Modelos Estatísticos

Pós-Graduação em Inteligência Artificial

Prof. Eraylson Galdino

Processo ARMA

O processo $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é dito ser um processo $\text{ARMA}(p,q)$ se $\{X_t\}$ é estacionário para todo t, em que:

$$\boxed{X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}} = \boxed{Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}}$$

AR(p)
Processo Auto Regressivo de ordem ***p***

MA(q)
Processo Média Móveis de ordem ***q***

Processo ARMA

Utilizando o operador de deslocamento

$$\boxed{\phi(B)X_t} = \boxed{\theta(B)Z_t}$$

AR(p)
Processo Auto Regressivo de ordem ***p***

MA(q)
Processo Média Móveis de ordem ***q***

Processo ARMA

$$x_t = \boxed{\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + w_t} + \boxed{\beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \ldots + \beta_q w_{t-q}}$$

AR(p)
Processo Auto Regressivo de ordem ***p***

MA(q)
Processo Média Móveis de ordem ***q***

FAC x FACP

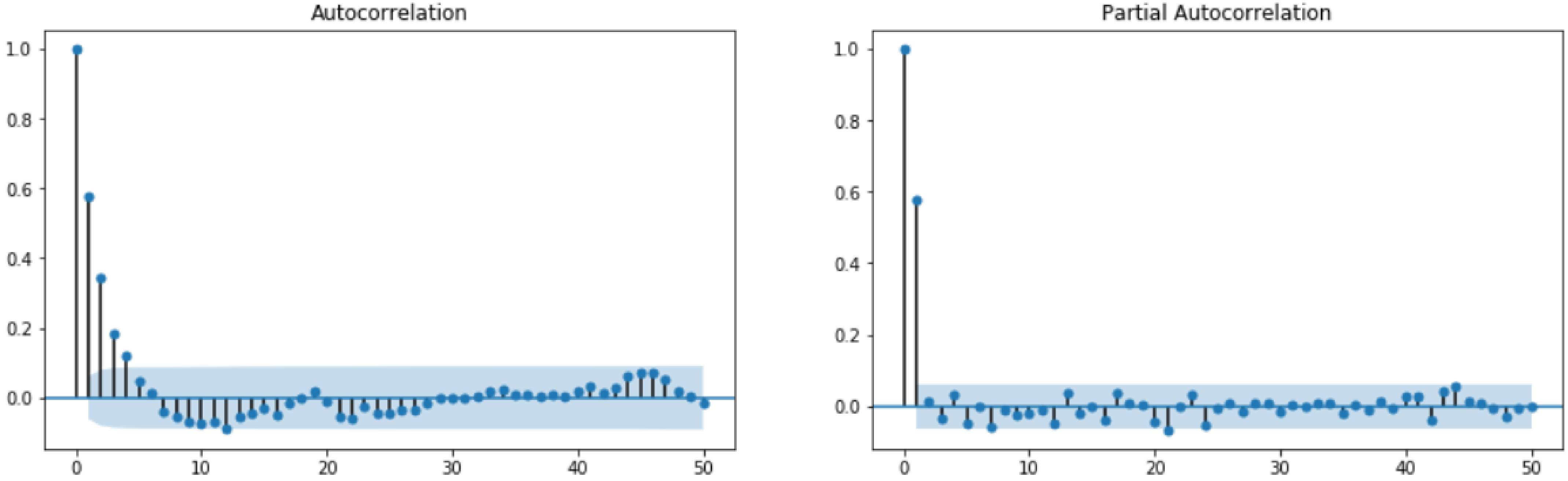
- Função de Autocorrelação:
  - Utilizada para verificar como as defasagens da série podem impactar seu valor atual:

    Verifica se x_{t-k} está correlacionado com x_t

- Função de Autocorrelação Parcial:
  - Utilizada para verificar a relação entre lags diferentes sem influência dos lags intermediários:
  - Verifica se x_{t-k} está puramente correlacionado com x_t

ARMA(p,q)

