Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

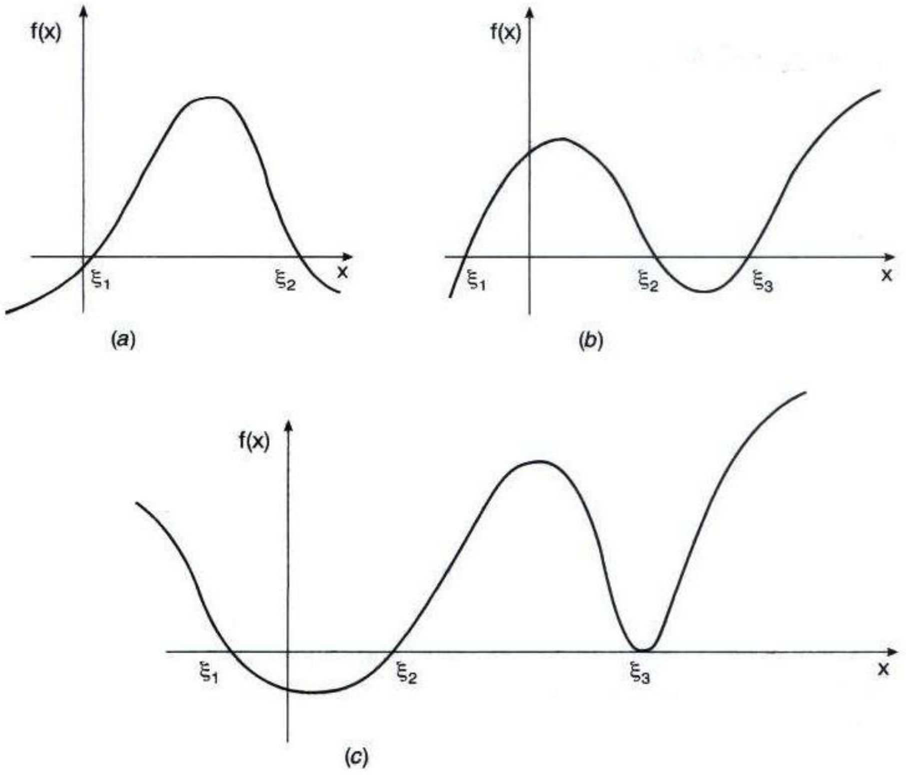
Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 4: Zeros de funções – Método da Bisseção

Zeros de funções

- Ponto(s) em que $f(x) = 0$;
- Raizes de uma função;
- Podem ser **reais** ou complexas.



Zeros de funções

Os zeros de uma determinada função $\boldsymbol{f(x)}$ podem ser encontrados por dois métodos:

- Métodos diretos:
  - Métodos analíticos;
  - São processos particulares, ou seja, cada função tem seu próprio caminho de solução;
  - Nem sempre resulta em caminhos triviais.

- **Métodos iterativos**:
  - Partem de uma aproximação inicial da solução do problema;
  - Gera-se uma sequência de aproximações sucessivas cujo limite é a solução procurada:
    - Refinamento da aproximação inicial.

Zeros de funções

Métodos iterativos:

1. Encontrar intervalo contendo raízes: **aproximação inicial**.

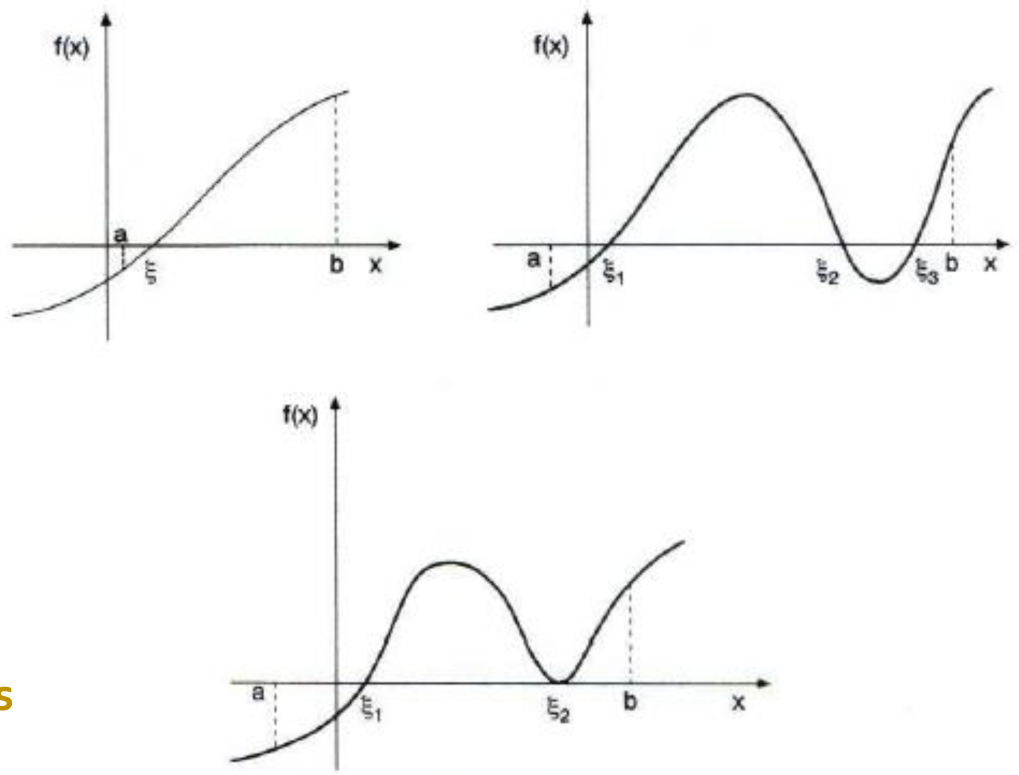
2. Refinamento para obter uma boa aproximação: **métodos**.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Zeros de funções

