



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE

NUEVAS DIRECCIONES EN OPTIMAL STOPPING: METODOLOGÍAS DE TRADING
PROPHETS PARA PROBLEMAS DE COMPRA Y VENTA.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE DATOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL EN MATEMÁTICAS

JORGE HEWSTONE CORREA

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ CORREA

PROFESOR CO-GUÍA:
JOAQUIN FONTBONA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOSÉ CORREA
JOAQUIN FONTBONA
VASILIS LIVANOS

SANTIAGO DE CHILE
2024

Resumen

Este trabajo se centra en la implementación de algoritmos *online* para resolver problemas de *trading* en diversos contextos. Los problemas de *Optimal Stopping* y las *Prophet Inequalities* han captado la atención en diversos campos debido a su capacidad para modelar la toma de decisiones en situaciones inciertas, como las estrategias de compra y venta en mercados financieros [10, 23]. Un enfoque reciente de Correa et al. [9] aborda la *single item prophet inequality*, comparando la eficacia de un algoritmo de compra y venta repetido, con el marco de referencia de un *profeta*, bajo la premisa de variables aleatorias independientes.

En este trabajo, se presenta un **avance teórico** al demostrar que la ganancia esperada del algoritmo para precios independientes con igual mediana es al menos $\frac{1}{2}$ de la ganancia del profeta, mejorando así los resultados previos que pedían como condición, sobre los precios, independencia idénticamente distribuida.

Además, se utilizaron métodos de Montecarlo para estimar las ganancias probables de estos algoritmos. En concreto, para diferentes valores $0 < \lambda < 1$ se estimó la proporción de casos en los cuales la ganancia del algoritmo es mayor o igual a λ veces la ganancia del profeta. Este enfoque permitió **evaluar el desempeño más probable del algoritmo** donde se encontró que en la gran mayoría de los casos el algoritmo obtiene una ganancia esperada superior a 0,7 veces la ganancia esperada del profeta.

En la parte final de nuestro trabajo, se desarrollaron metodologías para **implementar el algoritmo en escenarios reales**, específicamente cumpliendo las condiciones requeridas en las garantías teóricas. Se confirmaron los resultados obtenidos en las simulaciones cuando era posible asumir, de forma aproximada, condiciones de independencia; por otro lado, se contrastaron en los casos donde estas condiciones no se cumplían. En estos últimos, se constató que, ante un comportamiento fundamentalmente estocástico de los precios y una información limitada, los algoritmos online no son suficientes para generar ganancias.

Al conectar el marco teórico actual con aplicaciones industriales relevantes, este trabajo contribuye al desarrollo de modelos y algoritmos más adaptativos y robustos frente a la incertidumbre del mundo real.

A mi familia.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que me han apoyado en la realización de esta tesis.

A mi profesor guía, José Correa, por abrirme las puertas a este proyecto por su invaluable orientación y constante apoyo. Su experiencia y dedicación han sido fundamentales para este trabajo.

A mi profesor subguía, Joaquín Fontbona, por sus ideas, sus consejos acertados y por guiarme en momentos de incertidumbre.

A Vasilis Livanos, por su inagotable motivación, ayuda y generosidad al compartir su conocimiento. Su asistencia ha sido crucial para mi progreso y sin duda su visión matemática está plasmada en este trabajo.

A todos ustedes, gracias por su contribución a mi desarrollo académico y personal. Esta tesis no hubiera sido posible sin su apoyo.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
2. Algoritmos Online	3
2.0.1. Análisis competitivo	4
2.1. Problemas de Optimal Stopping	4
2.1.1. Multi-Armed Bandits	6
3. Trading prophets	7
3.1. Prophets inequalities	7
3.2. Modelo de Trading prophets	8
3.2.1. Algoritmo de umbral simple en trading prophets	8
3.2.2. Definiciones iniciales	9
3.2.3. Resultados previos para precios I.I.D.	9
3.2.4. Resultados previos para precios independientes no I.I.D.	10
3.3. Nuevos resultados teóricos para precios independientes	13
3.3.1. Cota de $\frac{1}{2}$ para distribuciones independientes con igual mediana. . . .	13
3.3.2. Algoritmo de Threshold variable	19
4. Extensiones del modelo de Trading Prophets	23
4.1. Bandido de k -brazos	23
4.1.1. Resultados previos para k-armed bandit trading prophet problem . .	24

4.1.2.	Nuevos algoritmos para trading prophet de k -brazos	25
4.2.	Precios afiliados	30
4.2.1.	Resultados para algoritmo de precios afiliados	30
4.3.	Conjeturas no probadas	32
4.4.	Extensiones para Variables Dependientes	38
4.4.1.	Modelo de precios afiliados	38
5.	Simulaciones de trading prophets	41
5.1.	Simulación de precios	41
5.1.1.	Instancia de precio	41
5.1.2.	Secuencia de precios	42
5.2.	Simulación de algoritmos sobre secuencias de precios	45
5.2.1.	Evaluación de algoritmos	45
5.2.2.	Estimación de la medida de $\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG_T)$	47
6.	Metodología para implementación de algoritmo del umbral simple en contextos de trading.	53
6.1.	Modelo de implementación general	53
6.1.1.	Modelo para un solo artículo	53
6.1.2.	Modelo para una variedad de artículos	56
6.2.	Mercados a estudiar	56
6.2.1.	Definición de las métricas de desempeño (α)	57
6.3.	Implementación para ventas en subastas de autos	58
6.3.1.	Resultados para Ford F-150	59
6.3.2.	Resultados para Chevrolet Impala	59
6.4.	Compra y venta de divisas	59
6.4.1.	Implementación del algoritmo	60
6.4.2.	Resultados	60
6.4.3.	Análisis de los resultados	61

6.4.4. Implementación del algoritmo con umbral variable	61
7. Discusión	63
7.1. Interpretación de Resultados	63
7.1.1. Resultados teóricos	63
7.1.2. Resultados prácticos	64
8. Conclusiones	66
8.1. Implicaciones y Relevancia	67
8.2. Limitaciones y Consideraciones	67
8.3. Recomendaciones para Trabajos Futuros	67
8.4. Reflexión Final	68
Bibliografía	71
Apéndice A. Anexo	72

Índice de Tablas

6.1. Resultados para Ford F-150	59
6.2. Distribución de α en las muestras para Ford F-150	59
6.3. Resultados para Chevrolet Impala	59
6.4. Distribución de α en las muestras para Chevrolet Impala	59
6.5. Resultados del algoritmo para distintos periodos en el mercado de divisas . .	60
6.6. Resultados del algoritmo con umbral variable para distintos periodos en el mercado de divisas	62

Índice de Ilustraciones

1.1. Crecimiento del mercado estadounidense del trading algorítmico [1].	1
3.1. Ejemplo de las decisiones del algoritmo óptimo. Figura encontrada en [9]. . .	8
4.1. Siendo los valores x negros y y los rojos	35
4.2. Modelo de n puntos equiprobables para X (en rojo) y para Y (en negro). . .	37
5.1. Distribuciones de Y variable discreta y su contraparte X continua.	42
5.2. Utilizamos los mismos parámetros de la figura 5.1 para $n = 60$ precios. En rojo los límites inferior = 100 y superior = 120.	43
5.3. Utilizamos los mismos parámetros iniciales y mismo valor inicial de la figura 5.2 para $n = 60$ precios. En rojo los límites inferior = 100 y superior = 120. .	43
5.4. Comparación de secuencias de precios con tendencias negativas y positivas. Las secuencias iid e independientes son las mismas usadas en los ejemplos anteriores.	44
5.5. Comportamiento de α_{ALG_T} para secuencias de precios <i>i.i.d.</i> e independientes.	46
5.6. Comportamiento de α_{ALG_T} para secuencias de precios con base <i>i.i.d.</i> con tendencias lineales determinadas.	47
5.7. Comportamiento de α_{ALG_T} para secuencias de precios con base <i>i.i.d.</i> con tendencias lineales aleatorias.	47
5.8. Comparación entre las distribuciones acumuladas para secuencias de 3 y 10 precios. Se puede verificar que la distribución de α en \mathcal{H} es prácticamente la misma independiente de el largo de la secuencia de precios en el casos i.d.d. .	50
5.9. Comparación entre las distribuciones acumuladas para secuencias de 5 y 10 precios. En secuencias de más precios la proporción de aquellas menores que 0,7 aumentó considerablemente.	52

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Con el rápido avance de la ciencia de datos y las tecnologías asociadas, la capacidad de recolectar datos, descubrir patrones y realizar predicciones ha mejorado significativamente. Actualmente, sectores como las finanzas, la agricultura y el comercio dependen cada vez más de modelos predictivos para optimizar decisiones en entornos **inciertos**. Estamos viviendo una revolución centrada en la ciencia de datos y la capacidad de predecir el futuro, lo que está transformando sectores clave como las finanzas, la agricultura y el comercio [16]. En este contexto, el reporte de *Grand View Research*, una empresa de investigación y consultoría de mercados con sede en India y EE.UU., destaca que el mercado global del trading algorítmico, que automatiza las decisiones de compra y venta basadas en reglas matemáticas y modelos de datos, fue valorado en 15.55 mil millones de dólares en 2021, con una proyección de crecimiento a una tasa compuesta anual (CAGR) del 12.2 % entre 2022 y 2030. Solo en Estados Unidos, se espera que este crecimiento sea del 11.3 % durante el mismo período (véase Figura 1.1) [1].

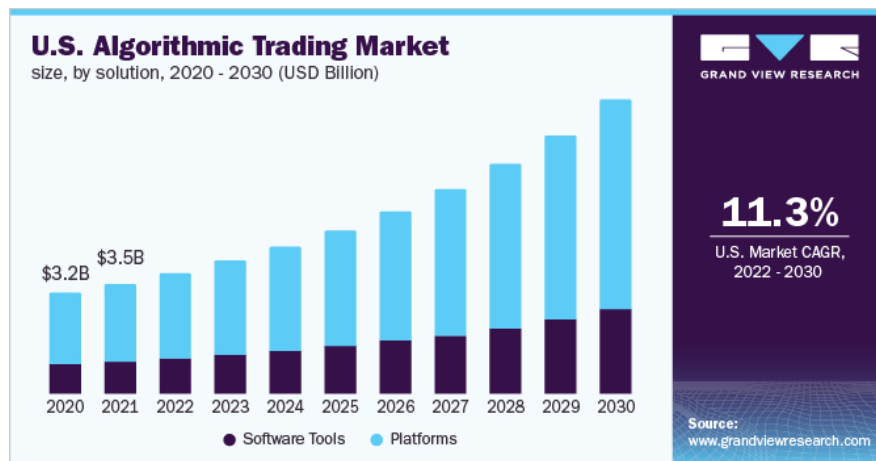


Figura 1.1: Crecimiento del mercado estadounidense del trading algorítmico [1].

Estos avances han permitido el desarrollo de enfoques innovadores que optimizan la toma de decisiones en mercados dinámicos y complejos. En un entorno lleno de incertidumbre y cambios constantes, se han implementado soluciones híbridas que combinan inteligencia artificial con intervención humana, lo que mejora la precisión predictiva y la eficiencia en las estrategias de trading [22].

A pesar de los avances significativos en el desarrollo de algoritmos para trading, existe una brecha notable entre los resultados teóricos y su aplicación práctica en entornos reales de mercado. Muchos enfoques actuales se centran en modelos matemáticos y técnicas de aprendizaje automático que, si bien son prometedores en entornos controlados o simulaciones, enfrentan desafíos al implementarse en escenarios de mercado reales debido a factores como la volatilidad, el ruido en los datos y las limitaciones computacionales [14, 29]. Esta disparidad resalta la necesidad de metodologías que conecten de manera efectiva la teoría con la práctica, permitiendo que los algoritmos sean no solo teóricamente sólidos sino también aplicables y eficientes en condiciones de mercado reales.

En este contexto, la presente tesis busca contribuir en esta dirección mediante tres enfoques principales. En primer lugar, se obtuvo una mejora en las garantías teóricas de algoritmos de trading para condiciones de precios independientes. Esto implica que, bajo ciertas condiciones, los algoritmos pueden asegurar un rendimiento mínimo, incluso en el peor de los casos. En segundo lugar, no solo se mejoraron las garantías teóricas que aluden al peor escenario posible, sino que también se utilizaron métodos de Monte Carlo para estimar las ganancias probables de estos algoritmos. Es decir, se estimó la probabilidad de que se presente una secuencia de precios tal que el algoritmo genere ciertas ganancias esperadas. Finalmente, se desarrollaron metodologías para la implementación del algoritmo en escenarios reales, específicamente en el cumplimiento de las condiciones que se requieren en las demostraciones de las garantías teóricas. Este enfoque integral busca cerrar la brecha entre la teoría y la práctica, proporcionando soluciones que sean tanto teóricamente sólidas como prácticamente aplicables en el trading algorítmico.

Capítulo 2

Algoritmos Online

En numerosas ocasiones se asume que un algoritmo, al generar un resultado, posee acceso completo a la totalidad de los datos de entrada. Sin embargo, en aplicaciones del mundo real, esta presunción a menudo resulta irrealista [4]. En la práctica, muchos problemas presentan un comportamiento *online*, lo que implica que deben tomar decisiones sin contar con toda la información disponible. Esto conlleva a que las decisiones adoptadas puedan no ser óptimas en retrospectiva, ya que, de haber contado con información adicional, se habrían podido tomar decisiones más acertadas. Debido a que ciertos datos de entrada cruciales se recibirán en el futuro y no están accesibles en el presente, la información disponible para estos problemas es solo parcialmente accesible. Un algoritmo online debe, por lo tanto, generar resultados sin disponer de la totalidad de los datos de entrada.

Más formalmente, la entrada de un algoritmo online puede ser definida como una secuencia de instancias $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Usualmente, el algoritmo tiene que tomar decisiones en cada instancia x_i sin información sobre las instancias x_j con $i < j$ con el objetivo de minimizar un **costo** asociado a estas decisiones.

Ejemplo: K-servers

Un ejemplo muy conocido de problema de algoritmos online es el *problema de los k servidores*. Formalmente, se tiene un espacio métrico M que contiene un conjunto de puntos y una función de distancia d . Tenemos k servidores ubicados en puntos dentro de M . Las solicitudes llegan en una secuencia $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ donde cada x_i es un punto en M . En cada paso, uno de los servidores se mueve al punto solicitado, y el objetivo es minimizar la suma total de las distancias recorridas por los servidores:

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, s_i)$$

donde s_i es el servidor que atiende la solicitud x_i . [24].

Este es claramente es un problema de algoritmos online pues no se sabe que solicitudes vendrán después de la actual, lo que puede llevar a decisiones subóptimas.

Por ejemplo, teniéndose en el plano cartesiano dos servidores s_1 y s_2 en las posiciones $A = (0, 0)$ y $B = (10, 0)$ respectivamente, si la primera solicitud es en $x_1 = (6, 0)$ un algoritmo online podría mover al servidor s_2 en B al punto x_1 pues está más cerca. Si la siguiente solicitud es en $x_2 = (16, 0)$ entonces el servidor s_2 que ahora se encuentra en $(6, 0)$ deberá moverse hasta $x_2 = (16, 0)$ pues es el servidor más cercano. La distancia total sería de $4 + 10 = 14$. En este caso claramente las decisiones son subóptimas pues de haber movido al servidor s_1 a x_1 y el servidor s_2 a x_2 se habría recorrido en total una distancia de $6 + 6 = 12$.

2.0.1. Análisis competitivo

Como vimos en el ejemplo anterior para evaluar la *optimalidad* de un algoritmo online se hizo una comparación frente a las decisiones que tendría un algoritmo óptimo offline que en teoría tendría conocimiento absoluto de las solicitudes.

Este método de comparación es llamado **Análisis competitivo** y fue utilizado en primera instancia por Sleator y Tarjan [30].

De manera más formal se dice que un algoritmo A con costo $A(x)$ es c -competitivo si existe una constante a tal que para toda instancia x se tiene:

$$A(x) \leq c \cdot C_{\text{Opt}}(x) + a$$

Donde $C_{\text{Opt}}(x)$ es el costo óptimo para la instancia x .

Notese que cuando A es un algoritmo aleatorio entonces la definición viene dada por:

$$E(A(x)) \leq c \cdot C_{\text{Opt}}(x) + a$$

Es importante notar que aquí la esperanza se toma sobre la decisión aleatoria de A sobre un x determinado.

2.1. Problemas de Optimal Stopping

Una familia importante de problemas de algoritmos online son los problemas de parada. Los problemas de *Optimal stopping* o parada óptima son aquellos que abordan el desafío de determinar el *momento ideal* para tomar decisiones, usualmente frente a secuencias de valores aleatorios. [13]

Más formalmente se definen por dos objetos

- Una secuencia de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_T Si la secuencia es finita, es decir $T < \infty$ se habla de problemas de horizonte finito.

- Y una secuencia de funciones de recompensa: $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \dots, y_T(x_1, \dots, x_T)$

Siendo x_i el valor observado de la variable X_i se tiene que para cada i el valor $y_i(x_1, \dots, x_i)$ es la ganancia por elegir parar en ese momento.

El problema consiste en elegir un i tal que la ganancia se maximice al parar. Nótese que en el caso de que no sea un problema de horizonte finito, es decir, $T = \infty$, no parar en ningún momento puede maximizar la ganancia.

Ejemplo: El problema de la secretaria Supongamos que se debe seleccionar a una persona para un cargo entre n candidatos, donde se entrevista a un candidato por vez y la decisión de avanzar al siguiente debe ser tomada inmediatamente, descartando al candidato actual.

Formalmente, el problema consiste en revisar secuencialmente n instancias y decidir en qué punto *detenerse* en un candidato X_i , sin saber si este es el mejor. Si se selecciona un candidato al azar, la probabilidad de elegir al mejor es $\frac{1}{n}$.

No obstante, esta probabilidad puede mejorarse utilizando el siguiente algoritmo: dado un total de n candidatos, se fija un número k . Tras entrevistar a los primeros k candidatos, se elige detenerse en el primer candidato posterior que sea superior a todos los anteriores. En general, considerando D la posición óptima, la probabilidad de éxito al aplicar esta estrategia se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{Ganar}) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\text{Ganar} \mid D = i) \cdot \mathbb{P}(D = i) \\
 &= \sum_{i=k+1}^n \mathbb{P}(\text{Ganar} \mid D = i) \cdot \mathbb{P}(D = i) + \underbrace{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\text{Ganar} \mid D = i) \cdot \mathbb{P}(D = i)}_0 \quad (2.1) \\
 &= \sum_{i=k+1}^n \mathbb{P}(\text{Ganar} \mid D = i) \cdot \mathbb{P}(D = i)
 \end{aligned}$$

Claramente, la probabilidad de que la posición óptima sea i es $\mathbb{P}(D = i) = \frac{1}{n}$, luego sabiendo que $D = i$, la probabilidad de ganar se reduce a detenerse en i , esto sucede si y solo si desde la instancia $k + 1$ hasta la instancia $i - 1$ ninguna es mejor que las primeras k , en otras palabras si el óptimo entre los $i - 1$ primeros candidatos se encuentra entre los primeros k . Luego

$$\mathbb{P}(\text{Ganar} \mid D = i) = \frac{k}{i - 1}$$

Usando esto en (2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Ganar}) &= \sum_{i=k+1}^n \mathbb{P}(\text{Ganar} \mid D = i) \cdot \mathbb{P}(D = i) \\
&= \sum_{i=k+1}^n \frac{k}{i-1} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \\
&= \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \\
&\approx \frac{k}{n} \int_k^n \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{k}{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde la penúltima línea representa la aproximación directa de la suma por la integral, utilizando la fórmula de Euler-Maclaurin, suponiendo que n es suficientemente grande. Cuyo máximo se alcanza en $k = \lfloor \frac{n}{e} \rfloor$, es decir tomando k aproximadamente en el 37 % del total de instancias.

2.1.1. Multi-Armed Bandits

El problema de *Multi-Armed Bandits* (MAB) es una herramienta conceptual fundamental para abordar situaciones en las que un agente debe tomar decisiones bajo incertidumbre a lo largo del tiempo [31]. Introducido inicialmente por Robbins en 1952 [27], el modelo plantea un dilema clásico: ¿cómo balancear la exploración de nuevas opciones con la explotación de aquellas que ya han demostrado ser rentables?

En términos generales, el problema MAB puede formularse como una serie de K posibles acciones o *brazos*, cada uno asociado a una distribución de probabilidad desconocida que genera recompensas. El agente debe seleccionar en cada iteración un brazo a_t y recibe una recompensa r_t , con el objetivo de maximizar la suma total de recompensas a lo largo de n iteraciones. En este contexto, la clave está en encontrar el equilibrio entre seguir experimentando con diferentes brazos para descubrir sus recompensas esperadas, y centrarse en los brazos que ya parecen más prometedores [19].

Un concepto importante en este tipo de problemas es el *regret*, que mide la diferencia entre las recompensas que el agente podría haber obtenido si siempre hubiera elegido el mejor brazo y las que realmente recibió [19]. Minimizar el *regret* es crucial en la optimización del desempeño de los algoritmos de MAB.

Capítulo 3

Trading prophets

3.1. Prophets inequalities

El problema más simple dentro del marco de prophet inequalities trata sobre seleccionar el mayor valor de una secuencia de variables aleatorias, donde el valor elegido se asigna al proceso. Este problema asegura que, utilizando un algoritmo online, es posible obtener al menos una fracción del valor máximo que elegiría un profeta con conocimiento total de la secuencia [18].