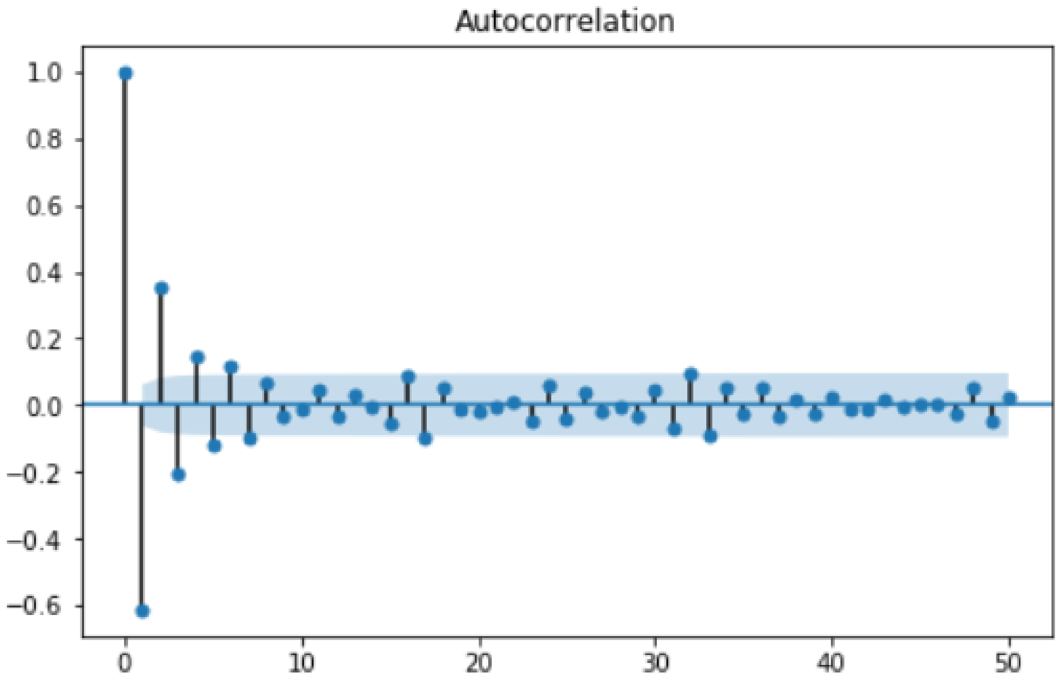
- FAC e FACP para o ARMA(1, 0): $x_t = 0.6x_{t-1} + e_t$

