqrt{6}, +\infty[}$$

Exercice 6.1.5. Une fonction $f : I \to J$ est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in J, \exists x \in I, f(x) = y$$

6.2 Correction CC Blanc 2

Exercice 6.2.1.
Rappel :

$$(u \circ v)' = v' \cdot u' \circ v$$

1. $f(x) = \sin^3(x^2+1)$ Domaine de définition : $\mathbb{R}$ Pour calculer f', on peut écrire

$$f(x) = u \circ v(x) \begin{cases} v(x) = x^2+1 \\ u(x) = \sin^3(x) \end{cases} \begin{cases} v'(x) = 2x \\ u'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x) \end{cases}$$

   d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot 3\cos(x)\sin^2(x) \\ &= 6x\cos(x)\sin^2(x) \end{aligned}$$

2. $g(x) = \ln(\tan(x))$
   tan est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\tan(x) > 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Comme tan est $\pi-$périodique, pour $x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $\tan(x) > 0 \iff x \in \left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$
   Domaine de définition : $\left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

   Par composition :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\tan'(x)}{\tan(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)\tan(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} \end{aligned}$$

Exercice 6.2.2. $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n^2$
Soit P_n la propriété "$u_n \leqslant n^2$
Montrons P_n par récurrence double.
Initialisation :
$u_1 = 1 \leqslant 1^2$ donc P_1 est vraie
$u_2 = u_1 + \frac{2}{1+1}u_0 = 2 \leqslant 2$ donc P_2 est vraie
Hérédité :

Pour $n \geqslant 2$, supposons que P_{n-1} et P_n vraies.
Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \\
&\leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\
&\leqslant n^2 + 2(n-1) \text{ car } \frac{n-1}{n+1} \leqslant 1 \\
&\leqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi P_{n+1} est vérifiée. Par récurrence double, on a montré P_n pour tout $n \geqslant 1$

Exercice 6.2.3.
$u_0 = 1$
$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$

1. On résout

$$\begin{aligned}
&\alpha = 1 + \frac{\alpha}{2} \\
\iff &\alpha = 2
\end{aligned}$$

et on étudie $v_n = u_n - 2$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\
&= 1 + \frac{u_n}{2} - 2 \\
&= \frac{u_n}{2} - 1 \\
&= \frac{u_n - 2}{2} = \frac{v_n}{2}
\end{aligned}$$

$v_0 = u_0 - 2 = -1$ La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de premier terme -1 et de raison $\frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
v_n &= -\frac{1}{2^n} \\
u_n &= 2 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{2}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 0
\end{aligned}$$

3. Comme $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 2.

Exercice 6.2.4. $n > 0$, $u_n \frac{\sin}{\sqrt{n}} + \frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

OU

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

Sachant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sin(x)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ car } -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{n}} = 0$$

Finalement

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Exercice 6.2.5. Résoudre

$$\sqrt{3}\sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2} \tag{6.1}$$

Méthode : se ramener à une équation de type $\sin(\cdots) = \sin(\cdots)$ ou $\cos(\cdots) = \cos(\cdots)$ à l'aide des formules d'addition.

$$\begin{aligned}
(6.1) \iff & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x) - \frac{1}{2}\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\iff & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\iff & \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ a = \pi - b + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$(6.1) \iff \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Bibliographie

[1] Supreme Aryal. Unit circle : https://texample.net/tikz/examples/unit-circle/. 2010.

[2] Tex StackExchange et Youtube et Overleaf et CTAN. Documentation.

[3] Logiciel Geogebra. https://www.geogebra.org/?lang=fr.