Table des matières

Deuxième partie

Analyse

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 17

Espaces vectoriels

17.1 Définitions

Définition : Loi de composition

Soient E, F deux ensembles et f une application.

1. On dit que f est une loi de composition **interne** si et seulement si : $f : E \times E \to E$.
2. On dit que f est une loi de composition **externe** si et seulement si : $f : E \times F \to E$.

Définition : Magma

On appelle **magma** un ensemble M muni d'une loi de composition **interne** « $*$ ».
On le note $(M, *)$.

Définition : Monoïde

On appelle **monoïde** un ensemble M muni d'une loi de composition **interne** « $*$ » **associative**.

Définition : Groupe

Soit $(G, *)$ un magma.
On dit que $(G, *)$ est un groupe si et seulement si pour $g_1, g_2, g_3 \in G$:

1. $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
2. $\exists 0_G \in G,\ \ g_1 * 0_G = 0_G * g_1 = g_1$
3. $\exists g^{-1} \in G,\ \ g_1 * g^{-1} = g^{-1} * g_1 = 0_G$

De plus, si et seulement :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

on dit que $(G, *)$ est un groupe **commutatif** ou **abélien**.

Définition : Anneau (*15*)

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions **internes** « $+$ » et « $\cdot$ » sur A telles que pour $a, b, c \in A$:

1. $(A, +)$ est un groupe **commutatif**.
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
4. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
5. « $\cdot$ » possède un **élément neutre**.

On dit que A est **intègre** si :

1. A est commutatif : $a \cdot b = b \cdot a$.
2. $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$.

Définition : Corps (*15*)

Un corps est un anneau **commutatif** dans lequel tout élément non nul est inversible.

Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E composé d'une loi de composition **interne** « $+$ » et d'une loi de composition **externe** « $\cdot$ » telles que :

$$+ : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ u, v \in E$:
   (a) $\lambda_1 \cdot (u + v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v$
   (b) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u$
   (c) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u)$
   (d) $1 \cdot u = u$

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit E un espace-vectoriel, F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \subset E$
2. $F \neq \varnothing$
3. $\forall u, v \in F,\ \lambda \in \mathbb{K},\ u + \lambda v \in F$

Définition : Somme directe

Soient $F_1, F_2 \subseteq E$. On dit que F_1 et F_2 sont en **somme directe** ou qu'ils sont **supplémentaires** dans E si et seulement si :

1. $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
2. $F_1 + F_2 = E$

On note alors :

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. On dit que $\mathcal{F}$ est **libre** si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

2. On dit que $\mathcal{F}$ est **génératrice** si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Remarque. Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

17.2 Base et dimension

Définition : Base

Une famille de vecteurs est une base si elle est **libre** et **génératrice**.

Proposition :

Soient un espace vectoriel E et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base } \iff \forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Démonstration. L'existence est évidente car $\mathcal{F}$ est génératrice.
Montrons l'unicité : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On a d'une part :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

puis d'autre part :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \\ \iff & \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) u_i = 0 \end{aligned}$$

Or $\mathcal{F}$ est libre, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0 \implies \lambda_i = \mu_i$. $\square$

Proposition :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\det(\mathcal{F}) \neq 0$$

Définition : Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, on appelle dimension de E, notée $\dim(E)$, le nombre d'éléments d'une base de E.

Proposition :

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors on a :

1. $\mathcal{F}$ est une base.
2. $\mathcal{F}$ est libre.
3. $\mathcal{F}$ est génératrice.

Ainsi il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre pour montrer les deux autres propriétés.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre peut être complétée en une base.

Théorème : Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Théorème :

Chaque espace vectoriel admet une base.

Proposition :

Soients E un espace vectoriel et $F, G \subset E$.

1. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
2. $\dim(F + G) \leqslant \dim(E)$

Théorème : Théorème de Grassman

Soient F et G deux espaces vectoriels.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Bibliographie

1. Bibm@th, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (https://www.bibmath.net/).
2. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811).
3. Exo7, *Cours et exercices de mathématiques* (http://exo7.emath.fr/).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité* (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. Exo7, *Cours d'analyse de première année*, (http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf).
8. Bibmath.net, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023 ; https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU).
9. Bibm@th, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc).
10. Bibm@th, *Règle de L'Hospital* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html).
11. Bibm@th, *Raisonnement par analyse-synthèse* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/analysesynthese.html).
12. A. Soyeur, F. Capaces, E. Vieillard-Baron, Sésamath, les-mathematiques.net, *Cours de mathématiques de SUP*, (http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf).
13. F. Millet, *math-sup.fr* (http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html).