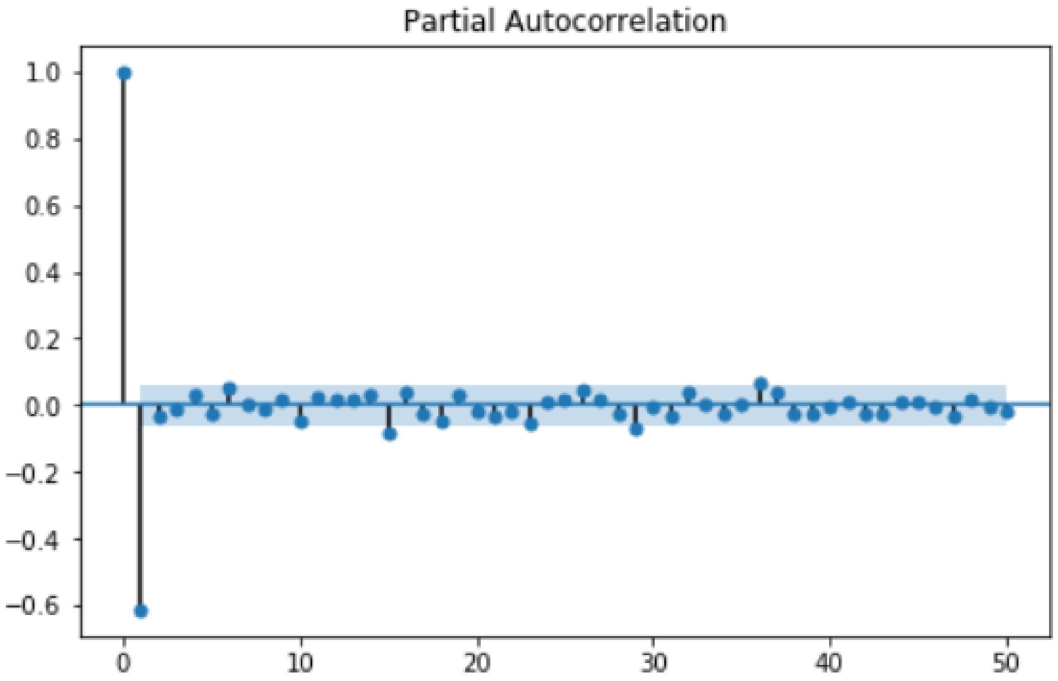


Para um processo AR(1), com o coeficiente positivo, as correlações na FAC vão decaindo até zero de acordo com o aumento do lag

ARMA(p,q)

- FAC e FACP para o ARMA(1, 0): $x_t = -0.6x_{t-1} + e_t$

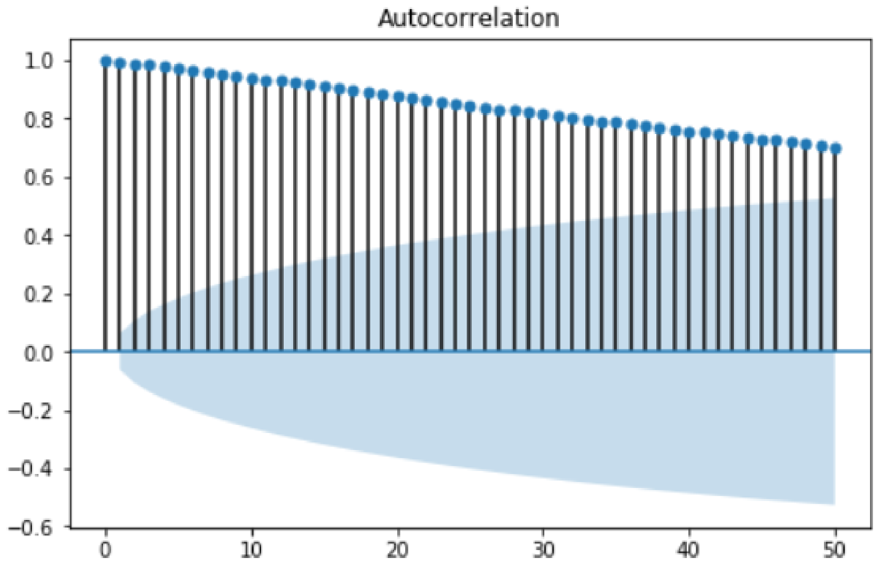


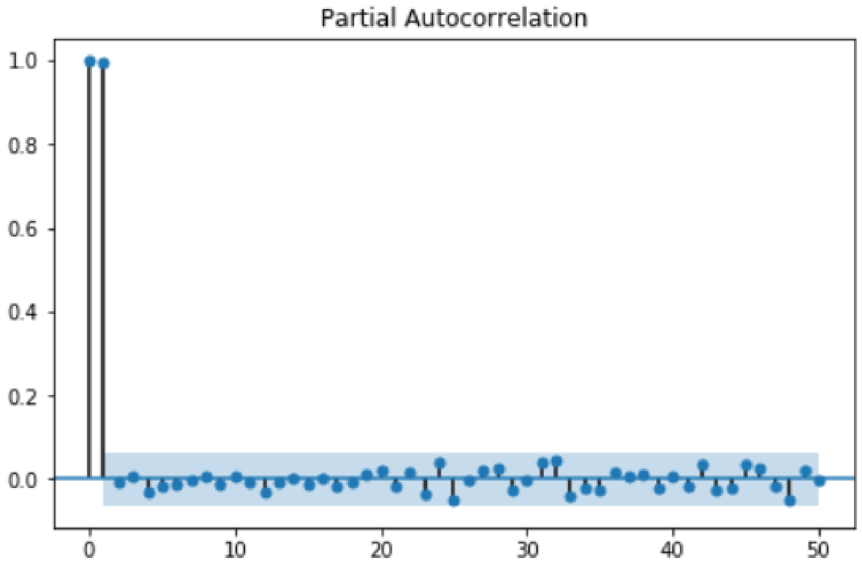


Para um processo AR(1), com o coeficiente negativo, as correlações na FAC vão decaindo até zero de acordo com o aumento do lag, porém os sinais dos valores vão sendo alterados .

