Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

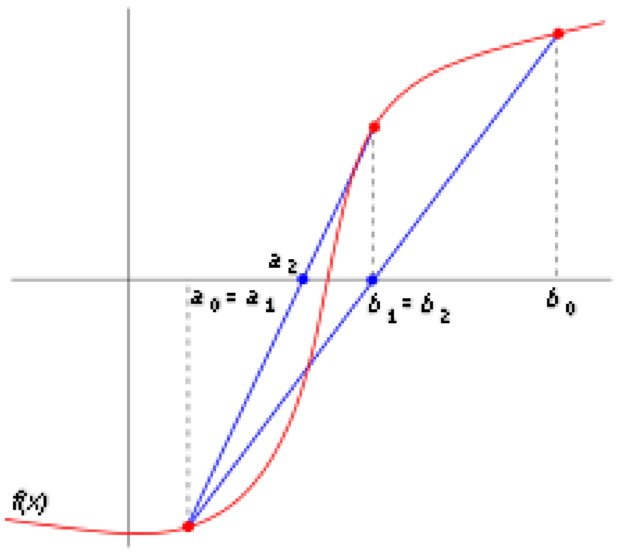
Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 5: Zeros de funções – Método da falsa posição, critérios de parada e MIL

Método da Falsa Posição (cordas)

- É um método de quebra, assim como o método da Bisseção:
  - A quebra é realizada no ponto de interseção da reta $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo x;



- No intervalo de separação $f(x)$ é substituída por uma reta;
- A raiz da reta é tomada como uma aproximação.

Método da Falsa Posição (cordas)

- Equação da reta:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}(x - a)$$

quando $y = 0$, o valor de x é a raiz da reta:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Falsa Posição (cordas)

- Então, assim como foi feito com o ponto médio para o método da bisseção, aqui os valores de x podem ser iterativamente calculados por:

$$x_i = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

- A cada iteração observa onde está a raiz calculando $f(x)$ nos extremos dos subintervalos.

Método da Falsa Posição (cordas)

Passos do Método da Falsa posição:

I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz $\boldsymbol{\xi}$ da função $f(x)$;

II. Calcula o valor de x_i a partir do intervalo $[a\,;b]$; trocamos a "máquina geradora"

III. Verifica em qual subintervalo a raiz ficou ($[a\,;x_i]$ ou $[x_i\,;b]$):
- Lembrando: condição para ter uma raiz em um intervalo – troca de sinal:

$$f(a) \times f(x_i) < 0 \qquad \text{ou} \qquad f(b) \times f(x_i) < 0$$

IV. Passa a considerar o subintervalo onde a raiz ficou como um novo intervalo $[a\,;b]$:
- Se $f(a) \times f(x_i) < 0,\, b = x_i$.
- $Se\, f(b) \times f(x_i) < 0,\ a = x_i$.

V. Repete os passos II a IV até que o critério de parada seja alcançado.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Falsa Posição (cordas)

Exemplo:

Determinar, usando o método da Falsa Posição, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

Solução:

1. Aproximação inicial;
2. Método da Falsa Posição.

Método da Falsa Posição (cordas)

Exemplo:

Determinar, usando o método da Falsa Posição, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

Solução:

Primeira etapa: aproximação inicial

$$I = [a; b] = [0; 1]$$

https://colab.research.google.com/drive/1FZ_Up3hyk-eVGeRPrpoby7NmYffjccu1?usp=sharing

$$x_i = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição (cordas)

Exemplo:

Determinar, usando o método da Falsa Posição, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

Segunda etapa: método da Falsa Posição

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,458097	-0,156539	1,00000
1	0,000000	0,458097	1,000000	-0,156539	0,396093	-0,011721	0,458097
2	0,000000	0,396093	1,000000	-0,011721	0,391505	-0,000825	0,396093
3	0,000000	0,391505	1,000000	-0,000825	0,391182	-0,000058	0,391505
4	0,000000	0,391182	1,000000	-0,000058	0,391159	-0,000004	0,391182
5	0,000000	0,391159	1,000000	-0,000004	$\boxed{0,391158}$	$\boxed{-0,000000}$	0,391159
6	0,000000	0,391158	1,000000	-0,000000	$\boxed{0,391158}$	$\boxed{-0,000000}$	$\boxed{0,391158}$

Raiz exata da função: 0,391158

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Critérios de parada

- O critério de parada definido pode não ser o mais adequado;

- Existem outros critérios que podem ser adotados:
  - Número de iterações;
  - Erro absoluto;
  - Valor da imagem.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Critérios de parada

- Número de iterações:
  - Para quando uma quantidade máxima de iterações é alcançada;
  - Não considera a **qualidade da aproximação**;
  - Impede *looping*;
  - Geralmente é associado a outros critérios de parada.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Critérios de parada

- Erro absoluto:
  - É a diferença entre o valor exato (ξ) e o valor aproximado (x_{i+1});
  - No entanto, não sabemos o valor da raiz ξ;
  - Logo, podemos calcular o erro a partir dos dois últimos valores encontrados para a aproximação da raiz:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \zeta$$

para ζ suficientemente pequeno

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Critérios de parada

- Valor da imagem:
  - Verificar quão próximo $f(x_{i+1})$ está de zero (imagem da aproximação):

$$|f(x_{i+1})| \leq \zeta_1$$

para um dado ζ_1.