De manera más formal, consideremos una secuencia de variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_n , cada una con distribuciones F_1, \dots, F_n , respectivamente. El problema puede resolverse utilizando una regla de parada simple, donde se fija un umbral T y se acepta el primer valor que lo supere. Si r es el índice del primer valor que sobrepasa dicho umbral, entonces la recompensa del jugador es X_r , mientras que la del profeta es $\bar{X} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Para este problema, tomando T como la mediana de \bar{X} se obtiene que $\mathbb{E}(X_r) \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}(\bar{X})$ pues si la probabilidad de que algún precio supere el umbral es p , entonces para un precio X_i la probabilidad de que los precios anteriores no hayan superado el umbral es al menos $1 - p$. Luego se tiene que

$$\mathbb{P}(X_r > x) \geq \begin{cases} p & x \leq T \\ (1 - p)\mathbb{P}(\bar{X} > x) & x > T \end{cases}$$

Esto nos lleva a que $\mathbb{E}(X_r) \geq pT + (1 - p)(\mathbb{E}(\bar{X}) - T)$, finalmente basta que $p = \frac{1}{2}$ para concluir.[8, 18].

En lo siguiente y como tema principal de esta tesis estudiaremos el problema de trading prophets que introduce una variante más compleja: el agente no solo observa una secuencia de precios para elegir un solo valor, sino que debe decidir comprar un bien para luego venderlo a un precio mayor. El objetivo es maximizar la ganancia neta, que se define como la diferencia entre la suma de los precios de venta y la suma de los precios de compra. [9].

3.2. Modelo de Trading prophets

En esta tesis partiremos planteando el mismo modelo que Correa et al. (2023) [9], en el cual se considera que un agente observa una secuencia de n precios provenientes de distribuciones independientes F_1, \dots, F_n . El agente puede, en cada período, decidir si compra o vende un bien indivisible bajo la condición de que puede tener a lo más una unidad de este. Si el agente no tiene el bien, puede comprarlo restando el precio al total, y si ya lo tiene, puede venderlo sumando el precio al total. El objetivo del modelo es diseñar una regla de decisión que maximice la ganancia esperada del agente, comparada con un profeta que conoce toda la secuencia de precios.

El *profeta* puede maximizar la ganancia eligiendo los puntos óptimos de compra y venta, y su ganancia esperada es denotada por $\mathbb{E}(\text{OPT})$. En contraposición, el algoritmo online del agente busca asegurar que su ganancia esperada $\mathbb{E}(\text{ALG})$ sea una fracción α de la ganancia esperada del profeta, es decir, $\mathbb{E}(\text{ALG}) \geq \alpha \cdot \mathbb{E}(\text{OPT})$.



Figura 3.1: Ejemplo de las decisiones del algoritmo óptimo. Figura encontrada en [9].

Notar que el modelo asume que los precios son variables independientes, aunque esta condición usualmente no se da en la realidad. En esta tesis intentaremos desarrollar una metodología que permita aplicar el algoritmo incluso bajo ciertas condiciones de dependencia entre precios, analizando las posibles consecuencias de que esta condición no se cumpla en mayor o menor medida.

3.2.1. Algoritmo de umbral simple en trading prophets

El algoritmo de umbral simple consiste en definir como política de compra y venta un valor de referencia al cuál denotaremos T . En esencia queremos comprar cuando el precio i sea bajo ($X_i < T$) y vender cuando sea alto ($X_i \geq T$)

El algoritmo de threshold simple ha sido fundamental en el análisis de problemas de *Optimal Stopping*, particularmente en el contexto de *Trading Prophets* y las llamadas *prophet inequalities*. En escenarios con precios independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.), se ha demostrado que este algoritmo garantiza al menos el 50% de la ganancia esperada que obtendría un profeta. Sin embargo, en situaciones donde los precios no son i.i.d., las cotas obtenidas hasta hace poco han sido más restrictivas, lo que plantea mayores desafíos para la toma de decisiones óptima bajo dependencia entre variables aleatorias.

Hasta donde tenemos conocimiento, los resultados más recientes sobre *Trading Prophets* y *prophet inequalities* se encuentran en los trabajos de Correa et al. [10, 9], que sentaron las

bases teóricas actuales sobre las limitaciones del algoritmo de threshold simple en distintos escenarios. Esta sección revisa estos desarrollos, proporcionando el marco teórico sobre el cual se apoyan los avances presentados en esta tesis.

3.2.2. Definiciones iniciales

Observación Para tratar de manera uniforme los casos extremos, se definen los valores $X_{\sigma(0)} := \infty$ y $X_{\sigma(n+1)} := -\infty$. El algoritmo óptimo (OPT) realiza una compra en el periodo $1 \leq i < n$ si y solo si el precio $X_{\sigma(i)}$ es un mínimo local, es decir, $X_{\sigma(i)} < X_{\sigma(i-1)}$ y $X_{\sigma(i)} \leq X_{\sigma(i+1)}$. De manera similar, OPT vende en el periodo $1 < i \leq n$ si y solo si el precio $X_{\sigma(i)}$ es un máximo local, lo que ocurre cuando $X_{\sigma(i)} \geq X_{\sigma(i-1)}$ y $X_{\sigma(i)} > X_{\sigma(i+1)}$.

En las siguientes demostraciones, como afirman Correa et al. [9], asumimos que todas las distribuciones son absolutamente continuas. Para cada periodo i , existe un valor $T_i \in \mathbb{R}$ (mediana) tal que $\mathbb{P}(X_i < T_i) = \mathbb{P}(X_i \geq T_i) = 1/2$. Esto se tiene sin pérdida de generalidad, ya que podemos añadir una pequeña perturbación independiente $\varepsilon_i \sim \text{Uniform}[-\varepsilon, \varepsilon]$ a cada precio, con $\varepsilon > 0$, cuyo efecto acumulado es insignificante frente a $\mathbb{E}(\text{OPT})$, es decir, $n \cdot \varepsilon \ll \mathbb{E}(\text{OPT})$.

Definición 3.1 (Algoritmo de Umbral Simple) Un *algoritmo de umbral simple* es un algoritmo que, dado un umbral $T \in \mathbb{R}$, toma decisiones de compra o venta en cada periodo según la siguiente regla: para cada periodo i , con $1 \leq i < n$, el algoritmo decide vender si el precio $X_i \geq T$, y comprar si $X_i < T$. En el periodo final $i = n$, el algoritmo vende si posee el bien, independientemente del precio, y no realiza ninguna acción si no lo posee. El valor esperado del rendimiento de este algoritmo se denota por $\mathbb{E}(\text{ALG}_T)$.

3.2.3. Resultados previos para precios I.I.D.

En el caso en que los precios son *i.i.d.* no se dependerá de una permutación σ sobre la llegada de los precios, pues en términos del valor esperado es irrelevante el orden de estos.

Teorema 3.1 Si los precios son *i.i.d.* y $T = \mathbb{E}(X_1)$ es el valor esperado de la distribución, entonces ALG_T es un algoritmo óptimo, es decir, $\mathbb{E}(\text{ALG}_T) \geq \mathbb{E}(\text{ALG})$ para cualquier algoritmo ALG .

Demostración. La demostración puede ser encontrada en la sección 3 de [9].

La idea general de la demostración consiste en asumir que se tiene el mejor algoritmo online posible, luego descomponer el problema para cualquier periodo $i \in \{1, \dots, n\}$ y denotar por $V_1(i)$ (si tienes el bien) y $V_0(i)$ (si no lo tienes) la ganancia esperada óptima total que puede generarse comenzando desde el periodo i . El análisis se realiza considerando dos casos:

Caso 1: El algoritmo tiene el bien al inicio del periodo $i - 1$.

Caso 2: El algoritmo no tiene el bien al inicio del periodo $i - 1$.

En ambos casos, la mejor decisión es establecer el umbral $V_1(i) - V_0(i)$ en el periodo $i - 1$. Finalmente, se demuestra que, por definición de $V_1(i)$ y $V_0(i)$, se cumple que $V_1(i) - V_0(i) = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$. Esto implica que el umbral óptimo es el valor esperado de la distribución.

Teorema 3.2 *Si los precios son i.i.d. y T es la **mediana** de la distribución, entonces ALG_T es una $1/2$ - aproximación, i.e., $\mathbb{E}(ALG_T) \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}(OPT)$*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es directa de los resultados de los siguiente lemas todos demostrados en [9].

Lema 3.3 *Si los precios son i.i.d., entonces para todo $T \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}(OPT) = \frac{n-1}{2} \cdot \mathbb{E}(|X_1 - X_2|) \leq (n-1) \cdot \mathbb{E}(|X_1 - T|)$$

Lema 3.4 *Si los precios son i.i.d., entonces*

$$\mathbb{E}(ALG_T) = \frac{n-1}{2} \cdot \mathbb{E}(|X_1 - T|)$$

□

Más aún se sabe que esta desigualdad es el mejor resultado posible pues:

Proposición 3.5 *Para todo $n \geq 2$ y $\varepsilon > 0$, existe una instancia de n precios tal que para cualquier algoritmo online ALG se tiene que*

$$\mathbb{E}(ALG) \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \cdot \mathbb{E}(OPT)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración completa puede ser encontrada en la sección 3 de [9]. La idea general es fijar un $\varepsilon < 1$ y definir la instancia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{con probabilidad } 1 - \varepsilon \\ 0 & \text{con probabilidad } \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Para luego acotar $\mathbb{E}(ALG) \leq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ y calcular $\mathbb{E}(OPT) = \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. □

3.2.4. Resultados previos para precios independientes no I.I.D.

En el caso en que los precios X_1, \dots, X_n son independientes, pero tienen distribuciones F_1, \dots, F_n no necesariamente igualmente distribuidas, consideraremos que el orden de aparición de estos precios es aleatorio. En este caso tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.6 *Si los precios son presentados en orden $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$, donde $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ es una permutación aleatoria uniforme, entonces existe un umbral T tal que*

$$\mathbb{E}(ALG_T) \geq \frac{1}{16} \cdot \mathbb{E}(OPT).$$

Además, el umbral T se puede calcular en tiempo polinomial.

Lema 3.7 *Si los precios son presentados en un orden aleatorio uniforme σ , entonces*

$$\mathbb{E}(OPT) = \frac{n-1}{2} \cdot \mathbb{E}(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|).$$

Lema 3.8 *Si los precios son presentados en un orden aleatorio uniforme σ , entonces para cualquier umbral $T \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$\mathbb{E}(ALG_T) = \frac{n-1}{2} \cdot \mathbb{E} \left(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbb{1}_{T \in [\min(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \max(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})]} \right).$$

Considerando los lemas anteriores, cuyas demostraciones se encuentran en [9], entonces para probar el teorema 3.6 bastaría probar que existe un T tal que:

$$\mathbb{E} \left(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbb{1}_{T \in [\min(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \max(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})]} \right) \geq \frac{1}{16} \cdot \mathbb{E}(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|).$$

Para probar este resultado necesitaremos considerar el siguiente lema:

Lema 3.9 *Sean X_1, X_2 dos precios independientes con distribuciones F_1, F_2 . Entonces, existe un umbral $T \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{T \leq \min(X_1, X_2) \cdot \max(X_1, X_2)}) \geq \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E}(|X_1 - X_2|).$$

DEMOSTRACIÓN. Los detalles de la demostración se encuentran en [9], la idea fundamental es elegir T igual a alguna de las dos medianas (M_1 y M_2) de las distribuciones de X_1 y X_2 pues se puede demostrar que:

$$2 \left(\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{M_1 \in \mathcal{I}(X_1, X_2)}) + \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{M_2 \in \mathcal{I}(X_1, X_2)}) \right) \geq \mathbb{E}(|X_1 - X_2|).$$

Donde $\mathcal{I}(X_1, X_2) = [\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2)]$.

Para demostrar esto último se analizan diferentes casos sobre las distribuciones de X_1 y X_2 . \square

Ahora podemos demostrar el teorema 3.6

DEMOSTRACIÓN. (*Teorema 3.6*) En el trabajo de [9] hacen ver que el lema 3.9 no es necesariamente equivalente a

$$\mathbb{E} \left(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \max(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})]} \right) \geq \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E} (|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|).$$

Pues técnicamente $X_{\sigma(1)}$ no es independiente de $X_{\sigma(2)}$. Sin embargo, es posible construir un par de variables independientes $X_{a'}$ y $X_{b'}$ a partir de estas con un factor constante de pérdida asociado de $\frac{1}{4}$. Para esto se consideran en primer lugar a y b , variables aleatoria definidas bajo el siguiente proceso: Primero se elige aleatoriamente un conjunto $H_1 \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamaño $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Luego a se toma aleatoriamente sobre H_1 y b se toma aleatoriamente sobre $\{1, \dots, n\} \setminus H_1$. Esto garantiza que a y b sean distintas. Para cualquier $i \neq j$ se tiene que

$$\mathbb{P}(a = i, b = j) = \mathbb{P}(\sigma(1) = i, \sigma(2) = j) = \frac{1}{n(n-1)}$$

esto implica que

$$\mathbb{E}(|X_a - X_b|) = \mathbb{E}(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|)$$

Para definir dos variables aleatorias independientes podemos fijar un $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, y dado que todos los conjuntos H_1 tienen igual probabilidad de pasar, entonces existirá S que cumpla:

$$\mathbb{E}(X_{a'} - X_{b'}) \geq \mathbb{E}(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|)$$

donde a' es elegido aleatoriamente de S y b' es elegido aleatoriamente de $\{1, \dots, n\} \setminus S$. Dado un S entonces $X_{a'}$ y $X_{b'}$ son independientes, usando la desigualdad anterior y el lema 3.9 se tiene que:

$$\mathbb{E} (|X_{a'} - X_{b'}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_{a'}, X_{b'}), \max(X_{a'}, X_{b'})]}) \geq \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E} (|X_{a'} - X_{b'}|) \geq \frac{1}{4} \cdot \mathbb{E} (|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \mathbb{E} \left[|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \max(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})]} \right] = \\ & \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} \frac{4}{n(n-1)} \mathbb{E} [|X_i - X_j| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_i, X_j), \max(X_i, X_j)]}] \geq \\ & \sum_{i \in S, j \in \{1, \dots, n\} \setminus S} \frac{4}{n(n-1)} \mathbb{E} [|X_i - X_j| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_i, X_j), \max(X_i, X_j)]}] \geq \\ & \sum_{i \in S, j \in \{1, \dots, n\} \setminus S} \frac{1}{\lceil n/2 \rceil} \cdot \frac{1}{n - \lceil n/2 \rceil} \mathbb{E} [|X_i - X_j| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_i, X_j), \max(X_i, X_j)]}] = \\ & \mathbb{E} [|X_{a'} - X_{b'}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_{a'}, X_{b'}), \max(X_{a'}, X_{b'})]}] \end{aligned}$$

La primera desigualdad se tiene pues todos los términos son no negativos. La segunda desigualdad se obtiene del hecho de que $\frac{4}{n(n-1)} \geq \frac{1}{\lceil n/2 \rceil} \cdot \frac{1}{n - \lceil n/2 \rceil}$

Por consiguiente se concluye el teorema 3.6.

□

Observación En la demostración anterior el factor de pérdida de $\frac{1}{4}$ es consecuencia de haber construido $X_{a'}$ y $X_{b'}$ como elecciones aleatorias uniformes de los conjuntos S y $\{1, \dots, n\} \setminus S$, donde S es de tamaño $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Fue necesario construir $X_{a'}$ y $X_{b'}$ así para que fueran independientes y fuera válido aplicar el lema 3.9. Primero que todo, para cualquier par de variables aleatorias independientes X_a y X_b que cumplan que $P(a = b) = 0$ y que para todo $i \neq j$

$$\mathbb{P}(a = i, b = j) = \mathbb{P}(\sigma(1) = i, \sigma(2) = j) = \frac{1}{n(n-1)}$$

se tiene que existe un S de tamaño $x \in \{1, \dots, n\}$ que caracteriza su distribución. Esto pues si a' y b' son independientes y deben ser distintas, entonces no pueden compartir soporte y dentro de sus soportes deben ser uniformes.

Luego cada par a' y b' que se quieran construir dentro de lógica del argumento de la demostración, será caracterizado por un subconjunto S de tamaño x . En general, para un x dado, se va a tener que para un factor de pérdida de $\frac{1}{k}$ se tendría que cumplir que:

$$\frac{n(n-1)}{x(n-x)} \leq k$$

La función $f(x) = \frac{n(n-1)}{x(n-x)}$ alcanza su mínimo en $x = \frac{n}{2}$ y tiene como valor $f(\frac{n}{2}) = 4 - \frac{4}{n}$. Por lo que el tamaño de $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ es óptimo.

3.3. Nuevos resultados teóricos para precios independientes

En esta sección se presentan los principales resultados teóricos de esta tesis. Estos son:

1. Relajación en condición de ser i.d.d. para cota de $\frac{1}{2}$. Se demuestra que solo es necesario que las distribuciones compartan mediana.
2. Propuesta de algoritmo de threshold variable en caso de tendencias.

3.3.1. Cota de $\frac{1}{2}$ para distribuciones independientes con igual mediana.

Los argumentos que se utilizan en la sección 3.2.3 para argumentar sobre el teorema 3.2 no requieren estrictamente todas las propiedades de la condición de que las distribuciones de los precios sean las mismas. Esto nos permite relajar las condiciones de estos resultados:

Lema 3.10 Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias reales que representan precios, cuyas distribuciones tienen la misma mediana, es decir, existe un valor $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$P(X_1 < m) = \frac{1}{2} \quad y \quad P(X_2 < m) = \frac{1}{2}.$$

Entonces, se cumple que

$$\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{T \in [\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2)]}) \geq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}(|X_1 - X_2|).$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un umbral T , La diferencia esperada $E(|X_1 - X_2|)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_1 - X_2|) &= \mathbb{E}((X_1 - X_2)\mathbb{1}_{X_2 \leq T \leq X_1}) + \\ &\quad \mathbb{E}((X_2 - X_1)\mathbb{1}_{X_1 \leq T \leq X_2}) + \\ &\quad \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 < T, X_2 < T}) + \\ &\quad \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 > T, X_2 > T}) \end{aligned}$$

El término $|X_1 - X_2|$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} |X_1 - X_2| &= \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) \\ &= (X_1 - \min(X_1, X_2)) + (X_2 - \min(X_1, X_2)) \\ &= (\max(X_1, X_2) - X_1) + (\max(X_1, X_2) - X_2) \end{aligned}$$

Dado el umbral se definen $p_1 = P(X_1 < T)$ y $p_2 = P(X_2 < T)$. Reescribiendo los términos:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 > T, X_2 > T}) = \\ &\mathbb{E}(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) | X_1 > T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) = \\ &\mathbb{E}(X_1 - \min(X_1, X_2) | X_1 > T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) + \\ &\mathbb{E}(X_2 - \min(X_1, X_2) | X_1 > T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) \leq \\ &\mathbb{E}(X_1 - T | X_1 > T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) + \\ &\mathbb{E}(X_2 - T | X_1 > T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) = \\ &\mathbb{E}(X_1 - T | X_1 > T, X_2 < T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) + \\ &\mathbb{E}(X_2 - T | X_1 < T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) \end{aligned}$$

También podemos escribir esto para el otro término:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 < T, X_2 < T}) = \\
& \mathbb{E}(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) | X_1 < T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 = \\
& \mathbb{E}(\max(X_1, X_2) - X_1 | X_1 < T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(\max(X_1, X_2) - X_2 | X_1 < T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 \leq \\
& \mathbb{E}(T - X_1 | X_1 < T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(T - X_2 | X_1 < T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 = \\
& \mathbb{E}(T - X_1 | X_1 < T, X_2 > T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(T - X_2 | X_1 > T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2
\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 < T, X_2 < T}) + \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 > T, X_2 > T}) \leq \\
& \mathbb{E}(X_1 - T | X_1 > T, X_2 < T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) + \\
& \mathbb{E}(X_2 - T | X_1 < T, X_2 > T) \cdot (1 - p_1)(1 - p_2) + \\
& \mathbb{E}(T - X_1 | X_1 < T, X_2 > T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(T - X_2 | X_1 > T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2
\end{aligned}$$

Eligiendo T igual a la mediana de ambas distribuciones se obtiene que:

$$p_1 p_2 = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

Entonces eligiendo ese T obtenemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 < T, X_2 < T}) + \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{X_1 > T, X_2 > T}) \leq \\
& \mathbb{E}(X_1 - T | X_1 > T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(X_2 - T | X_1 < T, X_2 > T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(T - X_1 | X_1 < T, X_2 > T) \cdot p_1 p_2 + \\
& \mathbb{E}(T - X_2 | X_1 > T, X_2 < T) \cdot p_1 p_2 = \\
& (\mathbb{E}(|X_1 - X_2| | X_1 < T < X_2) + \mathbb{E}(|X_1 - X_2| | X_2 < T < X_1)) \cdot p_1 p_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_1 - X_2|) &= \mathbb{E}((X_1 - X_2)\mathbf{1}_{X_2 \leq T \leq X_1}) + \\
&\quad \mathbb{E}((X_2 - X_1)\mathbf{1}_{X_1 \leq T \leq X_2}) + \\
&\quad \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T, X_2 < T}) + \\
&\quad \mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{X_1 > T, X_2 > T}) \\
&\leq 2(\mathbb{E}((X_1 - X_2)\mathbf{1}_{X_2 \leq T \leq X_1}) + \mathbb{E}((X_2 - X_1)\mathbf{1}_{X_1 \leq T \leq X_2})) \\
&= 2\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2)]})
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.11 *Sea X_1, \dots, X_n un conjunto de n variables aleatorias reales que representan precios, cuyas distribuciones tienen la misma mediana $m \in \mathbb{R}$, es decir,*

$$P(X_i < m) = \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Supongamos que los precios X_1, \dots, X_n son presentados de forma aleatoria uniforme, lo cual significa que existe una permutación aleatoria $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que el orden de presentación de los precios está dado por $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$.