ARMA(p,q)

- FAC e FACP para o ARMA(1, 0): $x_t = 1x_{t-1} + z_t$

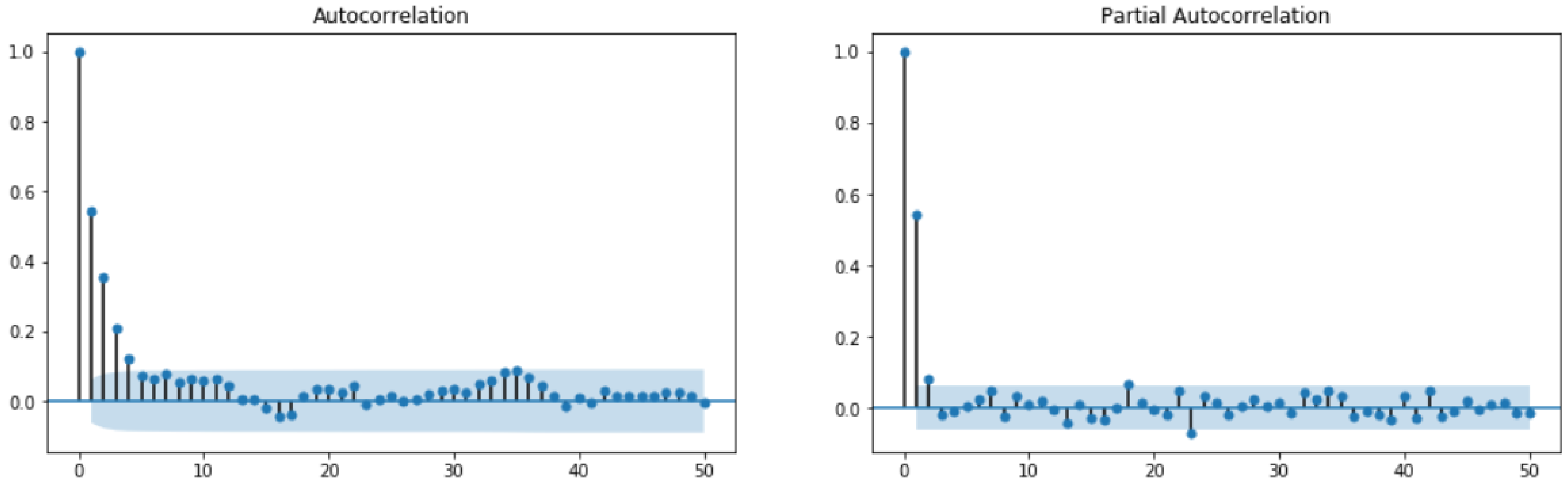




Random Walk é um tipo especial de AR(1) com a constante igual à 1

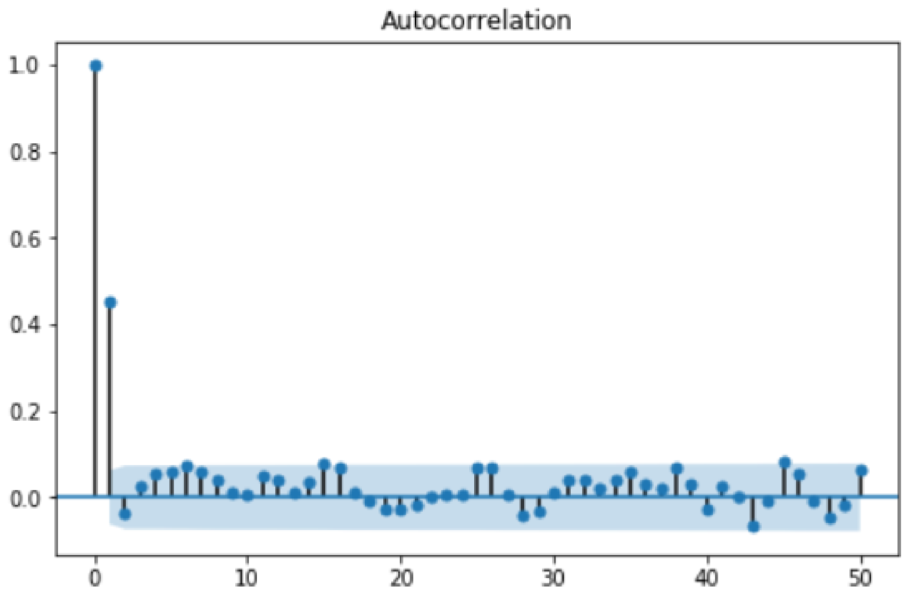
ARMA(p,q)

