

# 基于氯化锂水溶液的太阳中微子探 测技术及灵敏度研究

(申请清华大学理学博士学位论文)

培养单位：工程物理系

学 科：物理学

研 究 生：邵文辉

指 导 教 师：王 菁 副教授

二〇二四年三月

基于氯化锂水溶液的太阳中微子探测技术及灵敏度研究

邵文辉

# **Solar Neutrino Detection Technology and Sensitivity Research Based on Lithium Chloride Aqueous Solution**

Dissertation submitted to  
**Tsinghua University**  
in partial fulfillment of the requirement  
for the degree of  
**Doctor of Philosophy**  
in  
**Physics**

by  
**Shao Wenhui**  
Dissertation Supervisor: Associate Professor Wang Zhe

**March, 2024**



# 学位论文公开评阅人和答辩委员会名单

## 公开评阅人名单

无（全匿名评阅）

## 答辩委员会名单

主席	CHEN SHAOMIN	教授	清华大学
委员	李玉峰	研究员	中国科学院 高能物理研究所
	钱文斌	教授	中国科学院大学
	续本达	副教授	清华大学
	王喆	副教授	清华大学
秘书	张志财	助理教授	清华大学



## 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》及上级教育主管部门具体要求，向国家图书馆报送相应的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

作者签名: 邵文辉

日期: 2024.5.26

导师签名: 王华

日期: 2024.5.26



## 摘要

在太阳中微子的领域，很多物理研究都与中微子能量有着密切的关系，包括太阳高密度物质所致的概率上升效应，地球物质密度所致的概率变化效应，以及轻惰性中微子导致的中微子振荡概率变化。精确测量电子中微子存活概率随着能量的变化曲线对研究这些太阳中微子物理有着直接的重要作用。

这些太阳中微子物理目前的实验探测灵敏度很低，未来实验所需要的曝光量很大。本文基于氯化锂水溶液的物理和化学特性，对其在太阳中微子物理的研究潜能展开了研究。主要工作内容和创新性成果如下：

1. 首次提出了基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案，研究了探测器的性能。揭示了锂-7 对电子中微子的带电流探测过程截面高，阈值低，反冲电子能量与入射中微子能量有一一对应关系，并且锂-7 天然丰度高，氯化锂水溶性高的特点。太阳硼-8 电子中微子谱加权的总带电流相互作用截面约为与电子的弹性散射过程的 60 倍。
2. 给出了该中微子探测器方案对于太阳中微子振荡参数的预期测量精度。基于 6400 吨·年的有效曝光量，对于  $\sin^2 \theta_{12}$ ，预期相对精度可以达到 6.3%，对于  $\Delta m_{21}^2$ ，预期相对精度可以达到 20%。
3. 给出了该中微子探测器方案对于太阳高密度物质所致的中微子存活概率上升效应的探测灵敏度。基于 6400 吨·年的有效曝光量，排除无概率上升效应的灵敏度能够达到  $3.7\sigma$ 。
4. 给出了该中微子探测器方案对于来自太阳的轻惰性中微子的参数空间的排除灵敏度。基于 6400 吨·年的有效曝光量，对混合参数对  $(\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2)$  的排除能力在 99% 及以上的置信区间覆盖了顶点为  $(10^{-4}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 0)$  的近似三角形区域。
5. 发现基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案在同样曝光量的条件下，对比顶级神冈的纯水探测方案，以及 DUNE 的液氩探测方案有着明显优势。要达到相同的太阳中微子概率上升效应的探测灵敏度，氯化锂水溶液探测器所需的有效曝光量可以低两个数量级。

**关键词：**氯化锂；太阳中微子；物质效应；惰性中微子；锦屏中微子实验

## Abstract

In the field of solar neutrinos, many physical studies are closely related to neutrino energy, including the upturn effect caused by high-density solar matter, the probability change effect caused by earth matter, and the probability change of neutrino oscillation caused by light sterile neutrinos. Accurate measurement of the curve of electron-neutrino survival probability with energy plays a direct and important role in studying these solar neutrino physics.

At present, the detection sensitivity of solar neutrino physics, such as the upturn effect caused by high-density solar matter, is very low, and the exposure required for future experiments will be large. Based on the physical and chemical characteristics of lithium chloride aqueous solution, this thesis studies its research potential in solar neutrino physics. The main contents of the work and innovative achievements are as follows:

1. A neutrino detector based on saturated aqueous solution of lithium chloride is proposed for the first time, and the performance of the detector is studied. It is revealed that the charged-current process of lithium-7 to electron-neutrino has the characteristics of high cross section, low threshold, one-to-one correspondence between recoil electron energy and incident neutrino energy, high natural abundance of lithium-7 and high water solubility of lithium chloride. The total charged-current interaction cross section weighted by solar boron-8 electron-neutrino spectrum is about 60 times of the elastic scattering process with electrons.
2. The expected measurement accuracy of the neutrino detector scheme to solar neutrino oscillation parameters is given. Based on the effective exposure of 6400 ton-year, the expected relative accuracy can reach 6.3% for  $\sin^2 \theta_{12}$  and 19.8% for  $\Delta m_{21}^2$ .
3. The detection sensitivity of the neutrino detector scheme to the upturn effect of neutrino survival probability caused by high-density solar matter is given. Based on the effective exposure of 6400 ton-year, the sensitivity of excluding no upturn effect can reach  $3.7\sigma$ .
4. The exclusion sensitivity of the neutrino detector scheme to the parameter space of light sterile neutrinos from the sun is given. Based on the effective exposure of 6400 ton-year, For the sterile neutrino mixing parameter pair ( $\sin^2 2\alpha$ ,  $\Delta m_{01}^2$ ), the confidence interval with exclusion ability of 99% or above covers the approximate

---

Abstract

---

triangle region with vertices of  $(10^{-4}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 0)$ .

