Table des matières

Deuxième partie

Analyse

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 18

Applications linéaires

18.1 Définitions

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est une **application linéaire** si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
On définit le **noyau** de f, noté $\ker(f)$ tel que :

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_E\}$$

On définit l'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ telle que :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F : \exists x \in E : y = f(x)\}$$

Théorème :

Soient E, F des espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. $\ker(f) \subseteq E$.
2. $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$.

Démonstration.

1. $\forall x_1, x_2 \in \ker(f),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(x_1 + \lambda x_2) &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= 0 + \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\forall y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} y_1 \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists x_1 : f(x_1) = y_1 \\ y_2 \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists x_2 : f(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 + \lambda y_2 &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= f(x_1 + \lambda x_2) \end{aligned}$$

Ainsi $y_1 + \lambda y_2 \in \mathrm{Im}(f)$.

□

Définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. On dit que f est un **morphisme** de E vers F, on note $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
2. Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme** de E, on note $f \in \mathcal{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est une **bijection**, alors f est un **isomorphisme**. On le note $f : E \xrightarrow{\sim} F$.
4. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un **isomorphisme**, on dit que f est un **automorphisme** de E et on le note $\mathrm{Aut}(E)$.
   E et F sont appelés **isomorphes** s'il existe un **isomorphisme** de l'un vers l'autre, on écrit parfois $E \cong F$.

Soit $\varepsilon = \{f \in \mathcal{C}^N(I) : f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0\},\ n, N \in \mathbb{N}^*,\ a_i \in \mathcal{C}^0(I),\ I$ un intervalle ouvert.

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\varepsilon \subset \mathcal{C}^n(I)$
2. $\dim(E) = n$

Définition : Rang d'un morphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ le rang de f.

Théorème : Théorème du rang

Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies ou infinies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \ker(f) + \mathrm{Im}(f) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \\ \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \end{cases} \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$$

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Si l'on connait $f(b_i) \in F$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, on connait toute l'application f.

Corollaire :

Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme donné par :

$$\varphi(b_i) = e_i,\ \forall i \in [\![1,n]\!]$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Définition :

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ une base de F. Alors on peut définir une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} c_j$$

Lemme :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un espace-vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

$$\dim(E) = n \implies E \cong \mathbb{K}^n$$

Lemme :

Soient $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$ alors :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & E \to \mathbb{K}^n \\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une bijection, alors c'est un isomorphisme.

Proposition :

Soient E, F des espaces vectoriels $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un morphisme et A sa matrice associée.

$$y = f(x) \iff y = A \cdot x$$

18.2 Projecteurs et symétries

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $f^2 = f \circ f$.

1. On dit que f **est idempotente/une projection** si et seulement si : $f^2 = f$.
2. On dit que f **est involutive/une symétrie linéaire** si et seulement si : $f^2 = id_E$.

Proposition :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. $id_E - p$ est une projection $\iff$ p est une projection
2. $2p - id_E$ est une symétrie $\iff$ p est une projection

Démonstration.

1. Posons $f(x) = id_E(x) - p(x)$. Montrons que $f(f(x)) = id_E(x) - p(x)$ si et seulement si $p(p(x))$.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= id_E(id_E(x) - p(x)) - p(id_E(x) - p(x)) \\ &= id_E(id_E(x)) - id_E(p(x)) - p(id_E(x)) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - p(x) - p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - 2p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] = id_E(x) - p(x) &\iff p(p(x)) = p(x) \\ &\iff 2p(x) - p(p(x)) = p(x) \\ &\iff 2p(x) = p(x) + p(p(x)) \\ &\iff p(x) = p(p(x)) \end{aligned}$$

2. Posons $s(x) = 2p(x) - id_E(x)$.
   Montrons que $s(s(x)) = id_E(x)$ si et seulement si $p(p(x)) = p(x)$.

$$\begin{aligned} s(s(x)) &= s(2p(x) - id_E(x)) \\ &= 2p(2p(x) - id_E(x)) - id_E(2p(x) - id_E(x)) \\ &= 4p(p(x)) - 2p(id_E(x)) - 2id_E(p(x)) + id_E(id_E(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4p(p(x)) - 4p(x) + id_E(x) = id_E(x) &\iff 4p(p(x)) - 4p(x) = 0 \\ &\iff 4p(p(x)) = 4p(x) \\ &\iff p(p(x)) = p(x) \end{aligned}$$

□

Définition :

Soient $E = F \oplus G$, $u \in F$, $v \in G$, alors l'application

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u + v & \mapsto & u \end{array}$$

est appelée un **projecteur** sur F **parallélement** à G.

Proposition :

Soit p_F définie comme dans la définition précédente.

1. p_F est une projection.
2. Soit p une projection, p est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallélement à son noyau $\ker(p)$.

18.3 Rotations.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle Rx | Ry \rangle = \langle x | y \rangle\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{SO}(n) = \{R \in \mathrm{O}(n) : \det(R) = 1\}$$

Proposition :

Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $R \in \mathrm{O}(n) \iff R^T \cdot R = I_n$.
2. $R \in \mathrm{O}(n) \implies \det(R) \in \{\pm 1\}$.

Corollaire :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : R^T \cdot R = I_n\}$$

18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.

Définition :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On peut définir une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(b_1) & \cdots & f(b_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

avec les coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{n,p} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f(b_j) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} b'_i$$

Définition : Matrice de passage

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée de taille n dont la $j-$ième colonne est formée des coordonnées de b'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Concrètement, écrivons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b'_1 & \cdots & b'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec les coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_i$$

Définition :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. On dit que A et B sont **équivalentes** si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n),\ Q \in \mathrm{GL}(m),\ B = Q^{-1}AP$$

2. On dit que A et B sont **similaires** si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n),\ B = P^{-1}AP$$

Bibliographie

1. Bibm@th, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (https://www.bibmath.net/).
2. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811).
3. Exo7, *Cours et exercices de mathématiques* (http://exo7.emath.fr/).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité* (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. Exo7, *Cours d'analyse de première année*, (http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf).
8. Bibmath.net, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023 ; https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU).
9. Bibm@th, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc).
10. Bibm@th, *Règle de L'Hospital* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html).
11. Bibm@th, *Raisonnement par analyse-synthèse* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/analysesynthese.html).
12. A. Soyeur, F. Capaces, E. Vieillard-Baron, Sésamath, les-mathematiques.net, *Cours de mathématiques de SUP*, (http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf).
13. F. Millet, *math-sup.fr* (http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Monoïde* (2023 ; https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./m/monoide.html).
16. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html).