

Table des matières

I	Introduction	5
II	Analyse	9
1	Nombres réels	11
2	Fonctions réelles	15
2.1	Définitions	15
2.2	Opérations sur les fonctions	17
3	Fonctions usuelles	19
3.1	Fonctions trigonométriques	20
3.2	Exponentielle et logarithme	23
3.3	Fonctions hyperboliques	25
4	Suites réelles	27
4.1	Définitions	27
4.2	Suites usuelles	27
4.3	Convergence d'une suite	28
4.4	Suites extraites	32
4.5	Limites infinies	33
5	Continuité et limites de fonctions	35
6	Dérivabilité et accroissements finis	39
6.1	Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis	39
6.2	Convexité	43
7	Intégration	47
8	Equations différentielles linéaires	51
8.1	Équations différentielles d'ordre 1	51
8.2	Équations différentielles d'ordre 2	52
9	Développements limités et formules de Taylor	57
9.1	Règle de l'Hôpital	57
9.2	Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence	57
9.3	Développements limités	58
9.3.1	Opérations sur les développements limités	59
III	Algèbre	61
10	Calcul Algébrique	63

11 Ensembles	67
12 Logique et raisonnements	71
12.1 Logique	71
12.2 Raisonnements	72
13 Nombres complexes	73
13.1 Vision algébrique des nombres complexes	73
13.2 Vision géométrique des nombres complexes	74
13.3 Géométrie des nombres complexes	76
14 Arithmétique	77
14.1 Divisibilité	77
14.2 PGCD et PPCM	78
14.3 Algorithme d'Euclide	78
14.4 Nombres premiers	79
14.5 Congruences	80
15 Polynômes	83
15.1 Définitions	83
15.2 Arithmétique des polynômes	84
15.3 Fractions rationnelles	85
16 Systèmes linéaires et matrices	89
16.1 Définitions et opérations élémentaires	89
16.2 Opérations sur les matrices	90
17 Espaces vectoriels	97
17.1 Définitions	97
17.2 Base et dimension	99
18 Applications linéaires	101
18.1 Définitions	101
18.2 Projecteurs et symétries	103
18.3 Rotations.	104
18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.	105
IV Annexes	107

Deuxième partie

Analyse

Equations différentielles linéaires

Pour résoudre une équation différentielle, nous allons suivre ces 3 étapes :

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle.
3. Combiner les solutions précédentes pour obtenir la solution générale.

8.1 Équations différentielles d'ordre 1

Définition : Équation différentielle d'ordre 1

Soient $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Théorème :

Soient $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, les solutions de :

$$y' + a(x)y = 0$$

sont de la forme $C \in \mathbb{R}$, $A'(x) = a(x)$:

$$y = C \cdot \exp(-A(x))$$

Démonstration. Il faut montrer l'inclusion dans les deux sens.

\supseteq : Définissons

$$y = Ce^{-A(x)}$$

on aurait donc

$$y' = -Ca(x)e^{-A(x)}$$

puis

$$y' + a(x)y(x) = -Ca(x)e^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0$$

\subseteq : (9) : Supposons y solution de $y' + a(x)y = 0$. Alors il existerait un $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = Ce^{-A(x)}$. Posons $f(x) = y(x)e^{A(x)}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= y'(x)e^{A(x)} + y(x)e^{A(x)}A'(x) \\ &= -a(x)y(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cela implique que $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Donc :

$$C = y(x)e^{A(x)} \iff y(x) = Ce^{-A(x)}$$

□

Exemple 8.1. $(E_1) : y' - 2xy = 0$. En appliquant le théorème précédent on obtient les solutions :

$$y_0 = Ce^{x^2}$$

Pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle d'ordre 1. Nous utilisons $y_h(x)$, sauf qu'ici, C n'est plus une constante mais une fonction. Cette méthode est appelée **variation de la constante**.

$$\begin{cases} y_p = C(x)e^{-A(x)} \\ y'_p = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} \end{cases}$$

On obtient alors en remplaçant dans l'équation générale :

$$\begin{aligned} y'_p + a(x)y_p &= b(x) \\ \iff C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} &= b(x) \\ \iff C'(x)e^{-A(x)} &= b(x) \\ \iff C(x) &= \int b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Exemple 8.2. $(E_1) : y' - 2xy = \exp(x^2 - x)$. On utilise donc la solution homogène trouvée précédemment avec la variation de la constante.

$$\begin{cases} y_p = C(x)e^{x^2} \\ y'_p = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (E_1) .

$$\begin{aligned} y'_p - 2xy_p &= \exp(x^2 - x) \\ C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} &= \exp(x^2 - x) \\ C'(x)e^{x^2} &= \exp(x^2 - x) \\ C'(x) &= \frac{\exp(x^2 - x)}{e^{x^2}} \\ C'(x) &= \exp(x^2 - x - x^2) \\ C'(x) &= \exp(-x) \\ C(x) &= -\exp(-x) \end{aligned}$$

Ainsi une solution particulière de (E_1) :

$$y_p = -\exp(-x)\exp(x^2) = -\exp(x^2 - x)$$

8.2 Équations différentielles d'ordre 2

Définition : Équations différentielle d'ordre 2

Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{R}$.

Une équation différentielle d'ordre 2 est une équation de la forme

$$y'' + py' + q = b(x)$$

Théorème :

Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $p, q \in \mathbb{R}$ et (E) l'équation suivante :

$$(E) : y'' + py' + qy = 0,$$

On s'intéresse d'abord à cette équation associée :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Pour $\Delta = p^2 - 4q$.

