Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Cálculo Numérico (IF215)

Profa. Maíra Santana

AULA 9: Sistemas de Equações Lineares – Gauss e pivoteamento

Sistemas de Equações Lineares

Um sistema linear com m equações e n variáveis é usualmente escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

a_{ij}: coeficientes $\quad 1 \leq i \leq m \;,\; 1 \leq j \leq n$

x_j: variáveis $\quad j = 1, 2, \dots, n$

b_i: termos independentes $\quad i = 1, 2, \dots, m$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Notação matricial:

A: matriz dos coeficientes;

x: vetor das variáveis;

b: vetor de termos independentes.

- Solução do sistema:
  Encontrar o vetor de valores x_j que satisfaçam todas as m equações simultaneamente.

Sistemas de Equações Lineares

- Álgebra Linear;

- Aplicações práticas:
  - Tráfego de veículos;
  - Balanceamento de equações químicas;
  - Cálculo de alimentação diária equilibrada;
  - Circuitos elétricos;
  - Sistemas de GPS;
  - Ruídos acústicos – poluição sonora;
  - Mecanismos de busca.

http://www.ime.unicamp.br/~apmat/sistemas-lineares-algumas-aplicacoes/

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

- Sistemas de Equações compostos por muitas equações;
- Métodos numéricos para resolução de sistemas de equações lineares:
  - **Métodos diretos**: fornecem a solução exata, caso ela exista, após um número finito de operações;
  - **Métodos iterativos**: geram uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial, essa sequência converge para a solução, caso ela exista.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos diretos:
  - **Eliminação de Gauss;**
  - Fatoração LU;
  - Fatoração de Cholesky.

- Métodos iterativos:
  - Método de Jacobi;
  - Método de Gauss-Seidel;
  - Método de sobre-relaxação sucessiva (SOR).

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Eliminação de Gauss

- Eliminação de Gauss
  - Objetivo: encontrar a matriz triangular superior, ou seja, zerar os elementos abaixo da diagonal principal;
  - Pivô: número da diagonal principal utilizado para zerar os elementos abaixo da diagonal principal.

- Operações que não modificam o resultado do sistema:
  - Multiplicar por uma constante;
  - Trocar de posição;
  - Multiplicar uma linha e somar a uma outra linha.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Eliminação de Gauss

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_0 + 2x_1 + 7x_2 = 8 \\ -6x_0 + 5x_1 + x_2 = -10 \\ 3x_0 + 11x_1 - x_2 = -9 \end{cases}$$

Matriz aumentada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ -6 & 5 & 1 & -10 \\ 3 & 11 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Eliminação de Gauss

- Exemplo [continuação]

Matriz aumentada do sistema

$$\begin{cases} 3x_0 + 2x_1 + 7x_2 = 8 \\ -6x_0 + 5x_1 + x_2 = -10 \\ 3x_0 + 11x_1 - x_2 = -9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ -6 & 5 & 1 & -10 \\ 3 & 11 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

1) Somar a 2ª linha pela 1ª multiplicada por $\mathrm{m} = -\left(\frac{-6}{3}\right) = 2$:

Pivô

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 15 & 6 \\ 3 & 11 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Eliminação de Gauss

- Exemplo [continuação]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 15 & 6 \\ 3 & 11 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

2) Somar a 3ª linha pela 1ª multiplicada por $m = -\left(\frac{3}{3}\right) = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 15 & 6 \\ 0 & 9 & -8 & -17 \end{array}\right]$$

Matriz aumentada de um sistema <u>equivalente</u> ao sistema original, ou seja, que possui as mesmas soluções do sistema original.

Eliminação de Gauss

- Exemplo [continuação]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 15 & 6 \\ 0 & 9 & -8 & -17 \end{array}\right]$$

Para que se torne uma matriz triangular superior precisamos zerar mais um elemento.

3) Somar a 3ª linha pela 2ª multiplicada por $m = -\left(\frac{9}{9}\right) = -1$

$$\begin{array}{cc} & \\ \text{Pivô} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right] \end{array}$$

Matriz aumentada de um sistema equivalente ao sistema original, ou seja, que possui as mesmas soluções do sistema original.

Eliminação de Gauss

- Exemplo [continuação]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 3x_0 + 2x_1 + 7x_2 = 8 \\ \quad 9x_1 + 15x_2 = 6 \\ \quad\quad -23x_2 = -23 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$x_1 = \frac{6 - 15x_2}{9} = -1$$

$$x_0 = \frac{8 - 2x_1 - 7x_2}{3} = 1$$

Eliminação de Gauss (algoritmo)

- 1º passo: definir a matriz dos coeficientes e o vetor de termos independentes;

- 2º passo: multiplicadores:

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad , \qquad i = (k+1), (k+2), \dots, n$$

- 3º passo: para cada multiplicador:
  - $a_{ij} = a_{ij} + (m * a_{kj})$
  - $b_i = b_i + mb_k$

- 4º passo: calcular as soluções x_j.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Pivotação ou Pivoteamento

- O método da Eliminação de Gauss requer o cálculo de multiplicadores;
- Esses multiplicadores são calculados a partir do pivô:

$$m = -\frac{"elemento\ que\ quero\ zerar"}{piv\hat{o}}$$

- O que acontece se o pivô for nulo ou se estiver próximo de zero?
  - Multiplicadores bem maiores que a unidade, o que origina uma ampliação dos erros de arredondamento e, portanto, resultados imprecisos.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Pivotação ou Pivoteamento

- Para minimizar esse problema deve-se adotar **estratégias de pivoteamento**;

- Conceito:
  - Processo para escolher a linha e/ou coluna pivotal.

- Estratégias:
  - Pivoteamento parcial;
  - Pivoteamento completo ou total.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Pivotação ou Pivoteamento

- Pivoteamento parcial
    i. Escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes a_{ij} **da coluna de interesse**;
    ii. Trocar as linhas se for necessário.

- Exemplo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

i. Pivô = -3;

ii. Trocar linhas 2 e 3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Pivotação ou Pivoteamento

- Pivoteamento completo ou total
  1. Escolher para pivô o elemento de maior módulo entre **todos** os elementos a_{ij} que atuam no processo de eliminação.
  2. Trocar as linhas e colunas se for necessário.

- Exemplo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

i. Pivô = 7;

ii. Trocar colunas 2 e 4 e,

em seguida, trocar linhas 2 e 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Pivotação ou Pivoteamento

Algoritmo 2: Eliminação Gaussiana com Pivoteamento

```
para k = 1, ..., n − 1 faça

    Pivoteamento:
    pivo = a_kk
    l_pivo = k
    para i = (k + 1), ..., n faça
        se |a_ik| > |pivo| então
            pivo = a_ik
            l_pivo = i
        fim
    fim
    se pivo = 0 então
        Parar. A matriz A é singular.
    fim
    se l_pivo ≠ k então
        para j = 1, ..., n faça
            troca = a_kj
            a_kj = a_l_pivoj
            a_l_pivoj = troca
        fim
        troca = b_k
        b_k = b_l_pivo
        b_l_pivo = troca
    fim

    Eliminação:
    para i = (k + 1), ..., n faça
        m = a_ik / a_kk
        a_ik = 0
        para j = (k + 1), ..., n faça
            a_ij = a_ij − m a_kj
        fim
        b_i = b_i − m b_k
    fim
fim
```

Exercícios propostos

1. Resolva o sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

2. Implemente a eliminação Gaussiana com pivoteamento.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 3);**

- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 3)**.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br