L'essentiel des mathématiques de première année de Licence

Raphaël Heng
Alyce Théobald

Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 1 - Portail Mathématiques-Informatique
Année universitaire 2022-2023

Table des matières

Première partie

Introduction

Avant toute chose, nous tenons à préciser que cette mise en page est destinée à une impression sous la forme d'un livre. Ainsi pour profiter d'une bonne lecture sur la version numérique, nous vous recommandons de la lire en mode « double pages » avec les plus grandes marges orientées vers le centre.

Ce document repose principalement sur les enseignements de nos professeurs Guillaume AUBRUN, Kenji IOHARA et Thomas STROBL mais il peut contenir des formulations d'autres sources telles que *Bibmath* [1], *Wikipédia* [2], *Exo7* [3] ou encore le livre destiné aux élèves de CPGE recommandé sur le site de la licence Mathématiques [4].
Il regroupe l'essentiel des compétences mathématiques à maîtriser à la fin de la première année de Licence. Vous y trouverez les définitions et les théorèmes à connaître accompagnés d'exercices à savoir refaire. Nous essaierons de démontrer le plus de théorèmes possibles, cependant les preuves ne sont pas toute à retenir (cela dépend également de votre orientation : mathématiques ou informatique). Il se peut également que les outils mathématiques ne soient pas présentées scrupuleusement comme aux cours magistraux, nous avons éventuellement paraphrasé certains passages. Par exemple, il se peut que les notations utilisées ne soient pas les mêmes que celles vues en cours, nous avons préféré utiliser des notations plus courantes en France.

Nous pensons qu'il est intéressant de définir certains mots de vocabulaires définis ci-dessous :
- *Assertion* : Une assertion est une affirmation mathématique qui est soit vraie soit fausse.
- *Axiome* : Un axiome est une assertion que l'on considère vraie sans démonstration.
- *Définition* : Une définition énonce comment un objet mathématique est construit.
- *Théorème* : Un théorème est une assertion d'importance particulière ayant été démontrée.
- *Corollaire* : Un corollaire est un résultat découlant d'un théorème.
- *Lemme* : Un lemme est un résultat intermédiaire sur lequel on s'appuie pour démontrer un théorème.
- *Proposition* : Une proposition est un résultat simple qui n'est pas associé à un théorème.
- *Conjecture* : Une conjecture est une proposition dont on ignore la véracité.

Rappelons également les ensembles de nombres étudiés au lycée :

$$\text{L'ensemble des entiers naturels : } \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$$

$$\text{L'ensemble des entiers relatifs : } \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

$$\text{L'ensemble des nombres décimaux : } \mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\text{L'ensemble des nombres rationnels : } \mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

$$\text{L'ensemble des nombres réels : } \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

Nous définirons l'ensemble des nombres réels plus rigoureusement dans le chapitre 1.

Pour désigner un ensemble privé de 0, nous pouvons lui ajouter « * » en exposant.
Par exemple $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$.

Définissons également certaines notations qui seront utilisées dans ce document :
- $\forall$: « Pour tout » ou « Quelque soit ».
- $\exists$: « Il existe ».
- $\exists!$: « Il existe un unique ».
- $\in$: « Appartient à ».
- $\subset$: « Inclus dans ».
- $\subsetneq$: « Inclus dans mais pas égal à ».
- $P \implies Q$: « Si P alors Q ».
- $P \iff Q$: « P équivaut à Q ». Autrement dit : « P si et seulement si Q ».
- $x \coloneqq y$: « x est défini par y ». Pour les lecteurs informaticiens, « $\coloneqq$ » se comporte comme le « $=$ » en programmation.
- $\equiv$: Selon le contexte, il peut désigner plusieurs choses [5] :

  - En arithmétique, il désigne une congruence sur des entiers.
  - En logique, il désigne une équivalence.
  - Sinon il désigne une « identité ». C'est-à-dire une égalité qui est vraie quelque soient les valeurs des variables employées.
- $\square$: Quand il est utilisé à la fin d'une démonstration, il signifie : « Ce qu'il fallait démontrer ».
- $[\![a, b]\!]$: Désigne l'intervalle d'entiers entre a et b inclus.
- $[a, b]$: Désigne l'intervalle de réels entre a et b inclus.

Pour finir nous jugeons bon de rappeler quelques raisonnements usuels.

Définition 0.1 (Raisonnement par récurrence)**.** Il existe plusieurs variantes du raisonnement par récurrence, définissons d'abord la récurrence simple. L'objectif est de montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

1. *Initialisation* : On montre que P_0 est vraie.
2. *Hérédité* : On suppose que pour un k tel que $0 < k < n,\ P_k$ est vraie et on montre que P_{k+1} est vraie.

Définition 0.2 (Raisonnement par l'absurde)**.** Soit P une assertion. Le raisonnement par l'absurde consiste à montrer que la assertion contraire de P, que l'on note $\overline{P}$ dans cette définition, est fausse impliquant que P est vraie. Pour ce faire, on suppose que $\overline{P}$ est vraie et on commence à raisonner, s'il l'on arrive à une absurdité ou une contradiction, on a montré que $\overline{P}$ est fausse, impliquant que P est vraie.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 1

Nombres réels

Définition 1.1 (Nombre réel)**.** [6] Un nombre réel est une écriture décimale composée de :

1. Un signe $\pm$.
2. Une suite de chiffres de 0 à 9 ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0.
3. Une virgule.
4. Une suite infinies de chiffres de 0 à 9 après la virgule ne finissant pas par une infinité de 9 successifs.

Proposition 1.1 (Addition et multiplication sur $\mathbb{R}$)**.** *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition (notée « $+$ ») et une multiplication (notée « $\times$ » ou « $\cdot$ ») qui prolonge l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes :*

1. *Commutativité :* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b = b+a$ *et* $a \cdot b = b \cdot a$.
2. *Associativité :* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a+(b+c) = (a+b)+c$ *et* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. *Distributivité :* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot b$.
4. *Élements neutres ou absorbants :* $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0,\ a \cdot 1 = a,\ a \cdot 0 = 0$.

Proposition 1.2 (Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$)**.** *On peut définir une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, notée « $\leqslant$ », qui prolonge l'ordre de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes :*

1. *Réflexivité :* $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leqslant a$.
2. *Antisymétrie :* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b$ *et* $b \leqslant a$ *alors* $a = b$.
3. *Transitivité :* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a \leqslant b$ *et* $b \leqslant c$ *alors* $a \leqslant c$.
4. *Ordre total :* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b$ *ou*[1] $b \leqslant a$.
5. *Compatibilité avec l'addition :* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a + c \leqslant b + c$.
6. *Compatibilité avec la multiplication par un réel positif :* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *: si* $a \leqslant b$ *et* $c \geqslant 0$, *alors* $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

Définition 1.2 (Valeur absolue)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 1.3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a-b| \geqslant |a| - |b|$
4. $|a| = \sqrt{a^2}$

Définition 1.3 (Intervalle)**.** Un intervalle I est une partie de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I^2 \implies \forall z \in I \text{ et } z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y$$

1. En mathématiques, le « ou » n'est pas exclusif contrairement au français. Autrement dit, en mathématiques le « ou » signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ».

Définition 1.4. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

1. On dit que m est un *majorant* de A si et seulement si : $A \iff \forall x \in A,\ x \leqslant m.$
2. On dit que m est un *minorant* de A si et seulement si : $\forall x \in A,\ x \geqslant m.$

On dit que A est *majorée* si elle admet un *majorant*, *minorée* si elle admet un *minorant* et *bornée* si elle est *majorée* et *minorée.*

Théorème 1.1. *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.*
Si A est majorée*, elle admet un* plus petit majorant *appelé la* borne supérieure *de A, notée :* $\sup(A)$.
Si A est minorée*, elle admet un* plus grand minorant *appelé la* borne inférieure *de A, notée :* $\inf(A)$.

Proposition 1.4. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide, M un majorant de A et m un minorant de A.*

1. $M = \sup(A) \iff \forall \varepsilon > 0,\ ]M - \varepsilon,\ M] \cap A \neq \emptyset \iff \exists x \in A,\ M - x < \varepsilon.$
2. $m = \inf(A) \iff \forall \varepsilon > 0,\ [m, m + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset \iff \exists x \in A,\ x - m < \varepsilon.$

Chapitre 2

Fonctions réelles

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Fonction)**.** Une fonction est la donnée d'un *ensemble de départ* E et d'un *ensemble d'arrivée* F telle que $f : E \to F$ associe $f(x) \in F$ à tout élément $x \in E$. On appelle *images* les éléments de F et *antécédents* les éléments de E.

Définition 2.2. Soit $f : E \to F$. On dit que :

1. f est *injective* si et seulement si : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
2. f est *surjective* si et seulement si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
3. f est *bijective* si et seulement si : $\forall y \in E,\ \exists ! x \in E,\ f(x) = y$.

Définition 2.3 (Bijection réciproque)**.** Lorsque $f : E \to F$ est une bijection. On peut définir $f^{-1} : F \to E$ la bijection réciproque de f qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E.

Proposition 2.1. *Soient $x \in E,\ y \in F$.*

1. $f^{-1}(f(x)) = x$

2. $f(f^{-1}(y)) = y$

Définition 2.4. Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+$. On dit que :

1. f est *paire* si et seulement si : $\forall x \in I,\ f(x) = f(-x)$.
2. f est *impaire* si et seulement si : $\forall x \in I,\ -f(x) = f(-x)$.
3. f est *T-périodique* si et seulement si : $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, ,\ f(x + nT) = f(x)$.

Définition 2.5. Soient $I \subset \mathbb{R},\ f : I \to \mathbb{R}$. On dit que :

1. f est *majorée* ou qu'elle admet un *majorant* si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$.
2. f est *minorée* ou qu'elle admet un *minorant* si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$.
3. f est *bornée* si et seulement si elle est *majorée* et *minorée*.

Définition 2.6. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que :

1. f est *croissante* si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$.
2. f est *décroissante* si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$.
3. f est *monotone* si et seulement si elle est *croissante* ou *décroissante*.
4. f est *strictement croissante* si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$.
5. f est *strictement décroissante* si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$.
6. f est *strictement monotone* si et seulement si elle est *strictement croissante* ou *strictement décroissante*.

2.2 Opérations sur les fonctions

Définition 2.7 (Opérations sur les fonctions)**.** Soient f, g deux fonctions et $A \subset \mathbb{R}$.

$$f+g : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x)+g(x) \end{cases} \qquad f \cdot g : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

Définition 2.8 (Composition de fonctions)**.** Soient $E, F, G, H \subset \mathbb{R},\ F \subset G,\ f : E \to F,\ g : G \to H$.

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to H \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Définition 2.9 (Fonction identité)**.** Soient $E, F \subset \mathbb{R}$.

$$id_E : \begin{cases} E & \to F \\ x & \mapsto x \end{cases}$$

Proposition 2.2. *Soit $f : E \to F$ une bijection.*

1. $f^{-1} \circ f = id_E$.
2. $f \circ f^{-1} = id_F$.

Définition 2.10 (Image directe)**.** Soient $f : E \to F,\ A \subset E$.

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\},\ f(A) \subset F$$

Définition 2.11 (Image réciproque)**.** Soient $f : E \to F,\ B \subset F$.

$$f^{-1}(B) = \{\forall x \in E,\ f(x) \in B\},\ f^{-1} \subset E$$

Proposition 2.3. *Soient $f : E \to F,\ A_1, A_2 \subset E,\ B_1, B_2 \subset F$.*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Chapitre 3

Fonctions usuelles

Définition 3.1 (Fonction polynomiale)**.** Soient $n \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{aligned}$$

Définition 3.2 (Fonction partie entière)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! E(x) \in \mathbb{Z},\ E(x) \leqslant x < E(x+1)$$

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto E(x) \end{aligned}$$

Définition 3.3 (Fonction puissance)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

Proposition 3.1. *$\forall (a, b, x) \in \mathbb{R}^3$.*

1. $1^a = 1$. *2.* $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. *3.* $(xy)^a = x^a y^a$. *4.* $(x^a)^b = x^{ab}$.

