Centro de Informática UFPE

Universidade Federal de Pernambuco

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática

Cálculo Numérico (IF215)

Profª. Maíra Santana

AULA 10: Sistemas de Equações Lineares – Fatorações LU e de Cholesky

Sistemas de Equações Lineares

Um sistema linear com m equações e n variáveis é usualmente escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

a_{ij}: coeficientes $\quad 1 \le i \le m \;,\; 1 \le j \le n$

x_j: variáveis $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

b_i: termos independentes $\quad i = 1, 2, \ldots, m$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Notação matricial:

A: matriz dos coeficientes;

x: vetor das variáveis;

b: vetor de termos independentes.

- Solução do sistema:

  Encontrar o vetor de valores x_j que satisfaçam todas as m equações simultaneamente.

Sistemas de Equações Lineares

- Métodos diretos:
  - Eliminação de Gauss;
  - **Fatoração LU;**
  - **Fatoração de Cholesky.**

- Métodos iterativos:
  - Método de Jacobi;
  - Método de Gauss-Seidel;
  - Método de sobre-relaxação sucessiva (SOR).

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração LU

Fatoração LU

- Vamos decompor uma matriz quadrada A em uma matriz **triangular inferior** (L) e uma matriz **triangular superior** (U);

- É particularmente importante se você tiver uma mesma matriz de coeficientes, mas com diferentes termos independentes:

$$Ax = b_1 \quad Ax = b_2 \quad Ax = b_3 \quad Ax = b_4$$

Nesses casos não é necessário repetir a decomposição LU já realizada.

- Realizar a fatoração $A = LU$ e resolver os sistemas triangulares $LUx = b_i$:

$$Ly_i = b_i \qquad Ux = y_i$$

Fatoração LU

$$A = LU$$

Triangular inferior

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ j > i \\ 1, & se\ i = j \\ -m_{ij}, & se\ j < i \end{cases}$$

Triangular superior

Resultado da Eliminação Gaussiana

- 1º passo: aplicar o processo de Eliminação Gaussiana. Ao final vamos obter a matriz U, que é a **triangular superior**.
- 2º passo: criarmos a matriz L, **triangular inferior**.
- 3º passo: resolver o sistema de equações $LUx = b_i$:

$$\begin{cases} Ly_i = b_i \\ Ux = y_i \end{cases}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração LU

- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$L_1 = L_1 + m_{10}L_0$$
$$L_2 = L_2 + m_{20}L_0$$
$$L_3 = L_3 + m_{30}L_0$$

$$\begin{array}{l} m_{10} = -6/2 \\ m_{20} = -2/2 \\ m_{30} = -4/2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$\begin{array}{l} m_{10} = -6/2 \\ m_{20} = -2/2 \\ m_{30} = -4/2 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 = L_1 + m_{10}L_0 \\ L_2 = L_2 + m_{20}L_0 \\ L_3 = L_3 + m_{30}L_0 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} m_{21} = -16/4 \\ m_{31} = -4/4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 = L_2 + m_{21}L_1 \\ L_3 = L_3 + m_{31}L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$m_{10} = -6/2 \quad m_{20} = -2/2 \quad m_{30} = -4/2$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 = L_1 + m_{10}L_0 \\ L_2 = L_2 + m_{20}L_0 \\ L_3 = L_3 + m_{30}L_0 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -16/4 \quad m_{31} = -4/4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 = L_2 + m_{21}L_1 \\ L_3 = L_3 + m_{31}L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = -7/1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + m_{32}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$m_{10} = -6/2 \quad m_{20} = -2/2 \quad m_{30} = -4/2$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 & 5 \\ \boxed{6} & 13 & 5 & 19 \\ \boxed{2} & 19 & 10 & 23 \\ \boxed{4} & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + m_{30}L_0]{L_1 = L_1 + m_{10}L_0,\; L_2 = L_2 + m_{20}L_0} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -16/4 \quad m_{31} = -4/4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{16} & 9 & 18 \\ 0 & \boxed{4} & 9 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + m_{21}L_1,\; L_3 = L_3 + m_{31}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = -7/1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + m_{32}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