Si $T = m$, entonces el algoritmo ALG_T es una $\frac{1}{2}$ -aproximación, es decir,

$$\mathbb{E}(ALG_T) \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}(OPT).$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que los lemas 3.7 y 3.8 nos indican que es suficiente mostrar que existe un umbral T tal que:

$$\mathbb{E} \left(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \max(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})]} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}(|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|).$$

No podemos usar directamente el lema 3.10 pues, aunque $\{X_1, \dots, X_n\}$ son independientes entre si, $X_{\sigma(1)}$ no es independiente de $X_{\sigma(2)}$ pues por ejemplo, dado que $\sigma(1) = j$ entonces la probabilidad de que $\sigma(2) = j$ es 0 cuando sin condicionar la probabilidad es $\frac{1}{n}$. Sin embargo, podemos condicionar con respecto al evento $\sigma(1) = i \wedge \sigma(2) = j$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}, \max\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}]}] \\
&= \sum_{i < j} \Pr[\sigma(1) = i \wedge \sigma(2) = j] \cdot \\
&\quad \mathbb{E}[|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}, \max\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}]} \mid \sigma(1) = i \wedge \sigma(2) = j] \\
&= \sum_{i < j} \Pr[\sigma(1) = i \wedge \sigma(2) = j] \cdot \mathbb{E}[|X_i - X_j| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}, \max\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}]}] \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i < j} \Pr[\sigma(1) = i \wedge \sigma(2) = j] \cdot \mathbb{E}[|X_i - X_j|] \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E}[|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|].
\end{aligned}$$

En la desigualdad se utilizó el lema 3.10 argumentando que el umbral T es la mediana, que es el mismo para cualquier par de precios.

De este modo, la desigualdad anterior nos asegura que existe un T tal que:

$$\mathbb{E}[|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}, \max\{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\}]}] \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}[|X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)}|].$$

Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.12 *Para todo $\varepsilon > 0$ existen n precios tal que si los precios se presentan en orden $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$, donde $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ es una permutación aleatoria uniforme, entonces para todo T*

$$\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \cdot \mathbb{E}(\text{OPT}) \geq \mathbb{E}(\text{ALG}_T)$$

DEMOSTRACIÓN. Considerando $0 < \varepsilon < 1$ se tienen las variables aleatorias definidas como:

$$X_1 = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } \varepsilon \\ 1 & \text{con probabilidad } 1 - \varepsilon \end{cases} \quad \text{y} \quad X_2 = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{con probabilidad } 1 - \varepsilon \\ 2 - \varepsilon & \text{con probabilidad } \varepsilon \end{cases}$$

Dados los resultados anteriores bastaría demostrar que:

$$\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{T \in [\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2)]}) \geq \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \cdot \mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$$

En general, tomamos los términos:

$$E_1 = |0 - (1 - \varepsilon)| \cdot \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon$$

$$E_2 = |1 - (1 - \varepsilon)| \cdot (1 - \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon$$

$$E_3 = |1 - (2 - \varepsilon)| \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \varepsilon = (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon$$

$$E_4 = |(2 - \varepsilon) - 0| \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

Se tiene entonces que:

$$E(|X_1 - X_2|) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 3 \cdot (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

Para $0 < T < 1 - \varepsilon$

$$E(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{\{\min(X_1, X_2) < T < \max(X_1, X_2)\}}) = E_1 + E_4 = (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

Para $1 - \varepsilon < T < 1$

$$E(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{\{\min(X_1, X_2) < T < \max(X_1, X_2)\}}) = E_2 + E_4 = (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

Para $1 < T < 2 - \varepsilon$

$$E(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_{\{\min(X_1, X_2) < T < \max(X_1, X_2)\}}) = E_3 + E_4 = (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

Entonces para cualquier T se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_T &= \frac{E(|X_1 - X_2| \cdot \mathbf{1}_T)}{E(|X_1 - X_2|)} \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2}{3 \cdot (1 - \varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon^2} \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)^2 + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon}{3 \cdot (1 - \varepsilon)^2 + (2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon} \\ &= \frac{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}{3 - 6\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon - \varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{3 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{1}{3} + \varepsilon \end{aligned}$$

□

3.3.2. Algoritmo de Threshold variable

Consideremos el caso donde la secuencia de los precios se pueden modelar localmente como la suma entre una *tendencia* más un ruido aleatorio independiente. Más formalmente consideraremos el caso de una secuencia de precios X_1, \dots, X_n definidos por

$$X_i = Y_i + f(i)$$

Donde Y_i son variables aleatorias independientes y $f \in C^1$. En la práctica a f le pediremos que, localmente ($i \in [1, n]$), sea aproximadamente igual a una función lineal afín. Es decir que exista una constante C tal que para todo i :

$$f(i+1) - f(i) = C + \varepsilon_i$$

Con ε_i pequeño, en particular queremos que sea pequeño en comparación con $\mathbb{E}(|Y_{i+1} - Y_i|)$.

En estos casos es claro que un umbral T constante no es una buena opción pues no toma en cuenta la tendencia f hacia donde se dirigen los precios. Para resolver el problema de trading online proponemos el siguiente algoritmo:

Definición 3.2 (Algoritmo de Umbral Variable Dependiente de i) Un *algoritmo de umbral variable dependiente de i* es un algoritmo que, dado un conjunto de umbrales $T(i) \in \mathbb{R}$ para cada periodo i , toma decisiones de compra o venta según la siguiente regla: para cada periodo i , con $1 \leq i < n$, el algoritmo decide vender si el precio $X_i \geq T(i)$, y comprar si $X_i < T(i)$. En el periodo final $i = n$, el algoritmo vende si posee el bien, independientemente del precio, y no realiza ninguna acción si no lo posee. El valor esperado del rendimiento de este algoritmo se denota por $\mathbb{E}(\text{ALG}_{T(i)})$.

Lema 3.13 Si los precios son $X_i = Y_i + f(i)$ con Y_i todas i.i.d. y $T_i = M + f(i)$ donde M es la mediana de la distribución de Y_i , entonces

$$\mathbb{E}(\text{ALG}_T) = \frac{n-1}{2} (\mathbb{E}(|Y_1 - M|)) + \frac{f(n) - f(1)}{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Analizamos las ganancias de ALG_T en el periodo i , que denotamos por $\text{ALG}_T(i)$. Si ALG_T compra en el periodo i , entonces $\text{ALG}_T(i) = -X_i$, si vende, entonces $\text{ALG}_T(i) = X_i$, y en caso contrario, $\text{ALG}_T(i) = 0$. Por la definición de ALG_T , tenemos que

$$\text{ALG}_T(1) = -X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T_1}.$$

Denotemos por p_i la probabilidad de que tengamos el ítem en el periodo i (antes de tomar una decisión). Para $2 \leq i \leq n-1$, dado que el precio del periodo i es independiente de los precios en los periodos anteriores, tenemos la siguiente expresión:

$$\mathbb{E}(\text{ALG}_T(i)) = \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{X_i \geq T_i}) \cdot p_i - \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{X_i < T_i}) \cdot (1 - p_i).$$

En el último periodo, el algoritmo solo vende cuando tiene el ítem. Entonces,

$$\mathbb{E}(\text{ALG}_T(n)) = \mathbb{E}(X_n) \cdot p_n = (\mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{X_n \geq T_n}) + \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{X_n < T_n})) \cdot p_n.$$

Ahora, mostramos que si $T_i = M + f(i)$, donde M es la mediana de la distribución de Y_i , entonces $p_i = 1/2$ para todo $i \geq 2$. De hecho, tenemos la siguiente fórmula, que se obtiene condicionando en el evento de si tenemos o no el ítem en el periodo $i - 1$:

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbb{P}(X_{i-1} < T_{i-1}) \cdot p_{i-1} + \mathbb{P}(X_{i-1} < T_{i-1}) \cdot (1 - p_{i-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{i-1} < T_{i-1}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{i-1} + f(i-1) < M + f(i-1)) \\ &= \mathbb{P}(Y_{i-1} < M) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{ALG}_T) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\text{ALG}_T(i)) \\ &= -\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T_1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{X_i \geq T_i}) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{X_i < T_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{X_n \geq T_n}) + \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{X_n < T_n})) \\ &= -\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{Y_1 < M}) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{Y_i \geq M}) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{Y_i < M}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{Y_n \geq M}) + \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{Y_n < M})) \\ &= -\mathbb{E}(Y_1 \cdot \mathbf{1}_{Y_1 < M}) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{E}(Y_i \cdot \mathbf{1}_{Y_i \geq M}) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \mathbb{E}(Y_i \cdot \mathbf{1}_{Y_i < M}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(Y_n \cdot \mathbf{1}_{Y_n \geq M}) + \mathbb{E}(Y_n \cdot \mathbf{1}_{Y_n < M})) + \frac{f(n) - f(1)}{2} \\ &= \frac{n-1}{2} (\mathbb{E}(Y_1 \cdot \mathbf{1}_{Y_1 \geq M}) - \mathbb{E}(Y_1 \cdot \mathbf{1}_{Y_1 < M})) + \frac{f(n) - f(1)}{2} \\ &= \frac{n-1}{2} (\mathbb{E}(|Y_1 - M|)) + \frac{f(n) - f(1)}{2} \end{aligned}$$

Donde se ha ocupado respectivamente en cada paso que

1. $X_i \geq T_i \iff Y_i \geq M$
2. $\mathbb{E}(f(i) \cdot \mathbf{1}_{Y_i \geq M}) = \mathbb{E}(f(i) \cdot \mathbf{1}_{Y_i < M}) = \frac{f(i)}{2}$
3. Y_i son i.i.d.
4. M es mediana de Y_i por lo que, $\mathbb{E}(M \cdot \mathbf{1}_{Y_i \geq M}) = \mathbb{E}(M \cdot \mathbf{1}_{Y_i < M})$

□

En adelante para $b > a$ denotaremos $\Delta_{a \rightarrow b} f$ a la pendiente promedio de f desde a hasta b , es decir

$$\Delta_{a \rightarrow b} f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolario 3.14 *Si los precios son $X_i = Y_i + f(i)$ con Y_i todas i.i.d., $T_i = M + f(i)$ donde M es la mediana de la distribución de Y_i se cumple que*

1. Si $\Delta_{1 \rightarrow n} f \geq 0$ entonces la esperanza del algoritmo es no negativa.
2. Si $|\Delta_{1 \rightarrow n} f| \leq \mathbb{E}(|Y_1 - M|)$ entonces la esperanza del algoritmo es no negativa.

DEMOSTRACIÓN. El punto 1. es directo del lema anterior. Para el punto 2. asumiremos del lema anterior se tiene que:

$$\frac{2}{n-1} \mathbb{E}(\text{ALG}_T) = \mathbb{E}(|Y_1 - M|) + \Delta_{1 \rightarrow n} f$$

Como $0 \leq \mathbb{E}(|Y_1 - M|) - |\Delta_{1 \rightarrow n} f| \leq \mathbb{E}(|Y_1 - M|) + \Delta_{1 \rightarrow n} f$ se concluye. □

Notemos que este último corolario es de gran utilidad si en la práctica la tendencia f tiene un comportamiento aproximadamente lineal durante las n instancias.

Teorema 3.15 *Si las variables aleatorias Y_i son i.i.d. y $T(i) = \mathbb{E}(Y_1) + f(i)$ entonces $\text{ALG}_{T(i)}$ es un algoritmo óptimo, es decir, $\mathbb{E}(\text{ALG}_{T(i)}) \geq \mathbb{E}(\text{ALG})$ para cualquier algoritmo online ALG .*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es prácticamente la misma utilizada por Correa et al. en [9] para demostrar 3.1.

Para cualquier periodo $i \in \{1, \dots, n\}$, denotemos por $V_1(i)$ y $V_0(i)$ el beneficio total esperado óptimo que se puede generar empezando desde el periodo i con el ítem (sin tener el ítem, respectivamente). Para mayor conveniencia, dejamos $V_1(n+1) = V_0(n+1) = 0$. Para $i \geq 2$, consideremos dos casos:

- El algoritmo tiene el ítem al comienzo del periodo $i-1$. La pérdida esperada después del periodo $i-1$ por vender el ítem es, por linealidad de la esperanza, $V_1(i) - V_0(i)$. Por lo tanto, el algoritmo debería vender el ítem a un precio X_{i-1} si $X_{i-1} > V_1(i) - V_0(i)$ y no venderlo si $X_{i-1} < V_1(i) - V_0(i)$, con indiferencia en el caso de igualdad.
- El algoritmo no tiene el ítem al comienzo del periodo $i-1$. La ganancia esperada después del periodo $i-1$ por comprar el ítem es, por linealidad de la esperanza, $V_1(i) - V_0(i)$. Por lo tanto, el algoritmo debería comprar el ítem a un precio X_{i-1} si $X_{i-1} < V_1(i) - V_0(i)$ y no debería comprarlo si $X_{i-1} > V_1(i) - V_0(i)$, con indiferencia en el caso de igualdad.

Por lo tanto, establecer el umbral $V_1(i) - V_0(i)$ en el periodo $i - 1$ es óptimo. Finalmente, note que, por la definición de $V_1(i)$ y $V_0(i)$,

$$V_1(i) = \mathbb{E}(\max\{X_i + V_0(i + 1), V_1(i + 1)\})$$

y

$$\begin{aligned} V_0(i) &= \mathbb{E}(\max\{V_1(i + 1) - X_i, V_0(i + 1)\}) \\ &= \mathbb{E}(\max\{V_1(i + 1) - X_i, V_0(i + 1)\}) + \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(X_i) \\ &= \mathbb{E}(\max\{V_1(i + 1), V_0(i + 1) + X_i\}) - \mathbb{E}(X_i) \end{aligned}$$

Es decir el umbral T_i óptimo viene dado por

$$T_i = V_1(i) - V_0(i) = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i + f(i)) = \mathbb{E}(Y_1) + f(i)$$

□

Capítulo 4

Extensiones del modelo de Trading Prophets

4.1. Bandido de k –brazos

Una extensión interesante que Correa et al. [9] proponen es el modelo de *Bandido de k brazos* en el contexto de trading, denominado *k -armed bandit trading prophet*. Este modelo combina el contexto del problema de Multi-Armed Bandit de la sección 2.1.1 y las condiciones de trading prophets, donde generaliza el problema original al permitir la compra y venta de hasta k tipos diferentes de artículos, donde los precios de cada tipo se generan de manera independiente, similar al modelo básico. Sin embargo, al igual que en trading prophets simple, solo se puede tener en posesión un único artículo en cualquier momento dado.

Más formalmente, para cada artículo i de los k disponibles, se asume una secuencia de precios X_i^j , donde X_i^j representa el precio en la iteración i del artículo j . En cada periodo se observan los precios de los k artículos, pero el jugador puede decidir si comprar o vender un artículo basado en un conjunto de reglas que maximizan el beneficio esperado al final de n periodos. Al igual que en el modelo básico, en cualquier periodo el jugador puede vender el artículo que posee y comprar otro dentro del mismo periodo [9].

Correa et al. proponen un algoritmo que selecciona un artículo al azar al comienzo del juego y luego se compromete con la secuencia de precios de ese artículo comprando y vendiendo con las mismas reglas que el modelo del trading prophets.

En esta sección plantearemos un par de extensiones naturales del algoritmo descrito en el trabajo de Correa [9]. En estos nuevos algoritmos se considerarán múltiples umbrales y se permitirá cambiar de artículo (vender el actual e inmediatamente comprar otro) si las condiciones lo ameritan.

4.1.1. Resultados previos para k-armed bandit trading prophet problem

En el caso de la extensión del modelo de trading prophet descrito en la sección 4.1, los mismos resultados encontrados para trading prophets pueden aplicarse análogamente a este modelo con un factor de pérdida de $\frac{1}{k}$.

Recordemos que en este modelo tenemos k tipos de artículos, pero debemos elegir tener a lo más uno solo a la vez. Para cada instancia i , observamos k precios, uno para cada artículo, es decir, X_i^1, \dots, X_i^k , donde cada precio $X_i^j \sim F_i^j$ es generado de forma independiente de acuerdo con su distribución correspondiente. Además, cada artículo j tiene n instancias de precios, es decir, X_1^j, \dots, X_n^j . La secuencia de observaciones está dada por permutaciones aleatorias σ^j de los índices, donde $\sigma^j : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ representa una permutación independiente para cada artículo j , elegida uniformemente de todas las posibles permutaciones.

Además, en una misma instancia i es posible *cambiar de artículo* de j_1 a j_2 vendiendo a precio $X_{\sigma^{j_1}(i)}^{j_1}$ y comprando a precio $X_{\sigma^{j_2}(i)}^{j_2}$.

El algoritmo propuesto por [9] para este problema, que llamaremos *k-armed bandit simple*, consiste en seleccionar en $i = 1$ un artículo j de forma aleatoria y luego operar exclusivamente con este artículo como si se tratara de un modelo de un solo artículo. Formalmente:

Definición 4.1 (Algoritmo *k-armed bandit simple*) Dados k artículos distintos, cada uno con una secuencia de n precios X_1^j, \dots, X_n^j para $j \in \{1, \dots, k\}$, definimos el algoritmo que selecciona un artículo $j^* = \text{rand}(\{1, \dots, k\})$ al azar y aplica una regla de umbral T a este artículo. En cada instancia $i < n$, si el precio $X_{\sigma^{j^*}(i)}^{j^*} \geq T$, el algoritmo vende; si $X_{\sigma^{j^*}(i)}^{j^*} < T$, compra. En la última instancia $i = n$, vende si tiene el artículo y pasa si no lo tiene, independientemente del precio.

Lema 4.1 *La ganancia esperada de la estrategia óptima a posteriori para el problema de trading prophet con k-brazos es*

$$\mathbb{E}(OPT) = (n - 1) \cdot \mathbb{E} \left(\max_{j \in [k]} \left[X_{\sigma^j(1)}^j - X_{\sigma^j(2)}^j \right]_+ \right),$$

donde $[\cdot]_+ := \max\{\cdot, 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se encuentra en [9], la idea principal consiste en demostrar que, efectivamente, para cada periodo i lo que puede ganar es $\max_{j \in [k]} (X_{\sigma^j(i+1)}^j - X_{\sigma^j(i)}^j) \cdot \mathbb{1}_{X_{\sigma^j(i+1)}^j > X_{\sigma^j(i)}^j}$ y luego considerando que σ^j son independientes y aleatorias se concluye. \square

Teorema 4.2 *Existe un algoritmo ALG_1 que logra la siguiente aproximación para la versión de k-brazos del problema de trading prophets:*

$$\mathbb{E}(ALG_1) \geq \frac{1}{16k} \cdot \mathbb{E}(OPT)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se encuentra en [9]. Para la primera desigualdad se ocupa el algoritmo 4.1 descomponiéndolo en la suma de la esperanza de haber elegido el artículo j por la probabilidad es hacerlo:

$$\mathbb{E}(ALG_1) = \frac{1}{k} \sum_j^j \mathbb{E}(ALG_1^j)$$

Luego del lema 3.6 considerando OPT^j que es la ganancia del profeta dado que se mantiene en el artículo j . Se tiene que

$$\mathbb{E}(ALG_1^j) \geq \frac{1}{16} \mathbb{E}(OPT^j)$$

Juntando estas ideas y aprovechando los resultados de lemas anteriores se concluye. □

El resultado anterior es consecuencia directa del teorema 3.6.

4.1.2. Nuevos algoritmos para trading prophet de k -brazos

En esta sección se estudiará una extensión del algoritmo 4.1 para trading con múltiples artículos.

A cada secuencia de precios X_1^j, \dots, X_n^j se le concederá un umbral T_j .

Definición 4.2 El conjunto \mathcal{I}_i^- está compuesto por los índices de las secuencias cuyo precio en la instancia i está por debajo de su respectivo umbral T_j , en otras palabras:

$$\mathcal{I}_i^- = \{j \leq k \mid X_i^j < T_j\}$$

Definición 4.3 (Algoritmo de elección definida) El algoritmo comienza en $i = 0$ comprando un artículo al azar solo entre aquellos que están en déficit \mathcal{I}_0^- . Si $\mathcal{I}_0^- = \emptyset$ no se compra ningún artículo y pasa a la siguiente instancia hasta la primera instancia i^* que cumple que $\mathcal{I}_{i^*}^- \neq \emptyset$. Luego de elegir se queda en la secuencia comprando y vendiendo según la política umbral simple.

En el último paso siempre se vende el artículo.