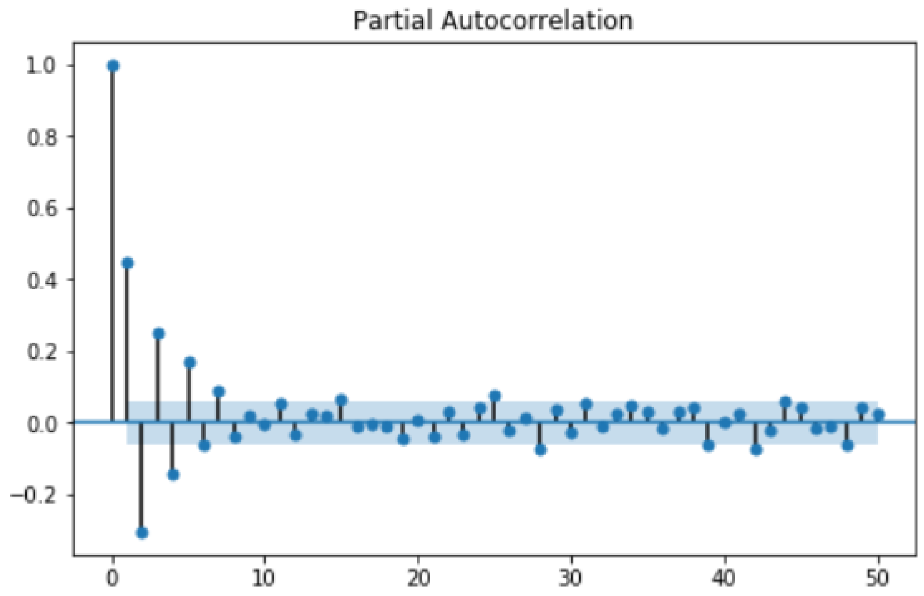
- FAC e FACP para o ARMA(2, 0): $x_t = -0.2x_{t-1} + 0.8x_{t-2} + e_t$



ARMA(p,q)

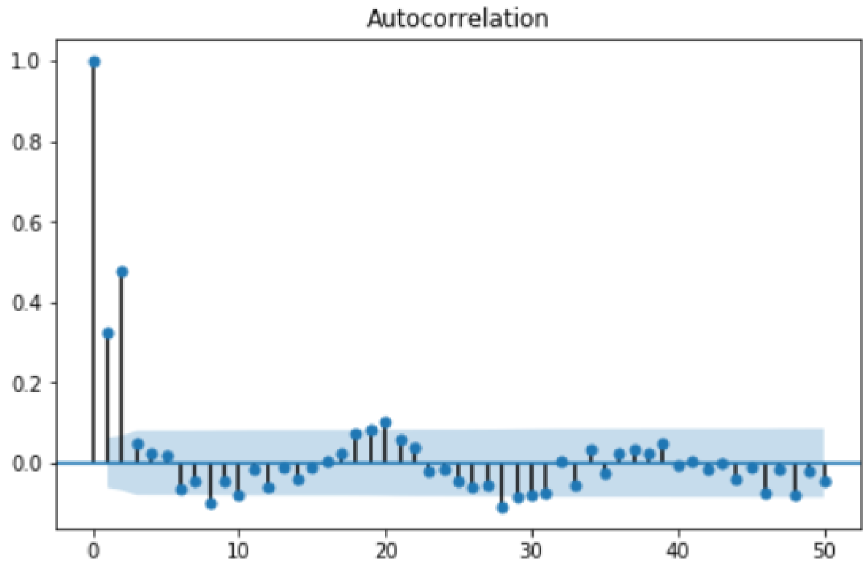
- FAC e FACP para o ARMA(0, 1): $x_t = -0.8z_{t-1}$

