L'essentiel des mathématiques de première année de Licence

Raphaël Heng
Alyce Théobald

Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 1 - Portail Mathématiques-Informatique
Année universitaire 2022-2023

Table des matières

Première partie

Introduction

Avant toute chose, nous tenons à préciser que cette mise en page est destinée à une impression sous la forme d'un livre. Ainsi pour profiter d'une bonne lecture sur la version numérique, nous vous recommandons de la lire en mode « double pages » avec les plus grandes marges orientées vers le centre.

Ce document repose principalement sur les enseignements de nos professeurs Guillaume AUBRUN, Kenji IOHARA et Thomas STROBL mais nous avons utilisé des ressources complémentaires telles que **Bibmath** (*1*), **Wikipédia** (*2*), **Exo7** (*3*) ou encore les cours disponibles sur le site de la **licence Mathématiques** (*4*).
Il regroupe l'essentiel des compétences mathématiques à maîtriser à la fin de la première année de Licence. Vous y trouverez les définitions et les théorèmes à connaître accompagnés d'exercices à savoir refaire. Nous essaierons de démontrer le plus de théorèmes possibles, cependant les preuves ne sont pas toute à retenir (cela dépend également de votre orientation : mathématiques ou informatique). Il se peut également que les outils mathématiques ne soient pas présentées scrupuleusement comme aux cours magistraux, nous avons éventuellement paraphrasé certains passages. Par exemple, il se peut que les notations utilisées ne soient pas les mêmes que celles vues en cours, nous avons préféré utiliser des notations qui nous semblent plus claires.

Nous pensons qu'il est intéressant de définir certains mots de vocabulaires définis ci-dessous :
- **Assertion** : Une assertion est une affirmation mathématique qui est soit vraie soit fausse.
- **Axiome** : Un axiome est une assertion que l'on considère vraie sans démonstration.
- **Définition** : Une définition énonce comment un objet mathématique est construit.
- **Théorème** : Un théorème est une assertion d'importance particulière ayant été démontrée.
- **Corollaire** : Un corollaire est un résultat découlant d'un théorème.
- **Lemme** : Un lemme est un résultat intermédiaire sur lequel on s'appuie pour démontrer un théorème.
- **Proposition** : Une proposition est un résultat simple qui n'est pas associé à un théorème.
- **Conjecture** : Une conjecture est une proposition dont on ignore la véracité.

Rappelons également les ensembles de nombres étudiés au lycée :

$$\text{L'ensemble des entiers naturels : } \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$$

$$\text{L'ensemble des entiers relatifs : } \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

$$\text{L'ensemble des nombres décimaux : } \mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\text{L'ensemble des nombres rationnels : } \mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

$$\text{L'ensemble des nombres réels : } \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

Nous définirons l'ensemble des nombres réels plus rigoureusement dans le chapitre 1.

Pour désigner un ensemble privé de 0, nous pouvons lui ajouter « $*$ » en exposant.
Par exemple $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$.

Définissons également certaines notations :
- $\forall$: « Pour tout » ou « Quelque soit ».
- $\exists$: « Il existe ».
- $\exists!$: « Il existe un unique ».
- $\in$: « Appartient à ».
- $\subseteq$: « Inclus dans ou égal à ».
- $\subset$: « Strictement inclus dans ».
- $P \implies Q$: « Si P alors Q ».
- $P \iff Q$: « P équivaut à Q ». Autrement dit : « P si et seulement si Q ».
- $\square$: Quand il est utilisé à la fin d'une démonstration, il signifie : « Ce qu'il fallait démontrer ».
- $[a, b]$: Désigne l'intervalle de nombres réels entre a et b inclus.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 1

Nombres réels

Définition : Nombre réel (5)

Un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.

Proposition : Addition et multiplication sur $\mathbb{R}$

On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition (notée « $+$ ») et une multiplication (notée « $\times$ » ou « $\cdot$ ») qui prolonge l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. Commutativité :
   (a) $a + b = b + a$.
   (b) $a \cdot b = b \cdot a$.
2. Associativité :
   (a) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
   (b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. Distributivité :
   (a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$.
   (b) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
4. Élement neutre :
   (a) $a + 0 = a$.
   (b) $a \cdot 1 = a$.
5. Élément absorbant : $a \cdot 0 = 0$.

Proposition : Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

On peut définir une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, notée « $\leqslant$ », qui prolonge l'ordre de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. Réflexivité : $a \leqslant a$.
2. Antisymétrie : $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \implies a = b$.
3. Transitivité : $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \implies a \leqslant c$.
4. Ordre total : $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.
5. Compatibilité avec l'addition : $a + c \leqslant b + c$.
6. Compatibilité avec la multiplication par un réel positif : $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0 \implies a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

Définition : Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a-b| \geqslant |a| - |b|$
4. $|a| = \sqrt{a^2}$

Définition : Intervalle réel

On dit qu'un intervalle réel I est un ensemble de nombres délimités par deux réels a et b.

1. Pour $I = [a, b]$, on dit que $x \in I$ si et seulement si :
$$a \leqslant x \leqslant b$$
2. Pour $I =]a, b[$, on dit que $x \in I$ si et seulement si :
$$a < x < b$$
3. Pour $I = [a, b[$, on dit que $x \in I$ si et seulement si :
$$a \leqslant x < b$$
4. Pour $I =]a, b]$, on dit que $x \in I$ si et seulement si :
$$a < x \leqslant b$$

Définition :

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

1. On dit que m est un **majorant** de A si et seulement si : $A \iff \forall x \in A,\ x \leqslant m$.
2. On dit que m est un **minorant** de A si et seulement si : $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.

On dit que A est **majorée** si elle admet un **majorant**, **minorée** si elle admet un **minorant** et **bornée** si elle est **majorée** et **minorée**.

Théorème :

Soit $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$.

1. Si A est **majorée**, elle admet un **plus petit majorant** appelé la **borne supérieure** de A, notée : $\sup(A)$.
2. Si A est **minorée**, elle admet un **plus grand minorant** appelé la **borne inférieure** de A, notée : $\inf(A)$.

Proposition :

Soient $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$, M un majorant de A et m un minorant de A.

1. $M = \sup(A) \iff \forall \varepsilon > 0 :]M - \varepsilon, M] \cap A \neq \varnothing$.

2. $m = \inf(A) \iff \forall \varepsilon > 0 : [m, m + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing$

Chapitre 2

Fonctions réelles

2.1 Définitions

Définition : Fonction

Une fonction f est la donnée de :

1. Un ensemble de départ E.
2. Un ensemble d'arrivée F.
3. Une flèche : $f : E \to F$ à tout élément $x \in E$ associe un élément $f(x) \in F$.

On appelle **images** les éléments de F et **antécédents** les éléments de E.

Définition : Graphe d'une fonction

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.
Le graphe de f est défini comme :

$$\mathrm{Gr}(f) = \mathrm{Gph}(f) = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \subseteq E \times F$$

Définition :

Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit que :

1. f est **injective** si et seulement si :
$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$
2. f est **surjective** si et seulement si :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y$$
3. f est **bijective** si et seulement si :
$$\forall y \in E,\ \exists! x \in E : f(x) = y$$

Définition : Bijection réciproque

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est une bijection. On peut définir $f^{-1} : F \to E$ la bijection réciproque de f qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E.

Proposition :

Soient $x \in E,\ y \in F$.

1. $f^{-1}(f(x)) = x$
2. $f(f^{-1}(y)) = y$

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+$. On dit que :

1. f est **paire** si et seulement si :
$$\forall x \in I : f(x) = f(-x)$$
2. f est **impaire** si et seulement si :
$$\forall x \in I : -f(x) = f(-x)$$
3. f est T**-périodique** si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{Z} : f(x + nT) = f(x)$$

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

1. f est **majorée** ou qu'elle admet un **majorant** si et seulement si :
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I : f(x) \leqslant M$$
2. f est **minorée** ou qu'elle admet un **minorant** si et seulement si :
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I : f(x) \geqslant m$$
3. f est **bornée** si et seulement si elle est **majorée** et **minorée**.

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

1. f est **croissante** si et seulement si :
$$\forall x, y \in I : x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$$
2. f est **décroissante** si et seulement si :
$$\forall x, y \in I : x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$$
3. f est **monotone** si et seulement si elle est **croissante** ou **décroissante**.
4. f est **strictement croissante** si et seulement si :
$$\forall x, y \in I : x < y \implies f(x) < f(y)$$
5. f est **strictement décroissante** si et seulement si :
$$\forall x, y \in I : x < y \implies f(x) > f(y)$$
6. f est **strictement monotone** si et seulement si elle est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.
7. f est **constante** si et seulement si :
$$\forall x \in I : f(x) = a$$

2.2 Opérations sur les fonctions

Définition : Opérations sur les fonctions

Soient f, g deux fonctions et $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} f+g\colon & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} fg\colon & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

Si g ne s'annule pas :

$$\begin{array}{rccl} \frac{f}{g}\colon & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Définition : Composition de fonctions

Soient $E, F, G, H \subseteq \mathbb{R},\ F \subseteq G,\ f : E \longrightarrow F,\ g : G \longrightarrow H$.

$$\begin{array}{rccl} g \circ f\colon & E & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Définition : Fonction identité

Soient $E, F \subseteq \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} id_E\colon & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Proposition :

Soit $f : E \to F$ une bijection.

1. $f^{-1} \circ f = id_E$.
2. $f \circ f^{-1} = id_F$.

Définition : Image directe

Soient $f : E \to F,\ A \subseteq E$.

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} : f(A) \subseteq F$$

Définition : Image réciproque

Soient $f : E \to F,\ B \subseteq F$.

$$f^{-1}(B) = \{\forall x \in E,\ f(x) \in B\} : f^{-1} \subseteq E$$

Proposition :

Soient $f : E \to F,\ A_1, A_2 \subseteq E,\ B_1, B_2 \subseteq F$.

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Chapitre 3

Fonctions usuelles

Définition : Fonction polynomiale

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}$$

Définition : Fonction partie entière

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! E(x) \in \mathbb{Z},\ E(x) \leqslant x < E(x+1)$$

$$\begin{array}{rccl} E\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & E(x) \end{array}$$

Parfois la partie entière est notée $\lfloor x \rfloor$.

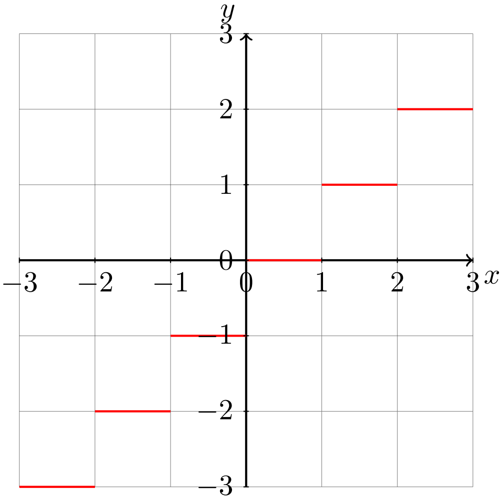


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction partie entière

Définition : Fonction puissance

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

Proposition :

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$.

1. $1^a = 1$.
2. $x^0 = 1$.
3. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.
4. Si $x \neq 0$ alors :
   (a) $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$.
   (b) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
5. $(xy)^a = x^a y^a$.
6. $(x^a)^b = x^{ab}$.

Proposition :

La dérivée de la fonction x^a est ax^{a-1}.

Démonstration. Dans le cas où la puissance est un entier naturel.
Procèdons par récurrence pour montrer $P_n : (x^n)' = nx^{n-1}$.

1. **Initialisation :** En $n = 0$, $f_0(x) = 1$ donc :

$$\begin{aligned} f_0'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f_0(x) - f_0(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{1 - 1}{x - a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   En $n = 1$, $f_1(x) = x$ donc :

$$f_1'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

2. **Hérédité :** On suppose que P_k est vraie pour un $k > 2$.
   On a : $f_{k+1}'(x) = (x - x^k)' = (f_1(x) f_k(x))'$.

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x) &= f_1'(x) f_k(x) + f_1(x) f_n'(x) \\ &= x^k + xkx^{k-1} \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

□

3.1 Fonctions trigonométriques

Définition : Fonctions trigonométriques

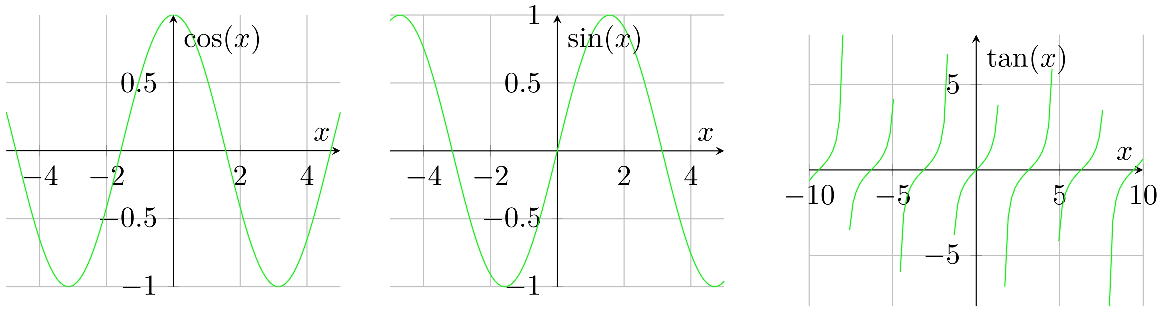
Soit $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \qquad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \qquad \tan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Proposition :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

1. $\cos(-x) = \cos(x)$.



