



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>II</b>	<b>Analyse</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Fonctions réelles</b>	<b>15</b>
2.1	Définitions . . . . .	15
2.2	Opérations sur les fonctions . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>19</b>
3.1	Fonctions trigonométriques . . . . .	20
3.2	Exponentielle et logarithme . . . . .	24
3.3	Fonctions hyperboliques . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Suites réelles</b>	<b>27</b>
4.1	Définitions . . . . .	27
4.2	Suites usuelles . . . . .	27
4.3	Convergence d'une suite . . . . .	28
4.4	Suites extraites . . . . .	33
4.5	Limites infinies . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Continuité et limites de fonctions</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Dérivabilité et accroissements finis</b>	<b>41</b>
6.1	Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . . .	41
6.2	Convexité . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Intégration</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Equations différentielles linéaires</b>	<b>55</b>
8.1	Équations différentielles d'ordre 1 . . . . .	55
8.2	Équations différentielles d'ordre 2 . . . . .	56
<b>9</b>	<b>Développements limités et formules de Taylor</b>	<b>61</b>
9.1	Règle de l'Hôpital . . . . .	61
9.2	Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence . . . . .	61
9.3	Développements limités . . . . .	62
9.3.1	Opérations sur les développements limités . . . . .	63
<b>III</b>	<b>Algèbre</b>	<b>65</b>
<b>10</b>	<b>Calcul Algébrique</b>	<b>67</b>

<b>11 Ensembles</b>	<b>71</b>
<b>12 Logique et raisonnements</b>	<b>75</b>
12.1 Logique . . . . .	75
12.2 Raisonnements . . . . .	76
<b>13 Nombres complexes</b>	<b>77</b>
13.1 Vision algébrique des nombres complexes . . . . .	77
13.2 Vision géométrique des nombres complexes . . . . .	78
13.3 Géométrie des nombres complexes . . . . .	80
<b>14 Arithmétique</b>	<b>81</b>
14.1 Divisibilité . . . . .	81
14.2 PGCD et PPCM . . . . .	82
14.3 Algorithme d'Euclide . . . . .	83
14.4 Nombres premiers . . . . .	84
14.5 Congruences . . . . .	85
<b>15 Polynômes</b>	<b>87</b>
15.1 Définitions . . . . .	87
15.2 Arithmétique des polynômes . . . . .	88
15.3 Fractions rationnelles . . . . .	89
<b>16 Systèmes linéaires et matrices</b>	<b>93</b>
16.1 Définitions et opérations élémentaires . . . . .	93
16.2 Opérations sur les matrices . . . . .	95
<b>17 Espaces vectoriels</b>	<b>103</b>
17.1 Définitions . . . . .	103
17.2 Base et dimension . . . . .	105
<b>18 Applications linéaires</b>	<b>109</b>
18.1 Définitions . . . . .	109
18.2 Projecteurs et symétries . . . . .	112
18.3 Rotations. . . . .	113
18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires. . . . .	114
<b>IV Annexes</b>	<b>117</b>



Deuxième partie

*Analyse*



Troisième partie

Algèbre





# Chapitre 16

## Systèmes linéaires et matrices

### 16.1 Définitions et opérations élémentaires

#### Définition : Matrice

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_{1,1}, \dots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$ .

Une **matrice** est un tableau de données appartenant à  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

#### Définition : Système linéaire

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$   $n$  inconnues,  $a_{1,1}, \dots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$  et  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ .

Un **système linéaire** est décrit par :

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Sa matrice associée est :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

#### Définition : Opérations élémentaires

Soient  $i, j$  tels que  $i \neq j$  des numéros de ligne et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

1.  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
2.  $L_i \leftrightarrow L_j$
3.  $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$

Opérations analogues sur les colonnes.

**Définition :**

1. Une matrice est **échelonnée** en lignes si et seulement si le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.
2. Une matrice est dite **échelonnée réduite** en lignes si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

**Exemple 16.1.**  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice échelonnée.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice échelonnée réduite.

Décrivons maintenant l'algorithme du pivot de Gauss utilisé pour résoudre des systèmes. On expliquera la méthode sur les lignes mais les principes sont analogues pour les colonnes.

La méthode consiste à appliquer les opérations élémentaires sur le système ou la matrice afin d'en faire un système ou une matrice échelonnée réduite.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Le but est d'annuler tous les coefficients  $a_{2,1}, a_{3,1}, \dots, a_{m,1}$  à partir de  $a_{1,1}$  puis d'annuler les coefficients  $a_{3,2}, a_{4,2}, \dots, a_{m,2}$  à partir de  $a_{2,2}$  et ainsi de suite jusqu'à que  $a_{m,n} = 1$ .

