

Table des matières

I	Introduction	5
II	Analyse	9
1	Nombres réels	11
2	Fonctions réelles	15
2.1	Définitions	15
2.2	Opérations sur les fonctions	17
3	Fonctions usuelles	19
3.1	Fonctions trigonométriques	20
3.2	Exponentielle et logarithme	23
3.3	Fonctions hyperboliques	25
4	Suites réelles	27
4.1	Définitions	27
4.2	Suites usuelles	27
4.3	Convergence d'une suite	28
4.4	Suites extraites	32
4.5	Limites infinies	33
5	Continuité et limites de fonctions	35
6	Dérivabilité et accroissements finis	39
6.1	Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis	39
6.2	Convexité	43
7	Intégration	47
8	Equations différentielles linéaires	51
8.1	Équations différentielles d'ordre 1	51
8.2	Équations différentielles d'ordre 2	52
9	Développements limités et formules de Taylor	57
9.1	Règle de l'Hôpital	57
9.2	Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence	57
9.3	Développements limités	58
9.3.1	Opérations sur les développements limités	59
III	Algèbre	61
10	Calcul Algébrique	63

11 Ensembles	67
12 Logique et raisonnements	71
12.1 Logique	71
12.2 Raisonnements	72
13 Nombres complexes	73
13.1 Vision algébrique des nombres complexes	73
13.2 Vision géométrique des nombres complexes	74
13.3 Géométrie des nombres complexes	76
14 Arithmétique	77
14.1 Divisibilité	77
14.2 PGCD et PPCM	78
14.3 Algorithme d'Euclide	78
14.4 Nombres premiers	79
14.5 Congruences	80
15 Polynômes	83
15.1 Définitions	83
15.2 Arithmétique des polynômes	84
15.3 Fractions rationnelles	85
16 Systèmes linéaires et matrices	89
16.1 Définitions et opérations élémentaires	89
16.2 Opérations sur les matrices	90
17 Espaces vectoriels	97
17.1 Définitions	97
17.2 Base et dimension	99
18 Applications linéaires	101
18.1 Définitions	101
18.2 Projecteurs et symétries	103
18.3 Rotations.	104
18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.	105
IV Annexes	107

Deuxième partie

Analyse

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 17

Espaces vectoriels

17.1 Définitions

Définition : Loi de composition

Soient E, F deux ensembles et f une application.

1. On dit que f est une loi de composition **interne** si et seulement si : $f : E \times E \rightarrow E$.
2. On dit que f est une loi de composition **externe** si et seulement si : $f : E \times F \rightarrow E$.

Définition : Magma

On appelle **magma** un ensemble M muni d'une loi de composition **interne** « $*$ ».
On le note $(M, *)$.

Définition : Monoïde

On appelle **monoïde** un ensemble M muni d'une loi de composition **interne** « $*$ » **associative**.

Définition : Groupe

Soit $(G, *)$ un magma.

On dit que $(G, *)$ est un groupe si et seulement si pour $g_1, g_2, g_3 \in G$:

1. $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
2. $\exists 0_G \in G, g_1 * 0_G = 0_G * g_1 = g_1$
3. $\exists g^{-1} \in G, g_1 * g^{-1} = g^{-1} * g_1 = 0_G$

De plus, si et seulement :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

on dit que $(G, *)$ est un groupe **commutatif** ou **abélien**.

Définition : Anneau (15)

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions **internes** « $+$ » et « \cdot » sur A telles que pour $a, b, c \in A$:

1. $(A, +)$ est un groupe **commutatif**.
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
4. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
5. « \cdot » possède un **élément neutre**.

On dit que A est **intègre** si :

1. A est commutatif : $a \cdot b = b \cdot a$.
2. $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$.

Définition : Corps (15)

Un corps est un anneau **commutatif** dans lequel tout élément non nul est inversible.

Définition : \mathbb{K} -espace vectoriel

Soit \mathbb{K} un corps.

Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble E composé d'une loi de composition **interne** « $+$ » et d'une loi de composition **externe** « \cdot » telles que :

$$\begin{array}{ll} +: E \times E \rightarrow E & \cdot: \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y & (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u \end{array}$$

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, u, v \in E$:
 - (a) $\lambda_1 \cdot (u + v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v$
 - (b) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u$
 - (c) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u)$
 - (d) $1 \cdot u = u$

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \subset E$
2. $F \neq \emptyset$
3. $\forall u, v \in F, \lambda \in \mathbb{K}, u + \lambda v \in F$

Définition : Somme directe

Soient $F_1, F_2 \subseteq E$. On dit que F_1 et F_2 sont en **somme directe** ou qu'ils sont **supplémentaires** dans E si et seulement si :

1. $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
2. $F_1 + F_2 = E$

On note alors :

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

1. On dit que \mathcal{F} est **libre** si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

2. On dit que \mathcal{F} est **génératrice** si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Remarque. Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

17.2 Base et dimension

Définition : Base

Une famille de vecteurs est une base si elle est **libre** et **génératrice**.

Proposition :

Soient un espace vectoriel E et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Démonstration. L'existence est évidente car \mathcal{F} est génératrice.

Montrons l'unicité : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On a d'une part :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

puis d'autre part :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i &= \sum_{i=1}^n \mu_i u_i \\ \iff \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) u_i &= 0 \end{aligned}$$

Or \mathcal{F} est libre, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i - \mu_i = 0 \implies \lambda_i = \mu_i$. □

Proposition :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^n si et seulement si :

$$\det(\mathcal{F}) \neq 0$$

Définition : Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, on appelle dimension de E , notée $\dim(E)$, le nombre d'éléments d'une base de E .

Proposition :

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors on a :

1. \mathcal{F} est une base.
2. \mathcal{F} est libre.
3. \mathcal{F} est génératrice.

Ainsi il suffit de montrer que \mathcal{F} est libre pour montrer les deux autres propriétés.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre peut être complétée en une base.

Théorème : Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Théorème :

Chaque espace vectoriel admet une base.

Proposition :

Soient E un espace vectoriel et $F, G \subset E$.

$$1. \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) \qquad 2. \dim(F + G) \leq \dim(E)$$

Théorème : Théorème de Grassman

Soient F et G deux espaces vectoriels.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (<https://www.bibmath.net/>).
2. In *Wikipédia*, (<https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811>).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (<http://exo7.emath.fr/>).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:11>).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité* — Wikiversité (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (<http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>).
8. BIBMATH.NET, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023; <https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU>).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (<https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc>).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.h/hospital.html>).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.a/analysesynthese.html>).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf>).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (<http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5>).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (<https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html>).