De manera más formal:

#Lista de umbrales

$T = [T_{1,1}, \dots, T_{1,k}]$

#Lista de secuencias de precios

$X = [[X_{1,1,1}, \dots, X_{1,n,1}], \dots, [X_{1,1,k}, \dots, X_{1,n,k}]]$

Ganancia=0

hold=False

sequence = None

```

for i in range(n):
    I_i=[j for j in range(K) if X[j][i]<T[j]]
    if sequence = None and len(I_i)>0::
        sequence=random.choice(I_i)
    else:
        if hold:
            if X[sequence][i] >= T[j] or (i+1 == n):
                Ganancia+=X[sequence][i]
                hold=False
        else:
            if X[sequence][i]<T[j]:
                Ganancia-=X[hold][i]

```

Lema 4.3 *A partir de una secuencia de precios i.i.d. X_1, \dots, X_n y el umbral $T = \mathbb{E}(X_1)$, se define X'_1, \dots, X'_n tal que $X'_1 = (X_1 | X_1 < T)$ y $X'_i = X_i \forall i > 1$. Es decir, una secuencia de precios que siempre parte debajo del umbral, entonces:*

$$\mathbb{E}(ALG_T) = \frac{n}{2} \mathbb{E}(|X_1 - T|)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la ganancia de cada periodo i denotada $ALG_T(i)$. Por definición, $ALG_T(1) = -X'_1$, se tiene que entonces

$$ALG_t(2) = X_2 \cdot \mathbb{1}_{X_2 \geq T}$$

Además dada la independencia de precios y siendo p_i la probabilidad de que se tenga el item para venderlo en el periodo $2 < i \leq n-1$ se tiene que:

$$\mathbb{E}(ALG_T(i)) = \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbb{1}_{X_i \geq T}) \cdot p_i - \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbb{1}_{X_i < T})(1 - p_i)$$

En el último periodo siempre se vende, es decir:

$$\mathbb{E}(ALG_T(n)) = \mathbb{E}(X_n) \cdot p_n = (\mathbb{E}(X_n \cdot \mathbb{1}_{X_n \geq T}) + \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbb{1}_{X_n < T})) \cdot p_n$$

Si $T = \mathbb{E}(X_i)$ entonces $p_i = \frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\text{ALG}_T) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\text{ALG}_T(i)) \\
&= -\mathbb{E}(X_1 | X_1 < T) + \mathbb{E}(X_2 \cdot \mathbf{1}_{X_2 \geq T}) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=3}^{n-1} \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{X_i \geq T}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=3}^{n-1} \mathbb{E}(X_i \cdot \mathbf{1}_{X_i < T}) + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{X_n \geq T}) + \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{X_n < T})) \\
&\stackrel{(*)}{=} -2\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T}) + \mathbb{E}(X_2 \cdot \mathbf{1}_{X_2 \geq T}) + \frac{n-3}{2} \cdot \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 \geq T}) \\
&\quad - \frac{n-3}{2} \cdot \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T}) + \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 \geq T}) + \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T})) \\
&= \frac{n}{2} (\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 \geq T}) - \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T}))
\end{aligned}$$

Donde la igualdad (*) se tiene de que $\mathbb{E}(X_1 | X_1 < T) = \frac{\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T})}{P(X_1 < T)}$ y que la secuencia de precios X_1, \dots, X_n es i.i.d.

Finalmente como T es mediana entonces $\mathbb{E}(T \cdot \mathbf{1}_{X_1 \geq T}) - \mathbb{E}(T \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T}) = 0$ es decir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\text{ALG}_T) &= \frac{n}{2} (\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 \geq T}) - \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T}) \mathbb{E}(T \cdot \mathbf{1}_{X_1 \geq T}) - \mathbb{E}(T \cdot \mathbf{1}_{X_1 < T})) \\
&= \frac{n}{2} \mathbb{E}(|X_1 - T|)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4 Dadas k secuencias de precios i.i.d. dentro de cada secuencia, es decir, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, los términos $X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j$ son i.i.d. (Pero para $j_1 \neq j_2$, no se asume que, $X_i^{j_1}$ sea i.i.d. con $X_i^{j_2}$, pero sí independientes). sea $(\text{ALG}_T)_1$ el algoritmo visto en 4.1 y $(\text{ALG}_T)_2$ el algoritmo 4.3 entonces:

$$\mathbb{E}((\text{ALG}_T)_2) - \mathbb{E}((\text{ALG}_T)_1) \begin{cases} > 0, & \text{si } n < 2^k \\ < 0, & \text{si } n \geq 2^k \end{cases}$$

Más aún:

$$\mathbb{E}((\text{ALG}_T)_2) - \mathbb{E}((\text{ALG}_T)_1) = \frac{\sum_{j=1}^k \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)}{2k} \left(1 - \frac{(n+1)}{2^k} + \frac{1}{2^{2k}} \right)$$

Es decir, el nuevo algoritmo es más conveniente cuando la cantidad de artículos k es relativamente grande en comparación con $\log_2(n)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la secuencia de conjuntos $(\mathcal{I}_i^-)_{i=1}^n$ y tomemos i^* la primera instancia en donde $\mathcal{I}_i^- \neq \emptyset$, es decir se tendrá el evento aleatorio:

$$A_{i^*} = \{\mathcal{I}_1^- = \emptyset, \dots, \mathcal{I}_{i^*-1}^- = \emptyset, \mathcal{I}_{i^*}^- \neq \emptyset\}$$

Dado que los precios iniciales de las secuencias son independientes entre si, la probabilidad de tal evento es $P(A_{i^*}) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(i^*-1)} = \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(i^*-1)}$

Para cada evento A_{i^*} se tienen k opciones de un m tal que $|\mathcal{I}_{i^*}^-| = m$ y por cada uno de estos m hay $\binom{k}{m}$ secuencias elegibles. Como el algoritmo elige al azar entre las secuencias de $\mathcal{I}_{i^*}^-$ entonces la probabilidad de que una secuencia esté entre las elegibles es $\frac{m}{k}$ y dado esto la probabilidad de que sea elegida es $\frac{1}{m}$, por lo que la probabilidad de que sea elegida es $\frac{1}{k}$ independiente del valor de m .

Ahora en la instancia i^* se elige la secuencia j , por el lema 4.3 la esperanza de la ganancia, denotada como $ALG_{T_j}^{i^*}$, es de

$$\mathbb{E}(ALG_{T_j}^{i^*}) = \frac{n - i^* + 1}{2} \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)$$

Consideraremos que cuando $i^* = n + 1$ implica que $\forall i \leq n \mathcal{I}_i^- = \emptyset$. En este caso claramente la ganancia es 0. Considerando ahora todos los posibles $|\mathcal{I}_{i^*}^-| = m$ desde 1 a k por cada uno

de los eventos A_{i^*} se tiene que la esperanza total del algoritmo viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((ALG_T)_2) &= \sum_{i^*=1}^n P(A_{i^*}) \sum_{m=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{m} \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} \cdot \mathbb{E}(ALG_{T_j}^{i^*}) \\
&= \sum_{i^*=1}^n \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(i^*-1)} \sum_{m=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{m} \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} \cdot \mathbb{E}(ALG_{T_j}^{i^*}) \\
&= \frac{1}{k} \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right) \sum_{i^*=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k(i^*-1)} \cdot \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(ALG_{T_j}^{i^*}) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{k} \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \sum_{i^*=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k(i^*-1)} \cdot \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(ALG_{T_j}^{i^*}) \\
&= \frac{1}{k} \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right) \cdot \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right) \sum_{i^*=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k(i^*-1)} \cdot \left(\frac{n - i^* + 1}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)\right) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^k \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)}{2k} \cdot \frac{(2^k - 1)^2}{2^k} \cdot \sum_{i^*=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot i^*} \cdot ((n + 1) - i^*) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^k \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)}{2k} \cdot \frac{(2^k - 1)^2}{2^k} \cdot \left(\frac{2^{-k} + (2^k - 1)n - 1}{(2^k - 1)^2}\right) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^k \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)}{2k} \cdot \left(\frac{2^{-k} + (2^k - 1)n - 1}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

Tomando $\frac{\sum_{j=1}^k \mathbb{E}(|X_1^j - T_j|)}{2k} = S_{ALG}^k$ entonces

$$\mathbb{E}((ALG_T)_1) = S_{ALG}^k \cdot (n - 1)$$

$$\mathbb{E}((ALG_T)_2) = S_{ALG}^k \cdot \left(\frac{2^{-k} + (2^k - 1)n - 1}{2^k}\right)$$

Planteamos la inecuación

$$n - 1 \leq \left(\frac{2^{-k} + (2^k - 1)n - 1}{2^k} \right)$$

$$n2^k - 2^k \leq 2^{-k} + (2^k - 1)n - 1$$

$$n \leq 2^k - (1 - 2^{-k})$$

$$n < 2^k$$

Lo que concluye la demostración.

□

4.2. Precios afiliados

Una de las limitaciones más importantes de los modelos de trading vistos hasta el momento es la suposición de que los precios son independientes. En el trabajo descrito por Correa [9] se consideran los precios dados por $p_i = X_i + Y$ donde X_1, \dots, X_n son variables aleatorias i.d.d. y Y es una variable aleatoria independiente a estas. En el modelo se plantea la situación en donde las distribuciones no sean conocidas (Pues en caso contrario se volvería al caso en donde p_i serían i.d.d.) y se conocen S_1, \dots, S_n muestras independientes.

La noción detrás de este modelamiento es la idea de que los precios de un mismo artículo comparten un mismo precio base y y que son las diferencias entre esta base y y los precios p_i las que son realmente independientes entre si.

El algoritmo en este caso consiste en simplemente comprar si $p_i < S_i$ y vender si $p_i \geq S_i$ (En caso de no tener y tener el artículo respectivamente).

En esta sección propondremos algunas generalizaciones a este modelo que permitirán modelar aún más situaciones relacionadas con comportamientos naturales de compra y venta.

4.2.1. Resultados para algoritmo de precios afiliados

En el caso de la extensión del modelo de trading prophet descrito en la sección 4.2. Podemos obtener resultados similares a los obtenidos en el modelo de trading prophets de precios i.d.d. .

Recordemos que en este modelo los precios se comportan como la suma de una variable aleatoria común y una independiente i.d.d.. Es decir, existe una variable aleatoria $y \sim G$ tal que para cada precio $p_i = x_i + y$ con $x_i \sim F \forall i$. Donde F y G no se conocen.

Definición 4.4 (Algoritmo de $n-1$ muestras) Dada una secuencia de precios X_1, \dots, X_n cuyas distribuciones no se conocen. Sean S_1, \dots, S_{n-1} muestras independientes de estas variables. Consideremos el algoritmo denotado como ALG^S aquel que en periodo $i < n$, si no se tiene el artículo, compra si $X_i < S_i$ y si se tiene el artículo, compra si $X_i \geq S_i$. En $i = n$ simplemente se vende si se tiene el artículo.

Definición 4.5 (Algoritmo de 1 muestra) Dada una secuencia de precios X_1, \dots, X_n cuyas distribuciones no se conocen. Sea S_1 una muestra de X_1 . Consideremos el algoritmo denotado como ALG^{S*} aquel que se comporta como ALG^S pero para $2 \leq i \leq n-1$ toma S'_i aleatoriamente del conjunto $\{S_1, X_1, \dots, X_{i-1}\}$.

Lema 4.5 Dada una secuencia de precios X_1, \dots, X_n con distribuciones i.i.d. o afiliadas y S_1, \dots, S_{n-1} muestras i.i.d. o afiliadas (ie $S = s_j + y$ con i.i.d. a la parte independiente de los precios), entonces el algoritmo ALG^S cumple que

$$\mathbb{E}(ALG^S) \geq \frac{n-1}{4} \cdot \mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración del lema se encuentra en el trabajo de [9]. La prueba se centra en el hecho de que para $i \geq 2$ tener el artículo es equivalente al evento $\{X_{i-1} < S_{i-1}\}$ que es independiente de X_i y S_i y además tiene probabilidad $\frac{1}{2}$. \square

Corolario 4.6 Si los precios son i.i.d. o afiliados entonces

$$\mathbb{E}(ALG^S) \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}(OPT)$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba es directa usando el lema 4.5 y 3.7. \square

Lema 4.7 Si los precios son i.i.d. o afiliados entonces

$$\mathbb{E}(ALG^S) = \mathbb{E}(ALG^{S*})$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se encuentra en el trabajo de [9]. La idea es ver que para todo periodo i se tiene que $\mathbb{E}(ALG^S)(i) = \mathbb{E}(ALG^{S*})(i)$, para demostrar esto para $i \geq 2$ se muestra que el evento $\{X_{i-1} < S'_{i-1}\}$ es independiente de (X_i, S'_i) para el caso en que sean i.i.d.. Luego se hace notar que agregar $y \sim G$ a todas las variables aleatorias la independencia se mantiene. \square

Teorema 4.8 Dada una secuencia de precios X_1, \dots, X_n cuyas distribuciones no se conocen pero son i.i.d. o afiliadas, entonces el algoritmo ALG^{S*} cumple que

$$\mathbb{E}(ALG^{S*}) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \mathbb{E}(OPT)$$

DEMOSTRACIÓN. Como consecuencia directa de los lemas anteriores, cuando se tiene una muestra S_1 el algoritmo cumple que

$$\mathbb{E}(ALG^{S*}) \geq \frac{n-1}{4} \mathbb{E}(|X_1 - X_2|) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(OPT)$$

Si no se tiene una muestra S_1 , entonces basta saltarse el algoritmo para la instancia X_1 y usarla como muestra. Esto nos deja con $n - 1$ instancias en vez de n , lo que nos lleva a

$$\mathbb{E}(\text{ALG}^{S*}) \geq \frac{n-2}{4} \mathbb{E}(|X_1 - X_2|) = \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \mathbb{E}(|X_1 - X_2|) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \mathbb{E}(\text{OPT})$$

□

4.3. Conjeturas no probadas

Considerando que en esta tesis se demostró que para todo $\varepsilon > 0$ existe una instancia de precios independientes presentados en orden aleatorio que cumple:

$$\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \cdot \mathbb{E}(\text{OPT}) \geq \mathbb{E}(\text{ALG}_T)$$

Es natural querer preguntarse si en realidad se tiene:

$$\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \cdot \mathbb{E}(\text{OPT}) \geq \mathbb{E}(\text{ALG}_T) \geq \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}(\text{OPT})$$

Este problema sigue abierto, pero en este capítulo se muestran algunos avances:

Lema 4.9 *Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribuciones F_x y F_y discretas binarias. Entonces, existe un valor $T \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathbb{E}(|X - Y| \cdot \mathbb{1}_{T \in [\min(X,Y), \max(X,Y)]}) \geq \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}(|X - Y|)$$

DEMOSTRACIÓN. X e Y son variables aleatorias binarias, es decir:

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{con probabilidad } p \\ x_2 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \quad y \quad Y = \begin{cases} y_1 & \text{con probabilidad } q \\ y_2 & \text{con probabilidad } 1 - q \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad tenemos 3 casos:

1. $x_1 < x_2 < y_1 < y_2$
2. $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$
3. $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$

1. Consideremos el caso 1, en este caso siempre que $x_1 < x_2 < T < y_1 < y_2$ entonces

$$\mathbb{1}_{T \in [\min(X,Y), \max(X,Y)]} = 1$$

Por lo que se cumple trivialmente la desigualdad del lema 4.9

2. Consideremos el caso 2, descompongamos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X - Y|) &= \underbrace{\mathbb{E}(|X - Y| \mathbb{1}_{T \in [\min(X, Y), \max(X, Y)]})}_M \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}(|X - Y| \mathbb{1}_{\{X < T \wedge Y < T\}})}_L \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}(|X - Y| \cdot \mathbb{1}_{\{X > T \wedge Y > T\}})}_R\end{aligned}$$

La desigualdad pedida en estos términos es que necesitamos que

$$2M > L + R$$

En general si $x_1 < y_1 < T < y_2 < x_2$ tenemos que

- $M = (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $L = (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q$
- $R = (x_2 - y_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q)$

Claramente $(x_2 - y_1) > (x_2 - y_2)$ y $(y_2 - x_1) > (y_1 - x_1)$ por lo tanto si $q = (1 - q) = \frac{1}{2}$ entonces $M > L$ y $M > R$ lo que en particular implica la desigualdad pedida.

Consideremos el caso en que $q > (1 - q)$ (Esto es análogo a pedir que $q < 1 - q$ dada la simetría del caso 2.) En este caso siempre se tiene que $M > R$, por lo tanto, para que no se cumpla la desigualdad se tendría que tener que $L > M > R$. Es decir:

- $(y_1 - x_1) \cdot p \cdot q > (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $(y_1 - x_1) \cdot p \cdot q > (x_2 - y_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q)$

Si esta es la situación entonces moviendo T tal que $x_1 < T < y_1 < y_2 < x_2$ en este nuevo caso tenemos:

- $M = (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $L = 0$
- $R = (y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) + (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$

Pero ahora claramente $2M > 2(y_1 - x_1) \cdot p \cdot q > R + L$.

3. Consideremos nuevamente el escenario de M , L y R para el caso 3. En este caso, al igual que el anterior, si $x_1 < y_1 < T < x_2 < y_2$ tenemos que:

- $M = (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $L = (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q$
- $R = (y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q)$

Además consideremos que $(y_2 - x_1) = (y_2 - x_2) + (x_2 - y_1) + (y_1 - x_1)$. En el caso donde $p = q = \frac{1}{2}$ en este caso claramente $M > L$ y $M > R$. Analicemos el caso en que $q < (1 - q)$ (Dada la simetría del caso 3 esto es análogo al caso donde $p > (1 - p)$). En

este caso es claro que $M > L$ pues $(y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q) > L$. Entonces si no se cumple la desigualdad debe ser porque $M < R$ en otras palabras:

$$(y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) > (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q) > (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q$$

De esto es claro que:

- $(y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) > (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$
- $(y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) > (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q$

Si esta es la situación entonces moviendo T tal que $x_1 < y_1 < x_2 < T < y_2$ tenemos que:

- $M = (y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $L = (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q + (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$
- $R = 0$

Esto claramente cumpliría que $2M > 2(y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) > L$ por lo que $2M > L + R$.

Para terminar el caso 3 nos faltaría comprobar que pasa si $q > (1 - q)$ y $p < 1 - p$. En este escenario si $M < R$ y $L \leq R$ entonces nuevamente tenemos que:

- $(y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) > (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$
- $(y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) \geq (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q$

Lo que nos permite mover T tal que $x_1 < y_1 < x_2 < T < y_2$ tenemos que:

- $M = (y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $L = (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q + (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$
- $R = 0$

Si, por otro lado, $M < L$ y $R \leq L$ entonces se tendría que:

- $(y_1 - x_1) \cdot p \cdot q > (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$
- $(y_1 - x_1) \cdot p \cdot q \geq (y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q)$

Moviendo T esta vez tal que $x_1 < T < y_1 < x_2 < y_2$ obtenemos:

- $M = (y_1 - x_1) \cdot p \cdot q + (y_2 - x_1) \cdot p \cdot (1 - q)$
- $L = 0$
- $R = (y_2 - x_2) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) + (x_2 - y_1) \cdot (1 - p) \cdot q$

En cualquiera de ambos casos se tiene claramente que $2M > L + R$

Por lo tanto, se concluye que para cualquier caso de X e Y

$$\frac{1}{3}\mathbb{E}(|X - Y|) \leq \mathbb{E}(|X - Y| \cdot \mathbb{1}_{T \in [\min(X, Y), \max(X, Y)]})$$

□

Modelo de n puntos

La situación donde se tienen dos precios independientes puede ser modelada visualmente a través de la suma de las distancias de puntos elegidos de forma uniforme.

Para X consideraremos n puntos en la recta numérica de tal manera de que para x_i la cantidad de puntos en esa posición sea n_i que nos de $\frac{n_i}{n} = p_i$. De la misma manera para los valores de Y . Por ejemplo, el siguiente caso:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \\ n & \text{con probabilidad } \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} n-1 & \text{con probabilidad } \frac{n-1}{n} \\ 2n-1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Se representaría como:

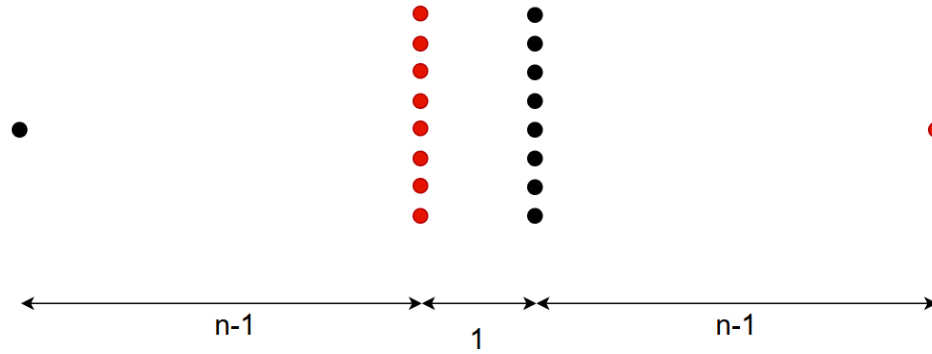


Figura 4.1: Siendo los valores x negros y y los rojos

Esta forma de representar el problema nos dice que dado un T el valor de

$$\mathbb{E}(|X_1 - X_2| \cdot \mathbb{1}_{T \leq \min(X_1, X_2) \cdot \max(X_1, X_2)})$$

Sería igual a la suma de las distancias entre los puntos rojos y negros cuyos *arcos* cruzan T .