Critérios de parada

- Na prática costuma-se **associar** mais de um critério de parada;
  - Conjunção "OU" (**or**) ou "E" (**and**).

- A adoção de qualquer um desses critérios **não garante** que sempre vai chegar a um **valor aceitável da raiz** procurada:

  - Problemas de convergência lenta;

  - Valor da função em torno da raiz se aproximar muito de zero.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Exercícios

Exercícios propostos:

1. Aplique o método da falsa posição na função $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 9x + 3}$ no intervalo $[0; 1]$ considerando $l = 5 \cdot 10^{-4}$.

2. Aplique o método da falsa posição na função $\boldsymbol{f(x) = \sin(x) + \ln(x)}$ no intervalo $\mathrm{I} = [0.2 ; 0.8]$, utilizando como critério de parada

   $\mathrm{c} = b - a \leq l$, onde $l = 0.05$ (amplitude final).

1. Aplique o método da falsa posição na função $\boldsymbol{f(x) = \sin(x) + \ln(x)}$ no intervalo $\mathrm{I} = [0.2 ; 0.8]$, utilizando como critério de parada $f(x_0) \leq \mathrm{P2}$, onde $\mathrm{P2} = 0.01$ (precisão relacionada à distância da imagem de x_0).

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Categorias dos métodos

1. Métodos de quebra:
   - Bisseção;
   - Falsa posição (cordas).

2. Métodos de ponto fixo:
   - Método Iterativo Linear (MIL);
   - Método de Newton;
   - Método das secantes.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método Iterativo Linear (MIL)

- Consiste em transformar o problema de encontrar uma raiz da equação $\boldsymbol{f(x) = 0}$ no problema de resolver a equação $\boldsymbol{\varphi(x) = x}$;
- Ou seja, queremos reescrever $\boldsymbol{f(x)}$ como $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x) - x}$;
- A raiz de $\boldsymbol{f(x)}$ passa a ser o **ponto fixo** de $\boldsymbol{\varphi(x)}$;
- $\varphi(x)$ deve possuir as mesmas soluções que $f(x)$;
- $\varphi(x)$ passa a ser a "máquina geradora" da sequência x_i:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método Iterativo Linear (MIL)

- Encontra-se uma **função de iteração** ($\varphi(x)$) que obedeça as **condições suficientes** (devem ocorrer) do Teorema a seguir para garantir a conversão.

Teorema: Sejam ξ um zero real da função f, I um intervalo de separação de ξ, centrado em ξ, e φ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$.

Se

i. φ e φ' forem contínuas em I;

ii. $|\varphi'(x)| \leq k < 1, \forall\, x \in \mathrm{I}$;

iii. $x_0 \in \mathrm{I}$;

então a sequência $\{x_i\}$ gerada por $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, $i = 0,1,2, \dots$ converge para ξ.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método Iterativo Linear (MIL)

Passos do MIL:

I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz $\boldsymbol{\xi}$ da função $f(x)$, com valor inicial x_0 preestabelecido;

II. Define $\varphi(x)$ de maneira que $\varphi(x) = x$ e sua derivada $\varphi'(x)$. Verifica se ambas são contínuas em I e se $|\varphi'(\mathrm{x})| < 1\,, \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{I}.$

*Caso as condições suficientes do item III forem atendidas (Teorema), podemos aplicar o MIL;

III. Calculamos sucessivos valores de x_i a partir de $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ até que as condições de parada sejam satisfeitas.

Método Iterativo Linear (MIL)

Exemplo 1.1:

Determinar, usando o MIL, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $\boldsymbol{f(x) = x\, ln(x) - 1}$.

- A partir do estudo gráfico e analítico: $\xi \in [1{,}7\,;1{,}8] = I$.
- Portanto, temos que $x_0 = 1{,}75$.
- Como $x\; ln(x) - 1 = 0$, tem-se:

$$ln(x) = \frac{1}{x} \quad ou \quad \boldsymbol{x} = e^{1/x} = \boldsymbol{\varphi(x)}$$

Assim,

$$\boldsymbol{\varphi'(x)} = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Então, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I. Além disso, $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall\, x \in I$. Logo, podemos garantir que **haverá convergência**.

Método Iterativo Linear (MIL)

Logo, considerando as 20 primeiras iterações, temos:

i	x_i
0	1,75
1	1,770795
2	1,758952
3	1.765653
4	1.761847
5	1.764004
6	1.762780
7	1.763474
8	1.763080
9	1.763304

i	x_i
10	1.763177
11	1,763249
12	1,763208
13	1.763231
14	1.763218
15	1.763226
16	$\boxed{1.763221}$
17	1.763224
18	1.763222
19	$\boxed{1.763223}$
...	...

https://colab.research.google.com/drive/14NtXewCzAYdJP_PxUkukLdpLCACXRdBa?usp=sharing

Método Iterativo Linear (MIL)

Exemplo 2:

Determinar, usando o MIL, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 6}$.

$$x = 6 - x^2$$
$$\varphi(x) = 6 - x^2$$

Tomando $x_0 = 1.5$ temos:

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_i}$
0	1,5
1	3,75
2	-8,0625
3	-59,003906
4	-3475,460923

Raiz esperada: $\xi = 2$. Logo, está divergindo.

