

Table des matières

I	Introduction	5
II	Analyse	9
1	Nombres réels	11
2	Fonctions réelles	15
2.1	Définitions	15
2.2	Opérations sur les fonctions	17
3	Fonctions usuelles	19
3.1	Fonctions trigonométriques	20
3.2	Exponentielle et logarithme	23
3.3	Fonctions hyperboliques	25
4	Suites réelles	27
4.1	Définitions	27
4.2	Suites usuelles	27
4.3	Convergence d'une suite	28
4.4	Suites extraites	32
4.5	Limites infinies	33
5	Continuité et limites de fonctions	35
6	Dérivabilité et accroissements finis	39
6.1	Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis	39
6.2	Convexité	43
7	Intégration	47
8	Equations différentielles linéaires	51
8.1	Équations différentielles d'ordre 1	51
8.2	Équations différentielles d'ordre 2	52
9	Développements limités et formules de Taylor	57
9.1	Règle de l'Hôpital	57
9.2	Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence	57
9.3	Développements limités	58
9.3.1	Opérations sur les développements limités	59
III	Algèbre	61
10	Calcul Algébrique	63

11 Ensembles	67
12 Logique et raisonnements	71
12.1 Logique	71
12.2 Raisonnements	72
13 Nombres complexes	73
13.1 Vision algébrique des nombres complexes	73
13.2 Vision géométrique des nombres complexes	74
13.3 Géométrie des nombres complexes	76
14 Arithmétique	77
14.1 Divisibilité	77
14.2 PGCD et PPCM	78
14.3 Algorithme d'Euclide	78
14.4 Nombres premiers	79
14.5 Congruences	80
15 Polynômes	83
15.1 Définitions	83
15.2 Arithmétique des polynômes	84
15.3 Fractions rationnelles	85
16 Systèmes linéaires et matrices	89
16.1 Définitions et opérations élémentaires	89
16.2 Opérations sur les matrices	90
17 Espaces vectoriels	97
17.1 Définitions	97
17.2 Base et dimension	99
18 Applications linéaires	103
18.1 Définitions	103
18.2 Projecteurs et symétries	105
18.3 Rotations.	106
18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.	107
IV Annexes	109

Deuxième partie

Analyse

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 18

Applications linéaires

18.1 Définitions

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est une **application linéaire** si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in E, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Définition :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On définit le **noyau** de f , noté $\ker(f)$ tel que :

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

On définit l'**image** de f , notée $\text{Im}(f)$ telle que :

$$\text{Im}(f) = \{y \in F : \exists x \in E : y = f(x)\}$$

Théorème :

Soient E, F des espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. $\ker(f) \subseteq E$.
2. $\text{Im}(f) \subseteq F$.

Démonstration.

1. $\forall x_1, x_2 \in \ker(f), \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(x_1 + \lambda x_2) &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= 0 + \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\forall y_1, y_2 \in \text{Im}(f), \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} y_1 \in \text{Im}(f) &\iff \exists x_1 : f(x_1) = y_1 \\ y_2 \in \text{Im}(f) &\iff \exists x_2 : f(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 + \lambda y_2 &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= f(x_1 + \lambda x_2) \end{aligned}$$

Ainsi $y_1 + \lambda y_2 \in \text{Im}(f)$.

□

Définition :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F .

1. On dit que f est un **morphisme** de E vers F , on note $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme** de E , on note $f \in \mathcal{L}(E)$ ou $\text{End}(E)$.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une **bijection**, alors f est un **isomorphisme**. On le note $f : E \xrightarrow{\sim} F$.
4. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un **isomorphisme**, on dit que f est un **automorphisme** de E et on le note $\text{Aut}(E)$.
 E et F sont appelés **isomorphes** s'il existe un **isomorphisme** de l'un vers l'autre, on écrit parfois $E \cong F$.

Soit $\varepsilon = \{f \in \mathcal{C}^N(I) : f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_1f' + a_0f = 0\}$, $n, N \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathcal{C}^0(I)$, I un intervalle ouvert.

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\varepsilon \subseteq \mathcal{C}^n(I)$.
2. $\dim(E) = n$.

Définition : Rang d'un morphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ le rang de f .

Théorème : Théorème du rang

Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies ou infinies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \ker(f) + \text{Im}(f) = \ker(f) \oplus \text{Im}(f) \\ \ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E \end{cases} \iff \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$$

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (b_1, \dots, b_n) une base de E . Si l'on connaît $f(b_i) \in F$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on connaît toute l'application f .