U

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$m_{10} = -6/2$
$m_{20} = -2/2$
$m_{30} = -4/2$

$m_{21} = -16/4$
$m_{31} = -4/4$

$m_{32} = -7/1$

Agora precisamos definir $\mathbf{L}$
de maneira que $\mathbf{LU} = \mathbf{A}$

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$m_{10} = -6/2 \qquad m_{20} = -2/2 \qquad m_{30} = -4/2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -16/4 \qquad m_{31} = -4/4$$

Sabemos que **L** deve ser uma matriz triangular **inferior**

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ j > i \\ 1, & se\ i = j \\ -m_{ij}, & se\ j < i \end{cases}$$

$$m_{32} = -7/1$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{10} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{20} & -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{30} & -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$m_{10} = -6/2$$
$$m_{20} = -2/2$$
$$m_{30} = -4/2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -16/4$$
$$m_{31} = -4/4$$

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{10} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{20} & -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{30} & -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = -7/1$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração LU

- Exemplo [continuação]

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Agora poderíamos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} Ly_i = b_i \\ U{\color{red}x_j} = y_i \end{cases}$$

visto que b_i é o vetor de termos independentes do sistema.

Fatoração de Cholesky

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração de Cholesky

- Vamos decompor uma matriz quadrada A em uma matriz **triangular inferior** (L) e uma matriz **triangular superior** a partir da matriz **transposta** de L (L^T);

$$A = LL^T$$

L é também chamado de fator de Cholesky.

- Vantagem: menos operações a serem realizadas, se comparada com a fatoração LU.

- Para escrevermos $A = LL^T$ é preciso que:
  i. A seja **simétrica**;
  ii. A seja **positiva definida**.

Fatoração de Cholesky

- Matriz simétrica:

$$\text{Se } A^T = A$$

- Matriz positiva definida:

Uma matriz A $n \times n$ é definida positiva se $x^T A x > 0$ para todos os vetores não-nulos x ($\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$).

Fatoração de Cholesky

- Exemplo 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matriz <u>simétrica</u>? Se $A^T = A$

$$I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como $I^T = I$, é simétrica

  - Matriz <u>positiva definida</u>? se $x^T A x > 0$

$$x^T I x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 * x_1 + 0 * x_2 & 0 * x_1 + 1 * x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= {x_1}^2 + {x_2}^2$$ é sempre positivo, então é positivo definida

Fatoração de Cholesky

- Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix}$$

Verificar se A é simétrica e positivo definida:

i. Simétrica

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix}$$

ii. Positivo definida

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ Não é trivial!

Na prática, a fatoração de Cholesky pode ser utilizada para verificar se uma determinada matriz simétrica é positivo definida. Se o algoritmo falhar, a matriz original não é definida positiva.

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração de Cholesky

- Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 36 > 0$$

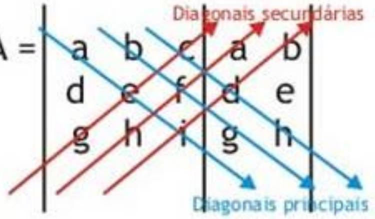
Logo, é positivo definida

i. Positivo definida

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Uma maneira simplificada de identificar essa condição é percebendo se $\det(A) > 0$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, então detA =



$$\det A = \underbrace{a.e.i + b.f.g + c.d.h}_{\text{Diagonais principais}} - \underbrace{g.e.c - h.f.a - i.d.b}_{\text{Diagonais secundárias}}$$

Fatoração de Cholesky

- 1º passo: verificar se A é simétrica e positivo definida.
- 2º passo: Calcular $\mathrm{A} = LL^T$.
- 3º passo: resolver o sistema de equações $LL^T x = b_i$:

$$\begin{cases} Ly_i = b_i \\ L^T x = y_i \end{cases}$$

Fatoração de Cholesky

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix}$$

1) Verificar se é simétrica e positivo definida: ok.
2) Calcular $A = LL^T$

$$A = LL^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{00} & l_{10} & l_{20} \\ 0 & l_{11} & l_{21} \\ 0 & 0 & l_{22} \end{bmatrix}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração de Cholesky