3.1 Fonctions trigonométriques

Définition 3.4 (Fonctions trigonométriques)**.**

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Proposition 3.2. *$\forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$.*

1. $\cos(-x) = \cos(x)$.

2. $\sin(-x) = -\sin(x)$.

3. $\tan(-x) = -\tan(x)$.
4. $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.
5. $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
6. $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$.
7. $\cos$ *est bijective sur* $[0, \pi]$.
8. $\sin$ *est bijective sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
9. $\tan$ *est bijective sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Définition 3.5. On définit arccos, arcsin et arctan comme étant les bijections réciproques des fonctions cos, sin et tan.

Proposition 3.3.
1. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin(x)) = x$.
2. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan(x)) = x$.
3. $\forall x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos(x)) = x$.
4. $\forall x \in [-1, 1]$:

   (a) $\sin(\arcsin(x)) = x$.
   (b) $\cos(\arccos(x)) = x$.

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x$.

Proposition 3.4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
2. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Démonstration. Nous pouvons procéder avec des produits scalaires, mais nous allons utiliser les nombres complexes ici.
D'une part :

$$e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i\sin(a + b)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} \cdot e^{ib} \\ &= [\cos(a) + i\sin(a)] \cdot [\cos(b) + i\sin(b)] \\ &= \cos(a)\cos(b) + i\sin(b)\cos(a) + i\sin(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i[\sin(b)\cos(a) + \sin(a)\cos(b)]. \end{aligned}$$

Par identification de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

□

Proposition 3.5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. C'est une application du théorème de Pythagore sachant que le rayon du cercle trigonométrique est égal à 1. □

Proposition 3.6.
1. $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

3.2 Exponentielle et logarithme

Définition 3.6 (Fonction exponentielle)**.**

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x) \equiv e^x \end{aligned}$$

Proposition 3.7. *La fonction exponentielle est* bijective *et* strictement croissante *et* $\exp(0) = 1$.

1. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.
2. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
3. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Définition 3.7 (Logarithme néperien)**.**

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Proposition 3.8. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y \in \mathbb{R}$.

1. $\exp(\ln(x)) = x$.
2. $\ln(\exp(y)) = y$.

Proposition 3.9. *La fonction logarithme néperien est* bijective *et* strictement croissante *et* $\ln(1) = 0$.

1. $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

3.3 Fonctions hyperboliques

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Fonction	$x \mapsto \cosh(x)$	$x \mapsto \sinh(x)$	$x \mapsto \tanh(x)$
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	Paire	Impaire	Impaire
Définition	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

TABLE 3.1 – Fonctions hyperboliques

Proposition 3.10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.
2. $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$.

Démonstration. Calcul direct avec les définitions de cosh et de sinh. □

Chapitre 4

Suites réelles

Définition 4.1 (Suite réelle)**.** On appelle *suite réelle* une fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction $x \mapsto u_n$.

Remarque. Ainsi les propriétés des fonctions réelles s'appliquent également aux suites.

4.1 Suites usuelles

Définition 4.2 (Suite arithmétique)**.** $\forall (r, u_0) \in \mathbb{R}^2$.
On définit une *suite arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq \begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_n = u_0 + nr \end{cases}$$

Proposition 4.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique.*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

Définition 4.3 (Suite géométrique)**.** $\forall (q, u_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
On définit une *suite géométrique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq \begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_n = u_0 q^n \end{cases}$$

Proposition 4.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique.*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ u_0(n+1) & si\ q = 1 \end{cases}$$

Définition 4.4 (Suite arithmético-géométrique)**.** $\forall (r, u_0, q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$.
On définit une *suite arithmético-géométrique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq \begin{cases} u_{n+1} = qu_n + r \\ u_n = a + (u_0 - a)q^n,\ a = \frac{r}{1-q} \end{cases}$$

En pratique, pour l'étude des suites arithmético-géométrique, on commence par résoudre $a = qa + r \iff a = \frac{r}{1-q}$, puis on pose $v_n = u_n - a$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - a$ qui est une suite géométrique, ainsi $v_n = v_0 q^n$ et finalement $u_n = v_n + a \iff u_n = v_0 q^n + a \iff u_n = (u_0 - a)q^n + a$.

4.2 Convergence d'une suite

Définition 4.5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend* vers ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Définition 4.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* si et seulement si : $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* si et seulement si : $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$.

Théorème 4.1. *La limite d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.*

Démonstration. Procédons à un raisonnement par l'absurde.
On suppose que $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$.
Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N \coloneqq \max(N_1, N_2)$, si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2|$$

Alors :

$$\begin{aligned} |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2| \\ |\ell_1 - \ell_2| &\leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2| \\ \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| &\leqslant 0 \\ \varepsilon &\leqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Ainsi on a montré que $\ell_1 = \ell_2$. □

Théorème 4.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon \coloneqq 1$.
Par définition de la limite :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant 1 \iff \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

Posons $M \coloneqq \max(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell + 1)$ et $m = \min(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell - 1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} m \leqslant u_n \leqslant M, & \text{si } n < N \\ \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1, & \text{si } n > N \end{cases}$$

Sachant que $m \leqslant \ell - 1$ et $M \geqslant \ell + 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

ce qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Théorème 4.3. *Soient* $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N := \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$, alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Puis :

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2|$$
$$|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Posons $\varepsilon' := 2\varepsilon$. Ainsi :

$$|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon'$$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$. □

Théorème 4.4. *Soient* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

Par définition de la limite :

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N := \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Puis :

$$\begin{aligned}
|u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| &= |u_n \cdot v_n - u_n \cdot \ell_2 + u_n \cdot \ell_2 - \ell_1 \cdot \ell_2| \\
&= |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\
&\leqslant |u_n||v_n - \ell_2| + |\ell_2||u_n - \ell_1| \\
&\leqslant M\varepsilon + |\ell_2|\varepsilon = (M + |\ell_2|)\varepsilon
\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon' := \varepsilon$. Ainsi :

$$|u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| = \varepsilon'$$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$. □

Théorème 4.5. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Posons :

$$\ell_1 \coloneqq \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad\qquad \ell_2 \coloneqq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell_1 > \ell_2$.
Posons :

$$\varepsilon \coloneqq \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$$

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad \exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall n \geqslant N_1,\ u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geqslant N_2,\ v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Posons $N \coloneqq \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \implies v_n < u_n$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell_1 \leqslant \ell_2$. □

Corollaire 4.5.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} = \ell$.*

1. *Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$ alors $\ell \leqslant M$.*
2. *Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$ alors $\ell \geqslant m$.*

Théorème 4.6 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que :*

1. *$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*
2. *$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

Démonstration.

$$\exists N_1 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon \qquad\qquad \exists N_2 \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N_2,\ |w_n - \ell| \geqslant \varepsilon$$

Posons $N \coloneqq \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$ alors :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui revient à dire :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon \qquad\qquad \ell - \varepsilon \leqslant w_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

Sachant que :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

on a :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc finalement :

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n - \ell \leqslant \ell + \varepsilon \iff |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. □

Théorème 4.7.
1. *Toute suite croissante majorée converge.*
2. *Toute suite décroissante minorée converge.*

Théorème 4.8 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.* *2.* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.* *3.* $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite.*

Démonstration. Posons $w_n \coloneqq v_n - u_n$.
On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Ainsi $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Etudions la variation de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) < 0$$

Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et sa limite est 0. On a alors :

$$w_n \geqslant 0 \iff v_n - u_n \geqslant 0 \iff v_n \geqslant u_n$$

D'après les monotonies de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'encadrement suivant :

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 et est croissante, donc elle converge vers une limite ℓ_1.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0 et est croissante, donc elle converge vers une limite ℓ_2. D'une part :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

D'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \ell_2 - \ell_1$$

Donc :

$$\ell_2 - \ell_1 = 0 \iff \ell_2 = \ell_1$$

□

4.3 Suites extraites

Définition 4.7 (Extraction)**.** Une extraction est une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante.

Définition 4.8 (Suite extraite)**.** Une suite extraite ou une sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction.

Proposition 4.3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *une de ses sous-suites.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, alors* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *aussi.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, alors* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *aussi.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, alors* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *aussi.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée, alors* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *aussi.*
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est converge, alors* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *aussi.*

Proposition 4.4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite, alors :*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite}$$

Théorème 4.9 (Théorème de Ramsey)**.** *Toute suite admet une sous-suite monotone.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $E = \{n \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n,\ u_m \leqslant u_n\}$.
Cas 1 : E est fini, donc majoré par un entier N, $\forall n \leqslant N,\ n \notin E$ donc $\exists m > n,\ u_m > u_n$. On définit alors par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $\varphi(0) = N + 1$, puis, étant donnés $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(K)$, on choisit $\varphi(K+1)$ tel que $u_{\varphi(K+1)} > u_{\varphi(K)}$ et la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Cas 2 : E est infini. On pose $E = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) \in E,\ \text{comme } \varphi(K+1) > \varphi(K),\ u_{\varphi(K+1)} \leqslant u_{\varphi(K)}$$

et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Théorème 4.10 (Théorème de Bolzano-Weierstraß)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. D'après le théorème de Ramsey, il existe une sous-suite monotone $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée, alors elle converge. □

4.4 Limites infinies

Définition 4.9 (Limites infinies)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A.$
2. $\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant A.$

Théorème 4.11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.*

1. *Si elle est* croissante *alors :*
   - *ou bien elle converge.*
   - *ou bien elle tend vers $+\infty$.*
2. *Si elle est* décroissante *alors :*
   - *ou bien elle diverge.*
   - *ou bien elle tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Démontrons les propriétés si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On distingue deux cas :

1. Si (u_n) est majorée, elle converge, d'après le théorème de convergence monotone car elle est croissante et majorée.
2. Si (u_n) n'est pas majorée, montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Soit A un réel. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :
$$\exists N \in \mathbb{N},\ u_N \geqslant A$$
$$\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant u_N \geqslant A$$

On utilise un raisonnement analogue si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Théorème 4.12 (Limites par comparaison)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$.*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Hypothèses	Conclusion
« $+\infty + \infty$ »	$+\infty$
« $-\infty - \infty$ »	$-\infty$
« $\pm\infty + \ell$ »	$\pm\infty$
« $-\infty \cdot \ell > 0$ »	$-\infty$
« $-\infty \cdot \ell < 0$ »	$+\infty$
« $+\infty \cdot \ell > 0$ »	$+\infty$
« $+\infty \cdot \ell < 0$ »	$-\infty$
« $+\infty \cdot +\infty$ »	$+\infty$
« $-\infty \cdot -\infty$ »	$+\infty$
« $-\infty \cdot +\infty$ »	$-\infty$
« $\infty - \infty$ »	FI
« $0 \cdot \infty$ »	FI
« $\frac{0}{0}$ »	FI
« $\frac{\infty}{\infty}$ »	FI

Table 4.1 – Limites infinies ($\ell \in \mathbb{R}$) et formes indéterminées

Chapitre 5

Continuité et limites de fonctions

Définition 5.1 (Limite d'une fonction). 1. En un point $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$:

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$

(b) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists\delta > 0,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant A.$

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists\delta > 0,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \leqslant A.$

2. En l'infini, $\ell \in \mathbb{R}$:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ x \leqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$

(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \implies f(x) \geqslant A.$

(d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \implies f(x) \leqslant A.$

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \leqslant B \implies f(x) \geqslant A.$

(f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ x \leqslant B \implies f(x) \leqslant A.$

Théorème 5.1. *Soit* $I \subset \mathbb{R},\ f : I \to \mathbb{R},\ a \in I,\ \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$$

Définition 5.2 (Limite à gauche et à droite). Soient $I \subset \mathbb{R},\ a \in I,\ f : I \to \mathbb{R}$.