(a) Fonction $\cos x$ (b) Fonction $\sin x$ (c) Fonction $\tan x$

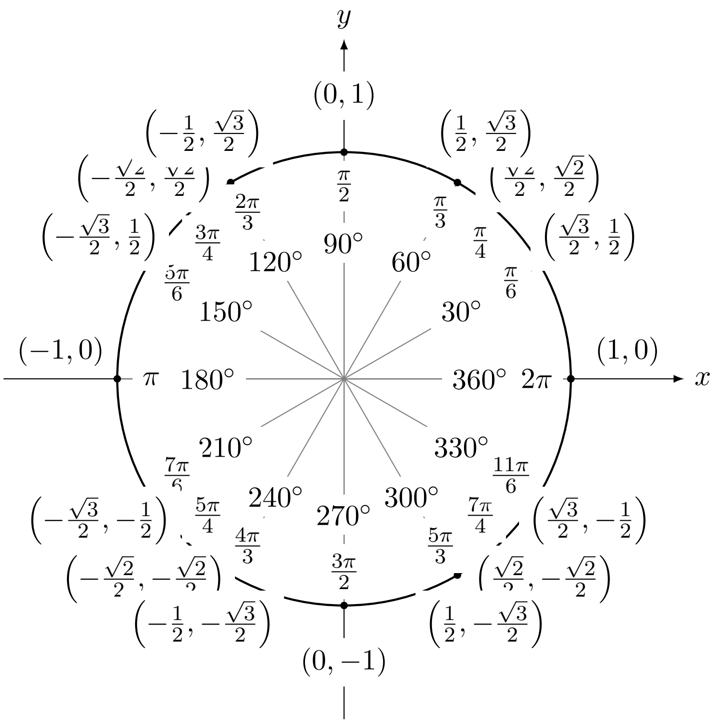


FIGURE 3.3 – Cercle trigonométrique

2. $\sin(-x) = -\sin(x)$.
3. $\tan(-x) = -\tan(x)$.
4. $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.
5. $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
6. $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$.
7. $\cos$ est bijective sur $[0, \pi]$.
8. $\sin$ est bijective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
9. $\tan$ est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Proposition :

1. $\cos'(x) = -\sin(x)$.
2. $\sin'(x) = \cos(x)$.
3. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Démonstration. Montrons le 3. On part de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

On peut simplifier le résultat de deux manières :

1. On peut utiliser $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc on aurait :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

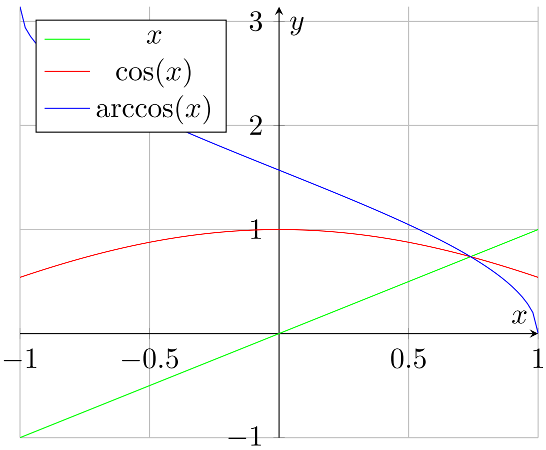
2. On peut aussi séparer la fraction en deux :

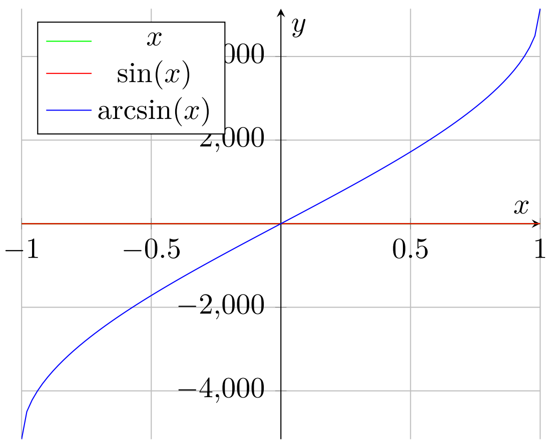
$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 \\ &= 1 + \tan^2(x)\end{aligned}$$

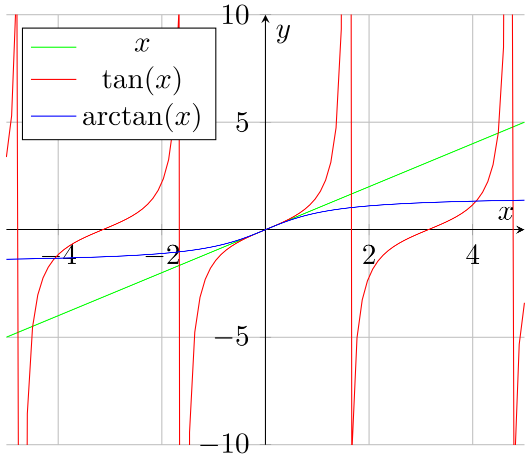
□

Définition :

On définit arccos, arcsin et arctan comme étant les bijections réciproques des fonctions cos, sin et tan.







Proposition :

1. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \arcsin(\sin(x)) = x$.
2. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\arctan(\tan(x)) = x$.
3. $\forall x \in [0, \pi] : \arccos(\cos(x)) = x$.
4. $\forall x \in [-1, 1]$:
   (a) $\sin(\arcsin(x)) = x$.
   (b) $\cos(\arccos(x)) = x$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan(x)) = x$.

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Démonstration. Nous pouvons procéder avec des produits scalaires, mais nous allons utiliser les nombres complexes ici.
D'une part :

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} \cdot e^{ib} \\ &= [\cos(a) + i\sin(a)] \cdot [\cos(b) + i\sin(b)] \\ &= \cos(a)\cos(b) + i\sin(b)\cos(a) + i\sin(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i[\sin(b)\cos(a) + \sin(a)\cos(b)]. \end{aligned}$$

Par identification de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

□

Proposition :

$\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. C'est une application du théorème de Pythagore sachant que le rayon du cercle trigonométrique est égal à 1. □

Proposition :

1. $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

3.2 Exponentielle et logarithme

Théorème : Fonction exponentielle

Il existe une unique fonction dérivable

$$\exp\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \exp(x) = e^x \end{array}$$

telle que $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Proposition :

La fonction exponentielle est **bijective** et **strictement croissante** et $\exp(0) = 1$.

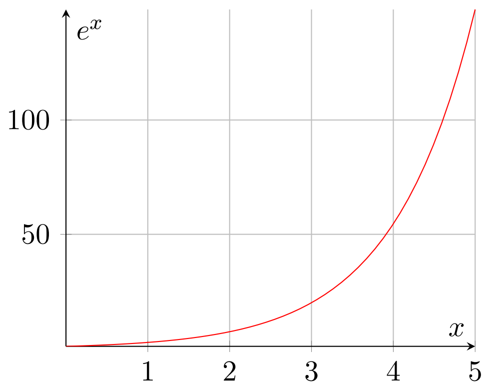
1. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

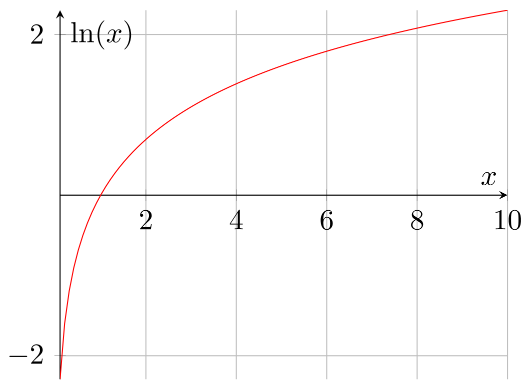
1. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
2. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
3. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Définition : Logarithme néperien

$$\ln\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$



(a) Fonction exponentielle



(b) Fonction logarithme népérien

Proposition :

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}$.

1. $\exp(\ln(x)) = x$.
2. $\ln(\exp(y)) = y$.

Proposition :

La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$.

Démonstration. On utilise la propriété suivante pour $y \in \mathbb{R}$: $\ln(\exp(y)) = y$.

$$\begin{aligned}
\ln(\exp(y)) &= y \\
(\ln(\exp(y)))' &= y' \\
\ln'(\exp(y))\exp'(y) &= 1 \\
\ln'(\exp(y))\exp(y) &= 1 \\
\ln'(\exp(y)) &= \frac{1}{\exp(y)}
\end{aligned}$$

En posant $x = \exp(y)$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$\square$

Proposition :

La fonction logarithme néperien est **bijective** et **strictement croissante** et $\ln(1) = 0$.

1. $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

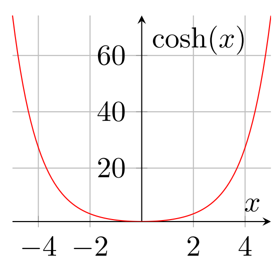
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

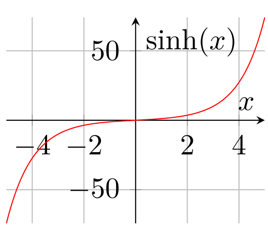
3.3 Fonctions hyperboliques

Définition : Fonctions hyperboliques

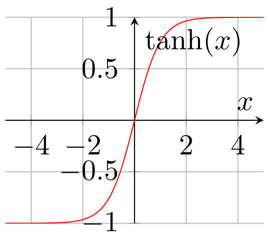
$$\cosh\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \sinh\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \tanh\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array}$$



(a) Fonction cosh



(b) Fonction sinh



(c) Fonction tanh

Proposition :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cosh(-x) = \cosh(x)$.
2. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.
3. $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.

Proposition :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.
2. $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$.

Démonstration. Calcul direct avec les définitions de cosh et de sinh. □

Chapitre 4

Suites réelles

4.1 Définitions

Définition : Suite réelle

On appelle **suite réelle** une fonction de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction $x \mapsto u_n$.

Définition : Suite stationnaire

Une suite est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : u_n = u_N$$

Remarque. Ainsi les propriétés des fonctions réelles s'appliquent également aux suites.

4.2 Suites usuelles

Définition : Suite arithmétique

Soient $r, u_0 \in \mathbb{R}$.
On définit une **suite arithmétique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_n = u_0 + nr \end{cases}$$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

Définition : Suite géométrique

Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
On définit une **suite géométrique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_n = u_0 q^n \end{cases}$$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \\ u_0(n+1) \text{ si } q = 1 \end{cases}$$

Définition : Suite arithmético-géométrique

Soient $r, u_0 \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}^*$.
On définit une **suite arithmético-géométrique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_{n+1} = qu_n + r \\ u_n = a + (u_0 - a)q^n, \ a = \frac{r}{1-q} \end{cases}$$

1. On commence par résoudre $a = qa + r \iff a = \frac{r}{1-q}$.
2. Ensuite, on pose $v_n = u_n - a$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - a$ qui est une suite géométrique, ainsi $v_n = v_0 q^n$.
3. Finalement $u_n = v_n + a \iff u_n = v_0 q^n + a \iff u_n = (u_0 - a)q^n + a$.

Exemple 4.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

1. On cherche tout d'abord à résoudre $a = \frac{1}{4}a + 3$.

$$a = \frac{1}{4}a + 3$$
$$\frac{3}{4}a = 3$$
$$a = 4$$

2. Posons $v_n = u_n - 4$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 4)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

   Ainsi on a montré que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   On a $v_0 = u_0 - 4 = 3 - 4 = -1$, puis :

$$v_n = -\frac{1}{4^n}$$

3. Finalement, $u_n = v_n + 4 = 4 - \frac{1}{4^n}$.

4.3 Convergence d'une suite

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend** vers ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si et seulement si :
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** si et seulement si :
$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N : |u_n - \ell| > \varepsilon$$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne converge pas vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N : |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Théorème :

La limite d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

Démonstration. Procédons à un raisonnement par l'absurde.
On suppose que $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$.
Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2|$$

Alors :

$$\begin{aligned} |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2| \\ |\ell_1 - \ell_2| &\leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2| \\ \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| &\leqslant 0 \\ \varepsilon &\leqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Ainsi on a montré que $\ell_1 = \ell_2$. □

Théorème :

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = 1$.
Par définition de la limite :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant 1 \iff \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

Posons $M = \max(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell + 1)$ et $m = \min(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell - 1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} m \leqslant u_n \leqslant M, & \text{si } n < N \\ \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1, & \text{si } n > N \end{cases}$$

Sachant que $m \leqslant \ell - 1$ et $M \geqslant \ell + 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

ce qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Théorème :

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$, alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Puis :

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2|$$
$$|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Posons $\varepsilon' = 2\varepsilon$. Ainsi :

$$|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$. □

Théorème :

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

Par définition de la limite :

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Puis :

$$\begin{aligned} |u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| &= |u_n \cdot v_n - u_n \cdot \ell_2 + u_n \cdot \ell_2 - \ell_1 \cdot \ell_2| \\ &= |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\ &\leqslant |u_n||v_n - \ell_2| + |\ell_2||u_n - \ell_1| \\ &\leqslant M\varepsilon + |\ell_2|\varepsilon = (M + |\ell_2|)\varepsilon \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon' = (M + |\ell_2|)\varepsilon$. Ainsi :

$$|u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$. □

Théorème :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Posons :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell_1 > \ell_2$.
Posons :

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$$

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall n \geqslant N_1,\ u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N_2,\ v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \implies v_n < u_n$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell_1 \leqslant \ell_2$. □

Corollaire :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} = \ell$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$ alors $\ell \leqslant M$.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$ alors $\ell \geqslant m$.

Théorème : Théorème des gendarmes

Soient $\ell \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration.

$$\exists N_1 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_2,\ |w_n - \ell| \geqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui revient à dire :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon \qquad \ell - \varepsilon \leqslant w_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

Sachant que :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

on a :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc finalement :

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon \iff |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. □

Exemple 4.2. Cherchons à déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.
On sait tout d'abord que :

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

puis :

$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

On a d'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

d'autre part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Théorème :

1. Toute suite croissante majorée converge.
2. Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème : Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Démonstration. Posons $w_n = v_n - u_n$.
On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Ainsi $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Etudions la variation de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) < 0$$

Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et sa limite est 0. On a alors :

$$w_n \geqslant 0 \iff v_n - u_n \geqslant 0 \iff v_n \geqslant u_n$$

D'après les monotonies de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'encadrement suivant :

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 et est croissante, donc elle converge vers une limite ℓ_1.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0 et est croissante, donc elle converge vers une limite ℓ_2. D'une part :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

D'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \ell_2 - \ell_1$$

Donc :

$$\ell_2 - \ell_1 = 0 \iff \ell_2 = \ell_1$$

□

4.4 Suites extraites

Définition : Extraction

Une extraction est une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante.

