Table des matières

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 4

Suites réelles

4.1 Définitions

Définition : Suite réelle

On appelle **suite réelle** une fonction de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction $x \mapsto u_n$.

Définition : Suite stationnaire

Une suite est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : u_n = u_N$$

Remarque. Ainsi les propriétés des fonctions réelles s'appliquent également aux suites.

4.2 Suites usuelles

Définition : Suite arithmétique

Soient $r, u_0 \in \mathbb{R}$.
On définit une **suite arithmétique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_n = u_0 + nr \end{cases}$$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

Définition : Suite géométrique

Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
On définit une **suite géométrique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_n = u_0 q^n \end{cases}$$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \\ u_0(n+1) \text{ si } q = 1 \end{cases}$$

Définition : Suite arithmético-géométrique

Soient $r, u_0 \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}^*$.
On définit une **suite arithmético-géométrique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_{n+1} = qu_n + r \\ u_n = a + (u_0 - a)q^n, \ a = \frac{r}{1-q} \end{cases}$$

1. On commence par résoudre $a = qa + r \iff a = \frac{r}{1-q}$.
2. Ensuite, on pose $v_n = u_n - a$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - a$ qui est une suite géométrique, ainsi $v_n = v_0 q^n$.
3. Finalement $u_n = v_n + a \iff u_n = v_0 q^n + a \iff u_n = (u_0 - a)q^n + a$.

Exemple 4.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

1. On cherche tout d'abord à résoudre $a = \frac{1}{4}a + 3$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}a + 3 \\ \frac{3}{4}a &= 3 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

2. Posons $v_n = u_n - 4$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n - 1 \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n - 4) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

Ainsi on a montré que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
On a $v_0 = u_0 - 4 = 3 - 4 = -1$, puis :

$$v_n = -\frac{1}{4^n}$$

3. Finalement, $u_n = v_n + 4 = 4 - \frac{1}{4^n}$.

4.3 Convergence d'une suite

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend** vers ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si et seulement si :
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** si et seulement si :
$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N : |u_n - \ell| > \varepsilon$$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne converge pas vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N : |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Théorème :

La limite d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

Démonstration. Procédons à un raisonnement par l'absurde.
On suppose que $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$.
Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2|$$

Alors :

$$|u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$$
$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$$
$$\frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 0$$
$$\varepsilon \leqslant 0$$

ce qui est absurde. Ainsi on a montré que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Théorème :

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = 1$.
Par définition de la limite :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant 1 \iff \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

Posons $M = \max(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell+1)$ et $m = \min(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell-1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} m \leqslant u_n \leqslant M, & \text{si } n < N \\ \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1, & \text{si } n > N \end{cases}$$

Sachant que $m \leqslant \ell - 1$ et $M \geqslant \ell + 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

ce qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Théorème :

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$, alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Puis :

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2|$$
$$|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Posons $\varepsilon' = 2\varepsilon$. Ainsi :

$$|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$. □

Théorème :

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

Par définition de la limite :

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad \exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Puis :

$$\begin{aligned} |u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| &= |u_n \cdot v_n - u_n \cdot \ell_2 + u_n \cdot \ell_2 - \ell_1 \cdot \ell_2| \\ &= |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\ &\leqslant |u_n||v_n - \ell_2| + |\ell_2||u_n - \ell_1| \\ &\leqslant M\varepsilon + |\ell_2|\varepsilon = (M + |\ell_2|)\varepsilon \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon' = (M + |\ell_2|)\varepsilon$. Ainsi :

$$|u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$. □

Théorème :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Posons :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad\qquad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell_1 > \ell_2$.
Posons :

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$$

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad \exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall n \geqslant N_1,\ u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geqslant N_2,\ v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \implies v_n < u_n$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell_1 \leqslant \ell_2$. □

Corollaire :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} = \ell$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$ alors $\ell \leqslant M$.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$ alors $\ell \geqslant m$.

Théorème : Théorème des gendarmes

Soient $\ell \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration.

$$\exists N_1 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_2,\ |w_n - \ell| \geqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui revient à dire :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon \qquad \ell - \varepsilon \leqslant w_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

Sachant que :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

on a :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc finalement :

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon \iff |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. □

Exemple 4.2. Cherchons à déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.
On sait tout d'abord que :

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

puis :

$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

On a d'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

d'autre part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Théorème :

1. Toute suite croissante majorée converge.
2. Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème : Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Démonstration. Posons $w_n = v_n - u_n$.
On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Ainsi $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Etudions la variation de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) < 0$$

Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et sa limite est 0. On a alors :

$$w_n \geqslant 0 \iff v_n - u_n \geqslant 0 \iff v_n \geqslant u_n$$

D'après les monotonies de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'encadrement suivant :

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 et est croissante, donc elle converge vers une limite ℓ_1.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0 et est croissante, donc elle converge vers une limite ℓ_2. D'une part :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

D'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \ell_2 - \ell_1$$

Donc :

$$\ell_2 - \ell_1 = 0 \iff \ell_2 = \ell_1$$

□

4.4 Suites extraites

Définition : Extraction

Une extraction est une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante.

