Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 7: Revisão primeira unidade

Representação dos números

- Os dígitos são representados como potências da base.
- Exemplos outras bases para decimal:
  - $(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \mathbf{13}$
  - $(312)_8 = 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = \mathbf{202}$
  - $(12E)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = \mathbf{302}$
  - $(0.1011)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \mathbf{0.6875}$
  - $(0.17)_8 = 1 \cdot 8^{-1} + 7 \cdot 8^{-2} = \mathbf{0.234375}$
- Exemplo decimal para binário:

$$347 = d_j \cdot 2^j + d_{j-1} \cdot 2^{j-1} + \cdots + d_1 \cdot 2^1 + d_0 \cdot 2^0$$
$$\mathbf{(101011011)_2}$$

n	n // 2	n % 2
347	173	1
173	86	1
...	...	...
1	0	1

n	2 · n	Parte inteira
0.625	1.25	1
0.25	0.5	0
0.5	1.0	1

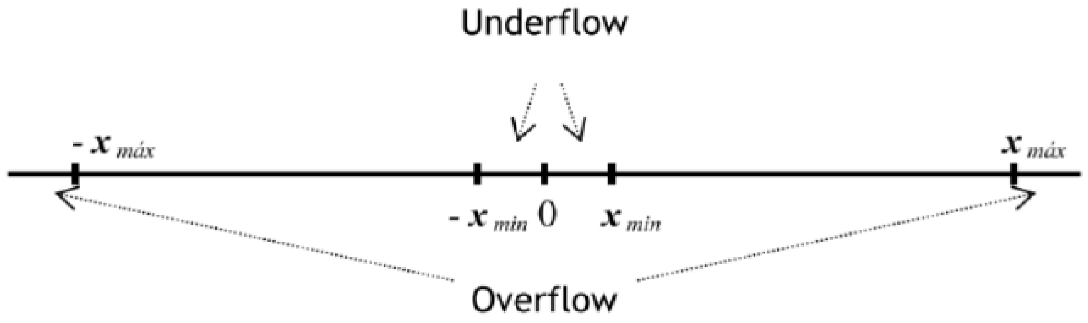
$$0.625 = d_1 \cdot 2^{-1} + d_2 \cdot 2^{-2} + d_3 \cdot 2^{-3} + \cdots$$
$$\mathbf{(0.101)_2}$$

Tipos e análise de erros

- Tipos de erros:
  - Arredondamento, truncamento (discretização) e inerente (modelagem, entrada/erros de medição).

- Análise de erros (mensuração/representação):
  - Erro absoluto: $\Delta\bar{x} = x - \bar{x}$
  - Erro relativo: $\delta\bar{x} = \frac{\Delta\bar{x}}{x} = \frac{(x - \bar{x})}{x}$
  - Percentual: $\mathrm{p}\bar{x} = 100 \cdot \delta\bar{x}\ \%$

- Atenção aos arredondamentos!



Sistema de ponto flutuante

- Sistema de ponto flutuante:

$$F(\beta, t, e_{min}, e_{max})$$ –> ex. F(10,6,-99,99)

β: base | e: expoente | t: número de dígitos

- É um sistema **finito**:
  - Portanto, é possível calcular a quantidade de elementos distintos em $F\ (n(F))$:

$$n(F) = 2 * (\beta - 1) * \beta^{t-1} * (e_{max} - e_{min} + 1) + 1$$

- Dois números (x_1 e x_2) são consecutivos em uma máquina se, fixado o expoente e, $x_2 - x_1 = \beta^{e-t+1}$

Ex.: Sejam $x_1 = 3{,}147 * 10^{-9}$ e $x_2 = 3{,}148 * 10^{-9}$ pertencentes a máquina $F(10{,}4, -9{,}9)$

$$x_2 - x_1 = (3{,}148 - 3{,}147) * 10^{-9} = 0{,}001 * 10^{-9} = 1 * 10^{(-9-4+1)} = 10^{-12}$$

Portanto, a distância entre números consecutivos é uniforme.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Zeros de funções

- Ponto(s) em que $f(x) = 0$;

Lembrem-se: as raízes reais são as **interseções** com o eixo x.

- Métodos iterativos:
  1. Encontrar intervalo contendo raízes: **aproximação inicial**.
  2. Refinamento para obter uma boa aproximação: **métodos**.