Définition : Suite extraite

Une suite extraite ou une sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une de ses sous-suites.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite}$$

Théorème : Théorème de Ramsey

Toute suite admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $E = \{n \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n,\ u_m \leqslant u_n\}$.
Cas 1 : E est fini, donc majoré par un entier N, $\forall n \leqslant N,\ n \notin E$ donc $\exists m > n,\ u_m > u_n$. On définit alors par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $\varphi(0) = N+1$, puis, étant donnés $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(K)$, on choisit $\varphi(K+1)$ tel que $u_{\varphi(K+1)} > u_{\varphi(K)}$ et la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Cas 2 : E est infini. On pose $E = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) \in E,\ \text{comme } \varphi(K+1) > \varphi(K),\ u_{\varphi(K+1)} \leqslant u_{\varphi(K)}$$

et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. D'après le théorème de Ramsey, il existe une sous-suite monotone $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée, alors elle converge. □

4.5 Limites infinies

Définition : Limites infinies

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : u_n \geqslant A.$
2. $\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N : u_n \leqslant A.$

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Si elle est **croissante** alors :
   — ou bien elle converge.
   — ou bien elle tend vers $+\infty$.
2. Si elle est **décroissante** alors :
   — ou bien elle diverge.
   — ou bien elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. Démontrons les propriétés si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On distingue deux cas :

1. Si (u_n) est majorée, elle converge, d'après le théorème de convergence monotone car elle est croissante et majorée.
2. Si (u_n) n'est pas majorée, montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Soit A un réel. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :
$$\exists N \in \mathbb{N},\ u_N \geqslant A$$
$$\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant u_N \geqslant A$$

On utilise un raisonnement analogue si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Théorème : Limites par comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$
2. $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$

Définition : Suite de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |u_{n_1} - u_{n_2}| \leqslant \varepsilon$$

Hypothèses	Conclusion
« $+\infty + \infty$ »	$+\infty$
« $-\infty - \infty$ »	$-\infty$
« $+\infty + \ell$ »	$+\infty$
« $-\infty + \ell$ »	$-\infty$
« $-\infty \cdot \ell > 0$ »	$-\infty$
« $-\infty \cdot \ell < 0$ »	$+\infty$
« $+\infty \cdot \ell > 0$ »	$+\infty$
« $+\infty \cdot \ell < 0$ »	$-\infty$
« $+\infty \cdot +\infty$ »	$+\infty$
« $-\infty \cdot -\infty$ »	$+\infty$
« $-\infty \cdot +\infty$ »	$-\infty$
« $\frac{0}{\pm\infty}$ »	0
« $\frac{\pm\infty}{0}$ »	$\begin{cases} +\infty \text{ si } 0^+ \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$
« $\frac{-\infty}{0}$ »	$\begin{cases} -\infty \text{ si } 0^+ \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$
« $\infty - \infty$ »	FI
« $0 \cdot \infty$ »	FI
« $\frac{0}{0}$ »	FI
« $\frac{\infty}{\infty}$ »	FI

TABLE 4.1 – Limites infinies ($\ell \in \mathbb{R}$) et formes indéterminées

Chapitre 5

Continuité et limites de fonctions

Définition : Limite d'une fonction

1. En un point $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$:
   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$
   (b) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant A.$
   (c) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \leqslant A.$
2. En l'infini, $\ell \in \mathbb{R}$:
   (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$
   (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \leqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \implies f(x) \geqslant A.$
   (d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \implies f(x) \leqslant A.$
   (e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \leqslant B \implies f(x) \geqslant A.$
   (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \leqslant B \implies f(x) \leqslant A.$

Théorème :

Soit $I \subseteq \mathbb{R},\ f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in I \cup \{-\infty, +\infty\},\ \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} u_n = a \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$$

Définition : Limite à gauche et à droite

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ a \in I,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$

1. $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ a-\delta < x < a \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$
2. $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ a < x < a+\delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$

Définition : Continuité

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ a \in I,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$
On dit que f est **continue** si et seulement si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
On peut également définir la continuité à gauche et à droite.

Remarque. Les théorèmes d'opérations avec les limites, de comparaison et des gendarmes sont analogues à ceux vus dans le chapitre sur les suites réelles.

Théorème : Composition de limites

Soient $I, J \subseteq \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J,\ g : J \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in I$ tels que :

1. $\lim_{x \to a} f(x) = y \in I$.
2. $\lim_{y \to z} g(z) = \ell$ existe.

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \ell$$

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\forall y \in [f(a), f(b)],\ \exists c \in [a, b] : f(c) = y$$

Démonstration. On utilise la borne supérieure.
Soit $E = \{x \in I \mid f(x) \leqslant y\}$. $a \in E$ donc $E \neq \varnothing$. On sait que $E \subseteq I$ donc E est majoré.
Posons $c = \sup(E)$.
Puisque $c = \sup(E)$, il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \to +\infty} c_n = c$.
Comme f est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f(c_n) = f(c)$$

Puisque $c_n \in E,\ f(c_n) \leqslant y$. En passant à la limite, on a :

$$f(c) \leqslant y$$

Montrons maintenant que $f(c) \geqslant y$.

- Si $c = b$, on a bien :

$$f(c) = f(b) =\geqslant y$$

- Si $c < b$, pour n assez grand :

$$c < c + \frac{1}{n} \leqslant b$$

  Sachant que $c = \sup(E)$, $c + \frac{1}{n} \notin E$, on a donc :

$$f\left(c + \frac{1}{n}\right) > y$$

  On a $\lim_{n \to +\infty} c + \frac{1}{n} = c$ et f étant continue :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$$

  Sachant que $f\left(c + \frac{1}{n}\right) > y$, en passant à la limite :

$$f(c) \geqslant y$$

□

Théorème :

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est croissante.

1. f admet une limite en b, qui est finie si et seulement si f est **majorée**.
2. f admet une limite en a, qui est finie si et seulement si f est **minorée**.

Si f est décroissante.

1. f admet une limite en b, qui est finie si et seulement si f est **minorée**.
2. f admet une limite en a, qui est finie si et seulement si f est **majorée**.

$\forall x_0 \in]a,b[$, f a une limite à gauche et à droite en x_0 et :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Théorème :

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. f strictement croissante $\Longrightarrow$ $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ est une bijection.
2. f strictement décroissante $\Longrightarrow$ $f : [a,b] \longrightarrow [f(b), f(a)]$ est une bijection.

Théorème :

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une injection continue.
Alors f est strictement monotone, donc bijective. Si on pose $J = f(I)$, $f^{-1} : J \to I$ est continue.

Définition : Segment

Un segment est un intervalle fermé borné.

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,b] : m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ et } \exists x_0, x_1 \in [a,b] : f(x_0) = m \text{ et } f(x_1) = M$$

Définition : Prolongement par continuité

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ existe. Alors la fonction :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} :\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ \ell \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Chapitre 6

Dérivabilité et accroissements finis

6.1 Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f est dérivable en $a \in I$ si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Une autre manière de définir la dérivabilité :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

On note $f'(a) = \ell$ la dérivée de f en a. Ainsi une fonction dérivable est une fonction dérivable en tout point de I. On peut également vérifier la limite à gauche et à droite de a.

Proposition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, si f est **dérivable** en a alors elle est **continue** en a.

Démonstration. Quand f est dérivable en a, le développement limité suivant existe :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

En passant à la limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)\right) \\
&= \lim_{x \to a} f(a) + \underbrace{\lim_{x \to a} \left(f'(a)(x-a) + o(x-a)\right)}_{=0} \\
\lim_{x \to a} f(x) &= f(a)
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que f est continue en a. $\square$

Théorème :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions dérivables en a.

1. $f + \lambda g$ est dérivable en a et $(f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.
2. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Démonstration.

1. On calcule $\lim_{x\to a} \frac{f(x)+\lambda g(x)-(f(a)+\lambda g(a))}{x-a}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)+\lambda g(x)-(f(a)+\lambda g(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+\lambda g(x)-f(a)-\lambda g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lambda \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)+\lambda g'(a)\end{aligned}$$

2. On calcule $\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}$. On utilise le fait qu'une fonction dérivable en a est continue en a et la définition de la continuité en a.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} + g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= f(a)g'(a)+f'(a)g(a)\end{aligned}$$

□

Théorème : (*6*)

Soient $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subseteq J$ et a un point de I.
Si f est dérivable au point a et g est dérivable au point $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable au point a et :

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Démonstration. (*6*). Notons $b = f(a)$. Puisque g est dérivable en b, il existe une fonction $u : J \to \mathbb{R}$ telle que :

$$u(b) = \lim_{y\to b} u(y) = g'(b)$$

et $\forall y \in J$:

$$g(y)-g(b) = u(y)(y-b)$$

En particulier, f est continue au point a car elle y est dérivable :

$$\lim_{x\to a} u(f(x)) = g'(b)$$

et $\forall x \in I$:

$$g(f(x))-g(f(a)) = u(f(x))(f(x)-f(a))$$

Le taux de variation au point a de la fonction $g\circ f$ s'exprime alors sous la forme :

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = u(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et quand x tend vers a, cette expression tend vers $g'(b)\cdot f'(a) = g'(f(a))f'(a)$. □

Définition : Maximum, minimum

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que a est un **maximum** si et seulement si : $\forall x \in I,\ f(a) \geqslant f(x)$.
2. On dit que a est un **minimum** si et seulement si : $\forall x \in I,\ f(a) \leqslant f(x)$.

On appelle extremum un point qui est soit un maximum soit un minimum.

1. On dit que a est un **maximum local** si et seulement si : $\exists\varepsilon >$

0, a est un maximum de $f_{|]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$.

2. On dit que a est un **minimum local** si et seulement si : $\exists \varepsilon > 0$, a est un minimum de $f_{|]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$.

Théorème :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \overset{\circ}{I}$, $\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I.

$$a \text{ est un extremum local } \Longrightarrow f'(a) = 0$$

Démonstration. Soient a un extremum local et $f_{|]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$.

1. Quand $h > 0$:
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0, \ \lim_{h \to 0} f'(a) \leqslant 0$$
2. Quand $h < 0$:
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0, \ \lim_{h \to 0} f'(a) \geqslant 0$$

alors $f'(a) = 0$. □

Théorème : Théorème de Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. f est continue sur $[a, b]$.
2. f est dérivable sur $]a, b[$.
3. $f(a) = f(b)$.

Il existe un $c \in \,]a, b[$ tel que :
$$f'(c) = 0$$

Démonstration. (7)

1. Si f est constante, alors n'importe quel $c \in \,]a, b[$ convient.
2. Sinon il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$.
Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur $[a, b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a, b]$. Mais $f(c) \geqslant f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in \,]a, b[$. En c, f est dérivable et admet un maximum local donc $f'(c) = 0$.

□

Théorème : Théorème des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que :

1. f est continue sur $[a, b]$.
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Il existe un $c \in]a, b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. (7) Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell(x - a)$.
Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$.
Par le théorème de Rolle, il existe un $c \in \,]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Corollaire : Inégalité des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$ et M une constante telle que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant M$.

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant M$$

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Or pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant M$ donc $|f'(c)| \leqslant M$ et donc :

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant M$$

□

Proposition : (7)

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0 \iff f$ croissante.
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leqslant 0 \iff f$ décroissante.
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \iff f$ constante.
4. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante.
5. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante .

Démonstration. Montrons le 1.
$\boxed{\implies}$: Supposons que pour $x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$.
Soient $x, y \in]a,b[$ tels que $x \leqslant y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un $c \in]x,y[$ tel que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$.

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$

Or $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in]a,b[$ donc $f'(c) \geqslant 0$ et $x \leqslant y$ donc $x - y \leqslant 0$ et $f(x) - f(y) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant f(y)$.
$\boxed{\impliedby}$: Supposons que pour $x, y \in]a,b[$ tels que $x \leqslant y$ et $f(x) \leqslant f(y)$.
On a donc :

$$f(y) - f(x) \geqslant 0$$
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$$

On sait que :

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x)$$

donc :

$$f'(x) \geqslant 0$$

□

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ signifie que f est n fois dérivable sur I.
2. $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ signifie que f est n fois dérivable et que sa dérivée n-ième est continue.
3. $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \mathcal{D}^\infty(I,\mathbb{R})$ signifie que $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On dit que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont des **fonctions lisses**.

Proposition :

$\forall f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \implies f+g, f \cdot g, f \circ g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

6.2 Convexité

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est **convexe** si et seulement si :
$$\forall x, y \in I,\ \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
2. On dit que f est **concave** si et seulement si :
$$\forall x, y \in I,\ \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Géométriquement, f est convexe signifie que son graphe passe sous les cordes de f et que les tangentes passent sous le graphe. f est concave signifie que son graphe au-dessus des cordes de f et que les tangentes passent par-dessus le graphe.

Théorème :

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$.

1. f convexe $\iff f'' \geqslant 0$.
2. f concave $\iff f'' \leqslant 0$.

Théorème : Inégalité de Jensen

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_i \in I$ et $\lambda_i \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$
Si f est concave,
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. (*8*) On procède par récurrence pour montrer $P(n) : f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. Le principe de la preuve est similaire pour l'autre inégalité.

1. **Initialisation :** Pour $n = 1$ et $n = 2$ il s'agit de la définition d'une fonction convexe.
2. **Hérédité :** Supposons que $P(n)$ vraie pour un $n > 2$. Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. On veut estimer :
$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1})$$
On pose :
$$\begin{cases} \lambda'_n = \lambda_n + \lambda_{n+1} \\ \lambda'_n x'_n = \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \end{cases}$$
Alors $\lambda'_n \in [0,1]$. En effet :
$$\lambda_n \geqslant 0,\ \lambda_{n+1} \geqslant 0 \implies \lambda'_n \geqslant 0$$
et
$$\lambda'_n = 1 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) \leqslant 1$$

On a aussi $x'_n \in I$. En effet, si $x_n \leqslant x_{n+1}$, alors :

$$x'_n = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n}x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n}x_{n+1} \leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}x_{n+1} + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}x_{n+1} \leqslant x_{n+1}$$

De même,

$$x'_n \geqslant x_n$$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) &= f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda'_n x'_n) \\ &\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1}f(x_{n-1}) + \lambda'_n f(x'_n) \end{aligned}$$

Puisque que f est convexe,

$$\begin{aligned} f(x'_n) &= f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n}x_{n+1}\right) \\ &\leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda'_n}f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n}f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

On conclut que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

□

Proposition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, la tangente de f en a est :

$$\mathcal{T}_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b,\ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. La corde c reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est définie par l'équation suivante :

$$c = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Proposition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R}),\ a \in I.$

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{cases} \implies a \text{ est un maximum local, si } f''(a) > 0,\ a \text{ est un minimum local}$$

Définition : Suite récurrente

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$ alors on peut définir :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Lemme :

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. S'il existe un $\ell \in I$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ alors

$$f(\ell) = \ell$$

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est stable sur I si et seulement si :

$$f(I) \subseteq I$$

Proposition :

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$.

1. Si f est **croissante** sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est monotone.

$$u_1 \geqslant u_0 \iff (u_n) \text{ croissante}$$

$$u_1 \leqslant u_0 \iff (u_n) \text{ décroissante}$$

2. Si f est **décroissante** sur I, alors les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = u_{2n}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = u_{2n+1}$ sont monotones, l'une est **croissante**, l'autre est **décroissante**.

Définition : Point fixe

Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x$. On dit que x est un **point fixe** de f.

Définition : Coefficient de convergence

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n = |u_n - \ell|$ et supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = K \in \mathbb{R}_+$. On appelle K coefficient de la convergence.
— Si $K = 1$ la convergence est **lente**.
— Si $K = 0$ la convergence est **rapide**.
— Si $0 < K < 1$ la convergence est **géométrique**.

Définition : Fonction contractante

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **contractante** si et seulement si :

$$\exists k \in \,]0,1[, \ \forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Théorème : Théorème du point fixe

Soient I un intervalle fermé et $f : I \longrightarrow I$ une fonction contractante et continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite récurrente associée.

1. Il existe un unique point fixe $\ell \in I$.
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
3. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

Démonstration. Soient a, b des réels tels que $a < b$.

1. **Existence** : Il existe un point fixe d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour $g(x) = f(x) - x$.
   (a) $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$.
   (b) $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

$$\exists c \in [a, b] : g(c) = f(c) - c = 0 \iff f(c) = c$$

2. **Unicité** : Soient ℓ_1, ℓ_2 des points fixes. Supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$.

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \\ &\leqslant k|\ell_1 - \ell_2| \\ &< |\ell_1 - \ell_2| \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire donc $\ell_1 = \ell_2$.