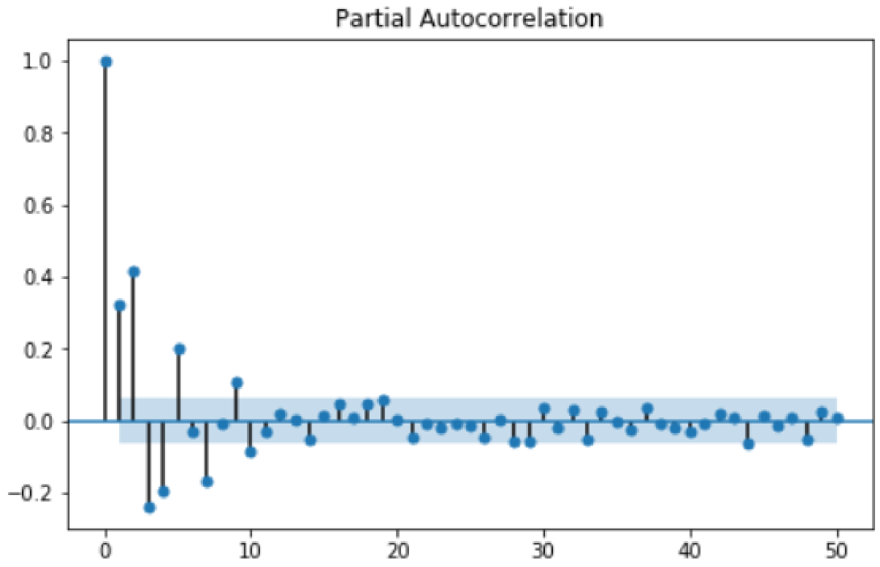




ARMA(p,q)

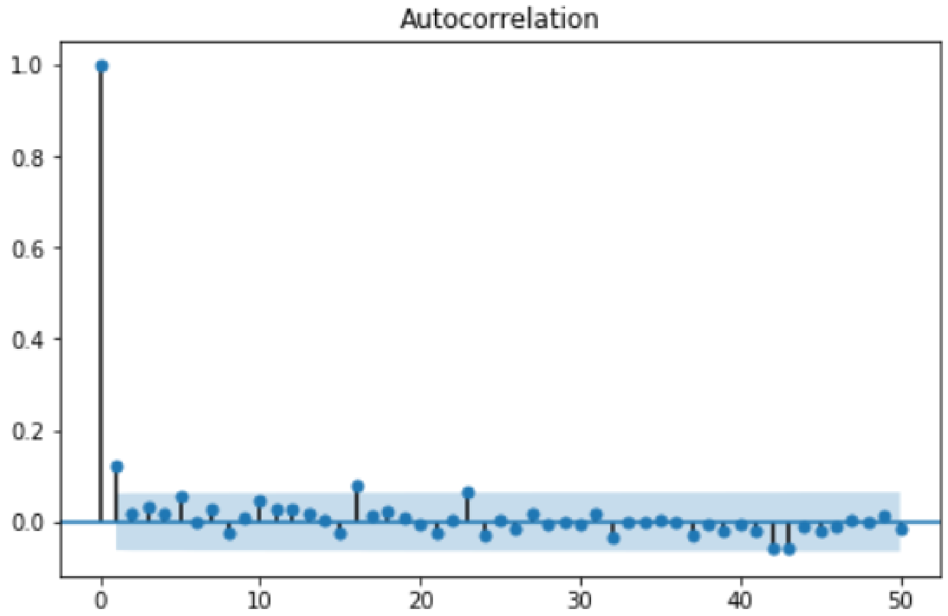
- FAC e FACP para o ARMA(0, 2): $x_t = -0.3z_{t-1} - 0.7z_{t-2}$

