Centro de Informática UFPE
Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 11: Sistemas de Equações Lineares – Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Sistemas de Equações Lineares

Um sistema linear com m equações e n variáveis é usualmente escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

a_{ij}: coeficientes $\quad 1 \leq i \leq m \; , \; 1 \leq j \leq n$

x_j: variáveis $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

b_i: termos independentes $\quad i = 1, 2, \ldots, m$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

- Notação matricial:

A: matriz dos coeficientes;

x: vetor das variáveis;

b: vetor de termos independentes.

- Solução do sistema:
    - Encontrar o vetor de valores x_j que satisfaçam todas as m equações simultaneamente.

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos diretos:
  - Eliminação de Gauss;
  - Fatoração LU;
  - Fatoração de Cholesky.

- Métodos iterativos:
  - **Método de Jacobi;**
  - **Método de Gauss-Seidel.**

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos diretos:
  - Não são recomendados para grandes sistemas de equações lineares (muitas equações);
  - Não são recomendados quando a matriz correspondente ao sistema é esparsa (tem a maioria dos seus elementos nulos).

- Métodos iterativos:
  - São indicados nesses casos em que os métodos diretos não são.

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos iterativos:

  - São indicados:
    - Grandes sistemas de equações lineares (muitas equações);
    - Quando a matriz correspondente ao sistema é esparsa (tem a maioria dos seus elementos nulos).

  - Partem de uma **aproximação inicial** $x^{(0)}$ do sistema $Ax = b$ e geram uma sequência de **soluções aproximadas** ($\{x^{(k)}\}$) de x.

Sistemas de Equações Lineares
(métodos iterativos)

Escrever:

$$Ax = b \longrightarrow x = Bx + c$$

É possível se $\boldsymbol{a_{ii} \neq 0}$, $\quad i = 1,2,\dots,n$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = (b_1/a_{11}\,,\ b_2/a_{22}\,, \dots, b_n/a_{nn})^T$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares
(métodos iterativos)

Escrever:

$$Ax = b \longrightarrow x = Bx + c$$

$$\boldsymbol{Ax = b} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x = Bx + c} \qquad \begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n = (b_m - a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots)/a_{mn} \end{cases}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Jacobi

Jacobi

- **Algoritmo:**

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$, em geral, $x_i^{(0)} = 0$, $i = 1,2, \dots, n$.
2. Para k $= 0,1,2, \dots$ faça

   Para i $= 1,2, \dots, n$ faça

   (não necessariamente nessa ordem)

   A ordem do cálculo das componentes é indiferente

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$

   fim.

   Se $\left(\max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \;\; OU \;\; \max_{1\le i\le n} \frac{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|}{\left|x_i^{(k)}\right|} < \varepsilon \;\; OU \;\; k > M \right)$ Pare.

   (onde ε é uma precisão dada e M um natural que informa a quantidade de iterações a ser realizada)

   fim.

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

Jacobi

- **Exemplo:**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Escrito de forma iterativa $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)})/10 \end{cases}$$

Aproximação inicial: $x^{(0)} = (0; 0; 0)^T$.

Jacobi

- **Exemplo:**

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)})/10 \end{cases}$$

Aproximação inicial: $x^{(0)} = (0; 0; 0)^T$.

Iterações k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,6000	1,1667	0,8000
2	0,9733	0,6333	0,9467
3	1,1573	0,9956	0,8587
4	1,0300	0,8742	0,9668
...	...	...	...
24	**1,0000**	**1,0000**	**1,0000**

Gauss-Seidel

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Gauss-Seidel

- **Algoritmo:**

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$, em geral, $x_i^{(0)} = 0$, $i = 1,2, \dots, n$.
2. Para k $= 0,1,2, \dots$ faça

   Para i $= 1,2, \dots, n$ faça

   (necessariamente nessa ordem)

   $$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$

   fim.

   Se $\left(\max_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \ OU \ \max_{1 \le i \le n} \frac{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|}{\left|x_i^{(k)}\right|} < \varepsilon \ OU \ k > M\right)$ Pare.

   (onde ε é uma precisão dada e M um natural que informa a quantidade de iterações a ser realizada)

   fim.

Gauss-Seidel

- **Algoritmo:**

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$, em geral, $x_i^{(0)} = 0$, $i = 1,2,\dots,n$.
2. Para k $= 0,1,2,\dots$ faça

   Para i $= 1,2,\dots,n$ faça

   (necessariamente nessa ordem)

   Os valores já atualizados das variáveis são usados na mesma iteração pelas demais variáveis
   A ordem importa!

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii}$$

   fim.

   Se $\left(\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon\ OU\ \max_{1\le i\le n}\frac{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|}{\left|x_i^{(k)}\right|} < \varepsilon\ OU\ k > M\right)$ Pare.

   (onde ε é uma precisão dada e M um natural que informa a quantidade de iterações a ser realizada)

   fim.

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii}$$

- **Exemplo:**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Escrito de forma iterativa $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)})/10 \end{cases}$$

Aproximação inicial: $x^{(0)} = (0; 0; 0)^T$.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Gauss-Seidel

- **Exemplo:**

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)})/10 \end{cases}$$

Aproximação inicial: $x^{(0)} = (0; 0; 0)^T$.

Iterações k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,6000	0,3667	0,6267
2	1,3280	0,7116	0,8190
3	1,1516	0,8639	0,9152
4	1,0714	0,9360	0,9601
...	...	...	...
14	**1,0000**	**1,0000**	**1,0000**

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Jacobi
x
Gauss-Seidel

- **Gauss-Seidel** utiliza as componentes que foram calculadas na **mesma iteração**;
- **Jacobi** só utiliza na **iteração seguinte**;

- Gauss-Seidel é considerado como um método para "acelerar" a convergência do método de Jacobi:
  - No exemplo apresentado, para obter a mesma precisão foram necessárias **24** iterações por **Jacobi** e **14** com **Gauss-Seidel.**

- Se as condições de convergência (próxima aula) forem satisfeitas para o método Jacobi, então o método de Gauss-Seidel irá convergir com uma quantidade de iterações **igual** ou **inferior** àquela do método de Jacobi.

Jacobi x Gauss-Seidel

- É possível calcular a quantidade de operações de ponto flutuante necessárias nesses métodos a partir da relação:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) A + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) M + nD$$

onde t_i é a quantidade de coeficientes não nulos, n é a quantidade de equações do sistema, A – adição/subtração, M – multiplicação e D – divisão.

No exemplo: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - 1x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)})/10 \end{cases}$

$\left(\sum_{i=1}^{3} t_i\right)A + \left(\sum_{i=1}^{3} t_i\right)M + 3D = 6A + 6M + 3D$ = 15 operações

Jacobi: 24 iterações -> 24*15 = **360 operações**;

Gauss-Seidel: 14 iterações -> 14*15 = **210 operações**.

Exercícios propostos

1) Encontre a solução aproximada para o sistema abaixo pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-6}$ ou execute por 50 iterações, partindo do vetor nulo como solução inicial.

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ 4.5x_1 - 9x_2 + 1.5x_3 = 11 \\ 5.2x_1 - 4x_2 - 10x_3 = 12 \end{cases}$$

2) Resolva o mesmo sistema de equações agora utilizando o método de Gauss-Seidel. Utilize as mesmas condições inicial e de parada.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 3);**

- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 3)**.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br