PARTE 1: **Aproximação inicial - estudo analítico**

- Teorema de Bolzano: para saber a localização da raiz

  *"Se f é uma função **contínua** em um certo intervalo $[a\,;b]$ e troca de sinal nos extremos deste intervalo, isto é, $\boldsymbol{f(a) \times f(b) < 0}$, então existe pelo menos uma raiz real de f em $[a\,;b]$."*

- Se além de satisfazer o Teorema a função for sempre crescente ou decrescente (preserva o sinal) em $[a\,;b]$, existirá uma única raiz real no intervalo e ele será chamado de **intervalo de separação**.

PARTE 2: **Aplicar os métodos**

Método da Bisseção

Passos do método da Bisseção:

I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz **ξ** da função $f(x)$;

II. Divide o intervalo em 2 subintervalos **a partir do ponto médio** (x_i) de $[a\,;b]$ (subintervalos iguais);

III. Verifica em qual subintervalo a raiz ficou ($[a\,;x_i]$ ou $[x_i\,;b]$):
   - Lembrando: condição para ter uma raiz em um intervalo – troca de sinal:

     $f(a) \times f(x_i) < 0$ ou $f(b) \times f(x_i) < 0$

IV. Passa a considerar o subintervalo onde a raiz ficou como um novo intervalo $[a\,;b]$:
   - Perceba que esse novo intervalo possui amplitude igual a metade da amplitude do intervalo original.

V. Repete os passos II a IV até que as condições de parada sejam satisfeitas.

$$x_i = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição (cordas)

Passos do Método da Falsa posição:

I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz **ξ** da função $f(x)$;

II. Calcula o valor de x_i a partir do intervalo $[a\,;b]$ aplicado ao cálculo da raiz da reta;

III. Verifica em qual subintervalo a raiz ficou ($[a\,;x_i]$ ou $[x_i\,;b]$):
- Lembrando: condição para ter uma raiz em um intervalo – troca de sinal:

  $f(a) \times f(x_i) < 0$ ou $f(b) \times f(x_i) < 0$

IV. Passa a considerar o subintervalo onde a raiz ficou como um novo intervalo $[a\,;b]$:
- Se $f(a) \times f(x_i) < 0$, $b = x_i$.
- *Se* $f(b) \times f(x_i) < 0,\ a = x_i$.

V. Repete os passos II a IV até que o critério de parada seja alcançado.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Método Iterativo Linear (MIL)

Passos do MIL:

I. Parte de um intervalo de separação $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de uma raiz $\boldsymbol{\xi}$ da função $f(x)$, com valor inicial x_0 preestabelecido;

II. Define $\varphi(x)$ de maneira que $\varphi(x) = x$ e sua derivada $\varphi'(x)$;

III. Verifica se há convergência:

   i. φ e φ' forem contínuas em I;

   ii. $|\varphi'(x)| < 1, \forall\, x \in \mathrm{I}$;

   iii. $x_0 \in \mathrm{I}$;

IV. Calculamos sucessivos valores de x_i a partir de $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ até que as condições de parada sejam satisfeitas.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

$$\varphi(x_i) = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de Newton

- Nem sempre é simples definir uma função de iteração $\varphi(x)$ que satisfaça as condições de convergência;

- Método de Newton, Newton-Raphson ou Tangentes:
  - Fornece uma função de iteração que satisfaça **antecipadamente** as condições de convergência.
  - Objetivo: construir φ tal que $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Processo iterativo:

$$\varphi(x_i) = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad , i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\varphi(x_i) = x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Método das Secantes

- Quando a primeira derivada da função fica muito próxima de zero no intervalo de separação pode haver **overflow** quando utilizamos o método de Newton:
  - A derivada está no **denominador**: $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

- Uma alternativa é **substituir** $f'(x_i)$ por:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

- Processo iterativo:

$$\varphi(x_i) = x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad , i = 1, 2, 3, \ldots$$

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulos 1 e 2);**

- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulos 1 e 2)**.

Atividade prática

1. Será aceito apenas 1 envio;
2. A nota da atividade prática vale **até 1,0 ponto extra**;
3. O formulário ficará aberto até às 12h (meio dia) de amanhã.

https://forms.gle/id5puUrU9nWTjSwZ8

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br