Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 12: Sistemas de Equações Lineares – Convergência e mal condicionamento

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos diretos:
  - Eliminação de Gauss;
  - Fatoração LU;
  - Fatoração de Cholesky.

- Métodos iterativos:
  - **Método de Jacobi;**
  - **Método de Gauss-Seidel.**

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos iterativos:

  - São indicados:
    - Grandes sistemas de equações lineares (muitas equações);
    - Quando a matriz correspondente ao sistema é esparsa (tem a maioria dos seus elementos nulos).

  - Partem de uma **aproximação inicial** $x^{(0)}$ do sistema $Ax = b$ e geram uma sequência de **soluções aproximadas** ($\{x^{(k)}\}$) de x.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares
(métodos iterativos)

Escrever:

$$Ax = b \longrightarrow x = Bx + c$$

É possível se $\boldsymbol{a_{ii} \neq 0}$, $\quad i = 1,2, \dots, n$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = (b_1/a_{11}\,,\, b_2/a_{22}\,, \dots, b_n/a_{nn})^T$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares
(métodos iterativos)

Escrever:

$$Ax = b \longrightarrow x = Bx + c$$

$$\boldsymbol{Ax = b} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x = Bx + c} \qquad \begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n = (b_m - a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots)/a_{mn} \end{cases}$$

Jacobi x Gauss-Seidel

- **Gauss-Seidel** utiliza as componentes que foram calculadas na **mesma iteração**;
- **Jacobi** só utiliza na **iteração seguinte**;

- Gauss-Seidel é considerado como um método para "acelerar" a convergência do método de Jacobi:

- Se as <u>condições de convergência</u> forem satisfeitas para o método Jacobi, então o método de Gauss-Seidel irá convergir com uma quantidade de iterações **igual** ou **inferior** àquela do método de Jacobi.

Convergência

$$Ax = b \longrightarrow x = Bx + c$$

Condições de convergência para os métodos iterativos

- Antes de aplicar qualquer um dos métodos iterativos **é possível verificar se esse método irá convergir para a solução** do sistema de equações lineares que está sendo observado;
- Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel **irão convergir** para **qualquer vetor aproximação inicial** $x^{(0)}$ se:
  I. TODOS os autovalores da matriz B forem, em módulo, menores que 1.

  OU

  II. A matriz A for não singular e de diagonal estritamente dominante.
- Se as condições suficientes não forem satisfeitas, nada se pode afirmar sobre a convergência:
  - Não converge por nenhum dos métodos;
  - Converge por um deles e diverge pelo outro;
  - Converge por ambos.

Condições de convergência para os métodos iterativos

I. TODOS os autovalores da matriz B forem, em módulo, menores que 1.
II. A matriz A for não singular e de diagonal estritamente dominante.

Autovalores de uma matriz

São as raízes do polinômio característico da matriz, denotado por

$\rho(\lambda) = A - \lambda I$, obtido de:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Calcular λ (autovalores) fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$.

* Aqui estamos demonstrando como, em termos gerais, se faz o cálculo de autovalores, contudo, para analisar a condição de convergência, deve-se calcular os autovalores da matriz B do sistema, e não da A, conforme explicitado no próximo slide.

Condições de convergência para os métodos iterativos

Autovalores de uma matriz

Calcular λ (autovalores) fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.394338 \\ 0.255247 \\ 0.139091 \end{bmatrix}$$ (autovalores de B)

Como o módulo de todos os elementos de λ são **menores** do que 1, então o método iterativo irá convergir para o sistema associado a matriz A.

Condições de convergência para os métodos iterativos

I. TODOS os autovalores da matriz B forem, em módulo, menores que 1.
II. A matriz A for não singular e de diagonal estritamente dominante.

Matriz não singular

Se $\det(A) \neq 0$ podemos dizer que a matriz não é singular.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = (500 + 4 + 3) - (10 + 30 + 20) = 447 \neq 0$ (não singular)

Condições de convergência para os métodos iterativos

I. TODOS os autovalores da matriz B forem, em módulo, menores que 1.
II. A matriz A for não singular e de diagonal estritamente dominante.

Matriz de diagonal estritamente dominante

Se $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,2,\dots,n$ (por linha)

OU

Se $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1,2,\dots,n$ (por coluna)

Condições de convergência para os métodos iterativos

Matriz de diagonal estritamente dominante

Se $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,2,\dots,n$ (por linha)

OU

Se $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1,2,\dots,n$ (por coluna)

Se o módulo do elemento da diagonal principal é maior do que a soma do módulo dos outros elementos **daquela linha** OU se é maior do que a soma do módulo dos outros elementos **daquela coluna**.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Conclusão: é dominante por linha, portanto, os métodos iterativos **convergem**

Dominância por linha: $|10| > |2| + |1|$ E $|5| > |1| + |1|$ E $|10| > |2| + |3|$

Dominância por coluna: $|10| > |1| + |2|$ E $|5| > |2| + |3|$ E $|10| > |1| + |1|$

Condições de convergência para os métodos iterativos

- **Exemplo** (permutação):

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Não é dominante!