Método Iterativo Linear (MIL)

Exemplo 2:

Determinar, usando o MIL, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 6}$.

$$x = 6 - x^2$$
$$\varphi(x) = 6 - x^2$$

Analisando as condições para convergência:

i. $\varphi(x) = 6 - x^2$ e $\varphi'(x) = -2x$. Ambas são contínuas em $\mathbb{R}$.

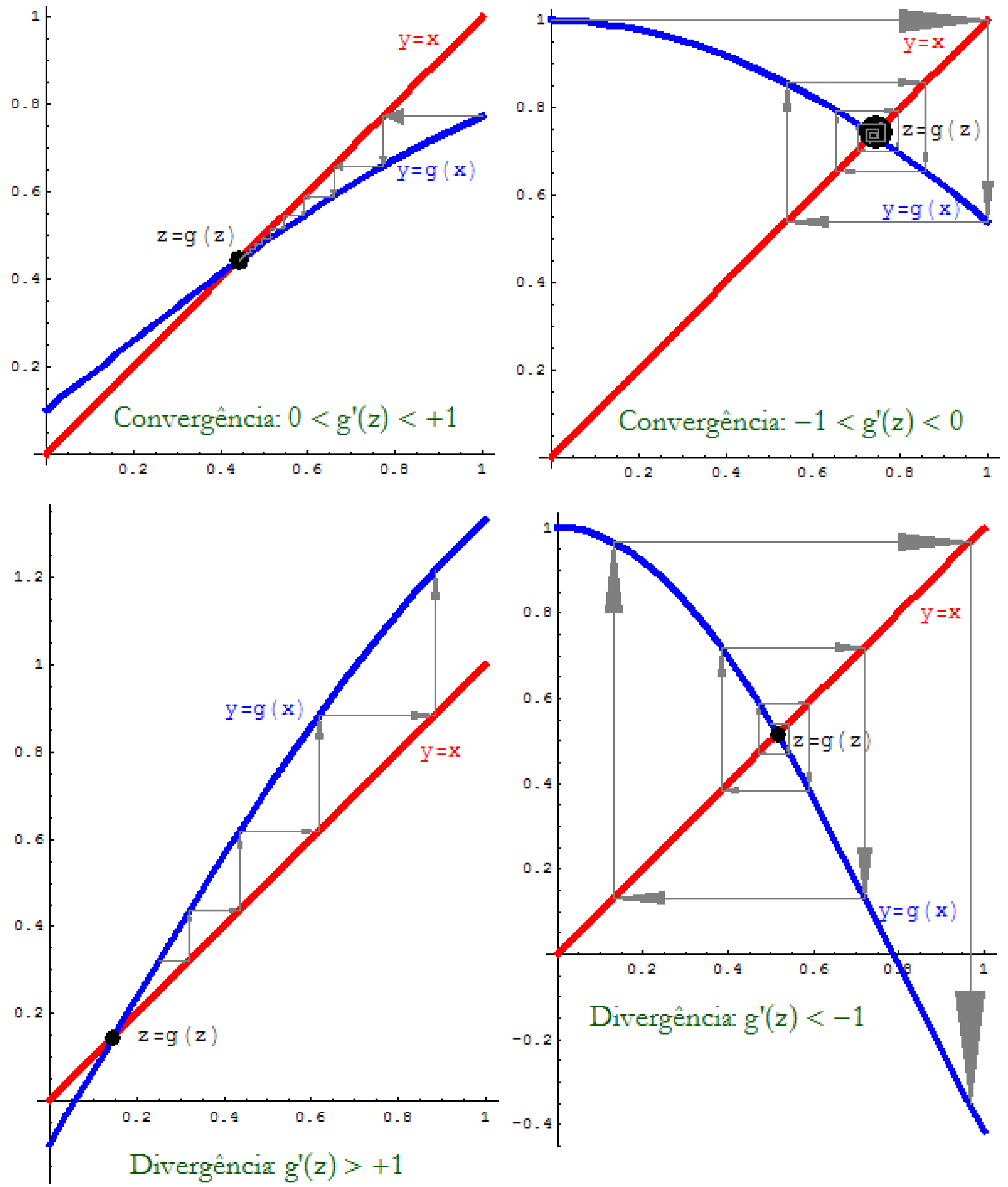
ii. $|\varphi'(x)| < 1, \forall\, x \in I$
$|-2x| < 1$
$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
Logo, para um intervalo que inclua a raiz da função essa condição não é satisfeita. Então não há garantia de convergência.

Raiz esperada: $\xi = 2$.

Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Método Iterativo Linear (MIL)



É indispensável avaliar a convergência antes de aplicar o método!

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 2);**

- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 2)**.