$\square$

Théorème : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. On pose l'équation suivante pour $r \in \mathbb{R}$:

$$r^2 - ar - b = 0 \qquad \Delta = a^2 + 4b$$

Pour $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$:

— $\Delta > 0 \implies u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ avec r_1, r_2 tels que :

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad\qquad r_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

— $\Delta = 0 \implies u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$ avec r_0 tel que :

$$r_0 = \frac{a}{2}$$

On trouve λ, μ grâce aux conditions sur les deux premiers termes de la suite.

Chapitre 7

Intégration

Définition : Fonction en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
f est une fonction en escalier s'il existe une division de $[a,b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

telle que pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $f_{|]x, x_{i+1}[}$ est constante. On appelle ça une **subdivision**.
Autrement dit c'est une fonction constante par morceaux.

Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier et a_i les morceaux de la subdivision.
Alors on définit :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

Définition :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f est Riemann-intégrable si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists e, E$ des fonctions en escalier telles que :
   (a) $e \leqslant f \leqslant E$.
   (b) $\int_a^b (E(x) - e(x))\ \mathrm{d}x < \varepsilon$.
2. Soit f Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sup_{e \leqslant f} \int_a^b e(x)\ \mathrm{d}x = \inf_{E \geqslant f} \int_a^b E(x)\ \mathrm{d}x$$

Lemme :

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrable telles que $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

1. $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.
2. $\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$.

Théorème : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

alors $F \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ et $\forall x \in\,]a,b[,\ F'(x) = f(x)$.

Corollaire :

Si $F \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ tel que $\forall x \in\,]a,b[,\ F'(x) = f(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Proposition :

Soient $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x &= [F(x) + \lambda G(x)]_a^b \\ &= (F(b) + \lambda G(b)) - (F(a) + \lambda G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + \lambda(G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\square$

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in\,]a,b[$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Théorème : Théorème de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. $\exists c \in\,]a,b[$ tel que :

$$\frac{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}{b-a} = f(c)$$

Théorème : Intégration par parties

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}& (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ \iff\ & u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)\end{aligned}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

$\square$

Théorème : Intégration par changement de variable

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $\varphi([a,b]) \subseteq I$ alors

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi)'(x) &= f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \\
\int_a^b (f \circ \varphi)'(x) \, \mathrm{d}x &= \int_a^b f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x \\
&= [F(\varphi(x))]_a^b \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\square$

Lorsque nous sommes confrontés à une intégrale de fonctions trigonométriques, on peut se ramener à une intégrale de fraction rationnelle en posant le changement de variable suivant :

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
2. $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$
3. $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

Démonstration.

1.

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Posons $A(x) = \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$A(x) = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ainsi en posant $u = \tan(\frac{x}{2})$, on retrouve bien :

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2.
$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\cdot\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Posons $A(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\cdot\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(\frac{x}{2})} \\
&= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(\frac{x}{2})}\right]\right) \\
&= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(\frac{x}{2})}\right]\right)
\end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \\
&= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En posant $u = \tan(\frac{x}{2})$ on retrouve :

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

3.
$$\begin{aligned}
u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) &\iff \arctan(u) = \frac{x}{2} \\
&\iff x = 2\arctan(u) \\
&\iff \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

□

Chapitre 8

Equations différentielles linéaires

Pour résoudre une équation différentielle, nous allons suivre ces 3 étapes :

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle.
3. Combiner les solutions précédentes pour obtenir la solution générale.

8.1 Équations différentielles d'ordre 1

Définition : Équation différentielle d'ordre 1

Soient $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Théorème :

Soient $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, les solutions de :

$$y' + a(x)y = 0$$

sont de la forme $C \in \mathbb{R},\ A'(x) = a(x)$:

$$y = C \cdot \exp(-A(x))$$

Démonstration. Il faut montrer l'inclusion dans les deux sens.
$\boxed{\supseteq}$: Définissons

$$y = Ce^{-A(x)}$$

on aurait donc

$$y' = -Ca(x)e^{-A(x)}$$

puis

$$y' + a(x)y(x) = -Ca(x)e^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0$$

$\boxed{\subseteq}$: *(9)* : Supposons y solution de $y' + a(x)y = 0$. Alors il existerait un $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = Ce^{-A(x)}$. Posons $f(x) = y(x)e^{A(x)}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= y'(x)e^{A(x)} + y(x)e^{A(x)}A'(x) \\ &= -a(x)y(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cela implique que $f(x) = C,\ C \in \mathbb{R}$. Donc :

$$C = y(x)e^{A(x)} \iff y(x) = Ce^{-A(x)}$$

$\square$

Exemple 8.1. $(E_1) : y' - 2xy = 0$. En appliquant le théorème précédent on obtient les solutions :

$$y_0 = Ce^{x^2}$$

Pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle d'ordre 1. Nous utilisons $y_h(x)$, sauf qu'ici, C n'est plus une constante mais une fonction. Cette méthode est appelée **variation de la constante**.

$$\begin{cases} y_p = C(x)e^{-A(x)} \\ y_p' = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} \end{cases}$$

On obtient alors en remplaçant dans l'équation générale :

$$\begin{aligned} & y_p' + a(x)y_p = b(x) \\ \iff & C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \iff & C'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \iff & C(x) = \int b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Exemple 8.2. $(E_1) : y' - 2xy = \exp(x^2 - x)$. On utilise donc la solution homogène trouvée précédemment avec la variation de la constante.

$$\begin{cases} y_p = C(x)e^{x^2} \\ y_p' = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (E_1).

$$\begin{aligned} y_p' - 2xy_p &= \exp\left(x^2 - x\right) \\ C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} &= \exp\left(x^2 - x\right) \\ C'(x)e^{x^2} &= \exp\left(x^2 - x\right) \\ C'(x) &= \frac{\exp(x^2 - x)}{e^{x^2}} \\ C'(x) &= \exp\left(x^2 - x - x^2\right) \\ C'(x) &= \exp(-x) \\ C(x) &= -\exp(-x) \end{aligned}$$

Ainsi une solution particulière de (E_1) :

$$y_p = -\exp(-x)\exp\left(x^2\right) = -\exp\left(x^2 - x\right)$$

8.2 Équations différentielles d'ordre 2

Définition : Équations différentielle d'ordre 2

Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{R}$.
Une équation différentielle d'ordre 2 est une équation de la forme

$$y'' + py' + q = b(x)$$

Théorème :

Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ p, q \in \mathbb{R}$ et (E) l'équation suivante :

$$(E) : y'' + py' + qy = 0,$$

On s'intéresse d'abord à cette équation associée :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Pour $\Delta = p^2 - 4q$.

1. Cas 1 : $\Delta > 0$
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ \lambda_i C_i \in \mathbb{R}$$
$$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$
2. Cas 2 : $\Delta = 0$
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x},\ C_i, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lambda = \frac{-p}{2}$$
3. Cas 3 : $\Delta < 0$, $\lambda_1 = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ \lambda_2 = a - ib = \overline{\lambda_1}$
$$y = e^{ax}(C_1 \cos(|b|x) + C_2 \sin(|b|x)), C_i \in \mathbb{R}$$
$$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

La variation de la constante est difficilement applicable sur les équations différentielles de second ordre, nous devons trouver d'autres méthodes. Toutes les équations de second ordre qu'on étudiera dans ce chapitre auront pour second membre une composé de fonctions polynomiales, exponentielles et trigonométriques. Ainsi, nous pouvons utiliser ces propriétés.

Voici une méthode pour trouver une solution particulière d'une équation de type :

$$y'' + py' + qy = b(x)$$

pour $p, q \in \mathbb{R},\ b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $P, P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$.

— (7) Si $b(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$
$$y_p = x^m e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)),\ \deg(Q_1), \deg(Q_2) \leqslant \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$$
$$m = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

— Si $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$
$$y_p = x^m Q(x)e^{\alpha x},\ \deg(Q) \leqslant \deg(P)$$
avec m l'ordre de multiplicité (voir item 15.2) de la racine α par rapport à l'équation caractéristique associée.

Remarque. Il existe des propriétés analogues pour les équations différentielles du premier ordre, parfois cela est plus rapide qu'avec la variation de la constante.

Exemple 8.3. $(E) : y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x} + 4e^x$. Tout d'abord, résolvons l'équation homogène associée :

$$(E_0) : y'' - 2y' + 3y = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{2-i\sqrt{8}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = \frac{2+i\sqrt{8}}{2} = 1 + i\sqrt{2}$$

Ainsi les solutions de (E_0) sont :

$$y_0 = e^x\left(C_1\cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 i\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)$$

Trouvons une solution particulière de l'équation :

$$(E_1) : y'' - 2y' + 3y = 9x^2e^{2x}$$

On remarque que le second membre (le « $b(x)$ ») est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\deg(P) = 2$ et $\alpha \notin \{1 \pm i\sqrt{2}\}$, ainsi la solution particulière est de la forme $y_1 = (ax^2+bx+c)e^{2x},\ a,b,c \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{cases} y_1 = (ax^2+bx+c)e^{2x} \\ y_1' = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx+c)e^{2x} = (2ax+b)e^{2x} + 2y_1 \\ y_1'' = 2ae^{2x} + 2(2ax+b)e^{2x} + 2y_1' \end{cases}$$

En remplaçant dans (E_1) :

$$\begin{aligned}
2ae^{2x} + 2(2ax+b)e^{2x} + 2y_1' - 2[(2ax+b)e^{2x} + 2y_1] + 3y_1 &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + (4ax+2b)e^{2x} + 2y_1' - (4ax+2b)e^{2x} - 4y_1 + 3y_1 &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + 2y_1' - y_1 &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + 2[(2ax+b)e^{2x} + 2y_1] - y_1 &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + (4ax+2b)e^{2x} + 4y_1 - y_1 &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + (4ax+2b)e^{2x} + 3y_1 &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + (4ax+2b)e^{2x} + 3[(ax^2+bx+c)e^{2x}] &= 9x^2e^{2x} \\
2ae^{2x} + (4ax+2b)e^{2x} + (3ax^2+3bx+3c)e^{2x} &= 9x^2e^{2x} \\
(2a+4ax+2b+3ax^2+3bx+3c)e^{2x} &= 9x^2e^{2x} \\
[3ax^2 + (4a+3b)x + (2a+2b+3c)]e^{2x} &= 9x^2e^{2x}
\end{aligned}$$

On procède par identification :

$$\begin{cases} 3a = 9 \\ 4a+3b = 0 \\ 2a+2b+3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ 4a+3b = 0 \\ 2a+2b+3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ 3b = -12 \\ 2a+2b+3c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ 2a+2b+3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ 3c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y_1 = \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right)e^{2x}$$

Maintenant trouvons une solution particulière de l'équation :

$$(E_2) : y'' - 2y' + 3y = 4e^x$$

Ici on a encore une forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x) = 1, \deg(P) = 0$ et $\alpha \notin \{1 \pm i\sqrt{2}\}$ ainsi $y_2 = ke^x, k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_2 = ke^x \\ y_2' = ke^x \\ y_2'' = ke^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ke^x - 2ke^x + 3ke^x &= 4e^x \\ 2ke^x &= 4e^x \\ ke^x &= 2e^x \end{aligned}$$

$$y_2 = 2e^x$$

Solution générale :

$$\begin{aligned} &y = y_0 + y_1 + y_2 \\ &y = e^x \left(C_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 i \sin\left(\sqrt{2}x\right)\right) + \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) e^{2x} + 2e^x \\ &y = \left(C_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 i \sin\left(\sqrt{2}x\right) + 2\right) e^x + \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) e^{2x} \end{aligned}$$

Chapitre 9

Développements limités et formules de Taylor

Il arrive parfois des situations où l'on se retrouve avec des formes indéterminées de type « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » lorsque nous essayons de calculer les limites, le théorème suivant permet de lever l'indétermination assez simplement. Plus tard dans ce chapitre, nous pourrons également utiliser les développements limités pour lever les indéterminations.

9.1 Règle de l'Hôpital

Théorème : Règle de l'Hôpital (*10*)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$ et $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que g' ne s'annule pas.

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ et si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
2. Si $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ et si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exemple 9.1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, on a ici une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On remarque que $\sin(2x)$ et x sont dérivables en 0 et $x' = 1 \neq 0$, on utilise donc la règle de l'Hôpital pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(2x)}{x'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)}{1} \\ &= 2 \lim_{x\to 0} \cos(x) \\ &= 2\end{aligned}$$

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que x est au voisinage d'un point a si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

9.2 Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence

Définition :

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I \cup \{-\infty, +\infty\}$ et ε telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

1. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a s'il existe un $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leqslant B|g(x)|$ au voisinage de a. On écrit alors $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f = O_a(g)$.
2. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$. On

écrit alors $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f = o_a(g)$.

3. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$. On écrit alors $f \underset{a}{\sim} g$.

Proposition :

1. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors f est négligeable devant g.
2. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ alors f est équivalente à g.
3. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée, alors f est dominée par g.

Proposition :

1. $o(1) + o(1) = o(1)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot o(1) = o(1)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (o(1))^n = o(1)$
4. $\forall \alpha > 0,\ (o(1))^\alpha = o(1)$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1 + o(1))^\alpha = 1 + o(1)$
6. $O(1) + O(1) = O(1)$
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot O(1) = O(1)$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (O(1))^n = O(1)$
9. $o(1) \cdot O(1) = o(1)$

Proposition :

1. $\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} o(x)$
2. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln(x))^\beta = o(x^\alpha)$
3. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\beta = o(e^{\alpha x})$

Proposition :

Soit f une fonction polynomiale.

1. Un équivalent de f en l'infini est un son monôme de plus haut degré.
2. Un équivalent de f en 0 est son monôme de plus bas degré.

9.3 Développements limités

Définition : Polynôme de Taylor

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ alors son polynôme de Taylor en x_0 est :

$$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Théorème : Formue de Taylor-Young

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}),\ x_0 \in I$.

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$$

Théorème : Formue de Taylor-Lagrange

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}),\ x_0 \in I$.

$$\exists c \in \begin{cases}]x_0, x[\text{ si } x > x_0 \\ ]x, x_0[\text{ si } x < x_0 \end{cases},\ f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $I \subseteq \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}),\ x_0 \in I$.

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t$$

Corollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si $I \subseteq \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ alors

$$\left|\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \ \mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Définition : Développement limité

Un polynôme $P_n(x)$ de degré n satisfaisant :

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

est un développement limité d'ordre n de la fonction f.

Remarque. Il est courant d'abréger développement limité par DL s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition :

Si une fonction admet un développement limité, alors il est unique.

9.3.1 Opérations sur les développements limités

Proposition : *(7)*

Soient $c_0, \ldots, c_n, d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ et $f,\ g$ deux fonctions admettant des développements limités en 0 telles que :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n)$$
$$g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + o(x^n)$$

1. Addition : $f+g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

$$f(x) + g(x) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + \cdots + (c_n+d_n)x^n + o(x^n)$$

2. Multiplication : $f \cdot g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

$$(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \cdot (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n)$$

où l'on conserve les monômes de degré inférieur ou égal à n.