1. Cas 1 : $\Delta > 0$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \lambda_i C_i \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

2. Cas 2 : $\Delta = 0$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}, \quad C_i, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \frac{-p}{2}$$

3. Cas 3 : $\Delta < 0$, $\lambda_1 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = a - ib = \overline{\lambda_1}$

$$y = e^{ax} (C_1 \cos(|b|x) + C_2 \sin(|b|x)), \quad C_i \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

La variation de la constante est difficilement applicable sur les équations différentielles de second ordre, nous devons trouver d'autres méthodes. Toutes les équations de second ordre qu'on étudiera dans ce chapitre auront pour second membre une composée de fonctions polynomiales, exponentielles et trigonométriques. Ainsi, nous pouvons utiliser ces propriétés.

Voici une méthode pour trouver une solution particulière d'une équation de type :

$$y'' + py' + qy = b(x)$$

pour $p, q \in \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $P, P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$.

— (7) Si $b(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x))$

$$y_p = x^m e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x)), \quad \deg(Q_1), \deg(Q_2) \leq \max \{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$$

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Si $b(x) = P(x) e^{\alpha x}$

$$y_p = x^m Q(x) e^{\alpha x}, \quad \deg(Q) \leq \deg(P)$$

avec m l'ordre de multiplicité (voir item 15.2) de la racine α par rapport à l'équation caractéristique associée.

Remarque. Il existe des propriétés analogues pour les équations différentielles du premier ordre, parfois cela est plus rapide qu'avec la variation de la constante.

Exemple 8.3. $(E) : y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x} + 4e^x$. Tout d'abord, résolvons l'équation homogène associée :

$$(E_0) : y'' - 2y' + 3y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2 - i\sqrt{8}}{2} & \lambda_2 &= \frac{2 + i\sqrt{8}}{2} \\ &= 1 - i\sqrt{2} & &= 1 + i\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de (E_0) sont :

$$y_0 = e^x \left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 i \sin(\sqrt{2}x) \right)$$

Trouvons une solution particulière de l'équation :

$$(E_1) : y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x}$$

On remarque que le second membre (le « $b(x)$ ») est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\deg(P) = 2$ et $\alpha \notin \{1 \pm i\sqrt{2}\}$, ainsi la solution particulière est de la forme $y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{cases} y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x} \\ y'_1 = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax + b)e^{2x} + 2y_1 \\ y''_1 = 2ae^{2x} + 2(2ax + b)e^{2x} + 2y'_1 \end{cases}$$

En remplaçant dans (E_1) :

$$\begin{aligned} 2ae^{2x} + 2(2ax + b)e^{2x} + 2y'_1 - 2[(2ax + b)e^{2x} + 2y_1] + 3y_1 &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 2y'_1 - (4ax + 2b)e^{2x} - 4y_1 + 3y_1 &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + 2y'_1 - y_1 &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + 2[(2ax + b)e^{2x} + 2y_1] - y_1 &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 4y_1 - y_1 &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 3y_1 &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 3[(ax^2 + bx + c)e^{2x}] &= 9x^2 e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + (3ax^2 + 3bx + 3c)e^{2x} &= 9x^2 e^{2x} \\ (2a + 4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c)e^{2x} &= 9x^2 e^{2x} \\ [3ax^2 + (4a + 3b)x + (2a + 2b + 3c)]e^{2x} &= 9x^2 e^{2x} \end{aligned}$$

On procède par identification :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3a &= 9 \\ 4a + 3b &= 0 \\ 2a + 2b + 3c &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 3 \\ 4a + 3b &= 0 \\ 2a + 2b + 3c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 3 \\ 3b &= -12 \\ 2a + 2b + 3c &= 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a &= 3 \\ b &= -4 \\ 2a + 2b + 3c &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 3 \\ b &= -4 \\ 3c &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 3 \\ b &= -4 \\ c &= \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$y_1 = \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3} \right) e^{2x}$$

Maintenant trouvons une solution particulière de l'équation :

$$(E_2) : y'' - 2y' + 3y = 4e^x$$

Ici on a encore une forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x) = 1$, $\deg(P) = 0$ et $\alpha \notin \{1 \pm i\sqrt{2}\}$ ainsi $y_2 = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_2 = ke^x \\ y'_2 = ke^x \\ y''_2 = ke^x \end{cases}$$

$$ke^x - 2ke^x + 3ke^x = 4e^x$$

$$2ke^x = 4e^x$$

$$ke^x = 2e^x$$

$$y_2 = 2e^x$$

Solution générale :

$$y = y_0 + y_1 + y_2$$

$$y = e^x \left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 i \sin(\sqrt{2}x) \right) + \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3} \right) e^{2x} + 2e^x$$

$$y = \left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 i \sin(\sqrt{2}x) + 2 \right) e^x + \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3} \right) e^{2x}$$

Troisième partie

Algèbre

Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (<https://www.bibmath.net/>).
2. In *Wikipédia*, (<https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811>).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (<http://exo7.emath.fr/>).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1>).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité* — Wikiversité (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (<http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>).
8. BIBMATH.NET, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023; <https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU>).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (<https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc>).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.h/hospital.html>).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.a/analysesynthese.html>).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf>).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (<http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5>).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (<https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html>).