1. Encontrar intervalo contendo raízes: **aproximação inicial**.

- Estudo gráfico



Lembrem-se: as raízes reais são as **interseções** com o eixo x.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Zeros de funções

1. Encontrar intervalo contendo raízes: **aproximação inicial**.

- Estudo analítico
  - Teorema de Bolzano: para saber a localização da raiz

*Se f é uma função **contínua** em um certo intervalo $[a\,;b]$ e troca de sinal nos extremos deste intervalo, isto é, $\boldsymbol{f(a) \times f(b) < 0}$, então existe pelo menos uma raiz real de f em $[a\,;b]$.*

  - Se além de satisfazer o Teorema a função for sempre crescente ou decrescente (preserva o sinal) em $[a\,;b]$, existirá uma única raiz real no intervalo e ele será chamado de **intervalo de separação**.

Zeros de funções

1. Encontrar intervalo contendo raízes: **aproximação inicial**.

Podemos ainda encontrar a aproximação inicial tabelando alguns valores de x e $f(x)$ e identificar pontos em que ocorre mudança de sinal de $f(x)$. Esses são pontos em que o gráfico corta o eixo x.

Exemplo: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

x	0	1	2	3	...
$f(x)$	-	-	+	+	...

O intervalo $[1\ ;\ 2]$ contém pelo menos um zero de $f(x)$.

Zeros de funções

1. Encontrar intervalo contendo raízes: **aproximação inicial**.

O intervalo $[1\,;2]$ contém <u>pelo menos</u> um zero de $f(x)$.

Para saber se existe um único zero no intervalo, analisamos $f'(x)$

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} \quad > \quad 0, \qquad \forall x > 0$$

Logo:

- $f(x)$ é contínua dentro do intervalo $[1\,;2]$;
- $f'(x)$ não muda de sinal dentro do intervalo $[1\,;2]$;
- Como $f(1) \times f(2) = -0.84 * 0.74 = -0.62 < 0$, concluímos que existe exatamente uma raiz no intervalo $[1\,;2]$.

Zeros de funções

2. Refinamento para obter uma boa aproximação: **métodos**.

- **Bisseção**;
- Falsa posição (cordas);
- Método iterativo linear (MIL);
- Método de Newton;
- Método das secantes.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Bisseção

2. Refinamento para obter uma boa aproximação: **métodos**.

   I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz $\boldsymbol{\xi}$ da função $f(x)$;

   II. Divide o intervalo em 2 subintervalos a partir do ponto médio (x_0) de $[a\,;b]$;

   III. Verifica em qual subintervalo a raiz ficou ($[a\,;x_0]$ ou $[x_0\,;b]$):
   - Lembrando: condição para ter uma raiz em um intervalo – troca de sinal:

     $f(a) \times f(x_0) < 0$ ou $f(b) \times f(x_0) < 0$

   IV. Passa a considerar o subintervalo onde a raiz ficou como um novo intervalo $[a\,;b]$:
   - Perceba que esse novo intervalo possui amplitude igual a metade da amplitude do intervalo original.