3. Composition : Si $g(0) = 0$ alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.
   Posons $C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ et $D(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$.
   Sa partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n (on conserve les monômes de degré inférieur ou égal à n) de la composition $C(D(x))$.

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 10

Calcul Algèbrique

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$.

Proposition :

$\forall a, b, c \in \mathbb{K}$:

1. Associativité :
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
2. Commutativité :
$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$
3. Élément neutre :
$$a + 0 = a$$
$$a \cdot 1 = a$$
4. Élément absorbant :
$$a \cdot 0 = 0$$
5. Élément symétrique si $\mathbb{K} \neq \mathbb{N}$:
$$\exists a' \in \mathbb{K} : a + a' = 0$$
6. Élément inverse si $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$:
$$\exists a' \in \mathbb{K} : a \cdot a' = 1$$
7. Distributivité :
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Proposition : Opérations sur les fractions

$\forall a, c \in \mathbb{Z},\ \ b, d \in \mathbb{Z}^*$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Démonstration. Soient $a, a', c, c' \in \mathbb{N}$ et $b, b', d, d' \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$$

ce qui revient à dire :

$$ab' = a'b \qquad\qquad cd' = c'd$$

1. Montrons que :

   ce qui revient à montrer que :

$$\begin{aligned} &\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \\ \iff &(ad+bc)(b'd') = (a'd'+b'c')(bd) \\ \iff &(ad+bc)(b'd') - (a'd'+b'c')(bd) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ad+bc)(b'd') - (a'd'+b'c')(bd) &= adb'd' + bcb'd' - a'd'bd - b'c'bd \\ &= (ab'-a'b)(dd') + (cd'-c'd)(bb') \end{aligned}$$

   Sachant que $ab' = a'b$ et $cd' = c'd$, on a $ab' - a'b = 0$ et $cd' - c'd = 0$.
   Ainsi :

$$(ab'-a'b)(dd') + (cd'-c'd)(bb') = 0$$

2. Montrons que :

$$\begin{aligned} &\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} \\ \iff &(ac)(b'd') = (a'c')(bd) \\ \iff &(ac)(b'd') - (a'c')(bd) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ac)(b'd') - (a'c')(bd) &= acb'd' - a'c'bd + a'bcd' - a'bcd' \\ &= (ab'-a'b)(cd') + (cd'-c'd)(a'b) \end{aligned}$$

   Sachant que $ab' = a'b$ et $cd' = c'd$, on a $ab' - a'b = 0$ et $cd' - c'd = 0$.
   Ainsi :

$$(ab'-a'b)(cd') + (cd'-c'd)(a'b) = 0$$

□

Définition : Somme

$\forall m, n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n.$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Proposition : Linéarité de la somme

$\forall m, n \in \mathbb{N}^2,\ a_k, b_k, \lambda \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n.$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \lambda \sum_{k=m}^{n} b_k$$

Démonstration. Nous pouvons le vérifier en développant les sommes. □

Proposition : Somme téléscopique

$\forall m, n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n.$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$$

Démonstration. Nous pouvons le vérifier en développant la somme. □

Proposition :

$\forall n \in \mathbb{N}.$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$\forall n, p \in \mathbb{N},\ n \geqslant p.$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\forall a, b \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}.$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Pour les démonstrations, on procède par interprétation combinatoire et par récurrence. □

Définition : Produit

$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \leqslant n,\ a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\prod_{k=m}^{n} = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Chapitre 11

Ensembles

Nous allons tout d'abord donner une définition intuitive d'un ensemble : Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. Si E contient un élément x, on dit que x appartient à E, noté $x \in E$.

Définition : Ensemble vide

L'ensemble vide noté $\varnothing$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition : Inclusion

Soient E et F deux ensembles.

$$F \subseteq E \iff \forall x \in F : x \in E$$

On dit que F est inclu dans E.

Exemple 11.1. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2\}$.

$$F \subseteq E$$

Définition : Égalité d'ensembles

Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \iff E \subseteq F \text{ et } F \subseteq E$$

Définition : Singleton

Un singleton est un ensemble ne contenant qu'un seul élément.

Définition : Réunion d'ensembles

Soient E et F deux ensembles.

$$E \cup F = \{x : x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

On lit « E union F ».

Exemple 11.2. Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{4, 5, 6\}$.

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Définition : Intersection d'ensembles

Soient E et F deux ensembles.

$$E \cap F = \{x : x \in E \text{ et } x \in F\}$$

On lit « E inter F ».

Exemple 11.3. Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$E \cap F = \{3, 4, 5\}$$

Définition : Complémentaire d'un ensemble

Soient E et F deux ensembles.
Le complémentaire de F dans E noté $E \backslash F$ ou $\complement_E F$ est défini par :

$$E \backslash F = \{x : x \in E,\ x \notin F\}$$

Si on parle du complémentaire sans préciser d'ensemble, on peut se permettre de noter E^C ou $\complement E$.

Exemple 11.4. Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$E \backslash F = \{1, 2\}$$

Proposition :

Soient A, B, C et E des ensembles.

1. La réunion et l'intersection sont commutatives et assocatives.
2. Élément neutre :
   (a) $A \cup \varnothing = A$.
   (b) $A \cap A = A$.
3. $A \subseteq E \iff A \cap E = E \cap A = A$.
4. Distributivité :
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Proposition : Lois de Morgan

Soient A et B deux ensembles.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Démonstration. Soient A et B deux ensembles et x un élément quelconque.

1. $\boxed{\subseteq}$: Par définition du complémentaire :

$$x \in (A \cup B)^C \iff x \notin (A \cup B)$$

$x \notin A$ car $A \subseteq (A \cup B)$ et $x \notin B$ car $B \subseteq (A \cup B)$, ainsi $\in A^C$ et $x \in B^C$.
Par définition de l'intersection :

$$x \in (A^C \cup B^C)$$

et donc :

$$(A \cup B)^C \subseteq (A^C \cap B^C)$$

$\boxed{\supseteq}$: Par définition de l'intersection :

$$\begin{aligned} x \in (A^C \cap B^C) &\iff x \in A^C \text{ et } x \in B^C \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \notin (A \cup B)^C \end{aligned}$$

d'où :

$$(A^C \cap B^C) \subseteq (A \cup B)^C$$

2. $\boxed{\subseteq}$: Par définition du complémentaire :

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in A^C \text{ et } x \in B^C \\ &\iff x \in (A^C \cap B^C) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$(A^C \cap B^C) \subseteq (A^C \cup B^C)$$

On a :

$$x \in (A^C \cap B^C) \implies x \in (A^C \cup B^C)$$

d'où :

$$(A \cap B)^C \subseteq (A^C \cup B^C)$$

$\boxed{\supseteq}$: Par définition de la réunion :

$$\begin{aligned} x \in (A^C \cup B^C) &\iff x \in A^C \text{ ou } x \in B^C \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in (A \cap B)^C \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(A^C \cap B^C) \subseteq (A \cup B)^C$$

□

Définition : Produit cartésien

Soient E et F des ensembles. On définit le produit cartésien :

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$$

Par convention : $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Chapitre 12

Logique et raisonnements

12.1 Logique

Notations logiques :

1. $\neg$: « non ».
2. $\wedge$: « et ».
3. $\vee$: « ou ».
4. $\veebar$: « ou exclusif ».

Définition : Assertion

Une assertion est une affirmation mathématique soit vraie soit fausse.

Définition : Prédicat

Un prédicat est un énoncé mathématique dont la véracité dépend d'une ou plusieurs variables.

Soient P et Q deux prédicats.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \implies Q$	$P \veebar Q$
V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

TABLE 12.1 – Table de vérité

Proposition :

Soient P et Q deux prédicats.

1. $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P) \implies (P \iff Q)$.
2. $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$.
3. $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$.
4. $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$.
5. $P \implies Q \iff \neg Q \implies \neg P$.

Remarque. Les 2. et 3. sont les lois de Morgan, la 4. est la contraposée.

Voici quelques négations usuelles :

— Le contraire de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \neg P(x)$ ».
— Le contraire de « $x < y$ » est « $x \geqslant y$ ».

12.2 Raisonnements

Définition : Raisonnement par récurrence simple

Il existe plusieurs variantes du raisonnement par récurrence, définissons d'abord la récurrence simple. L'objectif est de montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

1. **Initialisation** : On montre que P_0 est vraie.
2. **Hérédité** : On suppose que pour un k tel que $0 < k < n$, P_k est vraie et on montre que P_{k+1} est vraie.

Définition : Raisonnement par analyse-synthèse (*11*)

Raisonnement utilisé pour démontrer l'**existence** et l'**unicité** d'un objet.

1. **Analyse** : On suppose que l'objet existe et on cherche les conditions nécessaires que doit vérifier l'objet. Cette partie démontre l'**unicité**.
2. **Synthèse** : On considère l'objet identifié dans la partie analyse et on vérifie qu'il a les propriétés souhaitées. Cette partie démontre l'**existence**.

Voici quelques types de raisonnements utilisés pour démontrer une proposition du type « Si P vraie alors Q vraie ».

Définition : Raisonnement direct

Il suffit de raisonner à partir de l'hypothèse « P vraie » pour montrer que « Q vraie ».

Définition : Raisonnement par contraposition

Parfois il est plus simple de montrer que $\neg Q \implies \neg P$. Donc on suppose que $\neg Q$ est vraie et on démontrer que $\neg P$ est vraie.

Définition : Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que $P \implies Q$, il est possible de montrer que $P \implies \neg Q$ est absurde.
On suppose que P vraie mais que Q fausse, on raisonne jusqu'à aboutir à une contradiction.

Chapitre 13

Nombres complexes

On définit l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, comme une extension de l'ensemble des nombres réels. Cette extension introduit un nouvel élément, noté i, appelé **nombre imaginaire** et défini comme $i^2 = -1$.

13.1 Vision algébrique des nombres complexes

Définition : Forme algébrique d'un nombre complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on appelle **forme algébrique** de z l'expression $z = a + ib$.
a est appelé « **partie réelle** », notée $\mathrm{Re}(z)$ et b est appelé « **partie imaginaire** », notée $\mathrm{Im}(z)$.

Proposition :

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1. Associativité :
   (a) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
   (b) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_1 \cdot z_3)$.
2. Commutativité :
   (a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
   (b) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
3. Élément neutre :
   (a) $0 + i0 = 0$.
   (b) $z_1 + 0 = z_1$.
   (c) $z_1 \cdot 1 = z_1$
4. Élément absorbant : $z_1 \cdot 0 = 0$.
5. Élément symétrique : $\exists z' \in \mathbb{C} : z_1 + z' = 0$.
6. Élément inverse : $\exists z' \in \mathbb{C} : z_1 \cdot z' = 1$.
7. Distributivité :
   (a) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.
   (b) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Définition : Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.
On définit $|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

qu'on appelle **module** de z.

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$. On appelle conjugué de z qu'on note $\overline{z}$ tel que :

$$\overline{z} = a - ib$$

Proposition :

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
2. $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$.
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
4. Si $z_1 \neq 0$: $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$.
5. Si $z_2 \neq 0$: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
6. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
7. $|z| \geqslant 0$.
8. $|z| = 0 \iff z = 0$.
9. $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$.

13.2 Vision géométrique des nombres complexes

Il est possible de représenter les nombres complexes sur un plan complexe avec l'axe des ordonnées représentant la partie imaginaire et l'axe des abscisses la partie réelle.

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle l'argument de z, noté $\arg(z)$, l'angle entre l'axe de la partie réelle et la droite issue de l'origine passant par z.

Proposition :

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
2. $\arg(z_1^n) = n \arg(z_1)$.
3. Si $z_1 \neq 0$: $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1)$.
4. Si $z_2 \neq 0$: $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

Définition :

Soient $z \in \mathbb{C},\ r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, il est possible d'exprimer z dans sa forme trigonométrique :

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

Proposition :

Soient $z_1 = r_1\left(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\right)$ et $z_2 = r_2\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right)$ deux nombres complexes tels que :

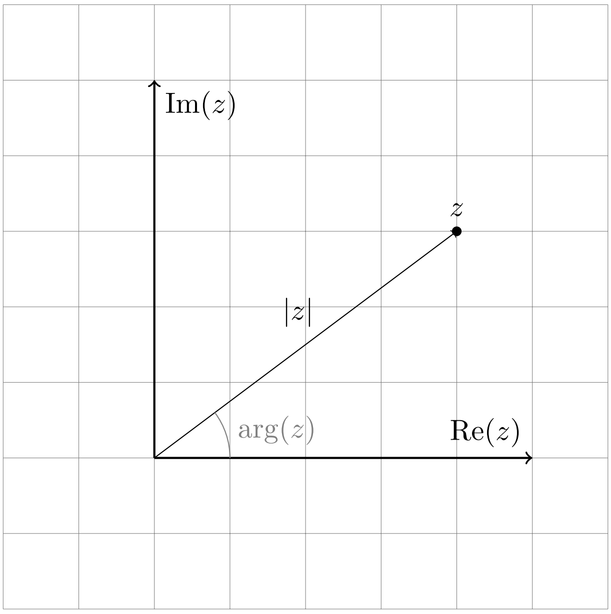


FIGURE 13.1 – Vision géométrique des nombres complexes

1. $r_1 = |z_1|$.
2. $r_2 = |z_2|$.
3. $\theta_1 = \arg(z_1)$.
4. $\theta_2 = \arg(z_2)$.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

Démonstration. En utilisant les formules d'additions de cos et sin. □

Définition :

Soient $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ tels que :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

On peut écrire z sous une forme utilisant l'exponentielle :

$$z = re^{i\theta}$$

Proposition : Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Proposition : Identité d'Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Proposition : Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.
2. $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition :

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On appelle **racine n-ième** de z tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\omega^n = z$$

Proposition :

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho = |z|$ tels que :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

z admet n racines n-ièmes, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\omega_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Démonstration. En utilisant la forme exponentielle. □

13.3 Géométrie des nombres complexes

Proposition :

Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

1. Soit $a \in \mathbb{C},\ f(z) = z + a$: translation d'affixe a.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*,\ f(z) = az$: homothétie de rapport a.
3. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R},\ f(z) = (z-a)e^{i\theta} + a$: rotation d'angle θ et de centre a.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R},\ f(z) = \overline{z}e^{2i\theta}$: réflexion par rapport à la droite formant un angle θ avec l'axe des réels.

Proposition :

1. L'axe des réels : $\overline{z} = z$.
2. Un axe formant une angle θ avec l'axe des réels : $\overline{e^{-i\theta}z} = e^{-i\theta}z$.
3. L'asymptote verticale de partie réelle a : $z + \overline{z} = 2a$.