1. $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \equiv \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ a-\delta < x < a \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$
2. $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \equiv \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ a < x < a+\delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$

Définition 5.3 (Continuité). Soient I un intervalle, $a \in I,\ f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est *continue* si et seulement si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
On peut également définir la continuité à gauche et à droite.

Théorème 5.2 (Théorème des valeurs intermédiaires). $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

$$\forall y \in [f(a), f(b)],\ \exists c \in [a,b],\ f(c) = y$$

Théorème 5.3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ f :]a,b[\to \mathbb{R}$. *Si f est croissante.*

1. *f admet une limite en b, qui est finie si et seulement si f est* majorée.
2. *f admet une limite en a, qui est finie si et seulement si f est* minorée.

Si f est décroissante.

1. *f admet une limite en b, qui est finie si et seulement si f est* minorée.
2. *f admet une limite en a, qui est finie si et seulement si f est* majorée.

$\forall x_0 \in]a,b[$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x\to a\\ x>x_0}} f(x)$$

Théorème 5.4. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

1. *f strictement croissante $\implies f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ est une bijection.*
2. *f strictement décroissante $\implies f : [a,b] \to [f(b), f(a)]$ est une bijection.*

Chapitre 6

Dérivabilité et accroissements finis

Dans ce chapitre, en l'absence de précisions supplémentaires, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

6.1 Dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Définition 6.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dérivable en $a \in I$ si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Une autre manière de définir la dérivabilité :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

On note $f'(a) := \ell$ la dérivée de f en a. Ainsi une fonction dérivable est une fonction dérivable en tout point de I. On peut également vérifier la limite à gauche et à droite de a.

Proposition 6.1. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, si f est* dérivable *en a alors elle est* continue *en a.*

Définition 6.2 (Maximum, minimum)**.** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que a est un *maximum* si et seulement si : $\forall x \in I,\ f(a) \geqslant f(x)$.
2. On dit que a est un *minimum* si et seulement si : $\forall x \in I,\ f(a) \leqslant f(x)$.

On appelle extremum un point qui est soit un maximum soit un minimum.

1. On dit que a est un *maximum local* si et seulement si : $\exists \varepsilon > 0,\ a$ est un maximum de $f_{|]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$.
2. On dit que a est un *minimum local* si et seulement si : $\exists \varepsilon > 0,\ a$ est un minimum de $f_{|]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$.

Théorème 6.1. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \overset{\circ}{I}$, $\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I.*

$$a \text{ est un extremum local} \implies f'(a) = 0$$

Théorème 6.2 (Théorème de Rolle)**.** *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*

1. f est continue sur $[a, b]$. *2. f est dérivable sur $]a, b[$.* *3. $f(a) = f(b)$.*

Il existe un $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

Théorème 6.3 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, telle que :*

1. f est continue sur $[a, b]$. *2. f est dérivable sur $]a, b[$.*

Il existe un $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 6.3.1 (Inégalité des accroissements finis). *Soit M tel que $|f'| \leqslant M$ sur $]a, b[$.*

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leqslant M$$

Proposition 6.2. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. f croissante $\iff f' \geqslant 0$. *2. f décroissante $\iff f' \leqslant 0$*

Définition 6.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ signifie que f est n fois dérivable sur I.
2. $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ signifie que f est n fois dérivable et que sa dérivée n-ième est continue.
3. $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \mathcal{D}^\infty(I, \mathbb{R})$ signifie que $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On dit que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont des *fonctions lisses.*

Proposition 6.3. $\forall (f, g) \in (\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}))^2 \implies f + g, f \cdot g, f \circ g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

6.2 Convexité

Définition 6.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f est *convexe* si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

2. On dit que f est *concave* si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Géométriquement, f est convexe signifie que son graphe passe sous les cordes de f et que les tangentes passent sous le graphe. f est concave signifie que son graphe au-dessus des cordes de f et que les tangentes passent par-dessus le graphe.

Théorème 6.4. *Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$.*

1. f convexe $\iff f'' \geqslant 0$. *2. f concave $\iff f'' \leqslant 0$.*

Proposition 6.4. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, la tangente de f en a est :*

$$\mathcal{T}_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Proposition 6.5. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La corde c reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est définie par l'équation suivante :*

$$c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Proposition 6.6. *Soient $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$, $a \in I$.*

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{cases} \implies a \text{ est un maximum local, si } f''(a) > 0,\ a \text{ est un minimum local}$$

Définition 6.5 (Suite récurrente). Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ alors on peut définir :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Lemme 6.1. *S'il existe un $\ell \in I$ tel que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ alors*

$$f(\ell) = \ell$$

Définition 6.6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est stable sur I si et seulement si :

$$f(I) \subset I$$

Proposition 6.7. *Si f est* croissante *sur I alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ *est monotone.*

$$u_1 \geqslant u_0 \iff (u_n) \textit{ croissante}$$

$$u_1 \leqslant u_0 \iff (u_n) \textit{ décroissante}$$

Si f est décroissante *sur I, alors les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq u_{2n}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq u_{2n+1}$ sont monotones, l'une est* croissante*, l'autre est* décroissante*.*

Définition 6.7 (Point fixe)**.** Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x$. On dit que x est un *point fixe* de f.

Définition 6.8 (Coefficient de convergence)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \coloneqq |u_n - \ell|$ et supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = K \in \mathbb{R}_+$. On appelle K coefficient de la convergence.
— Si $K = 1$ la convergence est *lente.*
— Si $K = 0$ la convergence est *rapide.*
— Si $0 < K < 1$ la convergence est *géométrique.*

Définition 6.9 (Fonction contractante)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *contractante* si et seulement si :

$$\exists k \in]0,1[,\ \forall (x,y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Théorème 6.5 (Théorème du point fixe)**.** *Soient I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une fonction contractante et continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite récurrente associée.*

1. *Il existe un unique point fixe $\ell \in I$.*
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
3. *La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.*

Théorème 6.6 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)**.** *Soit $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour a, b des réels. On pose l'équation suivante pour $r \in \mathbb{R}$:*

$$r^2 - ar - b = 0 \qquad \Delta = (-a)^2 + 4b$$

Pour $(\lambda, \mu, \alpha) \in \mathbb{R}^3$:
— $\Delta > 0 \implies u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ *avec r_1, r_2 tels que :*

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad\qquad r_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

— $\Delta = 0 \implies u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$ *avec r_0 tel que :*

$$r_0 = \frac{a}{2}$$

— $\Delta < 0 \implies u_n = \lambda r^n \cos(n\alpha) + \mu r^n \sin(n\alpha)$ *avec les racines de la forme $re^{i\alpha}$ et $re^{-i\alpha}$.*
On trouve λ, μ grâce aux conditions sur les deux premiers termes de la suite.

Chapitre 7

Intégration

Théorème 7.1 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ *et*

$$\forall x \in [a, b],\ F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

alors $F \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ *et* $\forall x \in]a, b[,\ F'(x) = f(x)$.

Corollaire 7.1.1. *Si* $F \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ *tel que* $\forall x \in]a, b[,\ F'(x) = f(x)$ *alors*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

Proposition 7.1. *Soient* $(\lambda, a, b) \in \mathbb{R}^3$ *et* $(f, g) \in (\mathcal{C}^0([a, b]))^2$.

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\ \mathrm{d}x &= [F(x) + \lambda G(x)]_a^b \\
&= (F(b) + \lambda G(b)) - (F(a) + \lambda G(a)) \\
&= F(b) - F(a) + \lambda(G(b) - G(a)) \\
&= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Proposition 7.2. *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $c \in]a, b[$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Théorème 7.2 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. $\exists c \in]a, b[$ *tel que :*

$$\frac{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}{b - a} = f(c)$$

Théorème 7.3 (Intégration par parties)**.** *Soient* $(u, v) \in (\mathcal{C}^1([a, b]))^2$ *alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
\iff\ & u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

□

Théorème 7.4 (Intégration par changement de variable)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $\varphi([a,b]) \subset I$ alors*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x) &= f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \\ \int_a^b (f \circ \varphi)'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f' \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= [F(\varphi(x))]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(x)]_{\varphi a}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Lorsque nous sommes confrontés à une intégrale de fonctions trigonométriques, on peut se ramener à une intégrale de fraction rationnelle en posant le changement de variable suivant :

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
2. $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$
3. $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

Démonstration. 1.

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Posons $A(x) = \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned}A(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$A(x) = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ainsi en posant $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on retrouve bien :

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2.
$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Posons $A(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\right) \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\right) \end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En posant $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on retrouve :

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

3.
$$\begin{aligned} u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) &\iff \arctan(u) = \frac{x}{2} \\ &\iff x = 2\arctan(u) \\ &\iff \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

□

Chapitre 8

Equations différentielles linéaires

Pour résoudre une équation différentielle, nous allons suivre ces 3 étapes :

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle.
3. Combiner les solutions précédentes pour obtenir la solution générale.

8.1 Équations différentielles d'ordre 1

Définition 8.1 (Équation différentielle d'ordre 1)**.** Soient $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in (\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$. Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Théorème 8.1. *Soient $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les solutions de :*

$$y' + a(x)y = 0$$

sont de la forme $C \in \mathbb{R},\ A'(x) = a(x)$:

$$y = C \cdot \exp(-A(x))$$

Démonstration. Idée trouvée sur Bibmath pour la deuxième partie [7]. Il faut montrer l'inclusion dans les deux sens.
Inclusion réciproque : Définissons

$$y = Ce^{-A(x)}$$

on aurait donc

$$y' = -Ca(x)e^{-A(x)}$$

puis

$$y' + a(x)y(x) = -Ca(x)e^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0$$

Inclusion directe : Supposons y solution de $y' + a(x)y = 0$. Alors il existerait un $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = Ce^{-A(x)}$. Posons $f(x) = y(x)e^{A(x)}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= y'(x)e^{A(x)} + y(x)e^{A(x)}A'(x) \\ &= -a(x)y(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cela implique que $f(x) = C,\ C \in \mathbb{R}$. Donc :

$$C = y(x)e^{A(x)} \iff y(x) = Ce^{-A(x)}$$

□

Exemple 8.1. $(E_1) : y' - 2xy = 0$. En appliquant le théorème précédent on obtient les solutions :

$$y_0 = Ce^{x^2}$$

Proposition 8.1 (Variation de la constante). *Pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle d'ordre 1. Nous utilisons $y_h(x)$, sauf qu'ici, C n'est plus une constante mais une fonction. Cette méthode est appelée* variation de la constante.

$$\begin{cases} y_p = C(x)e^{-A(x)} \\ y_p' = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} \end{cases}$$

On obtient alors en remplaçant dans l'équation générale :

$$\begin{aligned} & y_p' + a(x)y_p = b(x) \\ \iff & C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \iff & C'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \iff & C(x) = \int b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Exemple 8.2. (E_1) : $y' - 2xy = \exp(x^2 - x)$. On utilise donc la solution homogène trouvée précédemment avec la variation de la constante.

$$\begin{cases} y_p = C(x)e^{x^2} \\ y_p' = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (E_1).

$$\begin{aligned} y_p' - 2xy_p &= \exp(x^2 - x) \\ C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} &= \exp(x^2 - x) \\ C'(x)e^{x^2} &= \exp(x^2 - x) \\ C'(x) &= \frac{\exp(x^2 - x)}{e^{x^2}} \\ C'(x) &= \exp(x^2 - x - x^2) \\ C'(x) &= \exp(-x) \\ C(x) &= -\exp(-x) + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi on a l'ensemble des solutions de (E_1) :

$$\begin{aligned} y &= (-e^{-x} + k)e^{x^2}, k \in \mathbb{R} \\ y &= -\exp(x^2 - x) + ke^{x^2}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

8.2 Équations différentielles d'ordre 2

Définition 8.2 (Équations différentielle d'ordre 2). Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Une équation différentielle d'ordre 2 est une équation de la forme

$$y'' + py' + q = b(x)$$

Théorème 8.2. *Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation suivante :*

$$(E) : y'' + py' + qy = 0,$$

On s'intéresse d'abord à cette équation associée :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Pour $\Delta = p^2 - 4q$.