5. It is found that the neutrino detector scheme based on saturated aqueous solution of lithium chloride has obvious advantages over the pure water detection scheme of Hyper-Kamiokande and the liquid argon detection scheme of DUNE under the same exposure. To achieve the same detection sensitivity of solar neutrino probability upturn effect, the effective exposure required by lithium chloride aqueous solution detector is two orders of magnitude lower.

**Keywords:** lithium chloride; solar neutrino; matter effect; sterile neutrino; Jinping neutrino experiment

## 目 录

摘要.....	I
Abstract.....	II
目录.....	IV
插图清单.....	VIII
附表清单.....	XIX
符号和缩略语说明.....	XXI
第1章 引言 .....	1
1.1 中微子物理 .....	2
1.1.1 标准模型简介.....	2
1.1.2 中微子振荡.....	4
1.1.3 中微子质量模型.....	7
1.2 太阳中微子 .....	8
1.2.1 太阳标准模型.....	8
1.2.2 太阳中微子实验.....	9
1.2.3 下一代太阳中微子实验.....	14
1.3 本文主要研究内容和研究意义 .....	16
1.3.1 太阳中微子振荡参数的测量.....	16
1.3.2 太阳高密度物质所致的概率上升效应.....	19
1.3.3 太阳轻惰性中微子模型.....	21
1.3.4 地球效应和地球成像.....	23
1.3.5 带电流技术的发展.....	26
1.4 本文章节安排.....	28
第2章 太阳中微子产生、演化、飞行全过程模拟 .....	29
2.1 太阳中微子的产生模拟 .....	29
2.2 演化过程计算方法 .....	30
2.2.1 解析方法.....	30
2.2.2 分层演化方法.....	31
2.2.3 龙格-库塔方法.....	35
2.2.4 多种方法的比较.....	36

2.3 在太阳内部的演化 .....	42
2.3.1 中心处产生的中微子有效质量态的概率 .....	42
2.3.2 在太阳内部的产生区域积分与穿越路径 .....	43
2.4 日地之间的飞行过程 .....	46
2.4.1 中微子存活概率的抹平效应 .....	46
2.4.2 锦屏地下实验室曝光函数的计算 .....	47
2.5 在地球内部的演化 .....	51
2.5.1 穿过地球直径的中微子有效质量态的概率 .....	51
2.5.2 在地球内部的穿越路径 .....	51
2.6 本章小结 .....	52
<b>第 3 章 氯化锂水溶液中的中微子探测过程 .....</b>	<b>55</b>
3.1 氯化锂水溶液对于中微子的探测过程 .....	55
3.1.1 电子中微子的探测 .....	55
3.1.2 反电子中微子的探测 .....	57
3.2 散射截面的计算 .....	57
3.2.1 带电流截面的计算 .....	57
3.2.2 弹性散射截面的计算 .....	59
3.3 不同振荡构型下的太阳中微子能谱 .....	61
3.4 对于太阳中微子的研究优势 .....	64
3.4.1 概率上升效应的研究优势 .....	64
3.4.2 太阳轻惰性中微子的研究优势 .....	67
3.4.3 地球物质效应的研究优势 .....	68
3.5 本章小结 .....	71
<b>第 4 章 氯化锂水溶液探测器性质分析 .....</b>	<b>72</b>
4.1 氯化锂水溶液的性质 .....	72
4.2 氯化锂水溶液的事例率预测 .....	73
4.3 北方夜视光电倍增管高量子效率的验证 .....	74
4.3.1 实验设置和流程 .....	74
4.3.2 实验测量结果和分析 .....	76
4.4 探测器方案 .....	80
4.4.1 氯化锂水溶液探测器方案 .....	80
4.4.2 Super-K 探测器和 SNO (SNO+) 探测器的性质 .....	81
4.4.3 氯化锂水溶液探测器属性预期 .....	85

4.5 事例判选 .....	86
4.5.1 能量判选条件 .....	86
4.5.2 角度判选条件 .....	87
4.5.3 事例判选条件 .....	87
4.6 本章小结 .....	88
<b>第 5 章 灵敏度分析方法 .....</b>	<b>89</b>
5.1 弹性散射事例的选择效率 .....	89
5.2 模拟能谱 .....	91
5.3 系统误差的处理 .....	94
5.3.1 带电流截面误差 .....	94
5.3.2 弹性散射事例选择效率误差 .....	94
5.3.3 靶质量、取数时间、中微子通量总误差 .....	96
5.4 拟合统计量和拟合方法 .....	96
5.4.1 拟合统计量 .....	96
5.4.2 拟合方法 .....	97
5.4.3 阿西莫夫数据集 .....	97
5.5 本章小结 .....	97
<b>第 6 章 灵敏度分析结果 .....</b>	<b>99</b>
6.1 太阳中微子振荡参数的探测灵敏度研究 .....	99
6.1.1 $\theta_{13}$ 作为系统误差的拟合 .....	99
6.1.2 $\theta_{13}$ 作为待拟合参数的拟合 .....	101
6.2 概率上升效应的探测灵敏度研究 .....	102
6.2.1 概率曲线的二次函数拟合 .....	106
6.2.2 概率曲线的一次函数拟合 .....	109
6.2.3 探测灵敏度分析 .....	111
6.3 太阳轻惰性中微子的探测灵敏度研究 .....	115
6.3.1 费尔德曼-科森方法的应用 .....	118
6.3.2 拟合结果的检查 .....	120
6.3.3 误差的影响 .....	121
6.4 地球物质效应和地球成像的研究 .....	125
6.4.1 事例数分布的结构 .....	125
6.4.2 地幔-地核双层成像 .....	126
6.4.3 地球效应 .....	130

