Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 6: Zeros de funções – Métodos de ponto fixo: MIL, Newton e Secantes

Categorias dos métodos

1. Métodos de quebra:
   - Bisseção;
   - Falsa posição (cordas).

2. Métodos de ponto fixo:
   - Método Iterativo Linear (MIL);
   - Método de Newton;
   - Método das secantes.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método Iterativo Linear (MIL)

Passos do MIL:

I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz $\boldsymbol{\xi}$ da função $f(x)$, com valor inicial x_0 preestabelecido;

II. Define $\varphi(x)$ de maneira que $\varphi(x) = x$ e sua derivada $\varphi'(x)$. Verifica se ambas são contínuas em I e se $|\varphi'(\mathrm{x})| < 1$, $\forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{I}$.

*Caso as condições suficientes do item III forem atendidas (Teorema), podemos aplicar o MIL;

III. Calculamos sucessivos valores de x_i a partir de $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ até que as condições de parada sejam satisfeitas.

É indispensável avaliar a convergência antes de aplicar o método!

Método de Newton

- Nem sempre é simples definir uma função de iteração $\varphi(x)$ que satisfaça as condições de convergência;

- Método de Newton, Newton-Raphson ou Tangentes:
  - Fornece uma função de iteração que satisfaça **antecipadamente** as condições de convergência.
  - Objetivo: construir φ tal que $\varphi'(\xi) = 0$.

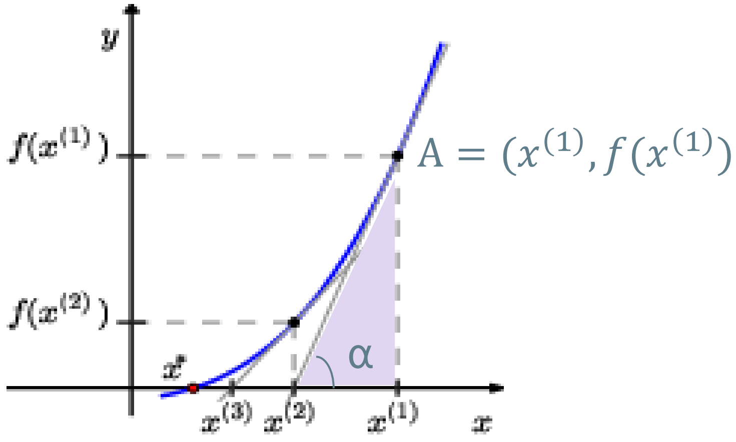
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Processo iterativo:

$$\boldsymbol{\varphi(x_i) = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \quad , i = 0, 1, 2, \ldots$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método de Newton
(interpretação geométrica)



- No triângulo $x^{(2)}x^{(1)}A$:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{f(x^{(1)})}{(x^{(1)} - x^{(2)})}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

- Método das tangentes:

$$\boldsymbol{\varphi(x_i) = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \quad , i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi(x_i) = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de Newton

Exemplo 1.2:

Determinar, usando o Método de Newton, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $f(x) = x\,ln(x) - 1$.

- Do exemplo anterior (MIL) temos que:
  - $\xi \in [1{,}7\,;1{,}8] = I$
  - $x_0 = 1{,}75$.

$$\mathbf{f(x) = xln(x) - 1}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(xln(x)) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$f'(x) = (\ln(x) + 1) - (0)$$

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

i	x_i
0	1,75
1	1,763255
2	$\boxed{1{,}763223}$

Método das Secantes

- Quando a primeira derivada da função fica muito próxima de zero no intervalo de separação pode haver **overflow** quando utilizamos o método de Newton:
  - A derivada está no **denominador**: $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

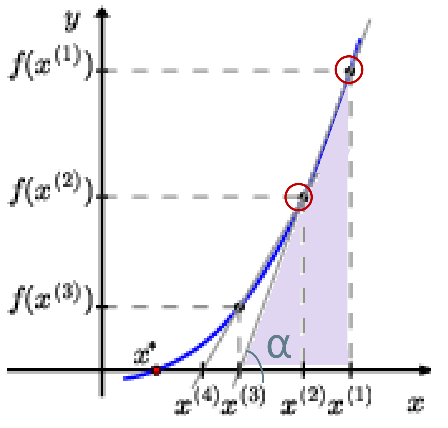
- Uma alternativa é **substituir** $f'(x_i)$ por:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

- Processo iterativo:

$$\boldsymbol{\varphi(x_i) = x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}} \quad , i = 1, 2, 3, \ldots$$

Método das Secantes
(interpretação geométrica)



- Na região hachurada:
  - $x^{(3)}$ é a interseção da reta definida pelos pontos $\left(x^{(1)}, f\left(x^{(1)}\right)\right)$ e $\left(x^{(2)}, f\left(x^{(2)}\right)\right)$;
  - Equivale a trocarmos a **tangente** da função f por uma **secante** a essa função.

- Processo iterativo:

$$\boldsymbol{\varphi(x_i) = x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}} \quad , i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\varphi(x_i) = x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Método das Secantes

Exemplo 1.3:

Determinar, usando o método das secantes, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $f(x) = x\,ln(x) - 1$.

- Do exemplo anterior temos que:
  - $\xi \in [1{,}7\,;1{,}8] = I$
- Como aproximação inicial são utilizados os extremos de I: $x_{i-1} = 1{,}8$ e $x_i = 1{,}7$

i	x_{i+1}
1	1,762798
2	1,763228
3	$\boxed{1{,}763223}$

Exercícios

- Exercícios propostos:

1. Determine, usando o MIL, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 6}$.
   - Dica: lembre-se que assumindo $\varphi(x) = x = 6 - x^2$ a solução **diverge**.

2. Dada a função $\boldsymbol{f(x) = x^6 - x - 1}$, determine, pelo método de Newton, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função. Considere $x_0 = 1.5$. Como critérios de parada, assuma $|x_{i+1} - x_i| \leq \zeta$ com $\zeta = 10^{-4}$ (erro absoluto) e número máximo de iterações igual a 100.

3. Dada a função $\boldsymbol{f(x) = e^x - 2x - 1}$, determine, pelo método das secantes, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função para o intervalo $I = [1\,;2]$. Assuma $|x_{i+1} - x_i| \leq \zeta$ com $\zeta = 10^{-4}$ (erro absoluto).

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 2);**
- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 2)**.