Chapitre 14

Arithmétique

Définition :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$a \text{ est un multiple de } b \iff b \text{ est un diviseur de } a \iff b \mid a \iff \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq$$

14.1 Divisibilité

Théorème : Division euclidienne

Soient $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2, a = bq + r, (0 \leqslant r < |b|)$$

1. a est appelé le **dividende**
2. b est appelé le **diviseur**
3. q est appelé le **quotient**
4. r est appelé le **reste**

Démonstration. (*12*)

1. **Existence :** Supposons $a \in \mathbb{N}$ et considérons $\mathrm{M} = \{n \in \mathbb{N} : nb \leqslant a\}$ l'ensemble des multiples de b inférieurs à a. M est une partie de $\mathbb{N}$. Nous avons deux propriétés :
   (a) M est non vide car 0 est un multiple de b inférieur à a.
   (b) M est majoré par a d'après sa définition.

   Ainsi M admet un plus grand élément que l'on note q, vérifiant :
   (a) $qb \leqslant a$ car $q \in M$
   (b) $(q+1)b > a$ car $q+1 > q$ sachant que q est le plus grand élément de M, $q+1 \notin M$.

   Posons : $r = a - bq$. Sachant que $a \geqslant bq,\ r \geqslant 0$. On a $r < b$ car $b = (q+1)b - qb > a - bq = r$.
   Supposons que $a \in \mathbb{Z}$.
   (a) Si a est positif, on se ramène au cas précédent.
   (b) Dans le cas où $a < 0,\ -a \geqslant 0$, ainsi il existe $(q', r') \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

   $$-a = bq' + r',\ 0 \leqslant r' < |b|$$

   $$a = b(-q') - r'$$

   i. Si $r' = 0$, on pose $q = -q'$ et $r = 0$ et on obtient le couple recherché.
   ii. Si $r' \neq 0$, $r' \in [\![1, b-1]\!]$ et $a = b(-q'-1) + (b - r')$, on pose $q = -q' - 1$ et $r = b - r'$ et on obtient le couple recherché.

2. **Unicité :** Soient $q,\ q',\ r,\ r' \in \mathbb{Z}$.
On a d'une part : $a = bq + r$ et d'autre part : $a = bq' + r'$. On sait que $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b$ donc :
$$b|q' - q| = |r' - r| < b$$
ce qui n'est possible que si $|q' - q| = 0$ ce qui impliquerait $q = q'$. Ceci entraîne donc $r = r'$.

□

Exemple 14.1. Donnons la division euclidienne de 5 par 2.
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

14.2 PGCD et PPCM

Définition :

Soient $a,\ b \in \mathbb{Z}^*$.

1. L'ensemble des diviseurs de $\mathbb{N}^*$ commun à a et b admet un plus grand élément. C'est le **plus grand commun diviseur** des entiers a et b. On le note $\mathrm{pgcd}(a, b)$.
2. L'ensemble des diviseurs de $\mathbb{N}^*$ commun à a et b admet un plus petit élément. C'est le **plus petit commun multiple** des entiers a et b. On le note $\mathrm{ppcm}(a, b)$.

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*,\ d \in \mathbb{Z}$.

1. $a \mid d$ et $b \mid d \implies \mathrm{ppcm}(a, b) \mid d$
2. $d \mid a$ et $d \mid b \implies d \mid \mathrm{pgcd}(a, b)$

Démonstration.

1. Posons $\ell = \mathrm{ppcm}(a, b)$.
$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2,\ d = q\ell + R,\ 0 \leqslant r < \ell$$
$$r = d - q\ell,\ d \text{ et } \ell \text{ sont multiples de } a \text{ et } r \text{ est aussi un multiple de } a \text{ et } b$$
Par la minimalité de ℓ, $r = 0 \implies m = q\ell$.
2. Posons $m = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrons que :
$$\mathrm{pgcd}(m, d) = m$$
Soit $\ell = \mathrm{ppcm}(m, d)$, $\ell \geqslant m$, a et b sont multiples de m et d. D'après 1. :
$$\ell \mid a \text{ et } \ell \mid b,\ \ell \leqslant m$$
Sachant que $\ell \geqslant m$ et $\ell \leqslant m$, $\ell = m$.

□

Définition :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.
On dit que a et b sont **premiers entre eux** si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

14.3 Algorithme d'Euclide

Proposition : Algorithme d'Euclide

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $|a| > |b|$.

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2,\ a = bq + r,\ 0 \leqslant r < |b|$$

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a) = \text{pgcd}(b, a - qb) = \text{pgcd}(b, r)$$

1. Si $r = 0$ alors $a = qb$ et donc $\text{pgcd}(a, b) = b$.
2. Si $r \neq 0$ alors :
$$\exists!(q_1, r_1) \in \mathbb{Z}^2,\ b = q_1 r + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < r$$
Ensuite :
(a) Si $r_1 = 0$ alors $b = q_1 r$ et donc $\text{pgcd}(a, b) = r$.
(b) Si $r_1 \neq 0$ alors :
$$\exists!(q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^2,\ r = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < r_1$$

On procède de cette manière jusqu'à obtenir un reste nul, le pgcd de a et b est le dernier reste non nul.

Exemple 14.2. Déterminons $\text{pgcd}(216, 126)$.

$$\begin{aligned} 216 &= 126 \cdot 1 + 90 \\ 126 &= 90 \cdot 1 + 36 \\ 90 &= 36 \cdot 2 + 18 \\ 36 &= 18 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\text{pgcd}(216, 126) = 18$$

Théorème : Identité de Bézout

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
$$\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = \text{pgcd}(a, b)$$

Exemple 14.3. On cherche $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$216u + 126v = 18$$

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 216 &= 126 \cdot 1 + 90 \\ 126 &= 90 \cdot 1 + 36 \\ 90 &= 36 \cdot 2 + 18 \\ 36 &= 18 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 90 - 36 \cdot 2 &= 18 \\ 90 - (126 - 90) \cdot 2 &= 18 \\ 90 \cdot 3 - 126 \cdot 2 &= 18 \\ (216 - 126) \cdot 3 - 126 \cdot 2 &= 18 \\ 216 \cdot 3 + 126 \cdot (-5) &= 18 \end{aligned}$$

Corollaire :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $d \in \mathbb{Z}$.

$$\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = d \iff \text{pgcd}(a,b) \mid d$$

Lemme : Lemme de Gauss

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

$$\forall c \in \mathbb{Z},\ a \mid bc \implies a \mid c$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(a,b) = 1 &\implies \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1 \\ &\implies a(cu) + b(cv) = c \\ &\implies \text{pgcd}(a, bc) \mid c \end{aligned}$$

□

14.4 Nombres premiers

Définition : Nombre premier

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que p est **premier** si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et p.

Théorème : Théorème d'Euclide

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Supposons qu'il existe k nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$.

$$N = p_1 \cdots p_k + 1 \implies p_i \nmid N$$

□

Lemme :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Si p est le plus petit diviseur de n tel que $p > 2$ alors p est premier.

Théorème : Décomposition en facteurs premiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$.
Il existe une unique écriture de n sous la forme de :

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, les p_i sont premiers.
2. $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.
3. $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Exemple 14.4. Décomposons 40 en facteurs premiers.

$$\begin{aligned} 40 &= 20 \cdot 2 \\ 20 &= 10 \cdot 2 \\ 10 &= 5 \cdot 2 \end{aligned}$$

Ainsi $40 = 2^3 \cdot 5$.

Proposition :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $i, k \in \mathbb{N}$. Pour déterminer $\text{pgcd}(a, b)$ on peut utiliser leurs décompositions en facteurs premiers.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$b = n_1^{\beta_1} \cdots n_i^{\beta_i}$$

$\text{pgcd}(a, b)$ correspond au produit des facteurs premiers communs.

14.5 Congruences

Définition :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On dit que a et b sont **congrus modulo** n s'il existe un k tel que :

$$a - b = kn$$

On écrit généralement $a \equiv b \pmod{n}$ ou $a \equiv b\ [n]$.

Proposition :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $k, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. $a \equiv a\ [n]$
2. $a \equiv b\ [n] \iff b \equiv a\ [n]$
3. $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n] \implies a \equiv c\ [n]$
4. $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n] \implies a + c \equiv b + d\ [n]$ et $ac \equiv bd\ [n]$
5. $a \equiv b\ [n] \implies a^k \equiv b^k\ [n]$

Démonstration. Immédiate en utilisant la définition de la congruence. □

Théorème :

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $m_1 > 1$
2. $\text{pgcd}(m_1, m_2) = 1$

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tel que pour $x \in \mathbb{Z}$:

1. $x \equiv a_1\ [m_1]$
2. $x \equiv a_2\ [m_2]$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions : $\exists k_0,\ k \in \mathbb{Z}$ tel que :

1. $\mathcal{S} = k_0 + km_1m_2$
2. $0 \leqslant k_0 < m_1m_2$

Chapitre 15

Polynômes

15.1 Définitions

Définition : Polynôme

Un **polynôme** est un élément de l'ensemble

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : \ a_i \in \mathbb{K}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si $a_n \neq 0$:

1. n est le **degré** du polynôme, on le note $\deg(P) = n$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
2. a_n est appelé le **coefficient dominant**.
3. Si $a_n = 1$, le polynôme est dit **unitaire**.

a_0 est appelé le **terme indépendant**.

Proposition :

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$.

1. Associativité :
   (a) $(P + Q) + R = P + (Q + R)$.
   (b) $(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$.
2. Commutativité :
   (a) $P + Q = Q + P$.
   (b) $P \cdot Q = Q \cdot P$.
3. Élément neutre :
   (a) $P + 0 = P$.
   (b) $P \cdot 1 = P$.
4. Élément absorbant : $P \cdot 0 = 0$.
5. Distributivité :
   (a) $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$.
   (b) $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$.

Proposition :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \ P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. $\deg(\lambda) = 0$.
2. $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

3. $\deg(P+Q) = \max(\deg(P),\ \deg(Q))$.
4. $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \cdot \deg(Q)$.
5. $\deg(0) = -\infty$.

15.2 Arithmétique des polynômes

Théorème : Division euclidienne de polynômes

Soient P_1, P_2 deux polynômes non nuls.

$$\exists!(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ tel que } P_1 = P_2 Q + R$$

Vérifiant : $\deg(R) = -\infty$ ou $0 \leqslant \deg(R) < \deg(Q)$.

Définition : Polynôme irréductible

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit irréductible, s'il n'existe pas $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = P_1 P_2$ et $\deg(P_1) < \deg(P_2)$.

Proposition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant et irréductible.

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C} \iff \deg(P) = 1$.
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R} \iff \deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 2$.

Proposition :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une racine si et seulement si :

$$P(\alpha) = 0 \iff X - \alpha \mid P(X)$$

Démonstration. D'après la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $0 \leqslant \deg(R) \leqslant \deg(Q)$ tel que :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-\alpha)Q(X) + R(X) \\ P(\alpha) &= (\alpha-\alpha)Q(X) + R(X) \\ P(\alpha) &= R(X) \end{aligned}$$

Ainsi $P(\alpha) = 0 \iff R(X) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\iff P(X) = (X-\alpha)Q(X) \\ &\iff X - \alpha \mid P(X) \end{aligned}$$

□

Définition :

Soient P un polynôme non constant, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ α est une racine d'ordre de multiplicité m de P si et seulement si :

$$(X-\alpha)^m \mid P \text{ et } (X-\alpha)^{m+1} \nmid P.$$

Théorème :

Soient P un polynôme non constant, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$

$$(X-\alpha)^m \mid P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{m-1}(\alpha) = 0.$$

Théorème : Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. P admet n racines complexes.

Théorème :

Soient P un polynôme de degré n et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ses coefficients tels que :

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \mathrm{pgcd}(p,q) = 1,\ P\left(\frac{p}{q}\right) \implies p \mid a_0 \wedge q \mid a_n$$

Démonstration.

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \tag{15.1}$$

$$\begin{aligned}
(15.1) \cdot q^n &\iff a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad (15.2)\\
&\iff a_0 q^n = -a_n p^n - \cdots - a_1 p q^{n-1}\\
&\iff a_0 = -\frac{a_n}{q^n} p^n - \cdots - \frac{a_1}{q} p\\
&\iff a_0 = p\left(-\frac{a_1}{q} - \cdots - \frac{a_n}{q^n} p^{n-1}\right)\\
&\iff p \mid a_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(15.2) &\iff a_n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n\\
&\iff a_n = -\frac{a_{n-1}}{p} q - \cdots - \frac{a_1}{p^{n-1}} q^{n-2} - \frac{a_0}{p^n} q^n\\
&\iff a_n = q\left(-\frac{a_{n-1}}{p} - \cdots - \frac{a_0}{p^n} q^{n-1}\right)\\
&\iff q \mid a_n
\end{aligned}$$

□

15.3 Fractions rationnelles

Définition : Fraction rationnelle

F est appelée fraction rationnelle s'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)},\ Q(X) \neq 0$$

avec $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$.
Si $\deg(P) > \deg(Q)$, alors il existe un polynôme E appelée la **partie entière** et des poly-

nômes R, S tels que $\deg(R) < \deg(S)$ et :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{S(X)}.$$

Théorème : Décomposition en éléments simples

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, $m, n, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^*$.
Sur $\mathbb{R}$: Soient $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$.

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{i=1}^{m} (X^2 + b_i X + c_i)^{\beta_i}$$

Soient $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j} \in \mathbb{R}$. F s'écrit de manière unique (à l'ordre des termes près) sous la forme :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{B_{i,j} X + C_{i,j}}{(X^2 + b_i X + c_i)^j}$$

Sur $\mathbb{C}$: Soient $a_i \in \mathbb{C}$.