1. *Cas 1 : $\Delta > 0$*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ \lambda_i C_i \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

2. *Cas 2 :* $\Delta = 0$
$$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x},\ C_i, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lambda = \frac{-p}{2}$$
3. *Cas 3 :* $\Delta < 0$, $\lambda_1 = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ \lambda_2 = a - ib \equiv \overline{\lambda_1}$
$$y = e^{ax}(C_1 \cos(|b|x) + C_2 \sin(|b|x)), C_i \in \mathbb{R}$$
$$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

La variation de la constante est difficilement applicable sur les équations différentielles de second ordre, nous devons trouver d'autres méthodes. Toutes les équations de second ordre qu'on étudiera dans ce chapitre auront pour second membre une composé de fonctions polynomiales, exponentielles et trigonométriques. Ainsi, nous pouvons utiliser ces propriétés.

Proposition 8.2. *Voici une méthode pour trouver une solution particulière d'une équation de type :*
$$y'' + py' + qy = b(x)$$
pour $p, q \in \mathbb{R}, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ P, P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$.

— *[8] Si* $b(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$
$$y_p = x^m e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)),\ \deg(Q_1), \deg(Q_2) \leqslant \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$$
$$m = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$
— *Si* $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$
$$y_p = x^m Q(x)e^{\alpha x},\ \deg(Q) \leqslant \deg(P)$$
avec m l'ordre de multiplicité (voir 15.3) de la racine α *par rapport à l'équation caractéristique associée.*

Remarque. Il existe des propriétés analogues pour les équations différentielles du premier ordre, parfois cela est plus rapide qu'avec la variation de la constante.

Exemple 8.3. $(E) : y'' - 2y' + 3y = 9x^2e^{2x} + 4e^x$ Tout d'abord, résolvons l'équation homogène associée :
$$(E_0) : y'' - 2y' + 3y = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$$
$$\lambda_1 = \frac{2 - i\sqrt{8}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = \frac{2 + i\sqrt{8}}{2} = 1 + i\sqrt{2}$$
Ainsi les solutions de (E_0) sont :
$$y_0 = e^x\left(C_1\cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 i \sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)$$
Trouvons une solution particulière de l'équation :
$$(E_1) : y'' - 2y' + 3y = 9x^2e^{2x}$$

On remarque que le second membre (le « $b(x)$ ») est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\deg(P) = 2$ et $\alpha \notin \{1 \pm i\sqrt{2}\}$, ainsi la solution particulière est de la forme $y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{cases} y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x} \\ y_1' = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax + b)e^{2x} + 2y_1 \\ y_1'' = 2ae^{2x} + 2(2ax + b)e^{2x} + 2y_1' \end{cases}$$

En remplaçant dans (E_1) :

$$\begin{aligned} 2ae^{2x} + 2(2ax + b)e^{2x} + 2y_1' - 2[(2ax + b)e^{2x} + 2y_1] + 3y_1 &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 2y_1' - (4ax + 2b)e^{2x} - 4y_1 + 3y_1 &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + 2y_1' - y_1 &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + 2[(2ax + b)e^{2x} + 2y_1] - y_1 &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 4y_1 - y_1 &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 3y_1 &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + 3[(ax^2 + bx + c)e^{2x}] &= 9x^2e^{2x} \\ 2ae^{2x} + (4ax + 2b)e^{2x} + (3ax^2 + 3bx + 3c)e^{2x} &= 9x^2e^{2x} \\ (2a + 4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c)e^{2x} &= 9x^2e^{2x} \\ [3ax^2 + (4a + 3b)x + (2a + 2b + 3c)]e^{2x} &= 9x^2e^{2x} \end{aligned}$$

On procède par identification :

$$\begin{cases} 3a = 9 \\ 4a + 3b = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ 4a + 3b = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ 3b = -12 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ 3c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y_1 = \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) e^{2x}$$

Maintenant trouvons une solution particulière de l'équation :

$$(E_2) : y'' - 2y' + 3y = 4e^x$$

Ici on a encore une forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x) = 1, \deg(P) = 0$ et $\alpha \notin \{1 \pm i\sqrt{2}\}$ ainsi $y_2 = ke^x, k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_2 = ke^x \\ y_2' = ke^x \\ y_2'' = ke^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ke^x - 2ke^x + 3ke^x &= 4e^x \\ 2ke^x &= 4e^x \\ ke^x &= 2e^x \end{aligned}$$

$$y_2 = 2e^x$$

Solution générale :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1 + y_2 \\ y &= e^x \left(C_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 i \sin\left(\sqrt{2}x\right)\right) + \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) e^{2x} + 2e^x \\ y &= \left(C_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 i \sin\left(\sqrt{2}x\right) + 2\right) e^x + \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) e^{2x} \end{aligned}$$

Chapitre 9

Développements limités et formules de Taylor

Dans cette partie, en l'absence de précisions supplémentaires, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Notation. Dans cette section, on définit la notation suivante :

$$\overline{I} \coloneqq I \cup \{\pm\infty\}$$

Il arrive parfois des situations où l'on se retrouve avec des formes indéterminées de type « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » lorsque nous essayons de calculer les limites, le théorème suivant permet de lever l'indétermination assez simplement. Plus tard dans ce chapitre, nous pourrons également utiliser les développements limités pour lever les indéterminations.

9.1 Règle de l'Hôpital

Théorème 9.1 (Règle de l'Hôpital). *[9] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que g' ne s'annule pas.*

1. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ et si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*
2. *Si $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ et si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

Exemple 9.1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, on a ici une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On remarque que $\sin(2x)$ et x sont dérivables en 0 et $x' = 1 \neq 0$, on utilise donc la règle de l'Hôpital pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(2x)}{x'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)}{1} \\ &= 2 \lim_{x\to 0} \cos(x) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Définition 9.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que x est au voisinage d'un point a si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

9.2 Relations de négligeabilité, domination, d'équivalence

Définition 9.2. Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et ε telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

1. On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a s'il existe un $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leqslant B|g(x)|$ au voisinage de a. On écrit alors $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f = O_a(g)$.
2. On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si $f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$. On écrit alors $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f = o_a(g)$.

3. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a si $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$. On écrit alors $f \underset{a}{\sim} g$.

Proposition 9.1.

1. *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *alors* f *est négligeable devant* g.
2. *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *alors* f *est équivalente à* g.
3. *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *est bornée, alors* f *est dominée par* g.

Proposition 9.2.

1. $o(1) + o(1) = o(1)$
2. $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot o(1) = o(1)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (o(1))^n = o(1)$
4. $\forall\alpha > 0,\ (o(1))^\alpha = o(1)$
5. $\forall\alpha \in \mathbb{R},\ (1 + o(1))^\alpha = 1 + o(1)$
6. $O(1) + O(1) = O(1)$
7. $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot O(1) = O(1)$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (O(1))^n = O(1)$
9. $o(1) \cdot O(1) = o(1)$

Proposition 9.3.

1. $\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} o(x)$
2. $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln(x))^\beta = o(x^\alpha)$
3. $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\beta = o(e^{\alpha x})$

Proposition 9.4. *Soit* f *une fonction polynomiale.*

1. *Un équivalent de* f *en l'infini est un son monôme de plus haut degré.*
2. *Un équivalent de* f *en 0 est son monôme de plus bas degré.*

9.3 Développements limités

Définition 9.3 (Polynôme de Taylor)**.** Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ alors son polynôme de Taylor en x_0 est :

$$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Théorème 9.2 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soient* $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}),\ x_0 \in I$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Théorème 9.3 (Formue de Taylor-Lagrange)**.** *Soient* $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}),\ x_0 \in I$.

$$\exists c \in \begin{cases}]x_0, x[\text{ si } x > x_0 \\ ]x, x_0[\text{ si } x < x_0 \end{cases},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Théorème 9.4 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soient* $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}),\ x_0 \in I$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \mathrm{d}t$$

Corollaire 9.4.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Si* $\forall x \in I,\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ *alors*

$$\left|\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Définition 9.4 (Développement limité)**.** Un polynôme $P_n(x)$ de degré n satisfaisant :

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

est un développement limité d'ordre n de la fonction f.

Remarque. Il est courant d'abréger développement limité par DL s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 9.5. *Si une fonction admet un développement limité, alors il est unique.*

9.3.1 Opérations sur les développements limités

Proposition 9.6. *Soient* $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, (d_0, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *et* f, g *deux fonctions admettant des développements limités en 0 telles que :*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + o(x^n)$$

1. *Addition :* $f + g$ *admet un développement limité en 0 à l'ordre* n*.*

$$f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \cdots + (c_n + d_n)x^n + o(x^n)$$

2. *Multiplication :* $f \cdot g$ *admet un développement limité en 0 à l'ordre* n*.*

$$(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) \cdot (d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n)$$

   où l'on conserve les monômes de degré inférieur ou égal à n*.*

3. *Composition : Si* $g(0) = 0$ *alors la fonction* $f \circ g$ *admet un développement limité en 0 à l'ordre* n*.*
   Posons $C(x) \coloneqq c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ *et* $D(x) \coloneqq d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$*.*
   Sa partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n *(on conserve les monômes de degré inférieur ou égal à* n*) de la composition* $C(D(x))$*.*

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 10

Calcul Algèbrique

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$.

Axiome 10.1 (Loi de composition « + »)**.** $\forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. $a + b = b + a$.
3. $a + 0 = a$.
4. Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{N}$ alors $\exists a' \in \mathbb{K},\ a + a' = 0 \implies a' = -a$.

Axiome 10.2 (Loi de composition « $\cdot$ »)**.** $\forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. $a \cdot b = b \cdot a$.
3. $a \cdot 1 = a$.
4. $a \cdot 0 = 0$.
5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
6. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Proposition 10.1 (Opérations sur les fractions)**.** $\forall (a, c) \in \mathbb{Z}^2,\ (b, d) \in (\mathbb{Z}^*)^2$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad\qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Définition 10.1 (Somme)**.** $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Notation. La somme est parfois notée de cette manière :

$$\sum_{k=m}^{n} \equiv \sum_{m \leqslant k \leqslant n}$$

Proposition 10.2 (Linéarité de la somme)**.** $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ (a_k, b_k, \lambda) \in \mathbb{R}^3,\ m \leqslant k \leqslant n$.

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \lambda \sum_{k=m}^{n} b_k$$

Démonstration. Nous pouvons le vérifier en développant les sommes. $\square$

Proposition 10.3 (Somme téléscopique)**.** $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$.

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$$

Démonstration. Nous pouvons le vérifier en développant la somme. □

Proposition 10.4. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geqslant p.$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\forall n \in \mathbb{N}.$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ n \in \mathbb{N}.$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Pour les démonstrations, on procède par interprétation combinatoire et par récurrence. □

Définition 10.2 (Produit)**.** $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leqslant n,\ a_k \in \mathbb{R},\ m \leqslant k \leqslant n$

$$\prod_{k=m}^{n} \equiv \prod_{m \leqslant k \leqslant n} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Chapitre 11

Ensembles

Nous allons tout d'abord donner une définition intuitive d'un ensemble : Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. Si E contient un élément x, on dit que x appartient à E, noté $x \in E$.

Définition 11.1 (Ensemble vide)**.** L'ensemble vide noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 11.2 (Inclusion)**.** Soient E, F deux ensembles.

$$F \subset E \equiv F \subseteq E \iff \forall x \in F,\ x \in E$$

On dit que F est inclu dans E.

