

Table des matières

I	Introduction	5
II	Analyse	9
1	Nombres réels	11
2	Fonctions réelles	15
2.1	Définitions	15
2.2	Opérations sur les fonctions	17
3	Fonctions usuelles	19
3.1	Fonctions trigonométriques	20
3.2	Exponentielle et logarithme	23
3.3	Fonctions hyperboliques	25
4	Suites réelles	27
4.1	Définitions	27
4.2	Suites usuelles	27
4.3	Convergence d'une suite	28
4.4	Suites extraites	32
4.5	Limites infinies	33
5	Continuité et limites de fonctions	35
6	Dérivabilité et accroissements finis	39
6.1	Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis	39
6.2	Convexité	43
7	Intégration	47
8	Equations différentielles linéaires	51
8.1	Équations différentielles d'ordre 1	51
8.2	Équations différentielles d'ordre 2	52
9	Développements limités et formules de Taylor	57
9.1	Règle de l'Hôpital	57
9.2	Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence	57
9.3	Développements limités	58
9.3.1	Opérations sur les développements limités	59
III	Algèbre	61
10	Calcul Algébrique	63

11 Ensembles	67
12 Logique et raisonnements	71
12.1 Logique	71
12.2 Raisonnements	72
13 Nombres complexes	73
13.1 Vision algébrique des nombres complexes	73
13.2 Vision géométrique des nombres complexes	74
13.3 Géométrie des nombres complexes	76
14 Arithmétique	77
14.1 Divisibilité	77
14.2 PGCD et PPCM	78
14.3 Algorithme d'Euclide	78
14.4 Nombres premiers	79
14.5 Congruences	80
15 Polynômes	83
15.1 Définitions	83
15.2 Arithmétique des polynômes	84
15.3 Fractions rationnelles	85
16 Systèmes linéaires et matrices	89
16.1 Définitions et opérations élémentaires	89
16.2 Opérations sur les matrices	90
17 Espaces vectoriels	97
17.1 Définitions	97
17.2 Base et dimension	99
18 Applications linéaires	101
18.1 Définitions	101
18.2 Projecteurs et symétries	103
18.3 Rotations.	104
18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.	105
IV Annexes	107

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 7

Intégration

Définition : Fonction en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

f est une fonction en escalier s'il existe une division de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

telle que pour $0 \leq i \leq n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constante. On appelle ça une **subdivision**.
Autrement dit c'est une fonction constante par morceaux.

Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier et a_i les morceaux de la subdivision.

Alors on définit :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n f(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

Définition :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f est Riemann-intégrable si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists e, E$ des fonctions en escalier telles que :

(a) $e \leq f \leq E$.

(b) $\int_a^b (E(x) - e(x)) \, dx < \varepsilon$.

2. Soit f Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup_{e \leq f} \int_a^b e(x) \, dx = \inf_{E \geq f} \int_a^b E(x) \, dx$$

Lemme :

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables telles que $f(x) \leq g(x)$, alors :

1. $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

2. $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$.

Théorème : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et

$$\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

alors $F \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ et $\forall x \in]a, b[, F'(x) = f(x)$.

Corollaire :

Si $F \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ tel que $\forall x \in]a, b[, F'(x) = f(x)$ alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Proposition :

Soient $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + \lambda g(x) \, dx &= [F(x) + \lambda G(x)]_a^b \\ &= (F(b) + \lambda G(b)) - (F(a) + \lambda G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + \lambda(G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

□

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Théorème : Théorème de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. $\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a} = f(c)$$

Théorème : Intégration par parties

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (uv)'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ \iff u'(x)v(x) &= (uv)'(x) - u(x)v'(x) \end{aligned}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(x)v(x) \, dx &= \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx \\ \int_a^b u'(x)v(x) \, dx &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx \end{aligned}$$

□

Théorème : Intégration par changement de variable

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $\varphi([a, b]) \subseteq I$ alors

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(x) &= f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \\ \int_a^b (f \circ \varphi)'(x) \, dx &= \int_a^b f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \, dx \\ &= [F(\varphi(x))]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx \end{aligned}$$

□

Lorsque nous sommes confrontés à une intégrale de fonctions trigonométriques, on peut se ramener à une intégrale de fraction rationnelle en posant le changement de variable suivant :

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1. \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$2. \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$3. dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

Démonstration.

1.

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Posons } A(x) = (\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)) (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)).$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)] [\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)]}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$A(x) = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ainsi en posant $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on retrouve bien :

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2.

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right))}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Posons $A(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right))$.

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2 \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2 \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \right] \right) \\ &= 2 \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left[\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \right] \right) \end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En posant $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on retrouve :

$$\sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

3.

$$\begin{aligned} u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) &\iff \arctan(u) = \frac{x}{2} \\ &\iff x = 2 \arctan(u) \\ &\iff dx = \frac{2}{1 + u^2} du \end{aligned}$$

□

Troisième partie

Algèbre

Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (<https://www.bibmath.net/>).
2. In *Wikipédia*, (<https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811>).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (<http://exo7.emath.fr/>).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:11>).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité* — Wikiversité (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (<http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>).
8. BIBMATH.NET, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023; <https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU>).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (<https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc>).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.h/hospital.html>).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.a/analysesynthese.html>).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf>).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (<http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5>).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (<https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html>).