Pour annuler le coefficient  $a_{i,j}$  à partir du pivot  $a_{k,j}$  avec  $k < i$ , on applique l'opération élémentaire suivante :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,j}}{a_{k,j}} L_k$$

À la fin de toutes ces opérations, on obtient un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \phantom{a_{1,1}x_1} a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a'_{2,2}x_2} \vdots \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a'_{2,2}x_2} \phantom{\vdots} x_n = b'_n \end{cases}$$

On va ensuite chercher à remonter dans le système en appliquant les opérations élémentaires avec le même principe que lors de la descente. Pour ensuite obtenir un système de la forme

$$\begin{cases} x_1 & & & = b'_1 \\ & x_2 & & = b'_2 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = b'_n \end{cases}$$

**Exemple 16.2.** Utilisons l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{-3}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{-2}{-3}L_1} \begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 2 \\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = -3 \end{cases} \\
&\xrightarrow[L_3 \leftarrow -3L_3]{L_2 \leftarrow -3L_2} \begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ y - z = 6 \\ y + 2z = -9 \end{cases} \\
&\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ y - z = 6 \\ 3z = -15 \end{cases} \\
&\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3]{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3} \begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ y - z = 6 \\ z = -5 \end{cases} \\
&\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ y = 1 \\ z = -5 \end{cases} \\
&\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 2L_3} \begin{cases} -3x = 12 \\ y = 1 \\ z = -5 \end{cases} \\
&\xrightarrow[-\frac{1}{3}L_1]{-\frac{1}{3}L_1} \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \\ z = -5 \end{cases}
\end{aligned}$$

**Définition : Rang d'une matrice**

Le rang d'une matrice  $A$  est son nombre de lignes non nulles après échelonnage. Il est noté  $\text{rg}(A)$ .

**Théorème :**

Soient  $\mathcal{S}$  un système linéaire de  $m$  lignes et  $n$  inconnues,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$  telles que  $A|B$  forme la matrice associée à  $\mathcal{S}$ .  $\mathcal{S}$  est solvable si et seulement si :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B)$$

## 16.2 Opérations sur les matrices

**Définition : Opérations sur les matrices**

Soient  $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix}$$

1. Si  $m = p$  et  $n = q$  alors on peut définir l'addition entre  $A$  et  $B$  et la multiplication par  $\lambda$ .

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} (a_{1,1} + \lambda b_{1,1}) & \cdots & (a_{1,n} + \lambda b_{1,q}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m,1} + \lambda b_{p,1}) & \cdots & (a_{m,n} + \lambda b_{p,q}) \end{pmatrix}$$

2. Si  $n = p$  alors on peut définir la multiplication entre  $A$  et  $B$ .  
Soit  $C = AB$ . Chaque coefficient  $c_{i,j}$  de  $C$  est défini par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Autrement dit, le coefficient  $c_{i,j}$  pour  $C = AB$  est donné par :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{m,q} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c_{i,j}} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{p,j}$$

Attention, la multiplication n'est pas commutative ( $AB \neq BA$ ).

**Exemple 16.3.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = AB \\ AB &= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Proposition :

Soient  $m, n, k, l \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ .

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

2. Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{l,n}(\mathbb{K})$ .

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K})$ ,  $B, C \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$A \cdot (B + \lambda C) = A \cdot B + \lambda \cdot A \cdot C$$

$$(A + \lambda B) \cdot C = A \cdot C + \lambda \cdot B \cdot C$$

**Proposition : Binôme de Newton**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = BA$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

**Définition : Matrice nulle**

La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont 0. On la note  $0_{m,n}$ ,  $m$  étant le nombre de lignes,  $n$  le nombre de colonnes.

**Définition : Symbole de Kronecker**

On définit le symbole de Kronecker ainsi pour  $i, j \in \mathbb{N}^*$  :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Définition : Matrice identité**

La matrice identité est la matrice dont tous les coefficients sont 0 à l'exception de ceux de la diagonale principale à 1. On la note  $I_n$ ,  $n$  étant le nombre de lignes.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut également dire que :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

*Remarque.* La matrice identité est parfois notée :  $1_n$ .

**Lemme :**

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

1.  $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), A + 0_{m,n} = A$
2.  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

**Définition : Transposée**

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  de coefficients  $a_{1,1}, \dots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$ .

La transposée de  $A$  est notée  $A^T$ .  $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  et pour  $a_{1,1}^T, \dots, a_{n,m}^T \in \mathbb{K}$  ses coefficients :

$$(a_{j,i}^T)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

**Exemple 16.4.** Soit  $A$  une matrice telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Définition :**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1.  $M$  est symétrique  $\iff M^T = M$
2.  $M$  est anti-symétrique  $\iff M^T = -M$

**Définition :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ .

On définit  $A^* = (\overline{A})^T = (\overline{A^T})$  la **matrice adjointe / transconjugée**. Autrement dit : on prend la transposée de  $A$  et on prend les conjugués des coefficients.

**Exemple 16.5.** Soit  $A$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3-i \\ 2 & -2 \\ i & 5i \end{pmatrix}$$

On a  $A^T$  :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i \\ 3-i & -2 & 5i \end{pmatrix}$$

et finalement  $A^*$  :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & -i \\ 3+i & -2 & -5i \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée noté  $\det(A)$  ou s'il n'y a pas d'ambiguïté  $|A|$ , il existe plusieurs méthodes.

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  de coefficients  $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{K}$ .