## 目 录

---

6.5 DUNE 液氩探测器的表现 .....	133
6.6 本章小结 .....	135
<b>第 7 章 总结与展望 .....</b>	<b>138</b>
7.1 论文工作总结 .....	138
7.2 展望 .....	140
<b>参考文献 .....</b>	<b>142</b>
<b>附录 A 中微子的物质效应 .....</b>	<b>157</b>
<b>附录 B 地球公转和自转所致的中微子通量变化 .....</b>	<b>178</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>182</b>
<b>声 明 .....</b>	<b>183</b>
<b>个人简历、在学期间完成的相关学术成果 .....</b>	<b>184</b>
<b>指导教师评语 .....</b>	<b>185</b>
<b>答辩委员会决议书 .....</b>	<b>186</b>

## 插图清单

图 1.1 标准模型中的四大类粒子，分别是夸克（粉色），轻子（绿色），规范玻色子（淡蓝色），希格斯粒子（黄色）。图片修改自文献 <sup>[35]</sup> 。 .....	3
图 1.2 Super-K 实验 <sup>[29]</sup> 于 1998 年观测到大气中微子发生了 $\nu_\mu$ 的转化，而且是振荡转化。本图来源于 <sup>[29]</sup> 。 .....	4
图 1.3 pp 链和 CNO 循环，本图来自于 <sup>[83]</sup> 。 .....	8
图 1.4 太阳标准模型 B16-GS98 关于太阳中微子能谱的预测，本图数据来自于 <sup>[89]</sup> 。 .....	10
图 1.5 (a) 多个太阳中微子实验所测到的太阳中微子通量和标准太阳模型 BS05-GS98 关于中微子通量的预测的比较，尽管这些中微子实验有着不同的能量阈值，但均出现了中微子通量的缺失现象，本图来源于 <sup>[101]</sup> 。(b) Borexino 所测到的太阳中微子通量和标准太阳模型 B16-GS98 关于中微子通量的预测的比较，同样观测到太阳中微子缺失现象，本图来源于 <sup>[102]</sup> 。 .....	10
图 1.6 SNO 实验 <sup>[6]</sup> 于 2002 年观测到 $\nu_\mu$ 和 $\nu_\tau$ 出现的数量刚好等于 $\nu_e$ 消失的数量。本图来源于 <sup>[99]</sup> 。并且 $\nu_e$ 和 $\nu_{\mu,\tau}$ 的截面比约为 6 : 1，所以弹性散射过程探测到的中微子通量也与太阳标准模型预测在误差范围内一致。 .....	13
图 1.7 Borexino 于 2023 年 7 月使用全部的数据给出了 CNO 中微子的最终测量结果，以 $8\sigma$ 排除无 CNO 中微子假设，与高金属丰度太阳模型（粉色区域）相符，但精度还不足以完全排除低金属丰度太阳模型（淡蓝色区域），本图来源于 <sup>[114]</sup> 。 .....	14
图 1.8 (a) 中微子和 Xe 核发生 CEvNS，不同反应阈值下，对应不同种类的中微子，能够拟合出不同质量的 WIMP，本图来自于 <sup>[139]</sup> 。(b) 多个暗物质实验都在逼近“中微子地板”，即达到 WIMP 的参数空间能够被太阳中微子信号伪装出来，本图来自于 <sup>[140]</sup> 。 .....	16
图 1.9 (a) $\Delta m_{21}^2$ 和 $\sin^2 \theta_{12}$ 的允许区域，其中包括了太阳中微子实验结果（绿色区域）和 KamLAND 反应堆中微子实验结果（蓝色区域），以及联合拟合结果（红色区域）。本图来自于 <sup>[143]</sup> 。(b) $\sin^2 \theta_{13}$ 和 $\sin^2 \theta_{12}$ 的允许区域 <sup>[10]</sup> ，其中包括了太阳中微子实验结果（绿色区域）和 KamLAND 反应堆中微子实验结果（蓝色区域）以及联合拟合结果（红色区域）。黄色置信带来自于大亚湾中微子实验 <sup>[144]</sup> ，本图来自于 <sup>[143]</sup> 。 .....	18