Définition 11.3 (Égalité d'ensembles)**.** Soient E, F deux ensembles.

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Définition 11.4 (Singleton)**.** Un singleton est un ensemble ne contenant qu'un seul élément.

Définition 11.5 (Réunion d'ensembles)**.** Soient E, F deux ensembles.

$$E \cup F = \{\forall x \in E \cup F,\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Définition 11.6 (Intersection d'ensembles)**.** Soient E, F deux ensembles.

$$E \cap F = \{\forall x \in E \cap F,\ x \in E \text{ et } x \in F\}$$

Définition 11.7 (Complémentaire d'un ensemble)**.** Soient E, F deux ensembles.

$$E \backslash F = \{\forall x \in E \backslash F,\ x \in E,\ x \notin F\}$$

Proposition 11.1 (Lois de Morgan)**.** *Soient A, B deux ensembles.*

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad\qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Définition 11.8 (Produit cartésien)**.** Soient E et F des ensembles. On définit le produit cartésien :

$$E \times F \coloneqq \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$$

Par convention : $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Chapitre 12

Logique

Définition 12.1 (Assertion)**.** Une assertion est une affirmation mathématique soit vraie soit fausse.

Définition 12.2 (Prédicat)**.** Un prédicat est un énoncé mathématique dont la véracité dépend d'une ou plusieurs variables.

Proposition 12.1 (Opérations logiques de base)**.** *Soient P, Q deux prédicats.*

P	Q	P et Q	P ou Q	non(P)	$P \implies Q$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Si $P \implies Q$ et $Q \implies P$ alors $P \iff Q$.

1. $P \implies Q \iff \text{non}(P)$ *ou* Q
2. $\text{non}(P$ *ou* $Q) \iff \text{non}(P)$ *et* $\text{non}(Q)$
3. $\text{non}(P$ *et* $Q) \iff \text{non}(P)$ *ou* $\text{non}(Q)$
4. $P \implies Q \iff \text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$

Remarque. Les 2. et 3. sont les lois de Morgan, la 4. est la contraposée.

Notation. En logique le « ET » peut se noter $\wedge$ et le « OU » $\vee$.

Voici quelques négations usuelles :
- Le contraire de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \text{non}(P(x))$ ».
- Le contraire de « $x < y$ » est « $x \geqslant y$ ».

Chapitre 13

Nombres complexes

On définit l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, comme une extension de l'ensemble des nombres réels. Cette extension introduit un nouvel élément, noté i, appelé *nombre imaginaire* et défini comme $i^2 = -1$.

13.0.1 Vision algébrique des nombres complexes

Définition 13.1 (Forme algébrique d'un nombre complexe)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on appelle *forme algébrique* de z l'expression $z = a + ib$.
a est appelé « *partie réelle* », notée $\mathrm{Re}(z)$ et b est appelé « *partie imaginaire* », notée $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 13.2 (Module d'un nombre complexe)**.** Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On définit $|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

qu'on appelle *module* de z.

Définition 13.3 (Conjugué d'un nombre complexe)**.** Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z qu'on note $\overline{z}$ tel que :

$$\overline{z} = a - ib$$

Proposition 13.1. *Soient* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
2. $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$.
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
4. *Si* $z_2 \neq 0$ *:* $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$.
5. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
6. $|z| \geqslant 0$.
7. $|z| = 0 \iff z = 0$.
8. $|z| = |\overline{z}|$.

13.1 Vision géométrique des nombres complexes

Il est possible de représenter les nombres complexes sur un plan complexe avec l'axe des ordonnées représentant la partie imaginaire et l'axe des abscisses la partie réelle.

Définition 13.4. Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle l'argument de z, noté $\arg(z)$, l'angle entre l'axe de la partie réelle et la droite issue de l'origine passant par z.

Proposition 13.2. *Soient* $(z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

1. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
2. $\arg(z^n) = n \arg(z)$.
3. *Si* $z_2 \neq 0$ *:* $\arg(\frac{1}{z_2}) = -\arg(z_2)$.

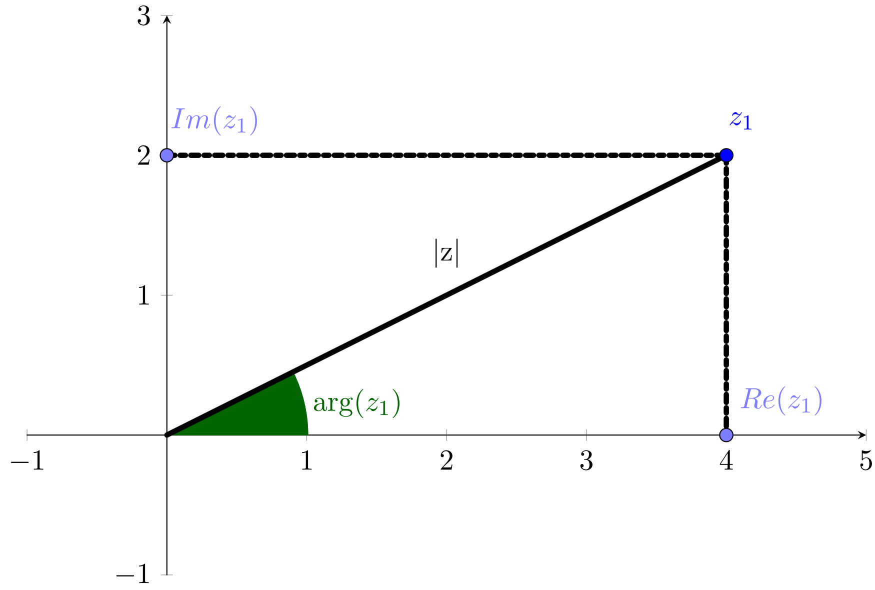

FIGURE 13.1 – Vision géométrique des nombres complexes

Définition 13.5. Soient $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, il est possible d'exprimer z dans sa forme trigonométrique :

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

Proposition 13.3. *Soient* $z_1 = r_1\left(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\right)$ *et* $z_2 = r_2\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right)$ *deux nombres complexes tels que :*

1. $r_1 = |z_1|$. *2.* $r_2 = |z_2|$. *3.* $\theta_1 = \arg(z_1)$. *4.* $\theta_2 = \arg(z_2)$.

$$z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

Démonstration. En utilisant les formules d'additions de cos et sin. □

Définition 13.6. Soient $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ tels que :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

On peut écrire z sous une forme utilisant l'exponentielle :

$$z = re^{i\theta}$$

Proposition 13.4 (Formule de Moivre)**.** *Soient* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Proposition 13.5 (Identité d'Euler)**.**

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Proposition 13.6 (Formules d'Euler)**.** *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. *2.* $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition 13.7. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *racine n-ième* de z tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\omega^n = z$$

Proposition 13.7. *Soient* $z \in \mathbb{C}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\rho = |z|$ *tels que :*

$$z = \rho e^{i\theta}$$

z admet n racines n-ièmes de la forme :

$$\omega_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

Démonstration. En utilisant la forme exponentielle. □

13.2 Géométrie des nombres complexes

Proposition 13.8. *Soit :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

1. *Soit* $a \in \mathbb{C},\ f(z) = z + a$ *: translation d'affixe* a*.*
2. *Soit* $a \in \mathbb{R}^*,\ f(z) = az$ *: homothétie de rapport* a*.*
3. *Soient* $a \in \mathbb{C}$ *et* $\theta \in \mathbb{R},\ f(z) = (z-a)e^{i\theta} + a$ *: rotation d'angle* θ *et de centre* a*.*
4. *Soit* $\theta \in \mathbb{R},\ f(z) = \overline{z}e^{2i\theta}$ *: réflexion par rapport à la droite formant un angle* θ *avec l'axe des réels.*

Proposition 13.9.

1. *L'axe des réels :* $\overline{z} = z$*.*
2. *Un axe formant une angle* θ *avec l'axe des réels :* $\overline{e^{-i\theta}z} = e^{-i\theta}z$*.*
3. *L'asymptote verticale de partie réelle* a *:* $z + \overline{z} = 2a$*.*

Chapitre 14

Arithmétique

Définition 14.1. Soient $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$.

$$a \text{ est un multiple de } b \iff b \text{ est un diviseur de } a \iff b \mid a \iff \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq$$

14.1 Divisibilité

Théorème 14.1 (Division euclidienne)**.** *Soient* $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2, a = bq + r, (0 \leqslant r < |b|)$$

Démonstration. [4]

1. *Existence :* Supposons $a \in \mathbb{N}$ et considérons $\mathrm{M} = \{n \in \mathbb{N} : nb \leqslant a\}$ l'ensemble des multiples de b inférieurs à a. M est une partie de $\mathbb{N}$. Nous avons deux propriétés :
   (a) M est non vide car 0 est un multiple de b inférieur à a.
   (b) M est majoré par a d'après sa définition.

   Ainsi M admet un plus grand élément que l'on note q, vérifiant :
   (a) $qb \leqslant a$ car $q \in M$
   (b) $(q+1)b > a$ car $q+1 > q$ sachant que q est le plus grand élément de M, $q+1 \notin M$.

   Posons : $r \coloneqq a - bq$. Sachant que $a \geqslant bq$, $r \geqslant 0$. On a $r < b$ car $b = (q+1)b - qb > a - bq = r$.
   Supposons que $a \in \mathbb{Z}$.
   (a) Si a est positif, on se ramène au cas précédent.
   (b) Dans le cas où $a < 0$, $-a \geqslant 0$, ainsi il existe $(q', r') \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

   $$-a = bq' + r', \ 0 \leqslant r' < |b|$$

   $$a = b(-q') - r'$$

      i. Si $r' = 0$, on pose $q = -q'$ et $r = 0$ et on obtient le couple recherché.
      ii. Si $r' \neq 0$, $r' \in [\![1, b-1]\!]$ et $a = b(-q'-1) + (b - r')$, on pose $q = -q' - 1$ et $r = b - r'$ et on obtient le couple recherché.
2. *Unicité :* Soit $(q, q', r, r') \in \mathbb{Z}^4$.
   On a d'une part : $a = bq + r$ et d'autre part : $a = bq' + r'$. On sait que $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b$ donc :

   $$b\left|q' - q\right| = \left|r' - r\right| < b$$

   ce qui n'est possible que si $|q' - q| = 0$ ce qui impliquerait $q = q'$. Ceci entraîne donc $r = r'$.

□

Nomenclature. Pour a, b, c, d définis comme dans le théorème précédent.

— a est appelé le *dividende*
— b est appelé le *diviseur*
— q est appelé le *quotient*
— r est appelé le *reste*

14.2 PGCD et PPCM

Définition 14.2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$.

1. L'ensemble des diviseurs de $\mathbb{N}^*$ commun à a et b admet un plus grand élément. C'est le *plus grand commun diviseur* des entiers a et b. On le note $\mathrm{pgcd}(a, b)$.
2. L'nesemble des diviseurs de $\mathbb{N}^*$ commun à a et b admet un plus petit élément. C'est le *plus petit commun multiple* des entiers a et b. On le note $\mathrm{ppcm}(a, b)$.

Théorème 14.2. *Soit* $(a, b, d) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \times \mathbb{Z}$.

1. $a \mid d$ *et* $b \mid d \implies \mathrm{ppcm}(a, b) \mid d$
2. $d \mid a$ *et* $d \mid b \implies d \mid \mathrm{pgcd}(a, b)$

Démonstration.

1. Posons $\ell \coloneqq \mathrm{ppcm}(a, b)$.
$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2,\ d \coloneqq q\ell + R,\ 0 \leqslant r < \ell$$
$$r \coloneqq d - q\ell,\ d \text{ et } \ell \text{ sont multiples de } a \text{ et } r \text{ est aussi un multiple de } a \text{ et } b$$
Par la minimalité de ℓ, $r = 0 \implies m = q\ell$.
2. Posons $m = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrons que :
$$\mathrm{pgcd}(m, d) = m$$
Soit $\ell \coloneqq \mathrm{ppcm}(m, d)$, $\ell \geqslant m$, a et b sont multiples de m et d. D'après 1. :
$$\ell \mid a \text{ et } \ell \mid b,\ \ell \leqslant m$$
Sachant que $\ell \geqslant m$ et $\ell \leqslant m$, $\ell = m$.