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^n$$

Soient $A_{i,j} \in \mathbb{C}$. F s'écrit de manière unique (à l'ordre des termes près) sous la forme :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{(X - a_i)^j}$$

Démonstration. (*13*) Sur $\mathbb{C}$: il est recommandé de consulter la section sur les espaces vectoriels avant (voir chapitre 17). Rappelons tout d'abord :

$$\mathbb{C}[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Notons l'espace des fractions rationnelles :

$$\mathbb{C}(X) = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P, Q \in \mathbb{C}[X],\ Q \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \right\}$$

La stratégie de la démonstration consiste à montrer une égalité de deux espaces vectoriels :

$$E = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) < \deg(Q) \right\}$$

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

Étude de E : Posons $d = \deg(Q)$

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) < d \right\} \\ &= \left\{ \frac{a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1}}{Q(X)} : a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ a_0 \frac{1}{Q(X)} + a_1 \frac{X}{Q(X)} + \cdots + a_{d-1} \frac{X^{d-1}}{Q(X)} : a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \mathrm{Vect} \left\{ \frac{1}{Q(X)}, \frac{X}{Q(X)}, \ldots, \frac{X^{d-1}}{Q(X)} \right\} \end{aligned}$$

Notons : $\mathcal{F} = \text{Vect}\left\{\frac{1}{Q(X)}, \frac{X}{Q(X)}, \dots, \frac{X^{d-1}}{Q(X)}\right\}$ Nous avons réussi à exprimer E sous la forme d'une famille de vecteurs, nous en déduisons que E est un espace vectoriel admettant $\mathcal{F}$ comme famille génératrice, montrons ensuite que $\mathcal{F}$ est libre : Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{C}$

$$\lambda_0 \frac{1}{Q(X)} + \dots + \lambda_{d-1} \frac{X^{d-1}}{Q(X)} = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{d-1} X^{d-1}}{Q(X)}$$

$$\frac{\lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{d-1} X^{d-1}}{Q(X)} = 0_{\mathbb{C}(X)} \iff \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{d-1} X^{d-1} = 0_{\mathbb{C}[X]}$$

Un polynôme est nul si tous ses coefficients sont nuls, ainsi :

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{d-1} = 0$$

Ainsi $\mathcal{F}$ est libre. $\mathcal{F}$ est libre et génératrice, elle forme donc une base de E et ainsi :

$$\dim(E) = d$$

Étude de F :

$$F = \left\{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} : a_{ij} \in \mathbb{C}\right\}$$

On peut ainsi écrire F ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \left\{\frac{a_{1,1}}{(X - \alpha_1)} + \dots + \frac{a_{1,m_1}}{(X - a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{a_{n,1}}{(X - \alpha_n)} + \dots + \frac{a_{n,m_n}}{(X - \alpha_n)^{m_n}} : a_{ij} \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \text{Vect}\left\{\frac{1}{(X - \alpha_1)}, \dots, \frac{1}{(X - \alpha_1)^{m_1}}, \dots, \frac{1}{(X - \alpha_n)}, \dots, \frac{1}{(X - \alpha_n)^{m_n}}\right\} \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}_2 = \text{Vect}\left\{\frac{1}{(X-\alpha_1)}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_1)^{m_1}}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_n)}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_n)^{m_n}}\right\}$. Nous en déduisons que F est un espace vectoriel admettant $\mathcal{F}_2$ comme famille génératrice, montrons que $\mathcal{F}_2$ est libre : Soient $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{aligned} a_{1,1} \frac{1}{(X - \alpha_1)} + a_{1,2} \frac{1}{(X - \alpha_1)^2} + \dots + a_{1,m_1-1} \frac{1}{(X - \alpha_1)^{m_1-1}} + \dots \\ + a_{n,1} \frac{1}{(X - \alpha_n)} + a_{n,2} \frac{1}{(X - \alpha_n)^2} + \dots + a_{n,m_n} \frac{1}{(X - \alpha_n)^{m_n}} = 0_{\mathbb{C}(X)} \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par $(X - \alpha_1)^{m_1}$:

$$\begin{aligned} a_{1,1}(X - \alpha_1)^{m_1-1} + a_{1,2}(X - \alpha_1)^{m_1-2} + \dots + a_{1,m_1} + \\ (X - \alpha_1)^{m_1} \left(a_{2,1} \frac{1}{(X - \alpha_2)} + \dots + a_{n1} \frac{1}{(X - \alpha_n)} + \dots + a_{n,m_n} \frac{1}{(X - \alpha_n)^{m_n}}\right) = 0_{\mathbb{C}(X)} \end{aligned}$$

En posant $X = \alpha_1$, on trouve que $a_{1,m_1} = 0$. En remplaçant a_{1,m_1} par sa valeur dans l'équation initiale, celle-ci devient :

$$\begin{aligned} a_{1,1} \frac{1}{(X - \alpha_1)} + a_{1,2} \frac{1}{(X - \alpha_1)^2} + \dots + a_{1,m_1-1} \frac{1}{(X - \alpha_1)^{m_1-1}} + \dots \\ + a_{n,1} \frac{1}{(X - \alpha_n)} + a_{n,2} \frac{1}{(X - \alpha_n)^2} + \dots + a_{n,m_n} \frac{1}{(X - \alpha_n)^{m_n}} = 0_{\mathbb{C}(X)} \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par $(X - \alpha_1)^{m_1-1}$ et en posant $X = \alpha_1$, on trouve que $a_{1,m_1-1} = 0$. On procède de la même manière jusqu'à prouver $a_{1,1} = \dots = a_{1,m_1} = 0$. On continue ainsi de suite pour montrer que tous les coefficients sont nuls et donc que $\mathcal{F}_2$ est libre. $\mathcal{F}_2$ est libre et génératrice, elle forme donc une base de F.

$$\dim(F) = m_1 + \dots + m_n$$

Mais aussi :

$$\deg(Q) = \deg\left(\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}\right) = m_1 + \dots + m_n$$

Ainsi :

$$\dim(F) = \deg(Q) = d$$

Inclusion de F dans E :
Un élément de F est de la forme suivante :

$$\frac{a_{1,1}}{(X-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_{n,1}}{(X-\alpha_n)} + \cdots + \frac{a_{n,m_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}}$$

En mettant toutes les fractions sur le même dénominateur, on obtient :

$$\frac{a_{1,1}(X-\alpha_1)^{m_1-1}\prod_{i=2}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i} + \cdots + a_{1m_1}\prod_{i=2}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i} + \cdots + a_{n,m_n}\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)^{m_i}}{Q(X)}$$

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui de Q. Donc c'est un élément de E. Ainsi :

$$F \subset E$$

Nous avons montré que $\dim(E) = \dim(F)$ et que $F \subset E$, ainsi $E = F$. Ce qui revient à dire que toute fraction rationnelle

$$\frac{P(X)}{Q(X)},\ \deg(P) < \deg(Q)$$

s'exprime sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}$$

L'unicité de la décomposition découle du fait que tout élément d'un espace vectoriel s'exprime par une unique combinaison linéaire des vecteurs d'une de ses bases. $\square$

Exemple 15.1. Décomposons $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de décomposition en éléments simples pour $A, B, C, D \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{CX+D}{X^2+1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{CX+D}{X^2+1} &= \frac{AX(X^2+1)}{X^2(X^2+1)} + \frac{B(X^2+1)}{X^2(X^2+1)} + \frac{(CX+D)X\text{Í}2}{X^2(X^2+1)} \\
&= \frac{AX(X^2+1) + B(X^2+1) + (CX+D)X^2}{X^2(X^2+1)} \\
&= \frac{(A+C)X^3 + (B+D)X^2 + AX + B}{X^2(X^2+1)}
\end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-C \\ B=-D \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1-X}{X^2+1}$$

Chapitre 16

Systèmes linéaires et matrices

16.1 Définitions et opérations élémentaires

Définition : Matrice

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$.
Une **matrice** est un tableau de données appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Définition : Système linéaire

Soient $m,\ n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ n inconnues, $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$.
Un **système linéaire** est décrit par :

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Sa matrice associée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Définition : Opérations élémentaires

Soient i, j tels que $i \neq j$ des numéros de ligne et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
2. $L_i \leftrightarrow L_j$
3. $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$

Opérations analogues sur les colonnes.

Définition :

1. Une matrice est **échelonnée** en lignes si et seulement si le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.
2. Une matrice est dite dite **échelonnée réduite** en lignes si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Décrivons maintenant l'algorithme du pivot de Gauss utilisé pour résoudre des systèmes. On expliquera la méthode sur les lignes mais les principes sont analogues pour les colonnes.

La méthode consiste à appliquer les opérations élémentaires sur le système ou la matrice afin d'en faire un système ou une matrice échelonnée réduite.

Définition : Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A est son nombre de lignes non nulles après échelonnage. Il est noté $\mathrm{rg}(A)$.

Théorème :

Soient $\mathcal{S}$ un système linéaire de m lignes et n inconnues, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telles que $A|B$ forme la matrice associée à $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ est solvable si et seulement si :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$$

16.2 Opérations sur les matrices

Définition : Opérations sur les matrices

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix}$$

1. Si $m = p$ et $n = q$ alors on peut définir l'addition entre A et B et la multiplication par λ.

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} (a_{1,1} + \lambda b_{1,1}) & \cdots & (a_{1,n} + \lambda b_{1,q}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m,1} + \lambda b_{p,1}) & \cdots & (a_{m,n} + \lambda b_{p,q}) \end{pmatrix}$$

2. Si $n = p$ alors on peut définir la multiplication entre A et B.
Soit $C = AB$. Chaque coefficient $c_{i,j}$ est défini par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Autrement dit, le coefficient $c_{i,j}$ pour $C = AB$ est donné par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{m,q} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{c_{i,j}} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{p,j}$$

Attention, la multiplication n'est pas commutative ($AB \neq BA$).

Exemple 16.1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} & = AB \\ AB = & \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Proposition :

Soient $m, n, k, l \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
2. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{l,n}(\mathbb{K})$.
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
3. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K}),\ B, C \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K}$.
$$A \cdot (B + \lambda C) = A \cdot B + \lambda \cdot A \cdot C$$
$$(A + \lambda B) \cdot C = A \cdot C + \lambda \cdot B \cdot C$$

Proposition :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Définition : Matrice nulle

La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont 0. On la note $0_{m,n}$, m étant le nombre de lignes, n le nombre de colonnes.

Définition : Symbole de Kronecker

On définit le symbole de Kronecker ainsi pour $i, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Définition : Matrice identité

La matrice identité est la matrice dont tous les coefficients sont 0 à l'exception de ceux de la diagonale principale à 1. On la note I_n, n étant le nombre de lignes.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut également dire que :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

Remarque. La matrice identité est parfois notée : $\mathbb{1}_n$.

Lemme :

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ A + 0_{m,n} = A$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Définition : Transposée

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n} \in \mathbb{K}$.
La transposée de A est notée A^T. $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et pour $a^T_{1,1}, \ldots, a^T_{n,m} \in \mathbb{K}$ ses coefficients :

$$(a^T_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant i\leqslant m}} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple 16.2. Soit A une matrice telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. M est symétrique $\iff M^T = M$
2. M est anti-symétrique $\iff M^T = -M$

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
On définit $A^* = (\overline{A})^T = (\overline{A^T})$ la **matrice adjointe / transconjuguée**. Autrement dit : on prend la transposée de A et on prend les conjugués des coefficients.

Exemple 16.3. Soit A telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3-i \\ 2 & -2 \\ i & 5i \end{pmatrix}$$

On a A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i \\ 3-i & -2 & 5i \end{pmatrix}$$

et finalement A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & -i \\ 3+i & -2 & -5i \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée noté $\det(A)$ ou s'il n'y a pas d'ambiguïté $|A|$, il existe plusieurs méthodes.
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ de coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{K}$.

1. $n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

2. $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) - (a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2})$$

3. $n \geqslant 3$ (*14*). On peut calculer le déterminant d'une matrice en calculant à l'aide des déterminants des matrices de taille $n-1$. Pour se faire on développe en lignes ou en colonnes. Notons $A_{i,j}$ ma matrice obtenue en enlevant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On peut alors développer le calcul du déterminant suivant une ligne ou une colonne :

(a) Suivant la ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

(b) Suivant la colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Exemple 16.4. Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

en développant suivant la première ligne.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2[1\cdot(-1) - (-2)\cdot 2] - 1[1\cdot(-1) - (-2)\cdot 1] - 2[1\cdot 2 - 1\cdot 1] \\ &= 6 - 1 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Proposition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(A \cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ si $\det(A) \neq 0$

Définition : Matrice inversible

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si existe une unique matrice $B = A^{-1}$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Proposition :

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Définition : Comatrice

La comatrice $\text{com}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice est définie ainsi :

$$(\text{com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Lorsque nous devons calculer l'inverse d'une matrice, plusieurs cas sont possibles. Si on a une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Une méthode générale pour calculer l'inverse d'une matrice A est d'utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan. On part de la matrice

$$A|I_n$$

et on applique les opérations élémentaires pour avoir une matrice de la forme

$$I_n|B$$

$B = A^{-1}$ est l'inverse de A.
Une autre méthode générale est d'utiliser la comatrice de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^T$$

Exemple 16.5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Posons $A|I_n$:

$$A|I_n = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & \frac{5}{2} \\ 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Définition : Trace d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ les coefficients de A.
La trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$ est définie par l'application suivante.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{tr}: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_{i,i} \end{array}$$

Exemple 16.6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Lemme :

1. $\mathrm{tr}\left(A^T\right) = \mathrm{tr}(A)$
2. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Démonstration.

1. Par application directe de la définition de la trace et de la transposée.
2. Les coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ et $b_{1,1}, \ldots, b_{n,n}$ sont respectivement les coefficients des matrices A et B. Les coefficients $(ab)_{1,1}, \ldots, (ab)_{n,n}$ et $(ba)_{1,1}, \ldots, (ba)_{n,n}$ sont respectivement ceux

des matrices AB et BA.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (ab)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_{i,1} b_{1,i} + \cdots + a_{i,n} b_{n,i}) \\
&= (a_{1,1} b_{1,1} + \cdots + a_{1,n} b_{n,1}) + \cdots + (a_{n,1} b_{1,n} + \cdots + a_{n,n} b_{n,n}) \\
&= (b_{1,1} a_{1,1} + \cdots + b_{1,n} a_{n,1}) + \cdots + (b_{n,1} a_{1,n} + \cdots + b_{n,n} a_{n,n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (b_{i,1} a_{1,i} + \cdots + b_{i,n} a_{n,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (ba)_{i,i} \\
&= \mathrm{tr}(BA)
\end{aligned}$$

□

Proposition :

Pour passer d'une forme cartésienne à une forme paramétrique, on applique le pivot de Gauss sur les lignes. Pour passer d'une forme paramétrique à une forme cartésienne, on utilise le déterminant.

Définition : Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On définit le produit scalaire ainsi :

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot | \cdot \rangle : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Définition : Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On définit le produit vectoriel ainsi :

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_1 y_3 - x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chapitre 17

Espaces vectoriels

17.1 Définitions

Définition : Loi de composition

Soient E, F deux ensembles et f une application.

1. On dit que f est une loi de composition **interne** si et seulement si : $f : E \times E \to E$.
2. On dit que f est une loi de composition **externe** si et seulement si : $f : E \times F \to E$.

Définition : Magma

On appelle **magma** un ensemble M muni d'une loi de composition **interne** « $*$ ».
On le note $(M, *)$.

Définition : Monoïde (*15*)

On appelle **monoïde** un ensemble M muni d'une loi de composition **interne** « $*$ » **associative**.

Définition : Groupe

Soit $(G, *)$ un magma.
On dit que $(G, *)$ est un groupe si et seulement si pour $g_1, g_2, g_3 \in G$:

1. $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
2. $\exists 0_G \in G,\ g_1 * 0_G = 0_G * g_1 = g_1$
3. $\exists g^{-1} \in G,\ g_1 * g^{-1} = g^{-1} * g_1 = 0_G$

De plus, si et seulement :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

on dit que $(G, *)$ est un groupe **commutatif** ou **abélien**.

Définition : Anneau (*16*)

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions **internes** « $+$ » et « $\cdot$ » sur A telles que pour $a, b, c \in A$:

1. $(A, +)$ est un groupe **commutatif**.
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
4. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
5. « $\cdot$ » possède un **élément neutre**.