1.  $n = 2$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

2.  $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) - (a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2})$$

3.  $n \geq 3$  (14). On peut calculer le déterminant d'une matrice en calculant à l'aide des déterminants des matrices de taille  $n-1$ . Pour se faire on développe en lignes ou en colonnes. Notons  $A_{i,j}$  ma matrice obtenue en enlevant à  $A$  sa  $i$ -ème ligne et sa  $j$ -ème colonne.

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On peut alors développer le calcul du déterminant suivant une ligne ou une colonne :

- (a) Suivant la ligne  $i$  :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

(b) Suivant la colonne  $j$  :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

**Exemple 16.6.** Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

en développant suivant la première ligne.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2[1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2] - 1[1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1] - 2[1 \cdot 2 - 1 \cdot 1] \\ &= 6 - 1 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

### Proposition :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
2.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3.  $\det(A^T) = \det(A)$
4.  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$  si  $\det(A) \neq 0$

### Définition : Matrice inversible

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$A$  est inversible si et seulement si existe une unique matrice  $B = A^{-1}$  telle que

$$AB = BA = I_n.$$

### Proposition :

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

### Définition : Comatrice

La comatrice  $\text{com}(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice est définie ainsi :

$$(\text{com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Lorsque nous devons calculer l'inverse d'une matrice, plusieurs cas sont possibles. Si on a une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Une méthode générale pour calculer l'inverse d'une matrice  $A$  est d'utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan. On part de la matrice

$$A|I_n$$

et on applique les opérations élémentaires pour avoir une matrice de la forme

$$I_n|B$$

$B = A^{-1}$  est l'inverse de  $A$ .

Une autre méthode générale est d'utiliser la comatrice de  $A$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$$

**Exemple 16.7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

Posons  $A|I_n$  :

$$\begin{aligned}
 A|I_n &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3]{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & \frac{5}{2} \\ 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

#### Définition : Trace d'une matrice

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$  les coefficients de  $A$ .

La trace de  $A$ , notée  $\text{tr}(A)$  est définie par l'application suivante.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
 A &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_{i,i}
 \end{aligned}$$

**Exemple 16.8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , on a  $\text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$ .

#### Lemme :

$$1. \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$2. \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

*Démonstration.*

1. Par application directe de la définition de la trace et de la transposée.
2. Les coefficients  $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$  et  $b_{1,1}, \dots, b_{n,n}$  sont respectivement les coefficients des matrices  $A$  et  $B$ . Les coefficients  $(ab)_{1,1}, \dots, (ab)_{n,n}$  et  $(ba)_{1,1}, \dots, (ba)_{n,n}$  sont respectivement ceux



des matrices  $AB$  et  $BA$ .

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (ab)_{i,i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1} b_{1,i} + \cdots + a_{i,n} b_{n,i}) \\
 &= (a_{1,1} b_{1,1} + \cdots + a_{1,n} b_{n,1}) + \cdots + (a_{n,1} b_{1,n} + \cdots + a_{n,n} b_{n,n}) \\
 &= (b_{1,1} a_{1,1} + \cdots + b_{1,n} a_{n,1}) + \cdots + (b_{n,1} a_{1,n} + \cdots + b_{n,n} a_{n,n}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (b_{i,1} a_{1,i} + \cdots + b_{i,n} a_{n,i}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (ba)_{i,i} \\
 &= \operatorname{tr}(BA)
 \end{aligned}$$

□

### Proposition :

Pour passer d'une forme cartésienne à une forme paramétrique, on applique le pivot de Gauss sur les lignes. Pour passer d'une forme paramétrique à une forme cartésienne, on utilise le déterminant.

### Définition : Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Soient  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

On définit le produit scalaire ainsi :

$$\begin{aligned}
 \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i
 \end{aligned}$$

### Définition : Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Soient  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

On définit le produit vectoriel ainsi :

$$\begin{aligned}
 \wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_1 y_3 - x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



# Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (<https://www.bibmath.net/>).
2. WIKIPÉDIA, *Portail :Mathématiques* (<https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811>).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (<http://exo7.emath.fr/>).
4. U. C. B. L. 1, *Licence de mathématiques Lyon 1* (<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1>).
5. WIKIPÉDIA, *Nombre réel* ([https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre\\_r%C3%A9el&oldid=200922904](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904)).
6. WIKIVERSITÉ, *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité* ([https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions\\_d%27une\\_variable\\_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9](https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9)).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (<http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>).
8. BIBM@TH, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023 ; <https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU>).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, (<https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxc>).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.h/hospital.html>).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.a/analysesynthese.html>).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf>).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (<http://math-sup.ouvaton.org/index.php? sujet=cours& chapitre=DES5>).
14. WIKIPÉDIA, *Calcul du déterminant d'une matrice* ([https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul\\_du\\_d%C3%A9terminant\\_d%27une\\_matrice&oldid=199565270](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270)).
15. BIBM@TH, *Monoïde* (<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.m/monoide.html>).
16. BIBM@TH, *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (<https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html>).
17. BIBM@TH, *Résumé de cours : applications linéaires* (<https://bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/al.html>).