□

Définition 14.3. Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

14.3 Algorithme d'Euclide

Proposition 14.1 (Algorithme d'Euclide)**.** *Soit* $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ *tel que* $|a| > |b|$.
$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2,\ a = bq + r,\ 0 \leqslant r < |b|$$
$$\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, a) = \mathrm{pgcd}(b, a - qb) = \mathrm{pgcd}(b, r)$$

1. *Si* $r = 0$ *alors* $a = qb$ *et donc* $\mathrm{pgcd}(a, b) = b$.
2. *Si* $r \neq 0$ *alors :*
$$\exists!(q_1, r_1) \in \mathbb{Z}^2,\ b = q_1 r + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < r$$
Ensuite :
(a) *Si* $r_1 = 0$ *alors* $b = q_1 r$ *et donc* $\mathrm{pgcd}(a, b) = r$.
(b) *Si* $r_1 \neq 0$ *alors :*
$$\exists!(q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^2,\ r = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < r_1$$

On procède de cette manière jusqu'à obtenir un reste nul, le pgcd *de* a *et* b *est le dernier reste non nul.*

Théorème 14.3 (Identité de Bézout)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = \text{pgcd}(a,b)$$

Corollaire 14.3.1. *Soient* $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ *et* $d \in \mathbb{Z}$.

$$\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = d \iff \text{pgcd}(a,b) \mid d$$

Lemme 14.1 (Lemme de Gauss)**.** *Soit* $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ *tel que* $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

$$\forall c \in \mathbb{Z},\ a \mid bc \implies a \mid c$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(a,b) = 1 &\implies \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1 \\ &\implies a(cu) + b(cv) = c \\ &\implies \text{pgcd}(a,bc) \mid c \end{aligned}$$

□

14.4 Nombres premiers

Définition 14.4 (Nombre premier)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que p est *premier* si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et p.

Théorème 14.4 (Théorème d'Euclide)**.** *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Démonstration. Supposons qu'il existe k nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$.

$$N \coloneqq p_1 \cdots p_k + 1 \implies p_i \nmid N$$

□

Lemme 14.2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant 2$.
Si p *est le plus petit diviseur de* n *tel que* $p > 2$ *alors* p *est premier.*

Théorème 14.5 (Décomposition en facteurs premiers)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n \geqslant 2$.
Il existe une unique écriture de n *sous la forme de :*

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

1. *Pour* $1 \leqslant i \leqslant k$, *les* p_i *sont premiers.*
2. $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.
3. $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Proposition 14.2. *Soient* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. *Pour déterminer* $\text{pgcd}(a,b)$ *on peut utiliser leurs décompositions en facteurs premiers.*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$b = n_1^{\beta_1} \cdots n_i^{\beta_i}$$

$\text{pgcd}(a,b)$ *correspond au produit des facteurs premiers communs.*

14.5 Congruences

Définition 14.5. Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On dit que a et b sont *congrus modulo* n s'il existe un k tel que :

$$a - b = kn$$

On écrit généralement $a \equiv b \mod n$ ou $a \equiv b\ [n]$.

Proposition 14.3. *Soient* $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ *et* $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $n \geqslant 2$.

1. $a \equiv a \mod n$
2. $a \equiv b \mod n \iff b \equiv a \mod n$
3. $a \equiv b \mod n$ *et* $b \equiv c \mod n \implies a \equiv c \mod n$
4. $a \equiv b \mod n$ *et* $c \equiv d \mod n \implies a + c \equiv b + d \mod n$ *et* $ac \equiv bd \mod n$
5. $a \equiv b \mod n \implies a^k \equiv b^k \mod n$

Démonstration. Immédiate en utilisant la définition de la congruence. □

Théorème 14.6. *Soient* $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ *tel que :*

1. $m_1 > 1$
2. $\text{pgcd}(m_1, m_2) = 1$

Soient $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que pour* $x \in \mathbb{Z}$ *:*

1. $x \equiv a_1 \mod m_1$
2. $x \equiv a_2 \mod m_2$

Notons $\mathcal{S}$ *l'ensemble des solutions :* $\exists (k_0, k) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que :*

1. $\mathcal{S} = k_0 + km_1m_2$
2. $0 \leqslant k_0 < m_1m_2$

Remarque. Ce théorème est un cas particulier du théorème des restes chinois.

Chapitre 15

Polynômes

15.1 Définitions

Définition 15.1 (Polynôme). Un *polynôme* est un élément de l'ensemble

$$\mathbb{K}[X] = \{a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots a_n X^n \mid a_i \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}\}$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, si $a_n \neq 0$, n est le degré du polynôme, on le note $\deg(P) = n$.

Proposition 15.1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. $\deg(\lambda) = 0$.
2. $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
3. $\deg(P + Q) = \max\left(\deg(P),\ \deg(Q)\right)$.
4. $\deg(0) = -\infty$.

15.2 Arithmétique des polynômes

Théorème 15.1 (Division euclidienne de polynômes). *Soient P_1, P_2 deux polynômes non nuls.*

$$\exists!(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ tel que } P_1 = P_2 Q + R$$

Vérifiant : $\deg(R) = -\infty$ *ou* $0 \leqslant \deg(R) < \deg(Q)$.

Définition 15.2 (Polynôme irréductible). Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit irréductible, s'il n'existe pas $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = P_1 P_2$ et $\deg(P_1) < \deg(P_2)$.

Définition 15.3. Soit P un polynôme non constant. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ α est une racine d'ordre de multiplicité m de P si et seulement si

$$(X - \alpha)^m \mid P \text{ et } (X - \alpha)^{m+1} \nmid P.$$

Théorème 15.2. *Soit P un polynôme non constant, $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$*

$$(X - \alpha)^m \mid P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{m-1}(\alpha) = 0.$$

Théorème 15.3 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n. $P(X)$ admet n racines complexes.*

15.3 Fractions rationnelles

Définition 15.4 (Fraction rationnelle). $F(X)$ est appelée fraction rationnelle s'il existe $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)},\ Q(X) \neq 0$$

avec $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$.
Si $\deg(P) > \deg(Q)$, alors il existe $E(X)$ appelée la *partie entière* et des polynômes $R(X), S(X)$ tels que $\deg(R) < \deg(S)$ et :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{S(X)}.$$

Théorème 15.4 (Décomposition en éléments simples)**.** *Soient* $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ *et* $m, n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$.
Sur $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n} (X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1} \dots (X^2+b_mX+c_m)^{\beta_m} \\ &= \prod_{i=0}^{n} (X-a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=0}^{m} (X^2+b_kX+c_k)^{\beta_k} \end{aligned}$$

Alors $\forall A, B, C \in \mathbb{R}$, F *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$\begin{aligned} F(X) = &\left[\left(\frac{A_{11}}{(X-a_1)^1} + \dots + \frac{A_{1n}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots + \left(\frac{A_{n1}}{(X-a_n)^1} + \dots + \frac{A_{nn}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\right)\right] \\ &+ \left[\left(\frac{B_{11}X + C_{11}}{(X^2+b_1X+c_1)^1} + \dots + \frac{B_{1m}X + C_{1m}}{(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}}\right) + \dots + \right. \\ &\left.\left(\frac{B_{m1}X + C_{m1}}{(X^2+b_mX+c_m)^1} + \dots + \frac{B_{mm}X + C_{mm}}{(X^2+b_mX+c_m)^{\beta_m}}\right)\right] \\ F(X) = &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{B_{kl}X + C_{kl}}{(X^2+b_kX+c_k)^l} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n} \\ &= \prod_{i=0}^{n} (X-a_i)^{n} \end{aligned}$$

Alors $\forall A, B, C \in \mathbb{C}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$ F *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$\begin{aligned} F(X) &= \left[\left(\frac{A_{11}}{(X-a_1)^1} + \dots + \frac{A_{1n}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots + \left(\frac{A_{n1}}{(X-a_n)^1} + \dots + \frac{A_{nn}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\right)\right] \\ F(X) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(X-a_i)^j} \end{aligned}$$

Démonstration. [10] Sur $\mathbb{C}$: il est recommandé de consulter la section sur les espaces vectoriels avant (voir chapitre 17). Rappelons tout d'abord :

$$\mathbb{C}[X] \coloneqq \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Notons l'espace des fractions rationnelles :

$$\mathbb{C}(X) \coloneqq \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P, Q \in \mathbb{C}[X],\ Q \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \right\}$$

La stratégie de la démonstration consiste à montrer une égalité de deux ensembles :

$$E = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) < \deg(Q) \right\}$$

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^j} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

Étude de E *:* Posons $d \coloneqq \deg(Q)$

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} : P \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) < d \right\} \\ &= \left\{ \frac{a_0 + a_1X + \dots + a_{d-1}X^{d-1}}{Q(X)} : a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ a_0\frac{1}{Q(X)} + a_1\frac{X}{Q(X)} + \dots + a_{d-1}\frac{X^{d-1}}{Q(X)} : a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ \frac{1}{Q(X)}, \frac{X}{Q(X)}, \dots, \frac{X^{d-1}}{Q(X)} \right\} \end{aligned}$$

Notons : $\mathcal{F} \coloneqq \text{Vect}\left\{\frac{1}{Q(X)}, \frac{X}{Q(X)}, \dots, \frac{X^{d-1}}{Q(X)}\right\}$ Nous avons réussi à exprimer E sous la forme d'une famille de vecteurs, nous en déduisons que E est un espace vectoriel admettant $\mathcal{F}$ comme famille génératrice, montrons ensuite que $\mathcal{F}$ est libre : Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{C}$

$$\lambda_0 \frac{1}{Q(X)} + \cdots + \lambda_{d-1}\frac{X^{d-1}}{Q(X)} = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{d-1}X^{d-1}}{Q(X)}$$

$$\frac{\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{d-1}X^{d-1}}{Q(X)} = 0_{\mathbb{C}(X)} \iff \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{d-1}X^{d-1} = 0_{\mathbb{C}[X]}$$

Un polynôme est nul si tous ses coefficients sont nuls, ainsi :

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_{d-1} = 0$$

Ainsi $\mathcal{F}$ est libre. $\mathcal{F}$ est libre et génératrice, elle forme donc une base de E et ainsi :

$$\dim(E) = d$$

Étude de F :

$$F = \left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^j} : a_{ij} \in \mathbb{C}\right\}$$

On peut ainsi écrire F ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \left\{\frac{a_{11}}{(X-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(X-a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_{n1}}{(X-\alpha_n)} + \cdots + \frac{a_{nm_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}} : a_{ij} \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \text{Vect}\left\{\frac{1}{(X-\alpha_1)}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_1)^{m_1}}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_n)}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_n)^{m_n}}\right\} \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}_2 \coloneqq \text{Vect}\left\{\frac{1}{(X-\alpha_1)}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_1)^{m_1}}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_n)}, \dots, \frac{1}{(X-\alpha_n)^{m_n}}\right\}$. Nous en déduisons que F est un espace vectoriel admettant $\mathcal{F}_2$ comme famille génératrice, montrons que $\mathcal{F}_2$ est libre : Soient $a_{ij} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{aligned} &a_{11}\frac{1}{(X-\alpha_1)} + a_{12}\frac{1}{(X-\alpha_1)^2} + \cdots + a_{1(m_1-1)}\frac{1}{(X-\alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots \\ &+ a_{n1}\frac{1}{(X-\alpha_n)} + a_{n2}\frac{1}{(X-\alpha_n)^2} + \cdots + a_{nm_n}\frac{1}{(X-\alpha_n)^{m_n}} = 0_{\mathbb{C}(X)} \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par $(X-\alpha_1)^{m_1}$:

$$\begin{aligned} &a_{11}(X-\alpha_1)^{m_1-1} + a_{12}(X-\alpha_1)^{m_1-2} + \cdots + a_{1m_1} + \\ (X-\alpha_1)^{m_1}&\left(a_{21}\frac{1}{(X-\alpha_2)} + \cdots + a_{n1}\frac{1}{(X-\alpha_n)} + \cdots + a_{nm_n}\frac{1}{(X-\alpha_n)^{m_n}}\right) = 0_{\mathbb{C}(X)} \end{aligned}$$