Observación Veamos ahora el caso en donde se agrega un punto a una de las dos variables:

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{con probabilidad } p_1 \\ x_2 & \text{con probabilidad } p_2 = 1 - p_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad Y = \begin{cases} y_1 & \text{con probabilidad } q_1 \\ y_2 & \text{con probabilidad } q_2 \\ y_3 & \text{con probabilidad } q_3 = 1 - q_1 - q_2 \end{cases}$$

Notemos que hay 10 casos distintos pues $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ estos son:

1. $x_1 < y_1 < y_2 < y_3 < x_2$

2. $x_1 < y_1 < y_2 < x_2 < y_3$
3. $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < y_3$
4. $x_1 < x_2 < y_1 < y_2 < y_3$
5. $y_1 < y_2 < y_3 < x_1 < x_2$
6. $y_1 < y_2 < x_1 < y_3 < x_2$
7. $y_1 < y_2 < x_1 < x_2 < y_3$
8. $y_1 < x_1 < x_2 < y_2 < y_3$
9. $y_1 < x_1 < y_2 < y_3 < x_2$
10. $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < y_3$

Sin embargo, es posible argumentar que los primeros 9 casos son reducibles a la situación en donde Y solo tenía dos puntos, pues se pueden fusionar los puntos de Y que no tengan un punto de X separándolos en general si se tiene una situación como

$$y_i < y_{i+1} < x_j$$

entonces existe un \hat{y} y un \hat{q} tal que $(x_j - y_i) \cdot p_j \cdot q_i + (x_j - y_{i+1}) \cdot p_j \cdot q_{i+1} = (x_j - \hat{y}) \cdot p_j \cdot \hat{q}$
Pues

$$\begin{aligned} (x_j - y_i) \cdot p_j \cdot q_i + (x_j - y_{i+1}) \cdot p_j \cdot q_{i+1} &= (x_j \cdot (q_i + q_{i+1}) - (y_i \cdot q_i + y_{i+1} \cdot q_{i+1})) \cdot p_j \\ &= \left(x_j - \underbrace{\frac{y_i \cdot q_i + y_{i+1} \cdot q_{i+1}}{q_i + q_{i+1}}}_{\hat{y}} \right) \cdot p_j \cdot \underbrace{(q_i + q_{i+1})}_{\hat{q}} \end{aligned}$$

Nótese además que \hat{y} y \hat{q} no dependen del x_j por lo tanto la fusión mantiene los valores para todo x_j mayor o menor a ambos valores de y .

Usando el modelo de n puntos podemos fácilmente extender el argumento del lema 4.9 a dos variables aleatorias que en vez de tener soportes binarios lo que deben cumplir es que exista un valor t que define los conjuntos

$$\text{supp}(X)_{t-} = \{x \in \text{supp}(X) \mid x < t\}$$

$$\text{supp}(X)_{t+} = \{x \in \text{supp}(X) \mid x \geq t\}$$

y que cumplen que

$$\{y \in \text{supp}(Y) \mid y \in \text{conv}(\text{supp}(X)_{t-}) \cup \text{conv}(\text{supp}(X)_{t+})\} = \emptyset$$

Es decir que los grupos de valores se puedan separar de dos en dos. Por ejemplo:

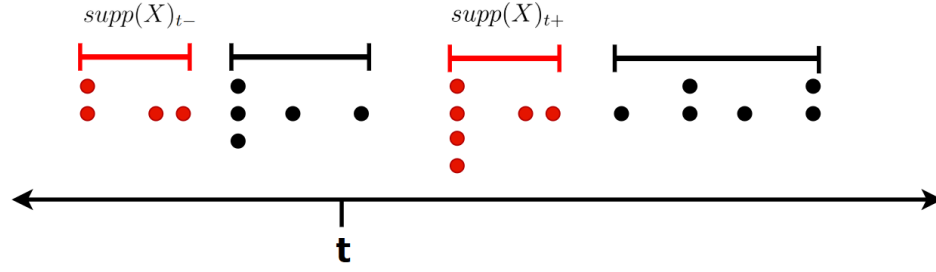


Figura 4.2: Modelo de n puntos equiprobables para X (en rojo) y para Y (en negro).

Conjetura Si se tienen precios que siguen variables aleatorias discretas binarias, además estas se presentan en orden $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$, donde $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ es una permutación aleatoria uniforme, entonces existe un valor T tal que

$$\mathbb{E}(\text{ALG}_T) \geq \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}(\text{OPT})$$

4.4. Extensiones para Variables Dependientes

El modelo original del trabajo de Correa [9] trabaja con precios modelados como variables aleatorias independientes. Esta condición limita de forma importante las aplicaciones del modelo para una gran variedad de contextos.

En el caso en que los precios puedan comportarse como un **paseo aleatorio**, es decir

$$p_j = p + \sum_{i=1}^j x_i$$

Con $x_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$

Gracias al *teorema de la parada opcional* se sabe que ningún algoritmo online puede tener una ganancia esperada positiva. [21, 9]

En esta sección estudiaremos comportamiento de algoritmos en secuencias de precios no independientes.

4.4.1. Modelo de precios afiliados

En la sección 4.2 se mencionó el modelo de precio afiliados dados por la suma de variables i.i.d. y una variable común, es decir los precios p_i tenían la forma

$$p_i = x_i + y$$

Con $x_i \sim F$ y $y \sim G$. En el caso en donde F y G no eran conocidos, los valores que tomaban los precios eran dependientes pues tenían en común el valor y .

La noción original del modelo de precios afiliados supone un *acuerdo tácito* entre los agentes del mercado en un precio base y , al cual se agrega un componente aleatorio. Al extender esta idea a una secuencia de precios que sigue una tendencia, como en la sección 3.3.2, modelamos los precios como:

$$p_i = x_i + f(i),$$

donde $f(i) = y_2 i + y_1$, con y_1 y y_2 variables aleatorias distribuidas según G_1 y G_2 , respectivamente.

Este modelo introduce no solo un precio base y_1 , sino también una tasa de crecimiento y_2 acumulada en cada periodo i . A diferencia del modelo original de *trading prophets* de [9], donde los precios p_i son independientes y el orden temporal es irrelevante, aquí reconocemos que el mercado evoluciona y que el precio de un artículo puede depender del periodo en que se observa.

Siguiendo el modelo de precios afiliados de la sección 4.2, consideramos n instancias de precios, donde las primeras m son muestras $\mathcal{S} = X_1, \dots, X_m$ de periodos previos que siguen la misma tendencia f que los siguientes $n - m$ precios X_{m+1}, \dots, X_n . Es decir, tenemos una

secuencia de n precios, conocemos los primeros m y deseamos hacer trading en los siguientes $n - m$, asumiendo que la tendencia persiste.

Para X_i , se cumple:

$$X_i = x_i + y_2 \cdot i + y_1,$$

donde $x_i \sim F$, y $y_1 \sim G_1$, $y_2 \sim G_2$.

Para poder tomar decisiones sobre X_i , con $i > m$ debemos estimar y_2 e y_1 a partir de las muestras dadas. Sin embargo, si para $j \leq m$, consideramos x_j como el error de un modelo de regresión lineal, no se cumpliría la hipótesis de que los errores deben tener media igual a 0. Debido a que los x_j son i.d.d. esto es fácil de resolver.

Consideremos $\mathbb{E}(x_j) = \mu_F$ y definamos la variable aleatoria $x'_j = x_j - \mu_F$, es decir es x_j pero centrada en 0 y $y'_1 = y_1 + \mu_F$ (Para los precios no vistos definimos x'_i de la misma manera. Esto nos permite reescribir X_i como:

$$X_i = x'_i + y'_1 + y_2 \cdot i,$$

Esto nos permite estimar y_2 a través del estimador de regresión lineal:

$$\hat{y}_2(m) = \frac{\sum_{j=1}^m (j - \bar{j})(X_j - \bar{S})}{\sum_{j=1}^m (j - \bar{j})^2}$$

$$\text{Donde } \bar{j} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m j = \frac{m+1}{2} \text{ y } \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_j.$$

Dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss-Márkov, es decir:

1. Los parámetros y_2 e y'_1 son lineales.
2. Los errores x'_j tiene media 0 y son independientes con igual varianza (Por ser i.i.d.)
3. No hay colinealidad perfecta, ya que los valores X_j dependen de los índices j , que son distintos y tienen suficiente variabilidad.

entonces este estimador es el mejor estimador lineal insesgado (BLUE) [25]. Para esto último es fundamental que los x_j sean i.d.d. (O al menos tengan igual media y varianza).

Ahora notemos que $X'_i = X_i - y_2 \cdot i = x'_i + y'_1$ son precios que se comportan de manera *afiliada* según el mismo modelo de la sección 4.2.

Propondremos un algoritmo que estime $\hat{y}_2(m)$ luego tome las decisiones que toma el algoritmo ALG^S de la definición 4.4 sobre $X'_i = X_i - \hat{y}_2(m) \cdot i$.

Si $\hat{y}_2(m) = y_2$ entonces se rescatarían las garantías demostradas sobre ALG_S , sin embargo existe un error de aproximación que depende del tamaño de m y la varianza de los x_j .

Definición 4.6 (Algoritmo de m muestras con tendencia) Considerando una secuencia de n precios X_1, \dots, X_n entonces se denota ALG_m al algoritmo que no hace nada en los primeros m periodos, luego en periodo $m < i < n$, si no se tiene el artículo compra si $X'_i < S_i$ y si se tiene el artículo, compra si $X'_i \geq S_i$ y en $i = n$ simplemente vende si se tiene el artículo. Donde:

- $X'_i = X_i - \hat{y}_2(m) \cdot i$
- $S_i = X'_{i-m}$
- $\hat{y}_2(m) = \frac{\sum_{j=1}^m (j - \bar{j})(S_j - \bar{S})}{\sum_{j=1}^m (j - \bar{j})^2}$

Capítulo 5

Simulaciones de trading prophets

En los capítulos anteriores se trabajó con las limitaciones teóricas de los algoritmos de compra y venta bajo diferentes condiciones sobre las variables aleatorias que modelan los precios. Estas limitaciones son útiles para entender casos extremos y las debilidades del algoritmo, pero no reflejan necesariamente el comportamiento en situaciones más naturales, como las que se observan en mercados reales.

Además, la complejidad asociada a la demostración de las limitaciones teóricas ha dejado muchos resultados abiertos, como el comportamiento del algoritmo en secuencias de precios no independientes. Esto genera un interés significativo en explorar el problema desde enfoques alternativos que permitan obtener una comprensión más completa.

En este capítulo nos enfocaremos en simulaciones numéricas que permiten estudiar de manera práctica el rendimiento del algoritmo, acercándonos a uno de los objetivos centrales de esta tesis: generar una metodología para su aplicación en mercados reales.

5.1. Simulación de precios

5.1.1. Instancia de precio

En las siguientes simulaciones las variables aleatorias que modelan los precios serán definidas de la forma:

Definición 5.1 Sean $a \in [L_{inf}, L_{sup}]^m$, $p \in [0, 1]^m$ y $\sigma^2 > 0$ definimos la variable aleatoria

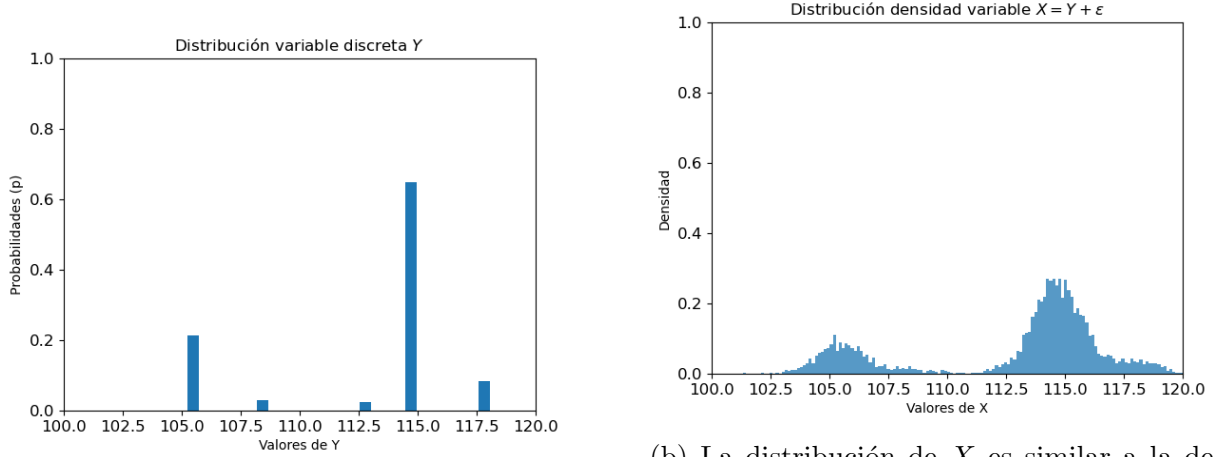
$$X(a, p, \sigma) = \begin{cases} \text{Value} & \text{Probability} \\ a_i + \varepsilon & p_i \end{cases}$$

Con $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y $\sum p_i = 1$. Escribiremos $X = Y + \varepsilon$ para separar la parte discreta Y de la variable aleatoria X .

Ejemplo Considerando los parámetros $[L_{inf}, L_{sup}]^m = [100, 120]^5$ tomamos

- $a = (105,5, 108,4, 112,8, 114,8, 117,8)$
- $p = (21\%, 2,9\%, 2,4\%, 65\%, 8,4\%)$
- $\sigma = \frac{L_{sup} - L_{inf}}{4m} = \frac{20}{20} = 1$

La distribución de Y y de $X = Y + \varepsilon$ se muestran en las siguientes figuras:



(a) Se muestran los valores que toma Y y sus probabilidades.

(b) La distribución de X es similar a la de Y considerando un error ε . Para $\sigma = 0$ se tendría $X = Y$

Figura 5.1: Distribuciones de Y variable discreta y su contraparte X continua.

5.1.2. Secuencia de precios

Considerando variables aleatorias como las definidas en 5.1 podemos generar una gran variedad de tipos de secuencias de precios, estudiaremos:

Secuencias iid

A partir de parámetros iniciales (a, p, σ) se generan n iteraciones de precios generando una secuencia como la de la figura:

Secuencias Independientes

Se generaron n parámetros distintos (elegidos aleatoriamente) dentro del mismo intervalo $[L_{inf}, L_{sup}]^m$ y se usaron para generar n iteraciones de precios generando una secuencia como la de la figura:

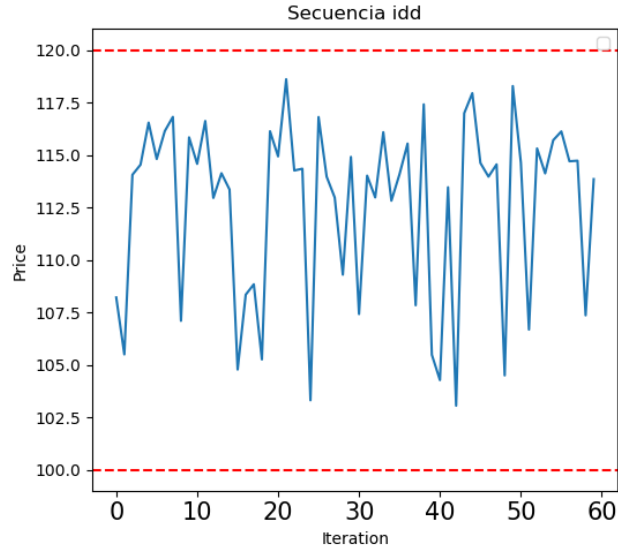


Figura 5.2: Utilizamos los mismos parámetros de la figura 5.1 para $n = 60$ precios. En rojo los límites inferior = 100 y superior = 120.

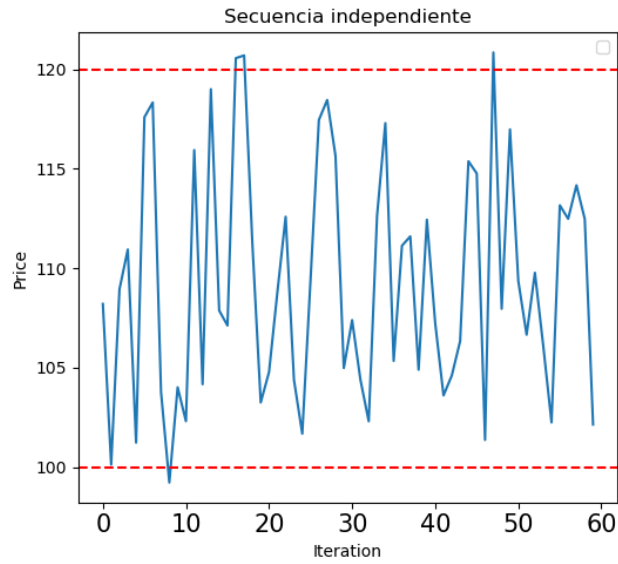


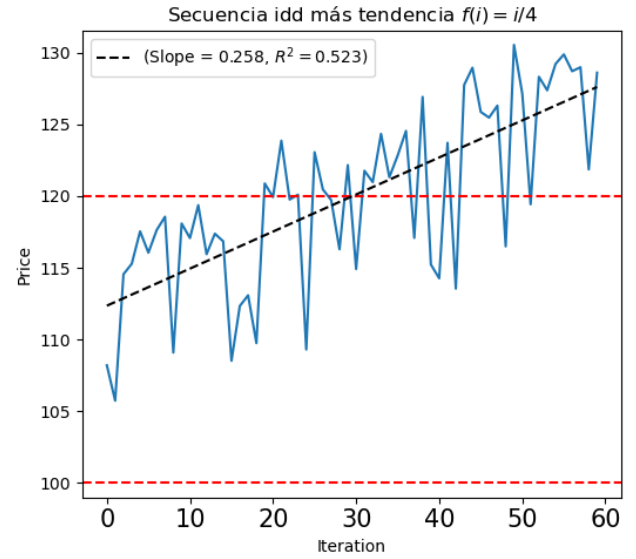
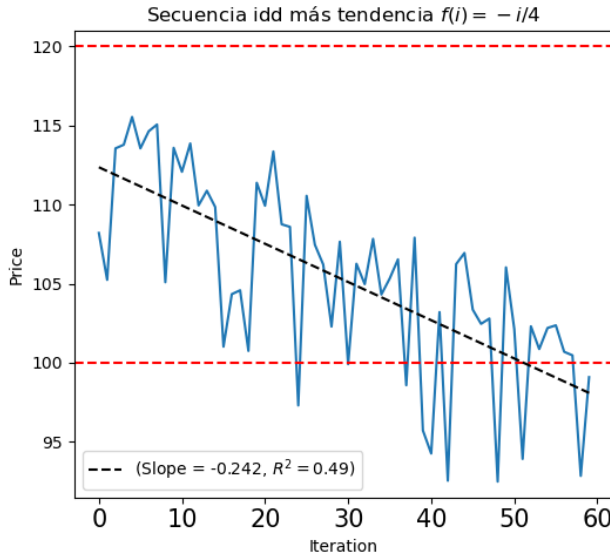
Figura 5.3: Utilizamos los mismos parámetros iniciales y mismo valor inicial de la figura 5.2 para $n = 60$ precios. En rojo los límites inferior = 100 y superior = 120.

Secuencias independientes con tendencia

En este caso queremos simular los precios vistos en la sección 3.3.2 para una función lineal f tomamos:

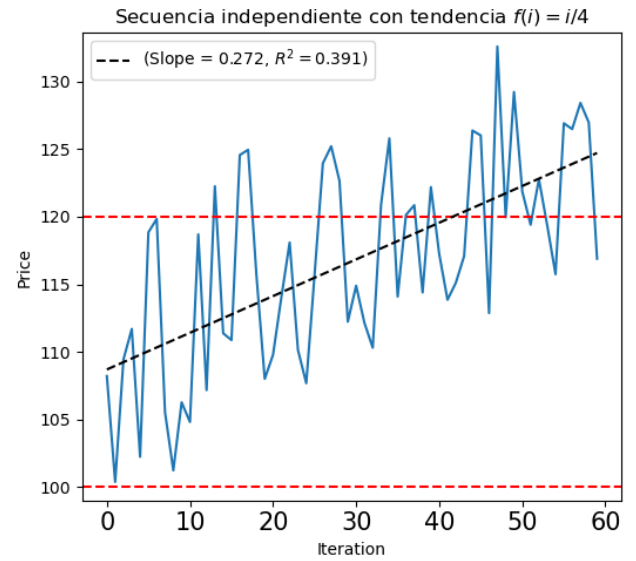
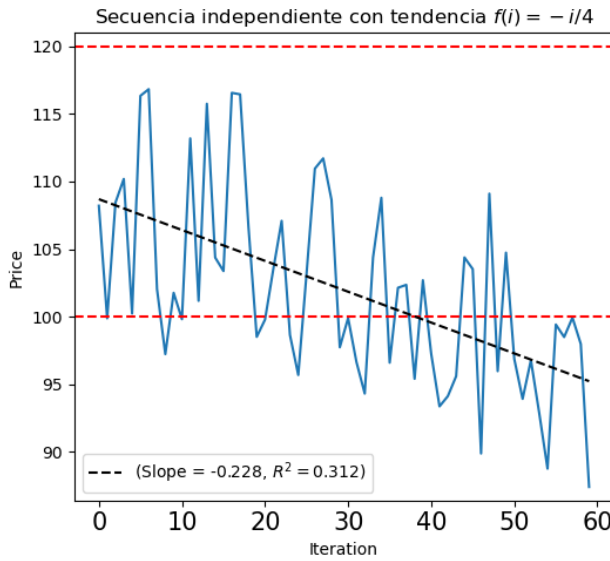
$$X_i = Y_i + f(i)$$

En este caso podemos actuar de la misma manera que en las secuencias anteriores pero sumando una función $f(i)$, obteniendo las siguientes posibilidades



(a) Sequencia de precios idd más tendencia negativa $f(i) = -\frac{i}{4}$

(b) Sequencia de precios idd más tendencia positiva $f(i) = \frac{i}{4}$



(c) Sequencia de precios independientes más tendencia negativa $f(i) = -\frac{i}{4}$

(d) Sequencia de precios independientes más tendencia positiva $f(i) = \frac{i}{4}$

Figura 5.4: Comparación de secuencias de precios con tendencias negativas y positivas. Las secuencias idd e independientes son las mismas usadas en los ejemplos anteriores.