- 
- 图 1.10 DUNE 关于太阳中微子振荡参数  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\theta_{12}$  的预期的约束能力, 以及和 JUNO 的模拟结果的对比, 本图来源于<sup>[138]</sup>。 ..... 19
- 图 1.11 (a) LMA 解下  $\nu_e$  存活概率曲线会出现太阳高密度物质所致的概率上升效应, 一并画出的还有太阳中微子实验关于  $P_{ee}$  的测量值, 本图来源于<sup>[143]</sup>。(b) 质量变化的中微子影响共振区  $\nu_e$  存活概率, 本图来源于<sup>[24]</sup>。(c) 非标准相互作用导致了偏离 LMA 所预测的结果, 本图来源于<sup>[23]</sup>。(d) 轻惰性中微子的存在使得共振区中的  $\nu_e$  存活概率的图像不但出现了下沉的结构, 还出现了全新的扭动的结构, 本图来源于<sup>[26]</sup>。 ..... 20
- 图 1.12 (a) SNO 关于太阳高密度物质所致的概率上升效应的测量结果, 虚线是最佳拟合值下,  $\nu_e$  存活概率随着能量的变化, 灰色阴影带是理论预测  $1\sigma$  的不确定度, 蓝色线代表 SNO 测量到的  ${}^8\text{B}$  中微子存活概率的实验结果<sup>[11]</sup>, 蓝色阴影区是实验结果的  $1\sigma$  误差, 本图来源于<sup>[146]</sup>。(b) SK 关于太阳高密度物质所致的概率上升效应的最新测量结果, 约  $1\sigma$  排除水平的振荡概率, 本图来源于<sup>[19]</sup>。 ..... 21
- 图 1.13 5 MeV  ${}^8\text{B}$  中微子在不同  $\sin^2 2\alpha - R_\Delta$  参数下的存活概率, 使用的 LMA 解的参数为  $\Delta m_{21}^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ ,  $\tan^2 \theta_{12} = 0.4$ , 本图来源于<sup>[148]</sup>。 ..... 23
- 图 1.14 对惰性中微子混合参数的全局卡方分析, 分析包括了 SNO 三期的实验数据, 以及其他太阳中微子实验的数据, 得到的最佳拟合点为  $\sin^2 2\alpha = 2.8 \times 10^{-3}$ , 以及  $R_\Delta = 0.11$ 。 $\chi^2_{\min}/\text{ndf} = 132.03/120$ 。使用的 LMA 参数为  $\Delta m_{21}^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ ,  $\tan^2 \theta_{12} = 0.4$ 。本图来源于<sup>[148]</sup>。 ..... 24
- 图 1.15 (a) Super-K 于 2014 年关于昼夜不对称效应的第一个迹象, 本图来源于文献<sup>[150]</sup>。(b) Super-K 在 2020 年关于 SK-IV 更新的昼夜不对称效应, 本图来源于文献<sup>[19]</sup>。两张图中黑色十字线都表示数据点, 红色线是预期的昼夜不对称效应的变化。 ..... 25
- 图 2.1 根据 SSM B16-GS98 预测, pp 链产生的中微子(左图)和 CNO 循环产生的中微子(右图)在太阳内部产生区域, 即 0.3 个太阳半径区域内, 以太阳半径  $R_\odot$  为单位的径向分布, 本图数据来自于<sup>[89]</sup>。 ..... 30
- 图 2.2 分层演化方法下, 中微子穿越常数密度的物质, 不同的分层数目所导致的  $P_{ee}$  随着路径的变化。 ..... 33
- 图 2.3 分层演化方法下, 中微子穿越变化密度的物质, 不同的分层数目所导致的  $P_{ee}$  随着路径的变化。 ..... 34
- 图 2.4  $P_{ee} = |\psi_{ee}|^2$  (红线)、 $P_1 = |\psi_{e1}|^2$  (绿线)、 $P_{1m} = |\psi_{e1}^m|^2$  (蓝线) 随着飞行路径的变化。 ..... 37

- 
- 图 2.5 三种物质势的图像, 包括线性函数势 (蓝色虚线), 指数函数势 (粉色点线), 双曲函数势 (黑色点划线)。同时将太阳带电流等效势 (红色实线) 一并示出作为对比。 ..... 38
- 图 2.6 (a) 在线性函数势下, 采用分层演化方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(b) 在线性函数势下, 采用 RK4 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(c) 在线性函数势下, 采用 RKF 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。 ..... 39
- 图 2.7 (a) 在指数函数势下, 采用分层演化方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(b) 在指数函数势下, 采用 RK4 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(c) 在指数函数势下, 采用 RKF 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。 ..... 40
- 图 2.8 (a) 在双曲函数势下, 采用分层演化方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(b) 在双曲函数势下, 采用 RKF 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。RK4 方法下关于双曲函数势的计算结果是发散的, 所以没有展示。 ..... 40
- 图 2.9 (a) 将分层演化和 RKF 方法得到的有效质量态的概率  $P_{im}$  作差, 作差的结果  $\Delta P_{im}$  在路径上始终归零。(b) 将分层演化和 RKF 方法得到的有效质量态的概率作差  $P_{im}$ , 作差的结果  $\Delta P_{im}$  在路径上始终归零。所以三种数值方法符合的很好。以上是在线性函数势下的对比, 在另外两种函数势的情况下也能得到一致的结果。 ..... 41
- 图 2.10 假设中微子在太阳中心处产生, 三个有效质量态的概率随着太阳半径的变化。以上在标准三代中微子框架下, 中微子能量为 20 MeV。 ..... 42
- 图 2.11 四个有效质量态的概率随着太阳半径的变化。以上在轻惰性中微子情况下, 中微子能量为 20 MeV。 $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。 ..... 43
- 图 2.12 在经过产生区域积分后, 三个有效质量态的概率随着太阳半径的变化。以上在标准三代中微子框架下, 中微子能量为 20 MeV。 ..... 43
- 图 2.13 中微子在以太阳为中心, 底面圆直径为  $0.3 R_\odot$ , 长度也为  $0.3 R_\odot$  的圆柱体区域产生。圆柱体区域以日地连线方向为  $x$  轴, 垂直于  $x$  轴的平面中任选互相垂直的轴为  $y$ ,  $z$  轴构造坐标系。 ..... 45
- 图 2.14 将中微子产生区域在  $x$  轴方向分为  $2n_1$  段 ( $n_1$  为正整数), 用  $i$  ( $i = -n_1 \sim n_1 - 1$ ) 标记段的序号, 垂直于  $x$  轴的平面又沿着半径方向等分为  $n_1$  个圆环, 用  $j$  ( $j = 0 \sim n_1 - 1$ ) 标记圆环的序号。 ..... 45