   V. Repete os passos II a IV até que a amplitude do intervalo seja tão pequena quanto se queira.

Método da Bisseção

2. Refinamento para obter uma boa aproximação: **métodos**.

Algoritmo da bisseção

1. Escolha a, b (*extremos do intervalo de separação considerado*) e l (amplitude final de $[\,a;\,b\,]$);

2. Faça

$c = b - a$ (*amplitude de* $[\,a;\,b\,]$);

$x_0 = (\,a + b\,)\,/\,2$ (*ponto médio de* $[a;b]$)

fim;

3. Enquanto $c > l$ (*a amplitude final de* $[\,a\,;\,b\,]$ *não foi atingida*) ou $f(\,x_0\,) \neq 0$;

faça

Se $f(\,a\,) \times f(\,x_0\,) < 0$,

faça

$b = x_0$ (ξ *está entre* $[\,a;\,x_0\,]$, *considere o novo* $[\,a;\,b\,]$);

fim;

Se $f(a) \times f(\,x_0) > 0$,

faça

$a = x_0$ (ξ *está entre* $[\,x_0\,;\,b\,]$, *considere o novo* $[\,a;\,b\,]$);

fim;

faça

$c = b - a$;

$x_0 = (\,a + b\,)\,/\,2$;

fim;

fim;

4. Escreva: O valor aproximado da raiz procurada é "x_0", pare.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Centro de Informática UFPE
Universidade Federal de Pernambuco

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

Solução:

1. Aproximação inicial;
2. Método da Bisseção.

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Primeira etapa: aproximação inicial
  - Estudo gráfico;
  - Estudo analítico.

https://colab.research.google.com/drive/1crD1RGqkGBJWPuvdPOm3C5UE5BbsEwiB?usp=sharing

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $\boldsymbol{l = 0,05}$ como a amplitude final de $[\boldsymbol{a} \,;\, \boldsymbol{b}]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $l = 0,05$ como a amplitude final de $[a\,;b]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000

$f(x_i)! = 0$

x_i não é raiz

$c > l$

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $l = 0,05$ como a amplitude final de $[a\,;b]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $l = 0,05$ como a amplitude final de $[a\,;b]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $l = 0,05$ como a amplitude final de $[a\,;b]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000
3	0,375000	0,500000	0,038560	-0,251744	0,437500	-0,108939	0,12500

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $l = 0,05$ como a amplitude final de $[a\,;b]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000
3	0,375000	0,500000	0,038560	-0,251744	0,437500	-0,108939	0,12500
4	0,375000	0,437500	0,038560	-0,108939	0,406250	-0,035752	$\boxed{0,06250}$

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

- Segunda etapa: método da Bisseção

Considere $l = 0,05$ como a amplitude final de $[a\,;b]$ – precisão.

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000
3	0,375000	0,500000	0,038560	-0,251744	0,437500	-0,108939	0,12500
4	0,375000	0,437500	0,038560	-0,108939	0,406250	-0,035752	0,06250
5	0,375000	0,406250	0,038560	-0,035752	0,390625	0,001266	**0,03125**

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método da Bisseção

Exemplo:

Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = 2^{-x} - 2\sin x$$

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000
3	0,375000	0,500000	0,038560	-0,251744	0,437500	-0,108939	0,12500
4	0,375000	0,437500	0,038560	-0,108939	0,406250	-0,035752	0,06250
5	0,375000	0,406250	0,038560	-0,035752	$\boxed{\mathbf{0,390625}}$	0,001266	**0,03125**

Raiz exata da função: 0,391158

O resultado pode ser refinado diminuindo o $\boldsymbol{l}$ definido (critério de parada: $\boldsymbol{l} = 0{,}05$)

Método da Bisseção

É possível prever exatamente qual é o menor número de iterações (k) necessário para que a precisão (l) seja alcançada fazendo:

$$k \geq \frac{\ln(b_0 - a_0) - \ln(l)}{\ln(2)}$$

$\boldsymbol{l} = 0{,}05$

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	c
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
...	...	...	...	...	...	...	...
5	0,375000	0,406250	0,038560	-0,035752	0,390625	0,001266	0,03125

$$k \geq \frac{\ln(1{,}000000 - 0{,}000000) - \ln(0{,}05)}{\ln(2)}$$

$$k \geq 4{,}321928$$

Logo, k = 5 iterações

Método da Bisseção

EXERCÍCIOS

1. Busquem implementar em Python um programa para calcular zeros de funções pelo método da Bisseção.

2. Utilizando o método da Bisseção, calcule a raiz real da equação $\boldsymbol{x^2 + \ln(x) = 0}$ com tolerância máxima de $\boldsymbol{l = 10^{-2}}$. Considere um sistema de 4 dígitos.

3. Utilizando o método da Bisseção, calcule a raiz real da equação $\boldsymbol{x \log(x) - 1}$ que possui zero em $[\mathbf{2}; \mathbf{3}]$ para um erro menor que **0,001**.

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 2);**

- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 2)**.