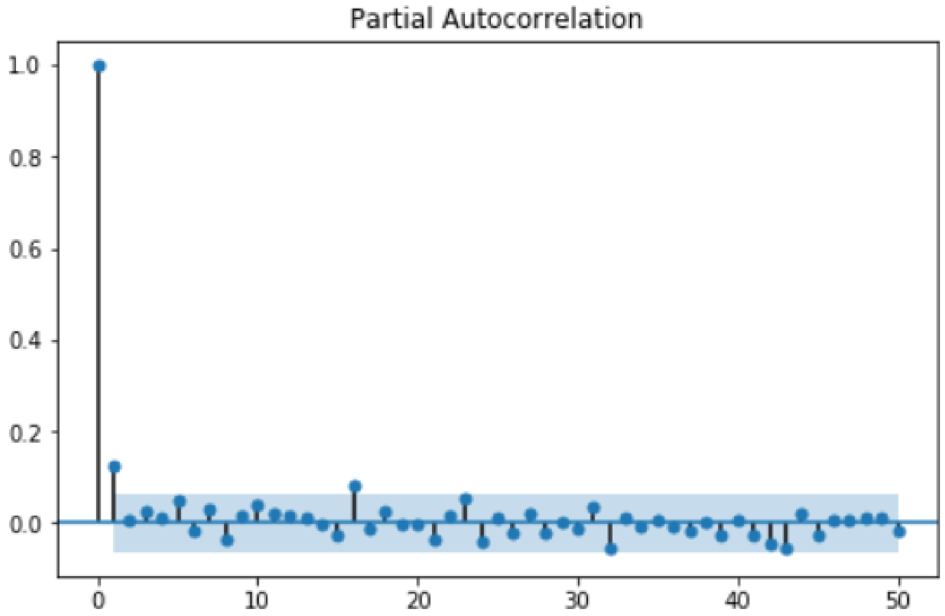




ARMA(p,q)

- FAC e FACP para o ARMA(1, 1): $-0.8x_{t-1} = -0.3z_{t-1}$





Modelagem do ARMA(p,q)

- Avaliar e garantir estacionariedade;
- Etapas para seleção dos parâmetros (número de ordem) para os modelos ARMA(p,q):
  - Utilizar a FACP para as observações x_n e selecionar o ultimo lag (k) com correlação estatisticamente significativa como valor de ordem AR(p=k);
  - Utilizar a FAC para as observações x_n e selecionar o ultimo lag (k) com correlação estatisticamente significativa como valor de ordem MA(q=k);
- Estimar os valores dos parâmetros φ, θ e σ :
  - Two-Step Regression Estimation;
  - Yule-Walker Estimation;
  - Maximum Likelihood Estimation

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$$

Modelagem do ARMA(p,q)

- Seleção de modelos:
  - Todo modelo é associado à um erro;
  - Não existe modelo que seja o melhor para todos os casos;
  - Deve ser selecionado um modelo de acordo com a atividade (análise, previsão, ...);
- Utilizando critérios de informação para seleção de modelos:
  - Critérios de informação de Akaike (AIC)
  - Critérios de informação Bayesiano (BIC)

Modelagem do ARMA(p,q)

- Critérios de informação de Akaike (AIC)
  - Depende de uma distribuição/modelo verdadeiro:
  - Utiliza da estimativa para o log verossimilhança como um critério para comparar modelos.

  - Modelos com grande quantidade de parâmetros são penalizados;

$$AIC = \boxed{-2\log L\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)} + \boxed{2\,(k)}$$

Cresce com o aumento de parâmetros

Decresce de acordo com o aumento da verossimilhança

  - Modelo com menor AIC, é o “melhor” modelo;

Modelagem do ARMA(p,q)

- Critérios de informação de Bayesiano (BIC):
  - Definido em termos de probabilidade a posteriori

$$BIC = -2\log f\left(x_n|\boldsymbol{\theta}\right) + p\log n$$

$f\left(x_n|\boldsymbol{\theta}\right)$ é o modelo escolhido. ***p*** é a quantidade de parâmetros. ***n*** é o tamanho da amostra