Corollaire :

Soit (b_1, \dots, b_n) une base de E . Alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme donné par :

$$\varphi(b_i) = e_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Définition :

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ une base de F . Alors on peut définir une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{j,i} c_j$$

Lemme :

Soient \mathbb{K} un corps et E un espace-vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

$$\dim(E) = n \implies E \cong \mathbb{K}^n$$

Lemme :

Soient $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E , $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$ alors :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad E &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i &\mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une bijection, alors c'est un isomorphisme.

Proposition :

Soient E, F des espaces vectoriels $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un morphisme et A sa matrice associée.

$$y = f(x) \iff y = A \cdot x$$

18.2 Projecteurs et symétries

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $f^2 = f \circ f$.

1. On dit que f est **idempotente/une projection** si et seulement si : $f^2 = f$.
2. On dit que f est **involutive/une symétrie linéaire** si et seulement si : $f^2 = id_E$.

Proposition :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. $id_E - p$ est une projection $\iff p$ est une projection
2. $2p - id_E$ est une symétrie $\iff p$ est une projection

Démonstration.

1. Posons $f(x) = id_E(x) - p(x)$. Montrons que $f(f(x)) = id_E(x) - p(x)$ si et seulement si $p(p(x))$.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= id_E(id_E(x) - p(x)) - p(id_E(x) - p(x)) \\ &= id_E(id_E(x)) - id_E(p(x)) - p(id_E(x)) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - p(x) - p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - 2p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] &= id_E(x) - p(x) \iff p(p(x)) = p(x) \\
&\iff 2p(x) - p(p(x)) = p(x) \\
&\iff 2p(x) = p(x) + p(p(x)) \\
&\iff p(x) = p(p(x))
\end{aligned}$$

2. Posons $s(x) = 2p(x) - id_E(x)$.

Montrons que $s(s(x)) = id_E(x)$ si et seulement si $p(p(x)) = p(x)$.

$$\begin{aligned}
s(s(x)) &= s(2p(x) - id_E(x)) \\
&= 2p(2p(x) - id_E(x)) - id_E(2p(x) - id_E(x)) \\
&= 4p(p(x)) - 2p(id_E(x)) - 2id_E(p(x)) + id_E(id_E(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4p(p(x)) - 4p(x) + id_E(x) &= id_E(x) \iff 4p(p(x)) - 4p(x) = 0 \\
&\iff 4p(p(x)) = 4p(x) \\
&\iff p(p(x)) = p(x)
\end{aligned}$$

□

Définition :

Soient $E = F \oplus G$, $u \in F$, $v \in G$, alors l'application

$$\begin{aligned}
p_F: \quad E &\rightarrow E \\
u + v &\mapsto u
\end{aligned}$$

est appelée un **projecteur** sur F **parallèlement** à G .

Proposition :

Soit p_F définie comme dans la définition précédente.

1. p_F est une projection.
2. Soit p une projection, p est un projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à son noyau $\ker(p)$.

18.3 Rotations.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{GL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{SL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle Rx | Ry \rangle = \langle x | y \rangle\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{SO}(n) = \{R \in \text{O}(n) : \det(R) = 1\}$$

Proposition :

Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $R \in \mathrm{O}(n) \iff R^T \cdot R = I_n$.
2. $R \in \mathrm{O}(n) \implies \det(R) \in \{\pm 1\}$.

Corollaire :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : R^T \cdot R = I_n\}$$

18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.

Définition :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E , $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On peut définir une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$b'_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec les coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,p} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} b'_i$$

Définition : Matrice de passage

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension n , $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ deux bases de E . On appelle **matrice de passage** de \mathcal{B} à \mathcal{B}' la matrice carrée de taille n dont la j -ième colonne est formée des coordonnées de b'_j dans la base \mathcal{B} .

Concrètement, écrivons :

$$b_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Avec les coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$b'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_i$$

Définition :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. On dit que A et B sont **équivalentes** si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n), Q \in \mathrm{GL}(m), B = Q^{-1}AP$$

2. On dit que A et B sont **similaires** si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n), \quad B = P^{-1}AP$$

Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (<https://www.bibmath.net/>).
2. In *Wikipédia*, (<https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811>).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (<http://exo7.emath.fr/>).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1>).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité* — Wikiversité (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (<http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>).
8. BIBMATH.NET, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023; <https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU>).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (<https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc>).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html>).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/analysesynthese.html>).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf>).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (<http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5>).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Monoïde* (2023; <https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./m/monoide.html>).
16. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (<https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html>).