Secuencias afiliadas con tendencia

Nuevamente queremos simular precios con tendencia pero ahora consideraremos que los precios toman la forma

$$X_i = Y_i + \beta_2 \cdot i + \beta_1$$

Una vez determinados β_2 e β_1 esta simulación de precios es esencialmente la misma que en el caso anterior. La diferencia estará que en la aplicación de los algoritmos para calcular la ganancia esperada se tomará el promedio de la ganancia entre todas las iteraciones, donde cada iteración tendrá un valor distinto de Y_2 e Y_1 .

5.2. Simulación de algoritmos sobre secuencias de precios

Esta sección se estructura en dos partes. La primera parte se enfoca en la evaluación de la esperanza de los algoritmos para una distribución seleccionada aleatoriamente a modo de ejemplo. En la segunda parte, se investigarán las limitaciones teóricas de los algoritmos mediante métodos numéricos.

5.2.1. Evaluación de algoritmos

Para las siguientes evaluaciones utilizamos los siguientes valores:

- $[L_{\text{inf}}, L_{\text{sup}}] = [100, 120]$
- $n = 10$: longitud de las secuencias de precios.
- $m = 5$: número de valores distintos en el soporte de la parte discreta de las distribuciones.
- $N = 1000$: número de muestras para el cálculo numérico de las esperanzas.
- $\sigma = 1$: desviación estándar de la componente gaussiana.

Algoritmo de threshold simple

Como se estableció en la definición 3.1 el algoritmo de threshold simple ALG_T consiste en comprar cuando $X_i < T$ y vender cuando $X_i \geq T$ para un T dado.

Tomaremos una discretización uniforme de $[L_{inf}, L_{sup}]$ de N_T elementos y tomaremos el T :

$$\mathcal{T}(N) = \left\{ L_{inf} + \frac{(L_{sup} - L_{inf}) \cdot i}{N_T - 1} \right\}_{i=0}^{N_T-1}$$

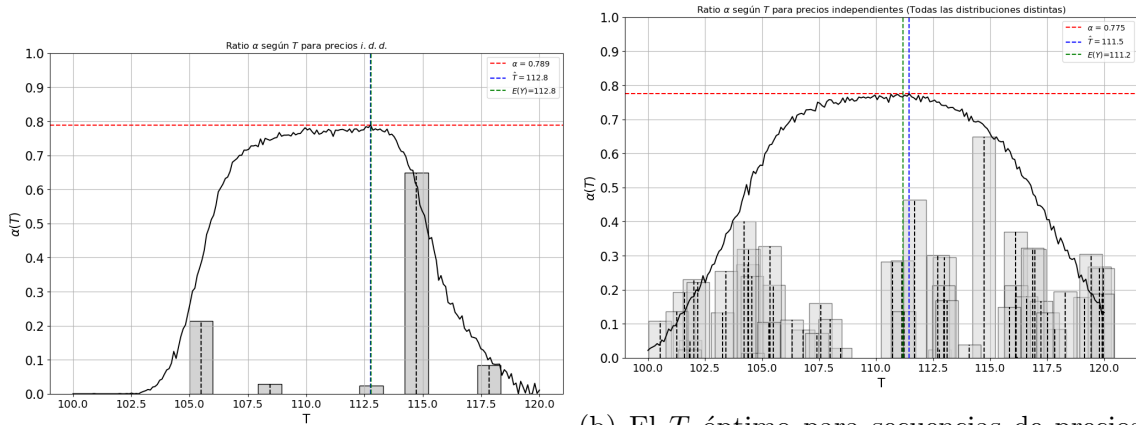
En las simulaciones tomaremos $N_T = 200$, de un intervalo de largo 20.

Luego de entre estos elegiremos el T que maximice $\alpha_{ALG_T} = \frac{\mathbb{E}(ALG_T)}{\mathbb{E}(OPT)}$, como OPT no depende de T entonces esto es:

$$\hat{T} = \arg \max_{T \in \mathcal{T}} \mathbb{E}(ALG_T)$$

En la siguientes figuras se muestran las curvas $\alpha(T)$ con $T \in [L_{inf}, L_{sup}]$ en conjunto con el gráfico de barras que denota la función de probabilidad de la variable discreta asociada a los precios (Para los casos no i.d.d. se superpusieron las funciones de probabilidad de las variables aleatorias que generan las secuencias de precios). Se muestran además $\alpha(\hat{T})$, \hat{T} y $\mathbb{E}(Y)$ en rojo, azul y verde respectivamente.

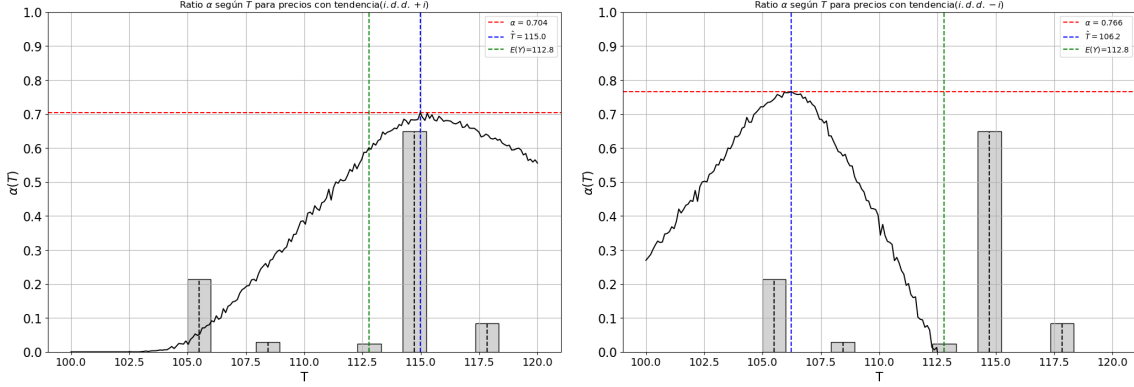
Secuencias independientes e i.d.d.



(a) El T óptimo para secuencias de precios independientes se encuentra cerca del promedio. *i.i.d.* se encuentra precisamente en el valor medio de los valores esperados $\mathbb{E}(Y)$ de cada una de las variables aleatorias que definen sus precios.

Figura 5.5: Comportamiento de α_{ALG_T} para secuencias de precios *i.i.d.* e independientes.

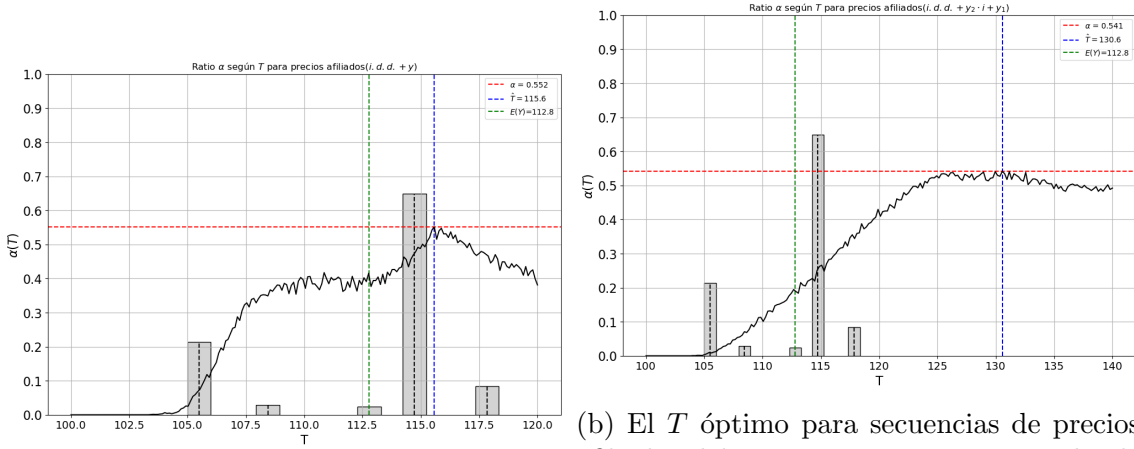
Secuencias con tendencias deterministas



(a) El T óptimo para secuencias de precios $i.i.d.$ más una tendencia $f(i) = \frac{i}{4}$ se encuentra desplazado a la **derecha** de la media de la distribución discreta original $\mathbb{E}(Y)$. (b) El T óptimo para secuencias de precios $i.i.d.$ más una tendencia $f(i) = -\frac{i}{4}$ se encuentra desplazado a la **izquierda** de la media de la distribución discreta original $\mathbb{E}(Y)$.

Figura 5.6: Comportamiento de α_{ALG_T} para secuencias de precios con base $i.i.d.$ con tendencias lineales determinadas.

Secuencias de precios afiliados



(a) El T óptimo para secuencias de precios afiliados del tipo $p_i = x_i + y$ donde $P(y = 1) = P(y = 10) = \frac{1}{2}$. (b) El T óptimo para secuencias de precios afiliados del tipo $p_i = x_i + y_2 \cdot i + y_1$ donde $P(y_1 = 1) = P(y_1 = 10) = \frac{1}{2}$ y $P(y_2 = 1) = P(y_2 = 2) = \frac{1}{2}$.

Figura 5.7: Comportamiento de α_{ALG_T} para secuencias de precios con base $i.i.d.$ con tendencias lineales aleatorias.

5.2.2. Estimación de la medida de $\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG_T)$

Al estudiar teóricamente los algoritmos de trading propuestos en esta tesis y contrastarlos con algoritmos óptimos (prophets), observamos que las α -aproximaciones representan limitaciones teóricas que indican el valor esperado mínimo que estos algoritmos alcanzan en el

peor de los casos, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, el peor desempeño posible para un algoritmo de umbral simple en secuencias de precios *i.i.d.* es la mitad del rendimiento del algoritmo óptimo si se utiliza como umbral la mediana de las distribuciones (Teorema 3.2). Sin embargo, en muchos casos, el valor esperado de estos algoritmos puede ser considerablemente superior a esta limitación teórica.

Esto plantea una pregunta fundamental: ¿Cuántas de las posibles secuencias de precios realmente se acercan a esta limitación? Más específicamente, ¿cuál es la probabilidad de que la razón de eficiencia esté por encima de un valor λ mayor que esta limitación teórica? Para abordar este problema, utilizaremos un enfoque basado en métodos de Monte Carlo. Primero, definimos el siguiente conjunto:

Definición 5.2 Sea $\mathcal{K} = [L_{\inf}, L_{\sup}]^m \times [0, 1]^m \times [0, L_{\sup}]$, el conjunto de parámetros de las distribuciones que generan las secuencias de precios. Consideramos secuencias de parámetros $\{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{K}^n$, donde n es el número de instantes en la secuencia de precios.

Dado un algoritmo ALG y valores n , m , y λ , definimos el conjunto de secuencias de variables aleatorias de longitud n , con un soporte discreto de m valores y desviación estándar σ en su parte gaussiana, tales que el valor esperado del algoritmo constituye una λ -aproximación. Formalmente:

$$\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG) = \{ \{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{K}^n \mid \alpha_{ALG}(\{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n) \leq \lambda \}$$

Queremos estimar la medida del conjunto $\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG)$, en la práctica limitaremos $\{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n$ a ciertas condiciones C , como por ejemplo que la secuencia sea de precios *i.i.d.* ($C = \{ \{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{K}^n \mid (a_1, p_1, \sigma_1) = \dots = (a_n, p_n, \sigma_n) \}$). Nuestro objetivo es calcular la probabilidad de que un algoritmo ALG tenga una razón de eficiencia $\alpha_{ALG} \leq \lambda$ para parámetros seleccionados aleatoriamente de \mathcal{K}^n .

Definimos la medida de $\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG)$ bajo la condición C , como la probabilidad de que una secuencia de parámetros, seleccionada aleatoriamente de entre los elementos de \mathcal{K}^n que cumplen la condición C , resulte en una razón de eficiencia del algoritmo ALG menor o igual a λ :

$$P(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG) \mid C) = \mathbb{P}(\alpha_{ALG}(\{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n) \leq \lambda \mid \{(a_i, p_i, \sigma_i)\}_{i=1}^n \in C).$$

Para estimar esta probabilidad, realizaremos los siguientes pasos:

1. **Generación de muestras:** Generamos N secuencias independientes de parámetros $\{(a_i^{(k)}, p_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)})\}_{i=1}^n$ para $k = 1, \dots, N$, donde cada $(a_i^{(k)}, p_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)})$ se elige aleatoriamente de acuerdo con una distribución de probabilidad definida en \mathcal{K} .
2. **Cálculo de la razón de eficiencia:** Para cada secuencia de parámetros $\{(a_i^{(k)}, p_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)})\}_{i=1}^n$, calculamos la razón de eficiencia del algoritmo ALG :

$$\alpha_{ALG_T}^{(k)} = \frac{\mathbb{E} \left[ALG \left(\{(a_i^{(k)}, p_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)})\}_{i=1}^n \right) \right]}{\mathbb{E} \left[OPT \left(\{(a_i^{(k)}, p_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)})\}_{i=1}^n \right) \right]}.$$

3. **Estimación de la medida:** Estimamos $P(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG))$ como la proporción de secuencias para las cuales $\alpha_{ALG}^{(k)} \leq \lambda$:

$$\hat{P}(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{\alpha_{ALG}^{(k)} \leq \lambda\}},$$

Este estimador $\hat{P}(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG_T))$ es una estimación no sesgada de la verdadera medida $P(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG))$ porque su valor esperado coincide con la probabilidad que estimamos si las muestras $\{(a^{(k)}, p^{(k)}, \sigma^{(k)})\}_{k=1}^N$ se seleccionan de forma independiente y con una distribución uniforme sobre el conjunto \mathcal{K}^n . Al incrementar el número de muestras N , la estimación converge casi seguramente a la medida real debido a la Ley de los Grandes Números [28].

Al variar λ dentro del intervalo $[0, 1]$, podemos estimar $\hat{P}(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG))$ para distintos niveles de rendimiento del algoritmo. Esto nos permitirá analizar la prevalencia de secuencias de precios en las cuales el algoritmo ALG tiene un desempeño inferior o igual a un factor λ respecto al óptimo.

Además, podemos calcular intervalos de confianza para $\hat{P}(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG))$ utilizando la distribución binomial, dado que cada $\mathbb{1}_{\{\alpha_{ALG}^{(k)} \leq \lambda\}}$ es una variable aleatoria de Bernoulli con probabilidad de éxito $P(\mathcal{H}_{n,m,\lambda}(ALG))$.

El análisis de los resultados obtenidos a través de este método nos proporcionará una comprensión más profunda sobre las limitaciones teóricas y prácticas del algoritmo ALG en diferentes escenarios de mercado, así como sobre la frecuencia con la que pueden ocurrir secuencias de precios desfavorables para el algoritmo.

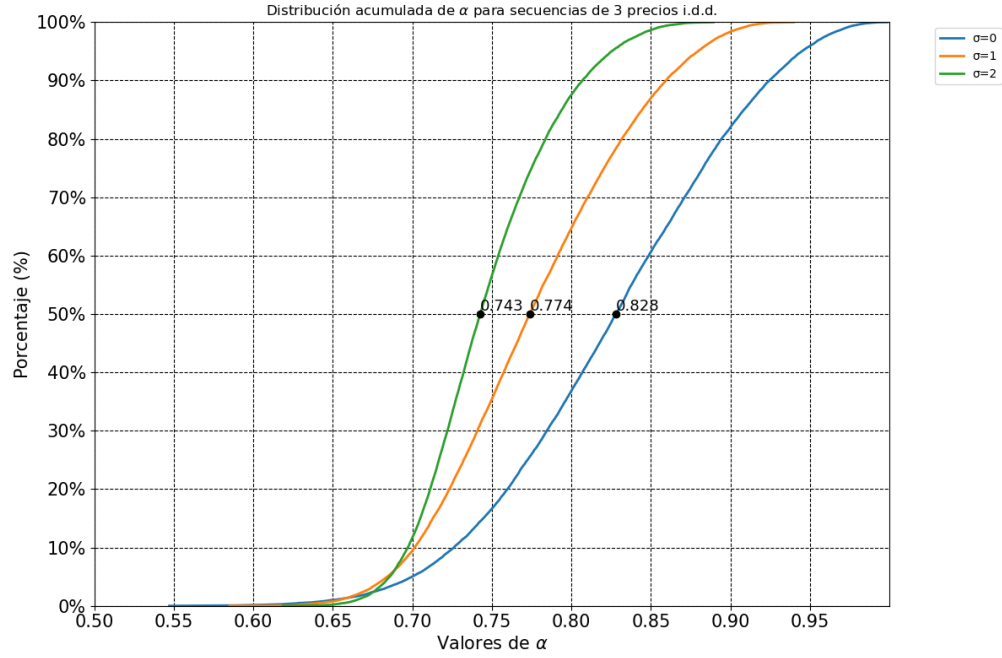
Resultados I.D.D.

Para una secuencia de n precios i.d.d. podemos considerar que estamos, equivalentemente, eligiendo parámetros en \mathcal{K} . En nuestras simulaciones numéricas utilizamos 30 000 muestras dentro de \mathcal{K} , considerando $m = 5$ y $\sigma \in \{0, 1, 2\}$ por separado. Se generarán n instancias para simular una secuencia de precios. Además hicimos una comparación entre los valores de α para una secuencia de $n = 3$ y $n = 10$ precios por separado.

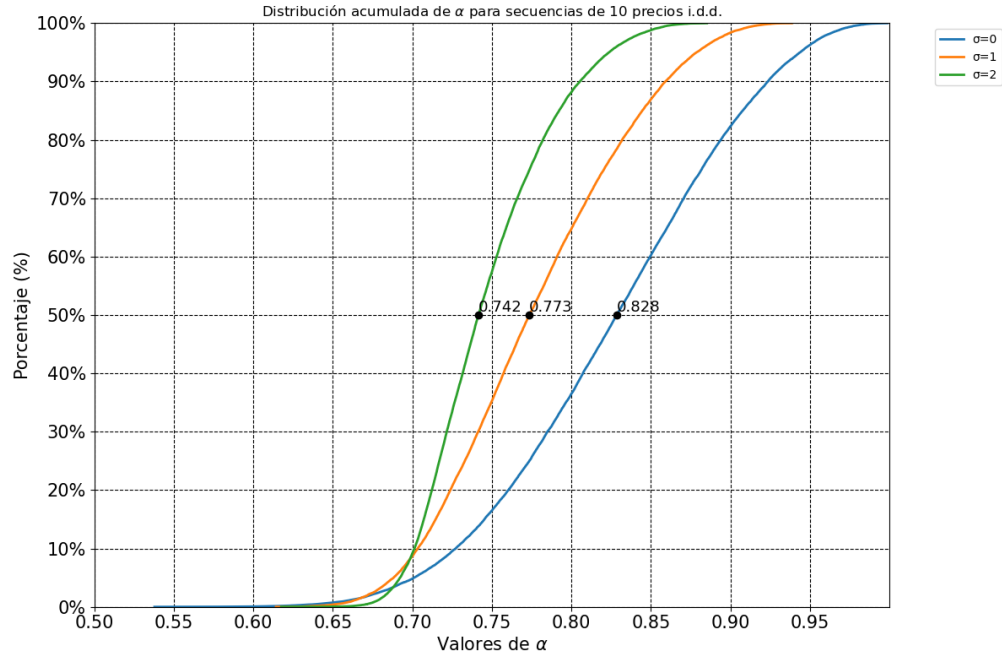
Los resultados de la simulación mostraron que en la gran mayoría de los casos $\alpha \geq 0,7$ en concreto

1. $P(\mathcal{H}_{n=10,m=5,\lambda=0,743}(ALG) \mid C = \{\sigma = 0 \wedge (X_i)_{i=1}^n \text{ i.d.d.}\}) = 50 \%$
2. $P(\mathcal{H}_{n=10,m=5,\lambda=0,774}(ALG) \mid C = \{\sigma = 1 \wedge (X_i)_{i=1}^n \text{ i.d.d.}\}) = 50 \%$
3. $P(\mathcal{H}_{n=10,m=5,\lambda=0,828}(ALG) \mid C = \{\sigma = 2 \wedge (X_i)_{i=1}^n \text{ i.d.d.}\}) = 50 \%$

A continuación se muestra la distribución acumulada de la frecuencia porcentual para α en las muestras:



(a) Distribución acumulada para secuencias de 3 precios variando el valor de σ



(b) Distribución acumulada para secuencias de 10 precios variando el valor de σ

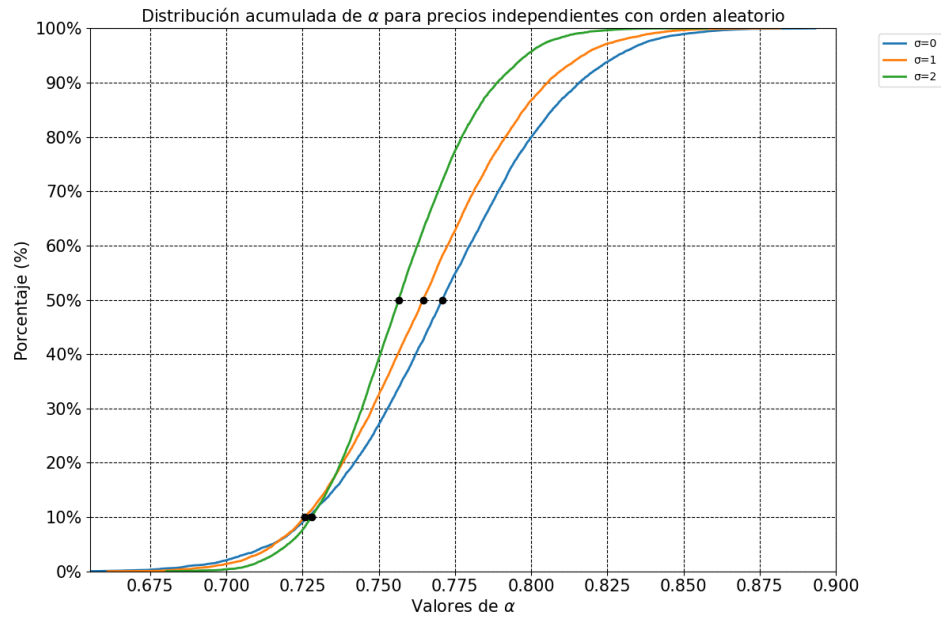
Figura 5.8: Comparación entre las distribuciones acumuladas para secuencias de 3 y 10 precios. Se puede verificar que la distribución de α en \mathcal{H} es prácticamente la misma independiente de el largo de la secuencia de precios en el casos i.d.d.