- Exemplo [continuação]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{00} & l_{10} & l_{20} \\ 0 & l_{11} & l_{21} \\ 0 & 0 & l_{22} \end{bmatrix}$$

Coluna 0 de A:

$$a_{00} = l_{00} * l_{00}$$
$$a_{10} = l_{10} * l_{00}$$
$$a_{20} = l_{20} * l_{00}$$

Coluna 1 de A:

$$a_{01} = l_{00} * l_{10}$$
$$a_{11} = l_{10} * l_{10} + l_{11} * l_{11}$$
$$a_{21} = l_{20} * l_{10} + l_{21} * l_{11}$$

Coluna 2 de A:

$$a_{02} = l_{00} * l_{20}$$
$$a_{12} = l_{10} * l_{20} + l_{11} * l_{21} + l_{12} * l_{22}$$
$$a_{22} = l_{20} * l_{20} + l_{21} * l_{21} + l_{22} * l_{22}$$

Profa. Maíra Santana
mas6@cin.ufpe.br

Fatoração de Cholesky

- Exemplo [continuação]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{00} & 0 & 0 \\ l_{10} & l_{11} & 0 \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{00} & l_{10} & l_{20} \\ 0 & l_{11} & l_{21} \\ 0 & 0 & l_{22} \end{bmatrix}$$

Coluna 0 de L:

$$l_{00} = \sqrt{a_{00}}$$
$$l_{10} = a_{10}/l_{00}$$
$$l_{20} = a_{20}/l_{00}$$

Coluna 1 de L:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11} - {l_{10}}^2}$$
$$l_{21} = (a_{21} - l_{20} * l_{10})/l_{11}$$

Coluna 2 de L:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{20}}^2 - {l_{21}}^2}$$

Regra geral:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=0}^{i-1} {l_{ik}}^2}$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{ik} * l_{jk}\right)/l_{jj}$$

Fatoração de Cholesky

- Exemplo [continuação]

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 8 & 10\\ 1 & 10 & 26\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l_{00} & 0 & 0\\ l_{10} & l_{11} & 0\\ l_{20} & l_{21} & l_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{00} & l_{10} & l_{20}\\ 0 & l_{11} & l_{21}\\ 0 & 0 & l_{22}\end{bmatrix}$$

Coluna 0 de L:

$$l_{00} = \sqrt{a_{00}} = 1$$
$$l_{10} = a_{10}/l_{00} = 2$$
$$l_{20} = a_{20}/l_{00} = 1$$

Coluna 1 de L:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11} - {l_{10}}^2} = 2$$
$$l_{21} = (a_{21} - l_{20} * l_{10})/l_{11} = 4$$

Coluna 2 de L:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{20}}^2 - {l_{21}}^2} = 3$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L^T} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$$

Fatoração de Cholesky

- Exemplo [continuação]

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad L^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Agora poderíamos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} Ly_i = b_i \\ L^T x = y_i \end{cases}$$

visto que b_i é o vetor de termos independentes do sistema.

Exercícios propostos

1) Para a matriz A a seguir, determine uma matriz triangular superior U e uma matriz triangular inferior L de modo que $A = LU$. Ou seja, aplique a fatoração LU.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -6 & 7 \\ 12 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

2) Resolva o sistema de equações a seguir por fatoração LU e, em seguida, por fatoração de Cholesky.

$$\begin{cases} 4x_0 + 8x_1 + 4x_2 = 100 \\ 8x_0 + 20x_1 + 20x_2 = 100 \\ 4x_0 + 20x_1 + 65x_2 = 100 \end{cases}$$

Referências

- Métodos Numéricos. José Dias dos Santos e Zanoni Carvalho da Silva. **(capítulo 3);**
- Cálculo Numérico – aspectos teóricos e computacionais. Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **(capítulo 3)**.