Table des matières

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 7

Intégration

Définition : Fonction en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
f est une fonction en escalier s'il existe une division de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

telle que pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $f_{|]x, x_{i+1}[}$ est constante. On appelle ça une **subdivision**.
Autrement dit c'est une fonction constante par morceaux.

Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et a_i les morceaux de la subdivision.
Alors on définit :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

Définition :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. f est Riemann-intégrable si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists e, E$ des fonctions en escalier telles que :
   (a) $e \leqslant f \leqslant E$.
   (b) $\int_a^b (E(x) - e(x))\ \mathrm{d}x < \varepsilon$.
2. Soit f Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sup_{e \leqslant f} \int_a^b e(x)\ \mathrm{d}x = \inf_{E \geqslant f} \int_a^b E(x)\ \mathrm{d}x$$

Lemme :

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrable telles que $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

1. $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.
2. $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$.

Théorème : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et

$$\forall x \in [a, b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

alors $F \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ et $\forall x \in]a,b[,\ F'(x) = f(x)$.

Corollaire :

Si $F \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ tel que $\forall x \in\ ]a,b[,\ F'(x) = f(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Proposition :

Soient $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x &= [F(x) + \lambda G(x)]_a^b \\ &= (F(b) + \lambda G(b)) - (F(a) + \lambda G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + \lambda(G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Théorème : Théorème de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}{b-a} = f(c)$$

Théorème : Intégration par parties

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}&(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ \iff\ & u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)\end{aligned}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

□

Théorème : Intégration par changement de variable

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $\varphi([a,b]) \subseteq I$ alors

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi)'(x) &= f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \\
\int_a^b (f \circ \varphi)'(x)\ \mathrm{d}x &= \int_a^b f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [F(\varphi(x))]_a^b \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Lorsque nous sommes confrontés à une intégrale de fonctions trigonométriques, on peut se ramener à une intégrale de fraction rationnelle en posant le changement de variable suivant :

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
2. $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$
3. $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

Démonstration.

1.

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Posons $A(x) = \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$A(x) = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ainsi en posant $u = \tan(\frac{x}{2})$, on retrouve bien :

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2.

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\cdot(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Posons $A(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\cdot(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(\frac{x}{2})} \\
&= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(\frac{x}{2})}\right]\right) \\
&= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(\frac{x}{2})}\right]\right)
\end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \\
&= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En posant $u = \tan(\frac{x}{2})$ on retrouve :

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

3.

$$\begin{aligned}
u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) &\iff \arctan(u) = \frac{x}{2} \\
&\iff x = 2\arctan(u) \\
&\iff \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

□

Troisième partie

Algèbre

Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (https://www.bibmath.net/).
2. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (http://exo7.emath.fr/).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité* (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf).
8. BIBMATH.NET, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023 ; https://www.youtube.com/watch?v=5Upz2O783FU).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/analysesynthese.html).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html).