Se puede ver que aunque la garantía teórica para el algoritmo es de $\alpha = \frac{1}{2}$, en la práctica es muy improbable acercarse a ese valor.

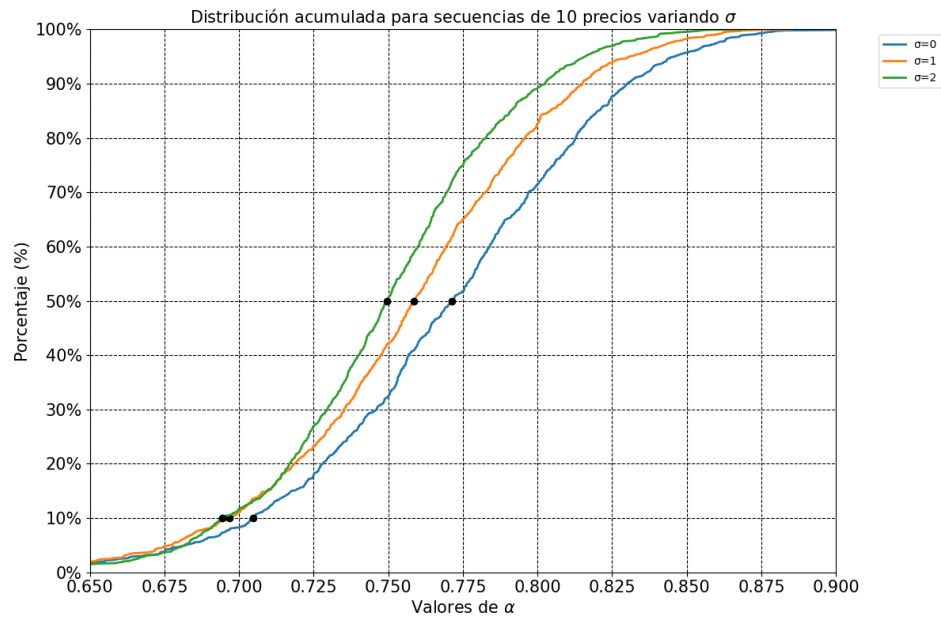
Resultados independientes con precios ordenados aleatoriamente

Similar al caso i.d.d. consideraremos 30000 muestras uniformemente distribuidas en \mathcal{K}^n con $m = 5$ y $\sigma \in \{0, 1, 2\}$. Se hizo una comparación de los valores de α para una secuencia de $n \in \{2, 3, 5, 10\}$ precios por separado. Es importante considerar que para el cálculo de α se consideró el orden aleatorio, que el α se cálculo sobre $X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}$ donde $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ es una permutación aleatoria como la descrita en 3.2.

A continuación se muestra la distribución acumulada de la frecuencia porcentual para α en las muestras:



(a) Distribución acumulada para secuencias de 5 precios variando el valor de σ



(b) Distribución acumulada para secuencias de 10 precios variando el valor de σ

Figura 5.9: Comparación entre las distribuciones acumuladas para secuencias de 5 y 10 precios. En secuencias de más precios la proporción de aquellas menores que 0,7 aumentó considerablemente.

Capítulo 6

Metodología para implementación de algoritmo del umbral simple en contextos de trading.

En este capítulo presentaremos diferentes experimentos numéricos para ejemplificar cada posible implementación del algoritmo de trading de umbral simple. Los experimentos serán aplicados sobre dos bases de datos con características opuestas, uno en donde será razonable asumir las hipótesis deseadas sobre los precios de los artículos y otra en donde es muy probable que se rompan.

6.1. Modelo de implementación general

La aplicación de algoritmos online en los mercados financieros permite tomar decisiones en tiempo real sin conocimiento previo de las entradas, lo que los hace ideales para entornos dinámicos [20]. Con los avances en el aprendizaje por refuerzo, estos algoritmos han demostrado ser efectivos para problemas como el trading algorítmico y la asignación de carteras, destacando su relevancia en el desarrollo de estrategias automatizadas [5].

Es de suma importancia entender bien las formas en que estos algoritmos pueden ser aplicados, por lo que en esta tesis proponemos una forma específica de aplicar en diferentes escenarios el algoritmo expuesto en capítulos anteriores.

6.1.1. Modelo para un solo artículo

En este modelo, nos enfocamos en la compra y venta de un único tipo de artículo. Partimos de un historial de precios pasados del artículo, denotado como $\mathcal{H} = \{x_1, \dots, x_m\}$, y se busca implementar un algoritmo que decida sobre las instancias de precios futuros X_1, \dots, X_n , las cuales aún no son conocidas.

Para cada precio $x_i \in \mathcal{H}$, disponemos de un conjunto de variables $V_i = \{V_{i,1}, \dots, V_{i,k}\}$ que describen las características del artículo que fue transado a ese precio. Estas variables podrían o no estar relacionadas con el precio de forma directa.

1. **Fijación de características del artículo:** El primer paso de la implementación consiste en especificar las características del artículo a transar, con el fin de eliminar la influencia que las variaciones en dichas características puedan tener sobre la distribución del precio en las instancias futuras.

Para esto, lo que haremos será evaluar la correlación de cada variable $V_{i,j}$ con el precio X a partir del historial de precios. Definimos un puntaje P para cada variable basado en su correlación con el precio. Este puntaje será definido de dos formas:

- **Correlación simple:** Calculamos la correlación de cada variable sin fijar las demás:

$$P(V_{i,j}) = |\text{Corr}(V_{i,j}, X)|$$

Este método es sencillo, pero puede ignorar variables cuya relevancia solo se manifiesta cuando se fijan otras. Por ejemplo, la cantidad de pisos de una casa puede no tener una correlación significativa con el precio si no se fija el tamaño en metros cuadrados, pero, una vez fijo, la cantidad de pisos podría ser un factor importante (Incluso podría depender de a que valor se fija la cantidad de metros cuadrados).

- **Correlación condicionada:** Calculamos la correlación de las variables restantes fijando previamente una variable $V_{i,j}$ al valor v_j , es decir que $\forall i \neq j$:

$$P(V_{i,i}) = |\text{Corr}(V_{i,i}, X | \{V_j = v_j\})|$$

en general si \mathcal{I} es el conjunto de los índices ya fijados previamente, $\forall i \notin \mathcal{I}$:

$$P(V_{i,i}) = |\text{Corr}(V_{i,i}, X | \{V_j = v_j \ \forall j \in \mathcal{I}\})|$$

que maximice la cantidad de información disponible, es decir que sea tal que maximice la cardinalidad; $\max_{v_j} |H_v|$, donde $\mathcal{H}_v \subseteq \mathcal{H}$ es el siguiente conjunto:

$$\mathcal{H}_v = \{x_i \mid V_{i,j} = v_j \ \forall j \in \mathcal{I}\}$$

(Para evitar reducir nuestro historial y así que las siguientes fijaciones tengan suficiente información para el cálculo de correlaciones).

Alternativamente, si la cantidad de instancias pasadas a pesar de la fijación de variables no es un problema, se puede considerar todos los posibles valores de la variable a fijar y luego, seleccionar el que maximice el promedio de las correlaciones del precio con las demás variables libres:

$$\max_{v_j} \sum_{i \notin \mathcal{I} \cup \{j\}} P(V_{i,i})$$

Aunque los precios X_1, \dots, X_n siguen distribuciones F_1, \dots, F_n que pueden no ser idénticas ni independientes, al condicionar sobre la fijación de las variables V , podemos aproximar el comportamiento conjunto. En particular, para cualquier par de índices i, j , intentamos lograr que las distribuciones condicionadas sean aproximadamente equivalentes:

$$F_i \mid \{V_k = v_k \ \forall k \in \mathcal{I}\} \approx F_j \mid \{V_k = v_k \ \forall k \in \mathcal{I}\} \quad (6.1)$$

2. **Elección del umbral T :** El siguiente paso es la definición del umbral T para el algoritmo.

Primero definiremos $X_{\mathcal{H}}$ como una elección aleatoria de precios $x \in \mathcal{H}_v$. Luego asumimos que el umbral que maximiza la ganancia esperada del algoritmo sobre $X_{\mathcal{H}}$, será el mismo que maximiza la ganancia esperada en las instancias futuras X bajo las mismas condiciones:

$$\hat{T} = \arg \max_T \mathbb{E}(\text{ALG}_T(X_{\mathcal{H}})) = \arg \max_T \mathbb{E}[\text{ALG}_T(X \mid \{V_i = v_i \ \forall i \in \mathcal{I}\})]$$

Esta suposición es fuerte pues asume que la distribución de los precios futuros está solamente definida por las características fijadas en los precios pasados. En la práctica esto no tiene por qué ser cierto, pero en muchos casos entrega una aproximación adecuada. Si la suposición (6.1) es correcta, dado el teorema 3.1 entonces $\hat{T} \approx \mathbb{E}(X_{\mathcal{H}})$. Contrastaremos esta hipótesis numéricamente más adelante.

6.1.2. Modelo para una variedad de artículos

En contraposición con el modelo anterior, en vez de fijar las características del artículo a transar consideraremos una familia de combinaciones de características. Esto puede ampliarse de forma más general en diferentes tipos de artículos

1. Para considerar variaciones de un mismo artículo, como por ejemplo un mismo modelo de auto pero en diferentes condiciones.
2. Para considerar las ventajas de intercambiar diferentes artículos en instancias más convenientes, por ejemplo, en el intercambio de divisas.

En ambos casos pensaremos que la elección del umbral será relativo a un artículo (Con características fijas) en particular.

Para esto consideraremos los algoritmos definidos en 4.1, 4.3 y ??.

6.2. Mercados a estudiar

La idea de este análisis con bases de datos reales es testear el comportamiento de los algoritmos estudiados en esta tesis frente a la flexibilidad de los supuestos pedidos en sus planteamientos teóricos.

Primero, se estudió el mercado de **subastas de autos usados**, que se caracteriza por poseer ciertas propiedades que, en teoría, favorecen la aplicación de los algoritmos, como la independencia parcial entre precios finales de distintas subastas, o la existencia de afiliación de precios con tendencias más fáciles de modelar y predecir. Este tipo de mercado también refleja cómo la intervención de agentes con ventajas puede afectar la competencia efectiva [7].

La segunda base de datos corresponde a **tasas de cambio de divisas internacionales**, un mercado que suele modelarse de forma estocástica. Los tipos de cambio están fuertemente interconectados, respondiendo a eventos económicos globales y redes de capital [26], lo cual desafía las hipótesis de independencia entre monedas. Aunque existen algunas metodologías para aprovechar los patrones en ciertas tendencias, estas no son predecibles sin mayor información técnica sobre los respaldos de los precios mismos y no garantizan una ganancia esperada no negativa para los algoritmos.

A pesar de las particularidades de cada mercado, se diseñó una metodología que permite aplicar estos algoritmos para, en el peor de los casos, reducir los riesgos asociados y, en el mejor de los casos, maximizar una ganancia positiva.

6.2.1. Definición de las métricas de desempeño (α)

Para evaluar el desempeño del algoritmo de compra y venta implementado, se definieron las siguientes métricas basadas en el ratio entre la ganancia obtenida por el algoritmo (ALG_T) y la ganancia óptima teórica (OPT):

- **α_{training} :** Esta métrica se calcula al aplicar el algoritmo sobre los precios del conjunto de entrenamiento (*training*), utilizando un umbral T definido como el promedio de los precios en el periodo de entrenamiento. Se define como:

$$\alpha_{\text{training}} = \frac{ALG_T^{\text{training}}}{OPT^{\text{training}}},$$

donde ALG_T^{training} es la ganancia obtenida por el algoritmo en el periodo de entrenamiento, y OPT^{training} es la ganancia óptima en el mismo periodo.

- **α_{test} :** Esta métrica se calcula al aplicar el algoritmo sobre todos los precios del conjunto de prueba (*test*) utilizando el mismo umbral T obtenido como el promedio de los precios en el periodo de entrenamiento. Se define como:

$$\alpha_{\text{test}} = \frac{ALG_T^{\text{test}}}{OPT^{\text{test}}},$$

donde ALG_T^{test} es la ganancia obtenida por el algoritmo al aplicarse en todas las ventas del periodo de prueba, y OPT^{test} es la ganancia óptima en el mismo periodo.

- **$\alpha_{\text{promedio muestras}}$:** Esta métrica representa un promedio esperado de las ganancias del algoritmo en comparación con las ganancias óptimas, basado en un esquema de muestreo repetido dentro del conjunto de prueba. El proceso es el siguiente:

1. Se toma una venta al azar por día dentro del periodo de prueba, generando una muestra diaria de $n = 30$ ventas ordenadas cronológicamente.
2. Para cada muestra, se calculan ALG_T^{muestra} y OPT^{muestra} .
3. Este experimento se repite $N = 100,000$ veces, generando múltiples combinaciones de muestras.
4. Se define:

$$\mathbb{E}(ALG_T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ALG_T^{\text{muestra}_i}, \quad \mathbb{E}(OPT) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N OPT^{\text{muestra}_i}.$$

Finalmente, $\alpha_{\text{promedio muestras}}$ se calcula como:

$$\alpha_{\text{promedio muestras}} = \frac{\mathbb{E}(ALG_T)}{\mathbb{E}(OPT)}.$$

- **Distribución de ratios en las muestras:** Además de calcular $\alpha_{\text{promedio muestras}}$, para cada experimento (de los $N = 100,000$), se calcula el ratio entre ALG_T^{muestra} y OPT^{muestra} . Esto genera una distribución de ratios individuales:

$$\text{Ratio}_i = \frac{ALG_T^{\text{muestra}_i}}{OPT^{\text{muestra}_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Los cuartiles (primer cuartil $Q1$, mediana $Q2$, y tercer cuartil $Q3$) de esta distribución se reportan como indicadores de dispersión y tendencia central. Estas métricas permiten analizar la variabilidad del desempeño del algoritmo a nivel de cada muestra individual.

6.3. Implementación para ventas en subastas de autos

El objetivo de este análisis es seguir la metodología que nos pide seleccionar una secuencia de precios i.i.d. de artículos, identificando características específicas que permitan suficientes muestras de ventas. Para lograrlo, se realizó el siguiente proceso de tratamiento de los datos:

1. **Selección del artículo:** Se eligieron dos artículos definidos por su marca y modelo: Ford F-150 y Chevrolet Impala. Esta selección permite acotar el análisis a subgrupos específicos dentro de la base de datos, garantizando homogeneidad en las características iniciales.
2. **Agrupación de variables con alta variabilidad:** Algunas características, como la condición del auto (`condition`) y el odómetro (`odometer`), presentan una alta variabilidad. Al intentar fijar valores exactos para estas variables, se reduce significativamente el número de muestras disponibles, lo que limita la capacidad de análisis. Para mitigar este problema, se agruparon estas características en intervalos (*bins*), considerando que dos artículos tienen igualdad en una característica si pertenecen al mismo intervalo:
 - `condition` se agrupó en 5 intervalos uniformes.
 - `odometer` se dividió en 10 intervalos uniformes.
 - `sale_day` (día de la venta) se agrupó en periodos de 30 días.
3. **Selección de características correlacionadas:** Una vez agrupadas las características con alta variabilidad, el siguiente paso fue determinar qué características fijar. Para ello, se priorizaron las columnas con mayor correlación absoluta con el precio (`sellingprice`). Se definió un umbral de correlación U_{corr} para decidir qué columnas incluir en el análisis.

Existe un *trade-off* inherente en esta decisión:

- Fijar más columnas permite asumir que los precios de los artículos seleccionados tienen distribuciones iguales, ya que los artículos se vuelven más homogéneos.
 - Sin embargo, fijar más columnas reduce la cantidad de ejemplos disponibles tanto para entrenamiento (*training*) como para prueba (*test*). Esto puede afectar la confiabilidad del umbral T calculado y, en consecuencia, de los resultados obtenidos.
4. **División en conjuntos de entrenamiento y prueba:** Para cada combinación de U_{corr} , los datos se dividieron en dos periodos consecutivos de 30 días:
 - **Periodo de entrenamiento (*training*):** Se utilizó para calcular el umbral T , definido como el promedio de los precios en este periodo.
 - **Periodo de prueba (*test*):** Se utilizó para evaluar el desempeño del algoritmo, tanto considerando todas las ventas del periodo como realizando experimentos de muestreo.

6.3.1. Resultados para Ford F-150

Los resultados para Ford F-150, según el valor del umbral de correlación U_{corr} , se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 6.1: Resultados para Ford F-150

U_{corr}	Training	Test	T	α_{training}	α_{test}	Promedio α (100,000 muestras)
0.25	195	141	25751	0.754	0.4927	0.5879
0.5	448	347	25751	0.7364	0.7028	0.7299
0.75	702	571	28001	0.7421	0.5674	0.6189

Tabla 6.2: Distribución de α en las muestras para Ford F-150

U_{corr}	$Q1$	$Q2$	$Q3$
0.25	0.478	0.589	0.698
0.5	0.6478	0.7357	0.8122
0.75	0.5153	0.6172	0.7065

6.3.2. Resultados para Chevrolet Impala

Los resultados para Chevrolet Impala, según el valor del umbral de correlación U_{corr} , se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 6.3: Resultados para Chevrolet Impala

U_{corr}	Training	Test	T	α_{training}	α_{test}	Promedio α (100,000 muestras)
0.25	93	94	9901	0.7231	0.5616	0.5802
0.5	205	196	12801	0.7504	0.2484	0.3
0.75	438	421	11001	0.7333	0.75	0.6929

Tabla 6.4: Distribución de α en las muestras para Chevrolet Impala

U_{corr}	$Q1$	$Q2$	$Q3$
0.25	0.4564	0.575	0.6886
0.5	0.191	0.2981	0.4077
0.75	0.6035	0.7037	0.7883

6.4. Compra y venta de divisas

En esta sección, se aplica el algoritmo de compra y venta en el mercado de divisas internacionales. A diferencia del mercado de subastas de autos usados, las tasas de cambio de divisas

presentan una naturaleza estocástica y una alta interconexión, lo que desafía las hipótesis de independencia y predictibilidad necesarias para garantizar ganancias con algoritmos en línea. Los tipos de cambio responden a eventos económicos globales y muestran patrones difíciles de predecir sin información técnica detallada [26].

6.4.1. Implementación del algoritmo

Para evaluar el desempeño del algoritmo, se implementó una versión sencilla basada en políticas de umbral. Se consideraron periodos de tiempo que varían entre una y cuatro semanas. El proceso de implementación fue el siguiente:

1. **Selección de periodos:** Se seleccionaron aleatoriamente 90 días distintos como puntos de inicio de los periodos.
2. **División en periodos de entrenamiento y prueba:**
 - **Periodo de entrenamiento (*training*):** Utilizado para calcular el umbral T , definido como el promedio de las tasas de cambio en este periodo.
 - **Periodo de prueba (*test*):** Donde se aplicó el algoritmo utilizando el umbral T obtenido.
3. **Cálculo de las ganancias:** En cada muestra, se calcularon las ganancias del algoritmo (ALG) y las ganancias óptimas teóricas (OPT) tanto en el periodo de entrenamiento como en el de prueba.
4. **Cálculo de las métricas de desempeño:** Se obtuvieron los valores promedio de α_{training} y α_{test} para las 90 muestras, donde:

$$\alpha_{\text{training}} = \frac{\mathbb{E}[\text{ALG}_{\text{training}}]}{\mathbb{E}[\text{OPT}_{\text{training}}]}, \quad \alpha_{\text{test}} = \frac{\mathbb{E}[\text{ALG}_{\text{test}}]}{\mathbb{E}[\text{OPT}_{\text{test}}]}.$$

6.4.2. Resultados

Los resultados obtenidos para diferentes duraciones de los periodos se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 6.5: Resultados del algoritmo para distintos periodos en el mercado de divisas

Periodo (semanas)	α_{training}	α_{test}
1	0.5858	-0.2008
2	0.3804	-0.0682
3	0.2945	-0.1080
4	0.2596	-0.2756

6.4.3. Análisis de los resultados

Se observa que, a medida que aumenta la duración del periodo, el valor de α_{training} disminuye, lo que indica una reducción en la eficiencia del algoritmo durante el periodo de entrenamiento. Además, los valores negativos de α_{test} en todos los casos sugieren que el algoritmo no solo no logra ganancias comparables a las de la estrategia óptima, sino que ni siquiera obtiene ganancias esperadas positivas en el periodo de prueba. Esto refleja la dificultad de aplicar este tipo de algoritmos en mercados altamente volátiles y estocásticos como el de divisas internacionales.