En posant $X = \alpha_1$, on trouve que $a_{1m_1} = 0$. En remplaçant a_{1m_1} par sa valeur dans l'équation initiale, celle-ci devient :

$$\begin{aligned} &a_{11}\frac{1}{(X-\alpha_1)} + a_{12}\frac{1}{(X-\alpha_1)^2} + \cdots + a_{1(m_1-1)}\frac{1}{(X-\alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots \\ &+ a_{n1}\frac{1}{(X-\alpha_n)} + a_{n2}\frac{1}{(X-\alpha_n)^2} + \cdots + a_{nm_n}\frac{1}{(X-\alpha_n)^{m_n}} = 0_{\mathbb{C}(X)} \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par $(X-\alpha_1)^{m_1-1}$ et en posant $X = \alpha_1$, on trouve que $a_{1(m_1-1)} = 0$. On procède de la même manière jusqu'à prouver $a_{11} = \cdots = a_{1m_1} = 0$. On continue ainsi de suite pour montrer que tous les coefficients sont nuls et donc que $\mathcal{F}_2$ est libre. $\mathcal{F}_2$ est libre et génératrice, elle forme donc une base de F.

$$\dim(F) = m_1 + \cdots + m_n$$

Mais aussi :

$$\deg(Q) = \deg\left(\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i}\right) = m_1 + \cdots + m_n$$

Ainsi :

$$\dim(F) = \deg(Q) = d$$

Inclusion de F dans E :
Un élément de F est de la forme suivante :

$$\frac{a_{11}}{(X-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_{n1}}{(X-\alpha_n)} + \cdots + \frac{a_{nm_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}}$$

En mettant toutes les fractions sur le même dénominateur, on obtient :

$$\frac{a_{11}(X-\alpha_1)^{m_1-1}\prod_{i=2}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i} + \cdots + a_{1m_1}\prod_{i=2}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i} + \cdots + a_{nm_n}\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)^{m_i}}{Q(X)}$$

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui de Q. Donc c'est un élément de E. Ainsi :

$$F \subset E$$

Nous avons montré que $\dim(E) = \dim(F)$ et que $F \subset E$, ainsi $E = F$. Ce qui revient à dire que toute fraction rationnelle

$$\frac{P(X)}{Q(X)},\ \deg(P) < \deg(Q)$$

s'exprime sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^j}$$

L'unicité de la décomposition découle du fait que tout élément d'un espace vectoriel s'exprime par une unique combinaison linéaire des vecteurs d'une de ses bases. □

Chapitre 16

Systèmes linéaires et matrices

16.1 Définitions et opérations élémentaires

Définition 16.1 (Matrice)**.** Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{11},\dots,a_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}$.
Une *matrice* est un tableau de données appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Définition 16.2 (Système linéaire)**.** Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(a_{11},\dots,a_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}$ et $(b_1,\dots,b_m) \in \mathbb{K}^m$. Un *système linéaire* est décrit par :

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Sa matrice associée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Définition 16.3 (Opérations élémentaires)**.** Soient i, j tels que $i \neq j$ des numéros de ligne et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
2. $L_i \leftrightarrow L_j$
3. $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$

Opérations analogues sur les colonnes.

Proposition 16.1 (Pivot de Gauss)**.** *L'algorithme sera décrit ici pour les lignes, l'énoncé pour les colonnes est analogue sauf qu'on applique les opérations sur les colonnes.*
Soit un système ou une matrice. On applique les opérations élémentaires pour obtenir un système ou une matrice équivalente de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On appelle cela échelonner.
Ensuite le but est d'appliquer les opérations élémentaires pour « remonter » dans l'algorithme et d'obtenir une matrice ou un système de cette forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Définition 16.4 (Rang d'une matrice)**.** Le rang d'une matrice A est son nombre de lignes non nulles après échelonnage. Il est noté $\operatorname{rg} A$.

Théorème 16.1. *Soient $\mathcal{S}$ un système linéaire de m lignes et n inconnues, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telles que $A|B$ forme la matrice associée à $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ est solvable si et seulement si :*

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$$

16.2 Opérations sur les matrices

Définition 16.5 (Opérations sur les matrices)**.** Soient $(m, n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^4$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(a_{11}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}$ et $(b_{11}, \ldots, b_{pq}) \in \mathbb{K}^{pq}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

1. Si $m = p$ et $n = q$ alors on peut définir l'addition entre A et B et la multiplication par λ.

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} (a_{11} + \lambda b_{11}) & \cdots & (a_{1n} + \lambda b_{1q}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} + \lambda b_{p1}) & \cdots & (a_{mn} + \lambda b_{pq}) \end{pmatrix}$$

2. Si $n = p$ alors on peut définir la multiplication entre A et B.
   Soit $C = AB$. Chaque coefficient C_{ij} est défini par :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

   Autrement dit, soient A, B deux matrices telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

   Alors le coefficient $(C)_{ij}$ pour $C = AB$ est donné par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \color{red}{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & \color{green}{b_{2j}} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & \color{blue}{b_{pj}} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{green}{a_{i2}} & \cdots & \color{blue}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{mq} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{c_{ij}} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{pj}$$

Attention, la multiplication n'est pas commutative ($AB \neq BA$).

Proposition 16.2. *Soit* $(m, n, k, l) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

1. *Soient* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{l,n}(\mathbb{K})$.
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
3. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K}),\ B, C \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K}$.
$$A \cdot (B + \lambda C) = A \cdot B + \lambda \cdot A \cdot C$$
$$(A + \lambda B) \cdot C = A \cdot C + \lambda \cdot B \cdot C$$

Définition 16.6 (Matrice nulle)**.** La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont 0. On la note $0_{m,n}$, m étant le nombre de lignes, n le nombre de colonnes.

Définition 16.7 (Matrice identité)**.** La matrice identité est la matrice dont tous les coefficients sont 0 à l'exception de ceux de la diagonale principale à 1. On la note I_n, n étant le nombre de lignes.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque. La matrice identité est parfois notée : $\mathbb{1}_n$.

Lemme 16.1. *Soit* $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ A + 0_{m,n} = A$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Définition 16.8 (Transposée)**.** Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On définit $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la transposée de A par :

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Autrement dit, les colonnes de A deviennent ses lignes et réciproquement.

Définition 16.9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n$.

1. M est symétrique $\iff M^T = M$
2. M est anti-symétrique $\iff M^T = -M$

Proposition 16.3 (Calculer le déterminant d'une matrice carrée)**.** *Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, il existe plusieurs méthodes. Soit* A *une matrice carrée de taille* $n \times n$.

— $n = 2$.
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$
— $n = 3$
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$
— $n \geqslant 3$. *(Meilleure rédaction prévue)*
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ij})$$

Proposition 16.4. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$
4. $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$ *si* $\det(A) \neq 0$

Définition 16.10 (Matrice inversible)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si existe une unique matrice $B \equiv A^{-1}$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Proposition 16.5. *Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Définition 16.11 (Comatrice)**.** La comatrice $\mathrm{com}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$[\mathrm{com}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A^{(ij)}\right)$$

Proposition 16.6 (Calculer l'inverse d'une matrice)**.** *Lorsque nous devons calculer l'inverse d'une matrice, plusieurs cas sont possibles. Si on a une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Une méthode générale pour calculer l'inverse d'une matrice A est d'utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan. On part de la matrice

$$A|I_n$$

et on applique les opérations élémentaires pour avoir une matrice de la forme

$$I_n|B$$

$B \equiv A^{-1}$ *est l'inverse de* A.
Une autre méthode générale est d'utiliser la comatrice de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{com}(A)\right)^T$$

Définition 16.12 (Trace d'une matrice)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$ est définie par l'application suivante.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ A &\mapsto \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \end{aligned}$$

Autrement dit, c'est la somme des coefficients de la diagonale principale (celle allant du premier au dernier coefficient).

Lemme 16.2. 1. $\mathrm{tr}\left(A^T\right) = \mathrm{tr}(A)$ 2. $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$

Démonstration.

1. Par application directe de la définition de la trace et de la transposée.
2. On utilise la définition du produit matriciel.

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \iff \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} - \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(AB)_{ii} - (BA)_{ii}] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(A_{ik}B_{ki} - B_{ik}A_{ki})\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{array}{l}
[(\cancel{a_{11}b_{11}} - \cancel{b_{11}a_{11}}) + (\cancel{a_{12}b_{21}} - \cancel{b_{12}a_{21}}) + \cdots + (\cancel{a_{1n}b_{n1}} - \cancel{b_{1n}a_{n1}})] \\
+[(\cancel{a_{21}b_{12}} - \cancel{b_{21}a_{12}}) + (\cancel{a_{22}b_{22}} - \cancel{b_{22}a_{22}}) + \cdots + (\cancel{a_{2n}b_{n2}} - \cancel{b_{2n}a_{n2}})] \\
+\cdots+ \\
+[(\cancel{a_{n1}b_{1n}} - \cancel{b_{n1}a_{1n}}) + (\cancel{a_{n2}b_{2n}} - \cancel{b_{n2}a_{2n}}) + \cdots + (\cancel{a_{nn}b_{nn}} - \cancel{b_{nn}a_{nn}})]
\end{array}
$$

$$
= 0
$$

□

Proposition 16.7. *Pour passer d'une forme cartésienne à une forme paramétrique, on applique le pivot de Gauss sur les lignes. Pour passer d'une forme paramétrique à une forme cartésienne, on utilise le déterminant.*

Chapitre 17

Espaces vectoriels

17.1 Définitions

Définition 17.1 (Loi de composition)**.** Soient E, F deux ensembles et f une application.

1. On dit que f est une loi de composition *interne* si et seulement si : $f : E \times E \to E$.
2. On dit que f est une loi de composition *externe* si et seulement si : $f : E \times F \to E$.

Définition 17.2 (Magma)**.** On appelle *magma* un ensemble M muni d'une loi de composition *interne* « $*$ ». On note $(M, *)$.

Définition 17.3 (Groupe)**.** Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne « $*$ » telle que : $\forall (g_1, g_2, g_3) \in G^3$:

1. $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
2. $\exists 0_G \in G,\ g_1 * 0_G = 0_G * g_1 = g_1$
3. $\exists g^{-1} \in G,\ g_1 * g^{-1} = g^{-1} * g_1 = 0_G$

On dit que $(G, *)$ est un groupe. De plus, si et seulement :

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2,\ g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

on dit que $(G, *)$ est un groupe *commutatif* ou *abélien*.

Définition 17.4 (Anneau)**.** Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions *internes* « $+$ » et « $\cdot$ » sur A telles que :

1. $(A, +)$ est un groupe *commutatif*.
2. $\forall (a, b, c) \in A^3,\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. « $\cdot$ » possède un *élément neutre*.
4. $\forall (a, b, c) \in A^3$:
   (a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
   (b) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

On dit que A est *intègre* si $\forall (a, b) \in A^2$:

1. A est commutatif : $a \cdot b = b \cdot a$.
2. $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$.

Définition 17.5 (Corps)**.** Un *corps* est un *anneau commutatif* dans lequel tout élément non nul est inversible.