- 图 2.15 (a) 只考虑退相干效应 (蓝线), 以及在退相干的基础上, 还对中微子产生区域积分 (红线), 这两种情况的  $P_{ee}$  随着能量的变化曲线。(b) 在退相干的基础上, 还对中微子产生区域积分 (红线), 以及在退相干, 产生区域积分的基础上, 还考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  的能量分辨 (黑线), 这两种情况的  $P_{ee}$  随着能量的变化曲线。以上在标准三代中微子框架下, 中微子能量为 20 MeV。 ..... 47
- 图 2.16 (a) 只考虑日地距离所带来的退相干效应,  $\nu_e$  存活概率随着能量的变化 (蓝线)。(b) 在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应的基础上, 对产生区域做积分,  $\nu_e$  存活概率随着中微子能量的变化 (蓝线)。其中产生点区域被分为  $n_1 = 30$ , 将穿越太阳的路径分为  $n_2 = 10^6$  层。(c) 在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应, 以及中微子产生区域积分的基础上, 再考虑有限能量分辨的影响。 $\nu_e$  存活概率随着中微子能量的变化 (蓝线)。其中能量分辨为  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$ 。一同示出的还有经过产生区域积分的标准三代中微子存活概率曲线 (红线)。以上中微子能量为 20 MeV。轻惰性中微子参数为  $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。 . 48
- 图 2.17 中微子穿越地球的路径。 ..... 49
- 图 2.18 (a) 锦屏地下实验室的曝光函数  $W(\cos \eta)$ , 以  $\cos \eta$  为自变量。(b) 锦屏地下实验室的曝光函数  $W(\eta)$ , 以  $\eta$  为自变量。 ..... 50
- 图 2.19 锦屏中微子实验和神冈、SNO、DUNE 等几个著名的中微子实验室的曝光函数。锦屏中微子实验是目前覆盖的天顶角范围最大的实验室。 ... 50
- 图 2.20 (a) 标准三代中微子情况下三个有效质量态的概率随着穿过地球中心的路径上的变化。(b) 轻惰性中微子情况下四个有效质量态的概率随着穿过地球中心的路径上的变化。 $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。以上两种情况均对中微子产生区域做了积分, 中微子能量为 20 MeV。 ..... 51
- 图 2.21 (a) 标准三代中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的中微子概率 (蓝线), 用于比较。(b) 考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  能量分辨的影响, 标准三代中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的中微子概率 (蓝线), 用于比较。(c) 轻惰性中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的  $P_{ee}$  (蓝线), 用于比较。(d) 考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  能量分辨的影响, 轻惰性中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的中微子概率 (蓝线), 用于比较。 ..... 53
- 图 3.1 中微子在  ${}^7\text{Li}$  发生带电流和中性流过程, 横线代表  ${}^7\text{Li}$  和  ${}^7\text{Be}$  的能级。 56

---

图 3.2 电子中微子在 $^{37}\text{Cl}$ 发生带电流过程，横线代表 $^{37}\text{Cl}$ 和 $^{37}\text{Ar}$ 的能级。 ..	57
图 3.3 图中展示的是 $\nu_e$ 在 $^7\text{Li}$ 上的带电流相互作用截面随着 $\nu_e$ 能量的函数曲线。同时包括基态和第一激发态的截面（红色实线）， $^7\text{Be}$ 基态的贡献（红色虚线）， $^7\text{Be}$ 第一激发态的贡献（红色点虚线），它们分开各自展示。 $\nu_e$ 在 $^{37}\text{Cl}$ 上的带电流相互作用截面随着 $\nu_e$ 能量的函数曲线也一并展示了（蓝线）。其中在 5.797 MeV 处的拐点是由于 $^{37}\text{Cl}$ 到 $^{37}\text{Ar}$ 的 4.983 MeV 激发态的费米跃迁。 $\nu_e$ 和 $e^-$ 的弹性散射截面（黑色实线）， $\nu_{\mu,\tau}$ 和 $e^-$ 的弹性散射截面（黑色虚线）同时画在图上，以便一起比较。 .....	60
图 3.4 $\nu_e-e^-$ 的弹性散射同时包括带电流和中性流的贡献。 .....	61
图 3.5 (a) 对于确定能量入射的中微子，反冲电子的能谱，包含了 $\nu_e-e^-$ 和 $\nu_{\mu,\tau}-e^-$ 两种弹性散射情况，以及 10 MeV, 4 MeV 两种中微子能量情况。(b) $\nu_e-e^-$ 微分散射截面在 $E_\nu = 1, 5, 10, 20 \text{ MeV}$ 关于 $\cos \theta$ 的分布。 .....	62
图 3.6 (a) 由 B16-GS98 预测的太阳 $^8\text{B}$ $\nu_e$ 能谱和不同振荡构型下，到达地球时的太阳 $^8\text{B}$ $\nu_e$ 能谱。(b) 不同振荡构型的太阳 $^8\text{B}$ $\nu_e$ 能谱与原始能谱之比 $R(E_\nu)$ ，即不同振荡构型下 $\nu_e$ 的存活概率曲线。对于轻惰性中微子来说，混合参数为 $\alpha = 0.021$ , $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ 。 .....	63
图 3.7 (a) 在带电流探测过程中，不同振荡构型的太阳 $^8\text{B}$ 电子中微子的 CC 事例的末态有效动能能谱。(b) 不同振荡构型下的动能能谱与未发生中微子振荡的动能能谱之比 $R_{\text{CC}}(T)$ 。对于轻惰性中微子来说，混合参数为 $\alpha = 0.021$ , $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ 。 .....	65
图 3.8 (a) 在弹性散射探测过程中，不同振荡构型的太阳 $^8\text{B}$ $\nu_e$ 和电子反应产生的反冲电子能谱。(b) 不同振荡构型下反冲电子能谱和未发生中微子振荡的太阳 $^8\text{B}$ $\nu_e$ 和电子反应产生的反冲电子能谱之比 $R_{\text{ES}}(T)$ 。对于轻惰性中微子来说，混合参数为 $\alpha = 0.021$ , $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ 。 .....	66
图 3.9 太阳 $^8\text{B}$ $\nu_e$ 的存活概率关于中微子能量和天顶角 $\theta_Z$ 的 $\cos$ 值的二维函数图像，对于中微子穿过地球的情况， $\cos(\theta_Z) < 0$ 。 .....	69
图 3.10 带电流探测过程中，MSW 振荡下 CC 的事例率和未发生中微子振荡的事例率之比，即 $R_{\text{CC}}$ ，关于末态有效动能和天顶角 $\theta_Z$ 的 $\cos$ 值的二维函数图像。 .....	70
图 3.11 弹性散射探测过程中，MSW 振荡下的事例率和未发生中微子振荡的事例率之比，即 $R_{\text{ES}}$ ，关于反冲电子动能和天顶角 $\theta_Z$ 的 $\cos$ 值的二维函数图像。 .....	70