Définition : Suite extraite

Une suite extraite ou une sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une de ses sous-suites.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite}$$

Théorème : Théorème de Ramsey

Toute suite admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $E = \{n \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n,\ u_m \leqslant u_n\}$.
Cas 1 : E est fini, donc majoré par un entier N, $\forall n \leqslant N$, $n \notin E$ donc $\exists m > n$, $u_m > u_n$. On définit alors par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $\varphi(0) = N+1$, puis, étant donnés $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(K)$, on choisit $\varphi(K+1)$ tel que $u_{\varphi(K+1)} > u_{\varphi(K)}$ et la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Cas 2 : E est infini. On pose $E = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) \in E,\ \text{comme } \varphi(K+1) > \varphi(K),\ u_{\varphi(K+1)} \leqslant u_{\varphi(K)}$$

et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. D'après le théorème de Ramsey, il existe une sous-suite monotone $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée, alors elle converge. □

4.5 Limites infinies

Définition : Limites infinies

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : u_n \geqslant A.$
2. $\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : u_n \leqslant A.$

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Si elle est **croissante** alors :
   — ou bien elle converge.
   — ou bien elle tend vers $+\infty$.
2. Si elle est **décroissante** alors :
   — ou bien elle diverge.
   — ou bien elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. Démontrons les propriétés si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On distingue deux cas :

1. Si (u_n) est majorée, elle converge, d'après le théorème de convergence monotone car elle est croissante et majorée.
2. Si (u_n) n'est pas majorée, montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Soit A un réel. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :
$$\exists N \in \mathbb{N},\ u_N \geqslant A$$
$$\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant u_N \geqslant A$$

On utilise un raisonnement analogue si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Théorème : Limites par comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$
2. $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$

Définition : Suite de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |u_{n_1} - u_{n_2}| \leqslant \varepsilon$$

Hypothèses	Conclusion
« $+\infty + \infty$ »	$+\infty$
« $-\infty - \infty$ »	$-\infty$
« $+\infty + \ell$ »	$+\infty$
« $-\infty + \ell$ »	$-\infty$
« $-\infty \cdot \ell > 0$ »	$-\infty$
« $-\infty \cdot \ell < 0$ »	$+\infty$
« $+\infty \cdot \ell > 0$ »	$+\infty$
« $+\infty \cdot \ell < 0$ »	$-\infty$
« $+\infty \cdot +\infty$ »	$+\infty$
« $-\infty \cdot -\infty$ »	$+\infty$
« $-\infty \cdot +\infty$ »	$-\infty$
« $\frac{0}{\pm\infty}$ »	0
« $\frac{\pm\infty}{0}$ »	$\begin{cases} +\infty \text{ si } 0^+ \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$
« $\frac{-\infty}{0}$ »	$\begin{cases} -\infty \text{ si } 0^+ \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$
« $\infty - \infty$ »	FI
« $0 \cdot \infty$ »	FI
« $\frac{0}{0}$ »	FI
« $\frac{\infty}{\infty}$ »	FI

TABLE 4.1 – Limites infinies ($\ell \in \mathbb{R}$) et formes indéterminées

Troisième partie

Algèbre

Bibliographie

1. BIBM@TH, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (https://www.bibmath.net/).
2. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811).
3. EXO7, *Cours et exercices de mathématiques* (http://exo7.emath.fr/).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité* (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. EXO7, *Cours d'analyse de première année*, (http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf).
8. BIBMATH.NET, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023 ; https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU).
9. BIBM@TH, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc).
10. BIBM@TH, *Règle de L'Hospital* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html).
11. BIBM@TH, *Raisonnement par analyse-synthèse* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/analysesynthese.html).
12. A. SOYEUR, F. CAPACES, E. VIEILLARD-BARON, SÉSAMATH, LES-MATHEMATIQUES.NET, *Cours de mathématiques de SUP*, (http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf).
13. F. MILLET, *math-sup.fr* (http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Monoïde* (2023 ; https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./m/monoide.html).
16. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html).