On dit que A est **intègre** si :

1. A est commutatif : $a \cdot b = b \cdot a$.
2. $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$.

Définition : Corps (*16*)

Un corps est un anneau **commutatif** dans lequel tout élément non nul est inversible.

Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E composé d'une loi de composition **interne** « + » et d'une loi de composition **externe** « $\cdot$ » telles que :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

1. $(E, +)$ est un **groupe commutatif**.
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ u, v \in E$:
   (a) $\lambda_1 \cdot (u + v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v$
   (b) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u$
   (c) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u)$
   (d) $1 \cdot u = u$

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel, F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \subset E$
2. $F \neq \varnothing$
3. $\forall u, v \in F,\ \lambda \in \mathbb{K} : u + \lambda v \in F$

Définition : Somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, F_2 \subseteq E$. On dit que F_1 et F_2 sont en **somme directe** ou qu'ils sont **supplémentaires** dans E si et seulement si :

1. $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
2. $F_1 + F_2 = E$

On note alors :

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, F_2 \subseteq E$, on a $F_1 + F_2 \subseteq E$.

Démonstration. Tout d'abord $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, on a donc $0_E \in F_1 + F_2$.
Ensuite, soient $x, y \in F_1 + F_2,\ \lambda \in \mathbb{K}$, posons pour $v_1, w_1 \in F_1$ et $v_2, w_2 \in F_2$:

$$\begin{cases} x = v_1 + v_2 \\ y = w_1 + w_2 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= v_1 + v_2 + \lambda(w_1 + w_2) \\ &= v_1 + \lambda w_1 + v_2 + \lambda w_2 \end{aligned}$$

ce qui implique que $x+\lambda y \in F_1+F_2$. □

Proposition :

$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. $0_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ pour $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$.
Soient $v=\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$, $w=\sum_{i=1}^k \beta_i u_i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\begin{aligned} v+\lambda w &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i u_i) + \lambda \sum_{i=1}^k (\beta_i u_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i+\lambda\beta_i) u_i \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k) \end{aligned}$$

□

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, F_2 \subseteq E$ alors $F_1 \cap F_2 \subseteq E$.

Démonstration. Tout d'abord, $0_E \in F_1$, $0_E \in F_2$ alors $0_E \in F_1 \cap F_2$.
Ensuite pour tout $u, v \in F_1 \cap F_2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $u+\lambda v \in F_1$ car $F_1 \subseteq E$.
2. $u+\lambda v \in F_2$ car $F_2 \subseteq E$.

ainsi $u+\lambda v \in F_1 \cap F_2$. □

Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F}=(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. On dit que $\mathcal{F}$ est **libre** si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \implies \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

2. On dit que $\mathcal{F}$ est **génératrice** si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Remarque. Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

17.2 Base et dimension

Définition : Base

Une famille de vecteurs est une base si elle est **libre** et **génératrice**.

Proposition :

Soient un espace vectoriel E et $\mathcal{F}=(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Démonstration. L'existence est évidente car $\mathcal{F}$ est génératrice.
Montrons l'unicité : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On a d'une part :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

puis d'autre part :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \\ \iff & \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) u_i = 0 \end{aligned}$$

Or $\mathcal{F}$ est libre, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0 \implies \lambda_i = \mu_i$. □

Proposition :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\det(\mathcal{F}) \neq 0$$

Démonstration. $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i &= \begin{pmatrix} \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_n u_{1,n} \\ \vdots \\ \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_n u_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$ et $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

On a donc :

$$x = A \cdot \lambda$$

Il existe une solution unique si et seulement s'il existe l'inverse de A, c'est-à-dire que $\det(A) \neq 0$. □

Définition : Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, on appelle dimension de E, notée $\dim(E)$, le nombre d'éléments d'une base de E.

Proposition :

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors on a :

1. $\mathcal{F}$ est une base.
2. $\mathcal{F}$ est libre.
3. $\mathcal{F}$ est génératrice.

Ainsi il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre pour montrer les deux autres propriétés.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre peut être complétée en une base.

Théorème : Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Théorème :

Chaque espace vectoriel admet une base.

Corollaire :

Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_N)$, E un espace vectoriel tel que $\dim(E) = n$.

1. Si $N > n$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas libre.
2. Si $N < n$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Proposition :

Soient E un espace vectoriel et $F, G \subset E$.

1. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
2. $\dim(F + G) \leqslant \dim(E)$

Théorème : Théorème de Grassman

Soient F et G deux espaces vectoriels.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Chapitre 18

Applications linéaires

18.1 Définitions

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est une **application linéaire** si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On définit le **noyau** de f, noté $\ker(f)$ tel que :

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

On définit l'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ telle que :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F : \exists x \in E : y = f(x)\}$$

Théorème : *(17)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
$f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$: Supposons f injective.
   Si $x \in \ker(f)$ alors $f(x) = 0_F$. On sait que $f(0_E) = 0_F$, or f est injective donc $0_E = x$ et :
   $$\ker(f) = \{0_E\}$$
2. $\boxed{\Longleftarrow}$: Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$.
   Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a ensuite :
   $$0_F = f(x) - f(y)$$
   puis car f est linéaire :
   $$0_F = f(x - y)$$
   ce qui veut dire que $x - y \in \ker(f)$ or $\ker(f) = \{0_E\}$ donc $0_E = x - y$, c'est-à-dire $x = y$.
   On a bien montré que f est injective.

□

Théorème :

Soient E, F des espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. $\ker(f) \subseteq E$.
2. $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$.

Démonstration.

1. $\forall x_1, x_2 \in \ker(f),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(x_1 + \lambda x_2) &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= 0_F + \lambda 0_F \\ &= 0_F \end{aligned}$$

2. $\forall y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

$$y_1 \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x_1 : f(x_1) = y_1$$
$$y_2 \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x_2 : f(x_2) = y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 + \lambda y_2 &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= f(x_1 + \lambda x_2) \end{aligned}$$

Ainsi $y_1 + \lambda y_2 \in \mathrm{Im}(f)$.

□

Définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. On dit que f est un **morphisme** de E vers F, on note $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme** de E, on note $f \in \mathcal{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une **bijection**, alors f est un **isomorphisme**. On le note $f : E \xrightarrow{\sim} F$.
4. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un **isomorphisme**, on dit que f est un **automorphisme** de E et on le note $\mathrm{Aut}(E)$.
   E et F sont appelés **isomorphes** s'il existe un **isomorphisme** de l'un vers l'autre, on écrit parfois $E \cong F$.

Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^n(I) : f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0\},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathcal{C}^0(I),\ I$ un intervalle ouvert.

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}^n(I)$.
2. $\dim(\varepsilon) = n$.

Démonstration. Montrons 1.
On définit :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathcal{C}^n(I) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(I) \\ f &\longmapsto f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f \end{aligned}$$

Alors on voit que $\mathcal{E} = \ker(\Psi)$. □

Soient $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, $N \in \mathbb{N}$ et $a = (a_0, \ldots, a_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$.
On définit :

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+N} + a_{N-1} u_{n+N-1} + \cdots + a_n u_{n+1} + a_0 u_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Théorème :

1. $F \subseteq E$.
2. $\dim(F) = N$.

Définition : Rang d'un morphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ le rang de f.

Théorème : Théorème du rang

Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies ou infinies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \ker(f) + \mathrm{Im}(f) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \\ \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \end{cases} \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$$

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Si l'on connait $f(b_i) \in F$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on connait toute l'application f.

Démonstration. $\forall x \in E$, $\exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$.

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$$

□

Corollaire :

Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme donné par :

$$\varphi(b_i) = e_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Lemme :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

$$\dim(E) = n \implies E \cong \mathbb{K}^n$$

Lemme :

Soient $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$ alors :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une bijection, alors c'est un isomorphisme.

Proposition :

Soient E, F des espaces vectoriels $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un morphisme et A sa matrice associée.

$$y = f(x) \iff y = A \cdot x$$

18.2 Projecteurs et symétries

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $f^2 = f \circ f$.

1. On dit que f **est idempotente/une projection** si et seulement si : $f^2 = f$.
2. On dit que f **est involutive/une symétrie linéaire** si et seulement si : $f^2 = id_E$.

Proposition :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. $id_E - p$ est une projection $\iff$ p est une projection
2. $2p - id_E$ est une symétrie $\iff$ p est une projection

Démonstration.

1. Posons $f(x) = id_E(x) - p(x)$. Montrons que $f(f(x)) = id_E(x) - p(x)$ si et seulement si $p(p(x))$.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= id_E(id_E(x) - p(x)) - p(id_E(x) - p(x)) \\ &= id_E(id_E(x)) - id_E(p(x)) - p(id_E(x)) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - p(x) - p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - 2p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] = id_E(x) - p(x) &\iff p(p(x)) = p(x) \\ &\iff 2p(x) - p(p(x)) = p(x) \\ &\iff 2p(x) = p(x) + p(p(x)) \\ &\iff p(x) = p(p(x)) \end{aligned}$$

2. Posons $s(x) = 2p(x) - id_E(x)$.
Montrons que $s(s(x)) = id_E(x)$ si et seulement si $p(p(x)) = p(x)$.

$$\begin{aligned} s(s(x)) &= s(2p(x) - id_E(x)) \\ &= 2p(2p(x) - id_E(x)) - id_E(2p(x) - id_E(x)) \\ &= 4p(p(x)) - 2p(id_E(x)) - 2id_E(p(x)) + id_E(id_E(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4p(p(x)) - 4p(x) + id_E(x) = id_E(x) &\iff 4p(p(x)) - 4p(x) = 0 \\ &\iff 4p(p(x)) = 4p(x) \\ &\iff p(p(x)) = p(x) \end{aligned}$$

$\square$

Définition :

Soient $E = F \oplus G$, $u \in F$, $v \in G$, alors l'application

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u+v & \longmapsto & u \end{array}$$

est appelée un **projecteur** sur F **parallélement** à G.

Proposition :

Soit p_F définie comme dans la définition précédente.

1. p_F est une projection.
2. Soit p une projection, p est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallélement à son noyau $\ker(p)$.

18.3 Rotations.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Rx | Ry \rangle = \langle x | y \rangle\}$$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{SO}(n) = \{R \in \mathrm{O}(n) : \det(R) = 1\}$$

Proposition :

Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $R \in \mathrm{O}(n) \iff R^T \cdot R = I_n$.
2. $R \in \mathrm{O}(n) \implies \det(R) \in \{\pm 1\}$.

Corollaire :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : R^T \cdot R = I_n\}$$

Lemme :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle y \mid A \cdot x \rangle = \langle A^T \cdot y \mid x \rangle$$

Démonstration. Soient $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}$ les coefficients de A.

$$\begin{aligned}
\langle y \mid A \cdot x \rangle &= \sum_{i=1}^{n} y_i (A \cdot x)_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_{j,i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} y_i \right) \cdot x_j \\
&= \langle A^T \cdot y \mid x \rangle
\end{aligned}$$

□

18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.

Définition : Matrice d'une application linéaire

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On peut définir une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} f(b_1) & \cdots & f(b_p) \end{array} \\
\begin{array}{c} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}
\end{array}$$

avec les coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,p} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b'_i$$

Exemple 18.1. Soit Ψ une application linéaire telle que :

$$\begin{array}{rccl}
\Psi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\
 & P & \longmapsto & P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P''
\end{array}$$

On prend $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ comme base de $\mathbb{R}_3[X]$.
On calcule :

$$\Psi(1) = 1 \cdot 1 + (X + X^2) \cdot 0 + (-2 + 3X - X^3) \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$$

$$\Psi(X) = X + (X + X^2) \cdot 1 + (-2 + 3X - X^3) \cdot 0 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 1 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$$

$$\Psi(X^2) = X^2 + (X + X^2) \cdot 2X + (-2 + 3X - X^3) \cdot 2 = -4 \cdot 1 + 6 \cdot X + 2 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3$$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \Psi(1) & \Psi(X) & \Psi(X^2) \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\Psi)$$

Définition : Matrice de passage

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée de taille n dont la $j-$ième colonne est formée des coordonnées de b'_j dans la base $\mathcal{B}$. Nous la noterons $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

$$\begin{array}{c} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b'_1 & \cdots & b'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec les coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_i$$

Exemple 18.2. Soient $\mathcal{E} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{B} = ((1,2),(3,-1))$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a :

$$\begin{array}{c} \\ (1,0) \\ (0,1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1,2) & (3,-1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$$

Définition :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. On dit que A et B sont **équivalentes** si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n),\ Q \in \mathrm{GL}(m),\ B = Q^{-1}AP$$

2. On dit que A et B sont **similaires** si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n),\ B = P^{-1}AP$$

Quatrième partie

Annexes

Soient f, g des fonctions	
$C \in \mathbb{R},\ Cf(x)$	$Cf'(x)$
$(f+g)'(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$(f \cdot g)'(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f \circ g)'(x)$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Table 18.1 – Formules de dérivation.

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_f$
$C \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z}^-, \mathbb{R}_+^*$ sinon
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$

Table 18.2 – Dérivées usuelles.

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $a \in \mathbb{Z}^-,\ \mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$e^{ax},\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$1 + \cos^2 x = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\forall k \in \mathbb{Z},\ \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\cosh x$	$\sinh x + C$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$ ou $1 + \tanh^2 x$	$\tanh x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x + C$ ou $\arcsin x + C$	$]-1,1[$

Table 18.3 – Primitives usuelles, $C \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	DL
e^x	$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n)$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^a$	$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

Table 18.4 – Développements limités usuels en 0.

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tanh(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\cosh(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\arccos(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

$$(1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax,\ a \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\cosh(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \sinh(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Table 18.5 – Équivalents usuels

Bibliographie

1. Bibm@th, *Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques* (https://www.bibmath.net/).
2. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811).
3. Exo7, *Cours et exercices de mathématiques* (http://exo7.emath.fr/).
4. *Licence de mathématiques Lyon 1* (http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=enseignements:l1).
5. In *Wikipédia*, Page Version ID : 200922904, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_r%C3%A9el&oldid=200922904).
6. *Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité* (https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/D%C3%A9rivabilit%C3%A9).
7. Exo7, *Cours d'analyse de première année*, (http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf).
8. Bibmath.net, *Démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*, 23 sept. 2022, (2023 ; https://www.youtube.com/watch?v=5Upz20783FU).
9. Bibm@th, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022, (https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc).
10. Bibm@th, *Règle de L'Hospital* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html).
11. Bibm@th, *Raisonnement par analyse-synthèse* (https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/analysesynthese.html).
12. A. Soyeur, F. Capaces, E. Vieillard-Baron, Sésamath, les-mathematiques.net, *Cours de mathématiques de SUP*, (http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf).
13. F. Millet, *math-sup.fr* (http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5).
14. In *Wikipédia*, (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Calcul_du_d%C3%A9terminant_d%27une_matrice&oldid=199565270).
15. *Monoïde* (2023 ; https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./m/monoide.html).
16. *Résumé de cours : groupes, anneaux, corps* (https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/groupeanneaucorps.html).
17. *Résumé de cours : applications linéaires* (2023 ; https://bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mpsi/cours/al.html).