---

图 4.1 将一批四只 PMT 放在暗箱中。采用轮转的方式测量夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的量子效率。测量一次后整体逆时针旋转一格，重复测量四次。 .	75
图 4.2 某次运行过程中，四只 PMT 的触发率随着等时间间隔生成的 ROOT 文件编号的变化。 .....	75
图 4.3 (a) MCP-PMT1 的电荷分布。(b) MCP-PMT2 的电荷分布。(c) MCP-PMT3 的电荷分布。(d) HAMAMASTU PMT 的电荷分布。以上是某次运行下的结果，图中红线是各个 PMT 采用双高斯拟合的结果。 .....	77
图 4.4 四只 PMT 在四个不同位置的触发率。 .....	77
图 4.5 (a) 夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的相对触发率。(b) 去掉光强的影响之后，夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的相对触发率。 .....	80
图 4.6 LiCl 溶液中微子探测器示意图。从外向内依次是缪子屏蔽区、水缓冲区和中心靶区。缪子屏蔽区充满了水，并配备了 PMT 来屏蔽宇宙射线缪子和屏蔽放射性本底。水缓冲区进一步屏蔽来自外部的辐射本底，并配备 PMT 探测来自中心靶区的光学光子信号。中心靶区充满 LiCl 溶液，是中微子相互作用靶物质。 .....	81
图 4.7 (a) Super-K 探测器的示意图。本图来自于 <sup>[19]</sup> 。(b) SNO 探测器的示意图。本图来自于 <sup>[11]</sup> 。 .....	82
图 4.8 SNO 和 SK-IV 实验，以及 5、10、20 PE/MeV 光产额对应的能量分辨随电子动能的变化。 .....	83
图 4.9 太阳角 $\theta_{\text{Sun}}$ 的示意图，即重建电子的方向和中微子入射方向的夹角，这与实际电子的方向和中微子入射方向的夹角有所区别。 .....	84
图 4.10 (a) SNO 在使用氯气排除氧气之前，在 5 MeV 的能量选择条件下，除了弹性散射信号外，还有大量各向同性的本底，本图来自于 <sup>[259]</sup> 。(b) SNO+ 采用氯气排除氧气之后，在 5 MeV 的能量选择条件下，各向同性的本底变得很低 <sup>[255]</sup> 。本图来自于 <sup>[260]</sup> 。 .....	85
图 4.11 (a) 能量分辨率对 CC 谱的影响。(b) 能量分辨率对 ES 谱的影响。能量分辨率设为 $1/\sqrt{10E \text{ [MeV]}}$ 。 .....	86
图 4.12 带电流事例率和弹性散射事例率关于重建的太阳角 $\theta_{\text{Sun}}$ 的分布， $T > 5 \text{ MeV}$ ， $\nu_\alpha$ 弹性散射的信号是从文献 <sup>[98]</sup> 和文献 <sup>[255]</sup> 提取出来的。 $\nu_e - {}^7\text{Li}$ 和 $\nu_e - {}^{37}\text{Cl}$ 的 CC 过程假设是均匀的，CC 过程的事例数和 ES 过程的事例数之比由表 4.1 的最后一列得到。 .....	87

- 
- 图 5.1 从文献<sup>[10]</sup>提取事例在不同多重散射优度 (MSG) 和电子动能范围下关于  $\cos \theta_{\text{sun}}$  的能谱，并且在扣除完本底后又做了归一化 (蓝色直方图)。然后做了  $\cos \theta_{\text{Sun}} = 0.5$  的角度选择条件 (红色虚线)，得到不同情况下弹性散射事例的选择效率。 ..... 90
- 图 5.2 弹性散射事例的选择效率  $1 - \epsilon_\gamma$  在不同的多重散射优度 (MSG) 随着电子动能范围的变化图。在计算不同能量下弹性散射事例的选择效率时，参考多重散射优度最大的线 (粉线)。 ..... 91
- 图 5.3 应用弹性散射的角度选择条件  $\cos \theta_{\text{Sun}} > 0.5$  之后，从而分离带电流事例和弹性散射事例。 ..... 92
- 图 5.4 没有振荡情况，没有做角度选择条件的 CC (蓝色)，LiCC (红色)，ClCC (黑色)，ES (粉色) 等信号的能谱图，基于 6400 ton-year 和  $1/\sqrt{10E} [\text{MeV}]$  的能量分辨。 ..... 93
- 图 5.5 (a) MSW 振荡下，带电流富集 CC-rich 的能谱。(b) MSW 振荡下，弹性散射富集 ES-rich 的能谱。(c) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  情况下带电流富集 CC-rich 的能谱。(d) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  情况下弹性散射富集 ES-rich 的能谱。(e) 轻惰性中微子情况下带电流富集 CC-rich 的能谱。(f) 轻惰性中微子情况下弹性散射富集 ES-rich 的能谱。惰性中微子混合参数选取为  $\alpha = 0.021$ ,  $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ 。以上 LiCl 探测器的曝光量设置为 6400 ton-year, 水溶液中 LiCl 浓度假定为 78.8 g/100 g 水。 ..... 95
- 图 6.1  $\theta_{13}$  设置为 2% 精度的系统误差，曝光量为  $320 \times 20$  ton-year 的 LiCl 探测器对太阳中微子振荡参数  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  的约束空间，实线代表  $1 \sim 3\sigma$ ，虚线代表  $4 \sim 5\sigma$ 。 ..... 100
- 图 6.2 (a) 将图 6.1 投影到  $\sin^2 \theta_{12}$  轴上，同时示出  $1\sigma$  范围，得到  $\sin^2 \theta_{12} = 0.302 \pm 0.019$ 。(b) 将图 6.1 投影到  $\Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2$  轴上，同时示出  $1\sigma$  范围，得到  $\Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.675 \pm 1.519$ 。 ..... 100
- 图 6.3 对  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数对分为  $6 \times 6$  的格点，用于检查每个格点上的拟合结果。 ..... 101
- 图 6.4 对于  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数对的拟合精度随着曝光量的变化。 $\theta_{13}$  作为系统误差，在 5 MeV 能量选择条件下。 ..... 102
- 图 6.5 在  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数空间的  $6 \times 6$  格点上检查每一个格点的  $P_{ee}$  (蓝线) 和真实参数下的  $P_{ee}$  (红线) 的对比，同时画出 5 MeV 能量选择条件 (黑色虚线)。 ..... 103