Permutação:

Se eu trocar a 1ª e a 2ª linhas o sistema se torna

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

É dominante por linha

*pode fazer a permutação por colunas, mas **atenção ao vetor solução**

Mal condicionamento

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas mal condicionados

- São aqueles sistemas em que sua solução é muito sensível às pequenas mudanças em algum ou alguns coeficiente(s) das equações;

- Resulta em sistemas muito **instáveis**;

- Pequenas **(?)** mudanças nos valores dos coeficientes resultam em grandes **(?)** alterações na solução do problema;

- Identificar sistemas mal condicionados não é trivial. Um bom indicativo é analisar a magnitude dos determinantes de A e de sua inversa A^{-1}.

Sistemas bem condicionados

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2.001x_2 = 5 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

Solução exata (1; 1) ⟶ Solução aproximada (0.99959996; 1.000100001)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 10$$

$$\det(A^{-1}) = 1/10$$

Sistemas mal condicionados

$$\begin{cases} 0.1244x_1 + 0.3265x_2 = 0.4509 \\ 0.1442x_1 + 0.3786x_2 = 0.5228 \end{cases}$$

Solução exata (1; 1)

$$A = \begin{bmatrix} 0.1244 & 0.3265 \\ 0.1442 & 0.3786 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1.65 \times 10^{-5}$$

$$\det(A^{-1}) = 60469.5$$

$$\begin{cases} 0.1244x_1 + 0.3265x_2 = 0.4509 \\ 0.1442x_1 + 0.3786001x_2 = 0.5228 \end{cases}$$

Solução aproximada (-0.414129; 1.5388)

Avaliar
mal condicionamento

- A partir da comparação dos determinantes de A e A^{-1}.

- Medir o número de condição: $cond(A)$;

$$cond(A) = ||A|| \times ||A^{-1}||$$

onde $||A||$ é a **norma** da matriz.

  - Se $cond(A) \gg 1$ é um forte indício de mal condicionamento.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Avaliar
mal condicionamento

Norma da matriz

Comprimento da matriz.

- Norma 1: $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

O máximo valor dentre as somas dos valores absolutos dos elementos de cada coluna.

- Norma 2: $\|A\|_2 = \sqrt{|\lambda_{max}|}$

A raiz quadrada do maior autovalor, em módulo, da matriz $A^T A$.

- Norma infinito: $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

O máximo valor dentre as somas dos valores absolutos dos elementos de cada linha.

Avaliar
mal condicionamento

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2.8571 & -4.2857 \\ -0.7143 & 3.5714 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1 \le j \le n} ((0.5 + 0.1), (0.6 + 0.4)) = 1.0$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} ((2.8571 + 0.7143), (4.2857 + 3.5714)) = 7.8571$$

$$cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\| = 1.0 \times 7.8571 = 7.8571$$

$$\boldsymbol{cond(A)\ não\ }\text{é} \gg \mathbf{1}$$

Avaliar
mal condicionamento

$$A = \begin{bmatrix} 0.1244 & 0.3265 \\ 0.1442 & 0.3786 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 22890.0 & -19740.0 \\ -8718.3 & 7521.2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n}((0.1244 + 0.1442), (0.3265 + 0.3786)) = 0.7051$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{1 \le j \le n}((22890.0 + 8718.3), (19740.0 + 7521.2)) = 31608.3$$

$$cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\| = 0.7051 \times 31608.3 = 22287$$

$$\boldsymbol{cond(A) \gg 1}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Exercícios propostos

Para o sistema a seguir faça o que se pede:

$$\begin{cases} 1.2969x_1 + 0.8648x_2 = 0.8642 \\ 0.2161x_1 + 0.1441x_2 = 0.1440 \end{cases}$$

a) Calcule número de condição ($cond(A)$) e avalie se o sistema é ou não mal condicionado.

b) Verifique a convergência dos métodos iterativos a partir dos autovalores da matriz B (onde $x = Bx + c \;\approx Ax = b$).

c) Verifique a convergência dos métodos iterativos a partir da identificar se a matriz A é singular e estritamente dominante.

d) Encontre a solução aproximada para o sistema pelos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel partindo da solução inicial numa, executando 250 iterações, e pare antes se

$$\max\left(\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}\right|\right) < 10^{-8}, \text{ para } i = 1{,}2.$$

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 3);**

- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 3)**.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br