6.4.4. Implementación del algoritmo con umbral variable

En esta sección, se implementa el *Algoritmo de Umbral Variable Dependiente de i* definido en la Definición 3.2. A diferencia del algoritmo anterior que utiliza un umbral constante T , este algoritmo emplea un umbral que varía en función del periodo i , es decir, $T(i) = f(i)$.

La función $f(i)$ se estima a partir de una regresión lineal de los precios en el periodo de entrenamiento. El objetivo es capturar la tendencia de los precios y ajustar el umbral de decisión en consecuencia.

Procedimiento de implementación

El proceso de implementación del algoritmo es el siguiente:

1. **Selección de periodos:** Se seleccionaron aleatoriamente 90 días distintos como puntos de inicio de los periodos.
2. **División en periodos de entrenamiento y prueba:**
 - **Periodo de entrenamiento (*training*):** Utilizado para estimar la función $f(i)$ mediante regresión lineal de los precios en este periodo.
 - **Periodo de prueba (*test*):** Donde se aplicó el algoritmo utilizando el umbral variable $T(i) = f(i)$ obtenido.
3. **Estimación de la función $f(i)$:**
 - Se obtienen los días de venta x y los precios y del periodo de entrenamiento.
 - Se calcula la regresión lineal $y = mx + n$, obteniendo los parámetros m y n .
 - Se define la función $f(i) = mi + n$, que representa el umbral variable para cada periodo i .
4. **Cálculo de las ganancias:** En cada muestra, se calcularon las ganancias del algoritmo (ALG) y las ganancias óptimas teóricas (OPT) tanto en el periodo de entrenamiento como en el de prueba.

5. **Cálculo de las métricas de desempeño:** Se obtuvieron los valores promedio de α_{training} y α_{test} para las 90 muestras, donde:

$$\alpha_{\text{training}} = \frac{\mathbb{E}[\text{ALG}_{\text{training}}]}{\mathbb{E}[\text{OPT}_{\text{training}}]}, \quad \alpha_{\text{test}} = \frac{\mathbb{E}[\text{ALG}_{\text{test}}]}{\mathbb{E}[\text{OPT}_{\text{test}}]}.$$

Resultados

Los resultados obtenidos para diferentes duraciones de los periodos se presentan en la Tabla 6.6.

Tabla 6.6: Resultados del algoritmo con umbral variable para distintos periodos en el mercado de divisas

Periodo (días)	α_{training}	α_{test}
7	0.7401	-0.1703
14	0.6114	-0.0567
21	0.5460	-0.1196
28	0.4732	-0.1350
35	0.4049	-0.2457

Análisis de los resultados

Se observa que, al igual que con el umbral constante, el valor de α_{training} disminuye a medida que aumenta la duración del periodo, sin embargo es claramente mayor en comparación. Por otro lado, los resultados de α_{test} son similares y nos revelan que el problema de tendencias es más complejo si no se considera información externa referente a los precios mismos.

Capítulo 7

Discusión

7.1. Interpretación de Resultados

El siguiente capítulo se divide en la discusión de los resultados teóricos y los resultados prácticos de esta tesis. El enfoque de este análisis será la aplicabilidad de los diferentes algoritmos en situaciones reales. La relación entre los resultados teóricos y prácticos es fundamental pues solo bajo el lente de las bases teóricas del comportamiento de los precios sobre los cuales se aplican las políticas de compra y venta se puede entender los resultados prácticos. Las siguientes discusiones revelarán en qué sentido los resultados contestan a esta problemática.

7.1.1. Resultados teóricos

El primer resultado teórico destacado es la relajación de la condición de que las variables sean independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) para alcanzar una cota de garantía de $\frac{1}{2}$. Se demostró que es suficiente que las distribuciones de los precios compartan la misma mediana.

En la práctica que dos precios sean idénticamente distribuidos es una situación concreta muy difícil de conseguir. Sin embargo, bajo ciertas condiciones las distribuciones de los precios son bastante similares. El resultado se vuelve importante pues nos dice que el algoritmo de umbral simple requiere solo una similitud débil entre las distribuciones de los precios para garantizar una cota significativa. Al requerir únicamente que las distribuciones compartan la mediana, se amplía significativamente el conjunto de situaciones en las que el algoritmo es aplicable. Además, esta condición facilita la determinación de un umbral T para definir las políticas de compra y venta, simplificando la implementación del algoritmo en contextos donde las distribuciones pueden variar pero mantienen una mediana común.

En cuanto a las extensiones del problema de trading prophets en esta tesis realizamos varias propuestas interesantes cuyos resultados teóricos nos indican su posible aplicabilidad. Por un lado la propuesta de un algoritmo de umbral variable para escenarios con tendencias

de precios es una extensión importante y natural, pues en muchos mercados los precios exhiben patrones dependientes en el tiempo. Si se conoce la tendencia que siguen los precios y sus componentes aleatorias se comportan de forma idénticamente distribuida, el algoritmo de threshold variable es la mejor opción de un algoritmo online según el teorema 3.15. En la realidad, es bastante difícil conocer la tendencia que siguen los precios, pudiendo incluso cambiar de forma aleatoria con el tiempo. El análisis de tendencias no es nuevo en el campo económico, donde se han estudiado escenarios con tendencias deterministas y otros con comportamientos estocásticos. Trabajos como el de Ahrens y Sharma [2] destacan esta dualidad al analizar los precios de recursos naturales, encontrando que algunos presentan una tendencia estacionaria determinista mientras que otros siguen procesos estocásticos no estacionarios.

Aunque nuevos métodos y tecnologías como las redes neuronales han demostrado ser útiles debido a su capacidad para modelar funciones complejas a partir de patrones en los precios, es fundamental entender que estas tendencias suelen derivarse de fenómenos que afectan los precios. Por ello, limitarse a intentar derivarlas exclusivamente de los patrones en los precios sin incorporar el análisis de dichos fenómenos puede ser insuficiente. En las secuencias temporales de precios, el análisis de tendencias es un área de estudio compleja, y cada mercado tiene sus propias variables que deben ser consideradas en una política de compra y venta.

7.1.2. Resultados prácticos

En cuanto a los resultados numéricos, las simulaciones realizadas proporcionan información valiosa más allá del análisis del peor caso. Es natural cuestionar qué tan representativo es el peor escenario en aplicaciones prácticas. Los resultados indican que, en el caso de precios independientes, más del 90 % de las simulaciones muestran una ganancia esperada mayor o igual al 70 % del máximo posible. Esto sugiere que, en la práctica, el algoritmo es más eficiente de lo que las garantías teóricas podrían indicar inicialmente.

Sin embargo, es crucial tener en cuenta las limitaciones de estas simulaciones. Las distribuciones de precios utilizadas se mantuvieron dentro de un intervalo fijo, una condición que puede no reflejar completamente la realidad del mercado, donde los precios pueden variar en rangos más amplios. Además, se observó que el largo de la secuencia de precios (n) no tiene un impacto significativo en los resultados para valores cercanos a 10. El parámetro σ , utilizado para convertir variables discretas en continuas al sumar una distribución normal con desviación estándar σ , influye en el valor mediano de α . A medida que σ aumenta, el valor mediano de α disminuye, aunque el percentil 90 de los valores de α se mantiene cercano a 0.7. Esto sugiere que valores de σ mayores hacen que las distribuciones sean más similares, lo cual es coherente con el aumento del peso de la componente normal.

En las implementaciones prácticas, se exploró el desempeño del algoritmo en un mercado de subastas y en el mercado de divisas. En el mercado de subastas, los resultados fueron consistentes con las simulaciones, alcanzando valores de α superiores a 0,7. Esto indica que la metodología es aplicable en este contexto y que la fijación de ciertas características permite asumir que los precios se comportan de forma independiente en periodos de tiempo específicos.

No obstante, la selección y cantidad de características a fijar no es una tarea trivial. Se observó que no siempre al fijar más o menos características se obtiene un valor de α mayor. Esto resalta la importancia de comprender en profundidad los datos y cómo las diferentes variables pueden influir en el precio.

En contraste, en el mercado de divisas, donde los precios presentan alta dependencia temporal y pueden ser modelados estocásticamente, los resultados fueron menos favorables. Según el teorema de *optimal stopping*, ningún algoritmo en línea puede garantizar una ganancia esperada positiva en estos casos. Se intentó mejorar el rendimiento mediante políticas basadas en tendencias, pero las mejoras fueron marginales. Esto podría atribuirse a varias razones: la suposición de que la tendencia es lineal, la consideración de que la tendencia del periodo previo está definida por todos los precios de ese periodo, y la asunción de que la longitud de una tendencia es constante. Una posible línea de investigación futura sería explorar el uso de información adicional, como el comportamiento de otras monedas con correlación no nula, para predecir de manera más efectiva el inicio y fin de las tendencias.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis, hemos abordado el desafío de implementar algoritmos *online* para problemas de *trading* en diferentes contextos, centrándonos en mejorar las garantías teóricas y su aplicación práctica en escenarios reales.

En primer lugar, logramos relajar la condición de que las variables aleatorias sean independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) para alcanzar una cota de garantía de $\frac{1}{2}$. Demostramos que es suficiente que las distribuciones de precios compartan la misma mediana, lo cual amplía considerablemente el ámbito de aplicación de los algoritmos de compra y venta. Esta relajación es particularmente útil en contextos donde la suposición de i.i.d. es demasiado restrictiva y difícil de cumplir en la práctica.

Además, propusimos un algoritmo de umbral variable para escenarios con tendencias de precios, ampliando el análisis a situaciones más realistas donde los precios presentan dependencia temporal. Este enfoque considera las tendencias como funciones localmente modelables y predecibles, lo que abre la posibilidad de integrar técnicas avanzadas, como redes neuronales, para mejorar la predicción y adaptación del algoritmo en mercados con dinámicas complejas.

En cuanto a los resultados numéricos, nuestras simulaciones mediante métodos de Monte Carlo mostraron que, en la práctica, el algoritmo supera con creces las garantías teóricas en la mayoría de los casos. Encontramos que en más del 90 % de las simulaciones, la ganancia esperada del algoritmo es al menos el 70 % de la ganancia del profeta. Este hallazgo indica que el algoritmo es altamente eficiente en situaciones prácticas, incluso cuando las condiciones ideales de los modelos teóricos no se cumplen completamente.

Finalmente, desarrollamos metodologías para la implementación del algoritmo en escenarios reales, como mercados de subastas y de divisas. En el mercado de subastas, los resultados prácticos confirmaron las predicciones de las simulaciones, mientras que en el mercado de divisas evidenciamos la dificultad de aplicar algoritmos en línea debido a la alta dependencia temporal de los precios y las limitaciones impuestas por el teorema de *optimal stopping*.

8.1. Implicaciones y Relevancia

Los avances logrados en esta tesis tienen importantes implicaciones tanto teóricas como prácticas. Teóricamente, las mejoras en las cotas de garantía y la relajación de condiciones estrictas amplían el conocimiento sobre los límites y capacidades de los algoritmos de *trading* en línea. Prácticamente, estos resultados proporcionan herramientas más robustas y adaptables para la toma de decisiones en mercados financieros y otros ámbitos donde la incertidumbre y la variabilidad de los precios son factores críticos.

La capacidad de implementar algoritmos con garantías teóricas sólidas en escenarios reales es un paso significativo hacia el desarrollo de estrategias de *trading* algorítmico más eficientes y confiables. Al demostrar que el algoritmo puede mantener un rendimiento elevado en la práctica, incluso cuando las condiciones ideales no se cumplen, validamos su utilidad y potencial impacto en la industria.

8.2. Limitaciones y Consideraciones

A pesar de los resultados positivos, reconocemos las limitaciones del estudio. Nuestras simulaciones y aplicaciones prácticas asumieron ciertas condiciones que pueden no reflejar completamente la complejidad de los mercados reales. Por ejemplo, consideramos distribuciones de precios dentro de un intervalo fijo y asumimos independencia en contextos donde podría existir correlación.

En el mercado de divisas, las limitaciones fueron más evidentes. La alta dependencia temporal y la naturaleza estocástica de los precios dificultan la aplicación efectiva de algoritmos en línea. Además, las suposiciones simplificadas sobre las tendencias, como su linealidad y longitud constante, pueden no capturar adecuadamente la realidad de los movimientos del mercado.

Sin embargo todas estas limitaciones aportan información fundamental para la aplicabilidad de los algoritmos online. No solo es importante entender cuando es útil utilizar un modelo, si no también cuando no lo es.

8.3. Recomendaciones para Trabajos Futuros

- **Explorar diferentes distribuciones y condiciones:** Ampliar las simulaciones y análisis teóricos a distribuciones de precios más diversas y condiciones menos restrictivas podría proporcionar una comprensión más profunda del rendimiento del algoritmo en diferentes escenarios.
- **Integración de técnicas avanzadas:** Incorporar tecnologías como redes neuronales y aprendizaje automático para modelar tendencias y patrones complejos en los precios podría mejorar la adaptabilidad y eficacia del algoritmo en mercados con alta volatilidad y dependencia temporal.

- **Análisis de correlaciones y características de los datos:** Investigar más a fondo cómo la correlación entre diferentes variables y las características específicas de los datos afectan el rendimiento del algoritmo. Esto incluye la selección óptima de características para fijar en mercados como el de subastas.
- **Aplicaciones en otros mercados y contextos:** Extender la aplicación del algoritmo a otros mercados financieros y sectores donde los precios presentan comportamientos distintos podría validar su versatilidad y descubrir nuevas áreas de mejora.
- **Desarrollo de políticas adaptativas:** Diseñar políticas de compra y venta que se adapten dinámicamente a las condiciones cambiantes del mercado, posiblemente utilizando información adicional de activos correlacionados o indicadores económicos.

8.4. Reflexión Final

Los problemas de parada óptima son, en esencia, problemas de toma de decisiones. En el mundo de hoy, la tecnología nos ha otorgado el poder de hacer mucho, a veces quizás demasiado. Por ello, se vuelve cada vez más importante, no solo el **poder** hacer, sino el saber qué y cuándo hacerlo.

En esta tesis, estudiamos el problema de **trading prophets**, definido en el contexto de decidir cuándo comprar y cuándo vender un artículo para maximizar una ganancia. Aunque a primera vista puede parecer un problema muy específico, en términos teóricos, la idea de comprar y vender puede extenderse a nociones más amplias. Comprar un artículo equivale, en muchos sentidos, a tomar la decisión de comprometerse con una línea de acción. Luego, al estar en esa línea, decidir vender o no hacerlo se traduce en la capacidad de soltar: de saber cuándo está bien dejar ir, y cómo ese acto puede abrirnos las puertas a nuevas líneas de acción y decisiones. La ganancia que buscamos maximizar es, al final, una medida cuantitativa de la diferencia entre lo que ganamos y lo que perdemos al generar y soltar estos compromisos, ya sean con precios, bienes, grupos o ideas.

Como destacamos en la discusión y las conclusiones, los algoritmos online son guías construidas bajo suposiciones sobre la naturaleza de los precios. En muchos casos, no son suficientes para garantizar una ganancia; sin embargo, en situaciones de incertidumbre, tan comunes en el mundo actual, nos ofrecen un punto de partida desde el cual observar, ayudándonos a discernir cuándo tiene sentido detenernos y cuándo es el momento de arriesgarnos.

Bibliografía

- [1] Algorithmic trading market size, share & trends analysis report. <https://www.grandviewresearch.com/industry-analysis/algorithmic-trading-market-report>, 2023. Accessed: 2024-10-02.
- [2] W. Ashley Ahrens and Vijaya R. Sharma. Trends in natural resource commodity prices: Deterministic or stochastic? *Journal of Environmental Economics and Management*, 33(1):59–74, 1997.
- [3] Saeed Alaei. *Bayesian Combinatorial Auctions: Expanding Single Buyer Mechanisms to Many Buyers*, volume 43. 2014.
- [4] Susanne Albers. *Online Algorithms: A Survey*, volume 97. 2003.
- [5] Youssef Boutyour and Abdelhakim Idrissi. *Deep Reinforcement Learning in Financial Markets Context: Review and Open Challenges*, volume 1102 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer, Cham, 2023.
- [6] Johannes Brustle, José Correa, and otros. *The Competition Complexity of Prophet Inequalities*. 2024.
- [7] Kalyn T. Coatney, Sherrill Shaffer, and Dale J. Menkhaus. Auction prices, market share, and a common agent. *The Australian National University – Centre for Applied Macroeconomic Analysis Working Paper*, (24/2011), July 2011.
- [8] Jose Correa, Patricio Foncea, Ruben Hoeksma, Tim Oosterwijk, and Tjark Vredeveld. Recent developments in prophet inequalities. *SIGecom Exch.*, 17(1):61–70, May 2019.
- [9] José Correa, Andrés Cristi, Paul Dütting, Mohammad Hajiaghayi, Jan Olkowski, and Kevin Schewior. *Trading Prophets*. 2023.
- [10] José Correa, Patricio Foncea, Ruben Hoeksma, Tim Oosterwijk, and Tjark Vredeveld. *Recent Developments in Prophet Inequalities*, volume 17. November 2019.
- [11] Manfred Deistler and Wolfgang Scherrer. Autoregressive processes. In *Time Series Models*, volume 224 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 91–125. Springer, Cham, 2022.
- [12] Paul Dütting, Michal Feldman, Thomas Kesselheim, and Brendan Lucier. *Prophet Inequalities Made Easy: Stochastic Optimization by Pricing Nonstochastic Inputs*, volume 49. 2020.

- [13] Thomas S. Ferguson. *Optimal Stopping and Applications*. UCLA, 2008. Chapter 1. Stopping Rule Problems.
- [14] James B. Heaton, Nicholas G. Polson, and Jan Hendrik Witte. Deep learning in finance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 33(1):3–12, 2017.
- [15] Calypso Herrera, Florian Krach, Pierre Ruysen, and Josef Teichmann. *Optimal Stopping via Randomized Neural Networks*, volume 3. 2024.
- [16] Stylianos Kampakis. *Economies of Prediction: A New Industrial Revolution*, pages 239–252. Apress, Berkeley, CA, 2023.
- [17] Jaspreet Kaur, Kuldeep Singh Parmar, and Sarbjeet Singh. Autoregressive models in environmental forecasting time series: a theoretical and application review. *Environmental Science and Pollution Research*, 30:19617–19641, 2023.
- [18] Ulrich Krengel and Louis Sucheston. On semiamarts, amarts, and processes with finite value. In *Probability on Banach Spaces*, volume 4 of *Advances in Probability and Related Topics*, pages 197–266. Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [19] Volodymyr Kuleshov and Doina Precup. Algorithms for multi-armed bandit problems. *Journal of Machine Learning Research*, 1, 02 2014.
- [20] Sandeep Kumar and Deepak Garg. Online financial algorithms competitive analysis. *CoRR*, abs/1209.6489, 2012.
- [21] Scott M. LaLonde. The martingale stopping theorem. <https://math.dartmouth.edu/~pw/math100w13/lalonde.pdf>, 2013. Accessed: 14-Oct-2024.
- [22] Alina Cornelia Luchian and Vasile Strat. The trustworthiness of ai algorithms and the simulator bias in trading. In *Proceedings of the 7th International Conference on Economics and Social Sciences (ICESS)*, pages 211–220. Bucharest University of Economic Studies, Romania, 2024.
- [23] Brendan Lucier. *An Economic View of Prophet Inequalities*, volume 16. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, sep 2017.
- [24] Daniel Sleator Mark Manasse, Lyle McGeoch. *Competitive algorithms for on-line problems*. 1988.
- [25] Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, and Geoffrey G. Vining. *Introduction to Linear Regression Analysis (4th ed.)*. Wiley & Sons, 2006.
- [26] Hélène Rey, Vania Stavrakeva, and Jenny Tang. Currency centrality in equity markets, exchange rates and global financial cycles. *National Bureau of Economic Research Working Paper Series*, (33003), September 2024.
- [27] Herbert Robbins. Some aspects of the sequential design of experiments. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58(5):527–535, 1952.
- [28] C.P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*. Springer Verlag, 2004.

- [29] Omer Berat Sezer, Mehmet Ugur Gudelek, and Ahmet Murat Ozbayoglu. Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005–2019. *Applied Soft Computing*, 90:106181, 2020.
- [30] Daniel D. Sleator and Robert E. Tarjan. *Amortized efficiency of list update and paging rules*, volume 28. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, feb 1985.
- [31] Aleksandrs Slivkins. *Introduction to Multi-Armed Bandits*. 2024.
- [32] Herman Wold. A study in the analysis of stationary time series. *Journal of the Institute of Actuaries*, 70(1):113–115, 1939. Price kr. 6.

Apéndice A

Anexo