---

图 6.6 (a) 放开 $\theta_{13}$ 后, 关于太阳中微子振荡参数 $\sin^2 \theta_{12}$ , $\Delta m_{21}^2$ 的约束灵敏度。(b) 放开 $\theta_{13}$ 后, 关于太阳中微子振荡参数 $\sin^2 \theta_{12}$ , $\sin^2 \theta_{13}$ 的约束灵敏度。图中实线代表 $1 \sim 3\sigma$ , 虚线代表 $4 \sim 5\sigma$ 。以上基于曝光量为 $320 \times 20$ ton-year 的 LiCl 探测器。 .....	104
图 6.7 (a) 对应于 6.6(a) 标记的第一处局域极值处, $\sin^2 \theta_{13}$ 拟合结果的分布。(b) 对应于 6.6(a) 标记的第二处局域极值处, $\sin^2 \theta_{13}$ 拟合结果的分布。 ..	105
图 6.8 在 $\sin^2 \theta_{12}$ , $\Delta m_{21}^2$ 两处局域极值连同拟合的 $\sin^2 \theta_{13}$ 中心值得到的 $\nu_e$ 存活概率曲线, 第一处局域极值对应红线, 第二处局域极值对应蓝线, 同时将真实值下的存活概率曲线所对应的黑线一同对比。 .....	105
图 6.9 (a) 图中蓝线为 5 MeV 能量选择条件下, 30000 个蒙特卡洛样本拟合的 $\chi^2$ 分布, 红线为自由度为 19 的卡方分布作为比较。(b) 4 MeV 能量选择条件下, 蒙特卡洛样本拟合的 $\chi^2$ 分布和自由度为 21 的卡方分布的比较。(c) 3 MeV 能量选择条件下, 蒙特卡洛样本拟合的 $\chi^2$ 分布和自由度为 23 的卡方分布的比较。 .....	107
图 6.10 (a) 5 MeV 能量选择下 $c_1$ , $c_2$ 分布二维图。(b) 5 MeV 能量选择下, $c_1$ , $c_2$ 的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1$ , $c_2$ 均值点在图上用红点标记出来。(c) 4 MeV 能量选择下 $c_1$ , $c_2$ 分布二维图。(d) 4 MeV 能量选择下, $c_1$ , $c_2$ 的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1$ , $c_2$ 均值点在图上用红点标记出来。(e) 3 MeV 能量选择下 $c_1$ , $c_2$ 分布二维图。(f) 3 MeV 能量选择下, $c_1$ , $c_2$ 的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1$ , $c_2$ 均值点在图上用红点标记出来。 .....	108
图 6.11 (a) 5 MeV 能量选择下, 6400 ton-year LiCl 水溶液关于 $P_{ee}$ 的二次函数拟合以及 1 倍 RMS 展宽 (粉色区域), 同时和 SNO 关于 $\nu_e$ 存活曲线测量的实验结果以及 1 倍 RMS 展宽 (蓝色区域) 加以对比。(b) 5 MeV 能量选择下, 6400 ton-year LiCl 水溶液关于 $P_{ee}$ 的二次函数拟合以及 1 倍 RMS 展宽 (粉色区域), 同时和 SK 关于 $\nu_e$ 存活曲线测量的实验结果以及 1 倍 RMS 展宽 (绿色区域) 加以对比。(c) 4 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SNO 结果的对比。(d) 4 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SK 结果的对比。(e) 3 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SNO 结果的对比。(f) 3 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SK 结果的对比。图中黑色线为目前最佳振荡参数, 即式 1.11 中, $\Delta m_{21}^2$ , $\theta_{12}$ , $\theta_{13}$ 下的振荡概率曲线。 .....	110