Hora de programar

ARIMA(p,d,q)

- Modelo Auto Regressivo Integrado de Média Móvel
- Generalização de modelos ARMA(p,q) aplicado para séries não estacionárias;
- Adiciona o componente de integração (d):

$$(1 - B)^d X_t$$

ARIMA(p,d,q)

- Notações:

- (1) $$y'_t = c + \boxed{\phi_1 y'_{t-1} + \cdots + \phi_p y'_{t-p}} + \boxed{\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t}$$

- (2) $$\underbrace{\boxed{(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)}}_{\text{AR(p)}} \; \underbrace{\boxed{(1 - B)^d y_t}}_{\text{I(d)}} = \underbrace{\boxed{c + (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)\varepsilon_t}}_{\text{MA(q)}}$$

ARIMA(p,d,q)

Ruído Branco: ARIMA (0,0,0);
Random Walk: ARIMA(0,1,0) sem a constante;
Autoregressão: ARIMA(p,0,0);
Média Móvel: ARIMA(0,0,q);

ARIMA(p,d,q)

- Vantagens:
  - Poucos parâmetros;
  - Rápido;
  - “Interpretável”;
- Desvantagem:
  - Exige conhecimento da série temporal;
  - Sensível aos parâmetros selecionados;
  - Assume que a série é linear;
  - Fraco desempenho em séries com alta volatilidade e com sazonalidade;

Metodologia Box e Jenkins

- Metodologia permite a previsão através de valores atuais e passados;
- Composta por um conjunto de processos estocásticos: AR, MA, ARMA, ARIMA;
- Tem como objetivo encontrar os melhores parâmetros para o modelo representar a série temporal;
- Fundamentada em 4 passos:
  - Identificação: Um modelo para a série é identificado;
  - Estimação: Estima-se os parâmetros do modelo identificado;
  - Avaliação: O modelo estimado é avaliado;
  - Previsão: O modelo é utilizado para prever valores futuros da série;

Metodologia Box e Jenkins: Identificação

- Nessa etapa os parâmetros (p,d,q) são selecionados, através da FAC e FACP;
- Escolha do parâmetro (d):
  - Uma série que não apresenta estacionariedade tem as autocorrelações com valores absolutos altos para todos os lags;
  - O operador de diferenciação é aplicado à série até torna-la estacionária;
- Escolha do parâmetro (p):
  - O valor de p (que corresponde ao grau de polinômios do componente AR) pode ser selecionado através da função de autocorrelação parcial, sendo p = número de lags correlacionados;

Metodologia Box e Jenkins: Identificação

- Escolha do parâmetro (q):
  - O valor de q (que corresponde ao grau de polinômios do componente MA) pode ser selecionado através da função de autocorrelação, sendo q = número de lags correlacionados;
- Geralmente, na prática a maioria das séries estacionárias apresentam $p + q \leq 2$. Porém não é uma regra.

Metodologia Box e Jenkins: Estimação

- Nessa etapa os valores dos parâmetros são estimados;

$$\phi_p(B) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p), \quad \theta_q(B) = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q) \text{ e } \sigma_u^2 = E(u_t^2)$$

- Métodos de estimação:
- Mínimos Quadrados;
- Máxima Verossimilhança;
- Yule-Walker;
- ...

Metodologia Box e Jenkins: Avaliação

- Essa etapa consiste em avaliar se o modelo estimado para a série está representando adequadamente o comportamento da série.
- Avaliação através de sobrefixação:
  - É estimado um modelo com parâmetros extras e comparado com outros modelos estimados;
  - Princípio da parcimônia: entre 2 modelos que representam bem a série, é selecionado o modelo que tem o menor número de parâmetros;
- Análise de Resíduos:
  - Se o modelo estiver representando bem a série temporal, os resíduos devem ser um ruído branco;

Metodologia Box e Jenkins: Previsão

- Etapa em que é utilizado o modelo estimado para a previsão de séries temporais h passos à frente;
- Notação: $\hat{Y}_T(h)$ previsão para o tempo T+h, dado que observamos a série até o tempo T;

Hora de programar