Définition 17.6 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E composé d'une loi de composition *interne* « $+$ » et une loi de composition *externe* « $\cdot$ » telles que :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ (u, v) \in E^2$:

(a) $\lambda_1 \cdot (u+v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v$
(b) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u$
(c) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u)$
(d) $1 \cdot u = u$

Définition 17.7 (Sous-espace vectoriel)**.** Soit E un espace-vectoriel, F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \subset E$
2. $F \neq \emptyset$
3. $\forall (u,v) \in F^2,\ \lambda \in \mathbb{K},\ u + \lambda v \in F$

Définition 17.8 (Somme directe)**.** Soient $F_1, F_2 \subset E$. On dit que F_1 et F_2 sont en *somme directe* ou qu'ils sont *supplémentaires* dans E si et seulement si :

1. $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
2. $F_1 + F_2 = E$

On note alors :

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

Définition 17.9. Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs dans E.

1. $\mathcal{F}$ est libre :

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{K},\ u_i \in E,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

2. $\mathcal{F}$ est génératrice :

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda_i \in \mathbb{K},\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

17.2 Base et dimension

Définition 17.10 (Base)**.** Une famille de vecteurs est une base si elle est *libre* et *génératrice.*

Proposition 17.1. *Soient une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ et un espace vectoriel E.*

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \forall x \in E,\ \exists! \lambda_i \in \mathbb{R},\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Démonstration. L'existence est évidente car $\mathcal{F}$ est génératrice.
Montrons l'unicité : Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$. On a d'une part :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

puis d'autre part :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \\ \iff & \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) u_i = 0 \end{aligned}$$

Or $\mathcal{F}$ est libre, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i - \mu_i = 0 \implies \lambda_i = \mu_i$. $\square$

Proposition 17.2. *Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs. $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :*

$$\det(\mathcal{F}) \neq 0$$

Définition 17.11 (Dimension d'un espace vectoriel)**.** Soit E un espace vectoriel, on appelle dimension de E, notée $\dim(E)$, le nombre d'éléments d'une base de E.

Proposition 17.3. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs dans E. Alors on a :*

1. *$\mathcal{F}$ est une base.*
2. *$\mathcal{F}$ est libre.*
3. *$\mathcal{F}$ est génératrice.*

Ainsi il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre pour montrer les deux autres propriétés.

Théorème 17.1 (Théorème de la base incomplète)**.** *Toute famille libre peut être complétée en une base.*

Théorème 17.2 (Théorème de la base extraite)**.** *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*

Théorème 17.3. *Chaque espace vectoriel admet une base.*

Proposition 17.4. *Soient E un espace vectoriel et $F, G \subseteq E$.*

1. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
2. $\dim(F + G) \leqslant \dim(E)$

Théorème 17.4 (Théorème de Grassman)**.** *Soient F et G deux espaces vectoriels.*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Chapitre 18

Applications linéaires

18.1 Définitions

Définition 18.1 (Application linéaire)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est une *application linéaire* si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Définition 18.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On définit le *noyau* de f, noté $\ker(f)$ tel que :

$$\ker(f) \coloneqq \{\forall x \in E : f(x) = 0_E\}$$

On définit l'*image* de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ telle que :

$$\mathrm{Im}(f) \coloneqq \{\forall y \in F : \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

Définition 18.3. Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. On dit que f est un *morphisme* de E vers F, on note $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme* de E, on note $f \in \mathcal{L}(E)$.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une *bijection*, alors f est un *isomorphisme*. On note parfois $f : E \xrightarrow{\sim} F$.
4. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un *isomorphisme*, on dit que f est un *automorphisme* de E.
   E et F sont appelés *isomorphes* s'il existe un *isomorphisme* de l'un vers l'autre, on écrit parfois $E \cong F$.

Remarque. L'ensemble des endomorphismes de E est parfois noté $\mathrm{End}(E)$, celui des automorphismes de E est parfois noté $\mathrm{Aut}(E)$.

Soit $\varepsilon \coloneqq \{f \in \mathcal{C}^N(I) : f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0\},\ n, N \in \mathbb{N}^*,\ a_i \in \mathcal{C}^0(I),\ I$ un intervalle ouvert.

Proposition 18.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

1. $\varepsilon \subset \mathcal{C}^n(I)$ *2.* $\dim(E) = n$

Définition 18.4 (Rang d'un morphisme)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle $\mathrm{rg}(f) \coloneqq \dim(\mathrm{Im}(f))$ le rang de f.

Théorème 18.1 (Théorème du rang)**.** *Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies ou infinies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :*

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Corollaire 18.1.1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \ker(f) + \mathrm{Im}(f) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \\ \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \end{cases} \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$$

Proposition 18.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ une base de E. Si l'on connait $f(b_i) \in F$, $\forall i = 1,\dots,n$, on connait toute l'application f.*

Corollaire 18.1.2. *Soit $(b_1,\dots,b_n)$ une base de E. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme donné par :*

$$\varphi(b_i) = e_i,\ \forall i \in [\![1,n]\!]$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Définition 18.5. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} \coloneqq (b_1,\dots,b_n)$ une base de E et $\mathcal{C} \coloneqq (c_1,\dots,c_n)$ une base de F. Alors on peut définir une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}),\ \forall i \in [\![1,n]\!]$.

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} c_j$$

Lemme 18.1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un espace-vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.*

$$\dim(E) = n \implies E \cong \mathbb{K}^n$$

Lemme 18.2. *Soient $\mathcal{B} = (b_1,\dots,b_n)$ base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}^n)$ alors :*

$$\varphi : E \to \mathbb{K}^n$$

$$x \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une bijection, alors c'est un isomorphisme.

Proposition 18.3. *Soient E,F des espaces vectoriels $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un morphisme et A sa matrice associée.*

$$y = f(x) \iff y = A \cdot x$$

18.2 Projecteurs et symétries

Définition 18.6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $f^2 \equiv f \circ f$.

1. On dit que f *est idempotente/une projection* si et seulement si : $f^2 = f$.
2. On dit que f *est involutive/une symétrie linéaire* si et seulement si : $f^2 = id_E$.

Proposition 18.4. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *$id_E - p$ est une projection $\iff$ p est une projection*
2. *$2p - id_E$ est une symétrie $\iff$ p est une projection*

Démonstration. 1. Posons $f(x) = id_E(x) - p(x)$. Montrons que $f(f(x)) = id_E(x) - p(x)$ si et seulement si $p(p(x))$.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= id_E(id_E(x) - p(x)) - p(id_E(x) - p(x)) \\ &= id_E(id_E(x)) - id_E(p(x)) - p(id_E(x)) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - p(x) - p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - 2p(x) + p(p(x)) \\ &= id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id_E(x) - [2p(x) - p(p(x))] = id_E(x) - p(x) &\iff p(p(x)) = p(x) \\ &\iff 2p(x) - p(p(x)) = p(x) \\ &\iff 2p(x) = p(x) + p(p(x)) \\ &\iff p(x) = p(p(x)) \end{aligned}$$

2. Posons $s(x) = 2p(x) - id_E(x)$. Montrons que $s(s(x)) = id_E(x)$ si et seulement si $p(p(x)) = p(x)$.

$$\begin{aligned} s(s(x)) &= s(2p(x) - id_E(x)) \\ &= 2p(2p(x) - id_E(x)) - id_E(2p(x) - id_E(x)) \\ &= 4p(p(x)) - 2p(id_E(x)) - 2id_E(p(x)) + id_E(id_E(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4p(p(x)) - 4p(x) + id_E(x) = id_E(x) &\iff 4p(p(x)) - 4p(x) = 0 \\ &\iff 4p(p(x)) = 4p(x) \\ &\iff p(p(x)) = p(x) \end{aligned}$$

□

Définition 18.7. Soient $E = F \oplus G$, $u \in F$, $v \in G$, alors l'application

$$\begin{aligned} p_F : E &\to E \\ x \equiv u + v &\mapsto u \end{aligned}$$

est appelée un *projecteur* sur F *parallélement* à G.

Proposition 18.5. *Soit p_F définie comme dans la définition précédente.*

1. *p_F est une projection.*
2. *Soit p une projection, p est un projecteur sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallélement à son noyau* $\ker(p)$.

18.3 Rotations.

Définition 18.8. $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n) \coloneqq \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$

Définition 18.9. $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n) \coloneqq \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$

Définition 18.10. $\mathrm{O}(n) \coloneqq \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Rx | Ry \rangle = \langle x | y \rangle\}$

Définition 18.11. $\mathrm{SO}(n) \coloneqq \{R \in \mathrm{O}(n) | \det(R) = 1\}$

Proposition 18.6.
1. $R \in \mathcal{M}_n,\ R \in \mathrm{O}(n) \iff R^T \cdot R = I_n$
2. $R \in \mathrm{O}(n) \implies \det(R) \in \{\pm 1\}$

Corollaire 18.1.3. $\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n | R^T \cdot R = I_n\}$

18.4 Changements de bases et matrices associées aux applications linéaires.

Définition 18.12. Soient E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ et F un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On peut définir une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}$ telle que :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(b_1) & \cdots & f(b_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

avec les coefficients a_{ij} tels que :

$$f(b_j) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} b'_i$$

Définition 18.13 (Matrice de passage)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée de taille n dont la $j-$ième colonne est formée des coordonnées de b'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Concrètement, écrivons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b'_1 & \cdots & b'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec les coefficients a_{ij} tels que :

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$$

Définition 18.14. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$.

1. On dit que A et B sont *équivalentes* si et seulement si :

$$\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n),\ B = QAP^{-1}$$

2. On dit que A et B sont *similaires* si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n),\ B = P^{-1}AP$$

Quatrième partie

Annexes

Soient f, g des fonctions	
$C \in \mathbb{R},\ Cf(x)$	$Cf'(x)$
$(f+g)'(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$(f \cdot g)'(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f \circ g)'(x)$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Table 18.1 – Formules de dérivation.

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_f$
$C \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z}^-, \mathbb{R}_+^*$ sinon
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$

Table 18.2 – Dérivées usuelles.

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $a \in \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|) + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$e^{ax},\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$1 + \cos^2 x = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\forall k \in \mathbb{Z},\ \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\cosh x$	$\sinh x + C$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$ ou $1 + \tanh^2 x$	$\tanh x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x + C$ ou $\arcsin x + C$	$]-1,1[$

Table 18.3 – Primitives usuelles, $C \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	DL
e^x	$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n)$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^a$	$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

Table 18.4 – Développements limités usuels en 0.

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sinh(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tanh(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$
$$\cosh(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$
$$\arccos(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$
$$(1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax,\ a \in \mathbb{R}^*$$
$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\cosh(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \sinh(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Table 18.5 – Équivalents usuels

Bibliographie

[1] Bibm@th. « Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques. » (), adresse : https://www.bibmath.net/.

[2] *Portail :Mathématiques*, in *Wikipédia*, 16 jan. 2022. adresse : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Portail:Math%C3%A9matiques&oldid=189931811.

[3] Exo7. « Cours et exercices de mathématiques. » (), adresse : http://exo7.emath.fr/.

[4] A. Soyeur, F. Capaces, E. Vieillard-Baron, Sésamath et les-mathematiques.net, *Cours de mathématiques de SUP*. adresse : http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf.

[5] ≡, in *Wikipédia*, 3 oct. 2021. adresse : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=%E2%89%A1&oldid=186834390.

[6] N. Ressayre, *Cours de mathématiques semestre 1 : Université Lyon 1*. adresse : http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/ressayre/AnaI/22-23/cours.pdf.

[7] Bibm@th, *Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre*, 15 juin 2022. adresse : https://www.youtube.com/watch?v=yCmVLulzxyc.

[8] Exo7, *Cours d'analyse de première année*. adresse : http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf.

[9] Bibm@th. « Règle de L'Hospital. » (), adresse : https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./h/hospital.html.

[10] F. Millet. « math-sup.fr. » (), adresse : http://math-sup.ouvaton.org/index.php?sujet=cours&chapitre=DES5.