- 
- 图 6.12 (a) 图中蓝线为 5 MeV 能量选择条件下, 20000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布, 红线为自由度为 20 的卡方分布作为比较。(b) 4 MeV 能量选择条件下, 20000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布和自由度为 22 的卡方分布的比较。(b) 4 MeV 能量选择条件下, 20000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布和自由度为 24 的卡方分布的比较。 ..... 112
- 图 6.13 (a) 5 MeV 能量选择下  $c_1, c_0$  分布二维图。(b) 5 MeV 能量选择下,  $c_1, c_0$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1, c_0$  均值点在图上用红点标记出来。(c) 4 MeV 能量选择下  $c_1, c_0$  分布二维图。(d) 4 MeV 能量选择下,  $c_1, c_0$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1, c_0$  均值点在图上用红点标记出来。(e) 3 MeV 能量选择下  $c_1, c_0$  分布二维图。(f) 3 MeV 能量选择下,  $c_1, c_0$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1, c_0$  均值点在图上用红点标记出来。 ..... 113
- 图 6.14 (a) 5 MeV 能量选择条件下, 采用一次函数拟合振荡概率曲线的拟合结果和 1 倍 RMS 展宽。(b) 4 MeV 能量选择条件下, 采用一次函数拟合振荡概率曲线的拟合结果和 1 倍 RMS 展宽。(c) 3 MeV 能量选择条件下, 采用一次函数拟合振荡概率曲线的拟合结果和 1 倍 RMS 展宽。图中黑线为目前太阳中微子振荡参数最佳拟合值下的存活概率曲线。 ..... 114
- 图 6.15 图中 1 ~ 3 列分别对应 5、4、3 MeV 这三种能量选择条件下,  $c_1$  的拟合结果, 而 1 ~ 5 行则分别对应  $320 \text{ ton} \times 2, 6, 10, 15, 20 \text{ year}$  共 5 组曝光量下,  $c_1$  的拟合结果。从图中可知,  $c_1$  满足高斯分布, 通过从负无穷积分到 0 (淡蓝色区域), 来量化不同能量选择条件和曝光量下, 对于无概率上升效应的排除灵敏度  $S$ , 并在图中标识。 ..... 116
- 图 6.16 LiCl 水溶液拒绝无概率上升效应的灵敏度与探测器有效曝光量的关系。其中分别展示出了 5 MeV (方框), 4 MeV (实心圆) 和 3 MeV (星形) 这三种能量选择条件下的结果。 ..... 117
- 图 6.17 Hyper-K 拒绝无概率上升效应的灵敏度与探测器有效曝光量的关系。其中分别展示出了 4.5 MeV (方框), 3.5 MeV (实心圆) 这两种能量选择条件下的结果。本图数据点来自文献<sup>[118]</sup>。 ..... 117
- 图 6.18 LiCl 探测器对轻惰性中微子参数空间的 99% 排斥灵敏度 (黄色区域), 以及 90% 排斥灵敏度 (绿色区域)。曝光量为 6400 ton-year, 能量选择条件为 5 MeV。 ..... 121

- 
- 图 6.19 将  $(\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  参数对分为  $6 \times 6$  的格点, 用于检查每个格点上的灵敏度结果, 蓝色阴影区域是排除能力和通过阿西莫夫数据集得到的结果差异最明显的区域, 需要重点考察。 ..... 122
- 图 6.20 将轻惰性中微子的参数空间分为  $6 \times 6$  的格点。每个格点上  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  (蓝线) 和  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  (红线)。一并示出的还有自由度为 2 的  $\chi^2(2)$  分布 (淡蓝色线)。 ..... 123
- 图 6.21 将轻惰性中微子的参数空间分为  $6 \times 6$  的格点。每个格点上惰性中微子的  $P_{ee}$  曲线 (蓝线) 和三代中微子的  $P_{ee}$  曲线 (红线)。一并示出的还有 5 MeV 的能量选择条件 (黑线)。 ..... 124
- 图 6.22 计算不同的轻惰性中微子混合参数对下的阿西莫夫数据集和标准参数下的阿西莫夫数据集之间的  $\chi^2$ , 得到 90% 和 99% 灵敏度的等高线。 .. 125
- 图 6.23 (a) 带电流截面误差  $(\eta_\sigma | H(0, 0))_{\text{Local}}$  的中心值关于轻惰性中微子混合参数的二维分布。(b) 弹性散射选择效率误差  $(\eta_\varepsilon | H(0, 0))_{\text{Local}}$  的中心值关于轻惰性中微子混合参数的二维分布。(c) 归一化误差  $(\eta_{\text{Norm}} | H(0, 0))_{\text{Local}}$  的中心值关于轻惰性中微子混合参数的二维分布。以上基于 6400 ton-year 的曝光。 ..... 126
- 图 6.24  $H(0, 0)$  下 CC-rich 能谱 (红线), 和  $H(X, Y)$  下 CC-rich 能谱 (蓝线), 以及  $H(X, Y)$  下考虑  $([\eta_\sigma, \eta_\varepsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Local}}$  中心值后的 CC-rich 能谱 (绿色虚线)。 ..... 127
- 图 6.25  $H(0, 0)$  下 ES-rich 能谱 (红线), 和  $H(X, Y)$  下 ES-rich 能谱 (蓝线), 以及  $H(X, Y)$  下考虑  $([\eta_\sigma, \eta_\varepsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Local}}$  中心值后的 ES-rich 能谱 (绿色虚线)。 ..... 128
- 图 6.26 (a) 白天的带电流事例关于中微子能量  $E_\nu$  和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值  $\cos \theta_Z$  的二维分布。(b) 夜晚的带电流事例关于中微子能量  $E_\nu$  和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值  $\cos \theta_Z$  的二维分布。以上基于 6400 吨-年的曝光, 以及  $1/\sqrt{400E \text{ [MeV]}}$  的高能量分辨率。 ..... 129
- 图 6.27 6400 ton-year 是探测器的基本曝光时间。在此基础上, 将曝光量分别乘以 1、2.5、5、7.5、10 后, 地幔和地核密度拟合值的分布结果 (红点处) 和  $1\sigma$  范围 (蓝色实线椭圆区域) 和  $2, 3\sigma$  范围 (蓝色虚线椭圆区域)。以上基于  $1/\sqrt{400E \text{ [MeV]}}$  的高能量分辨率。 ..... 131
- 图 6.28 LiCl 探测器对于地幔、地核密度的拟合精度随着曝光的变化, 拟合过程中没有考虑系统误差。 ..... 132

- 
- 图 6.29 无地球物质效应下的似然函数自然对数值（式 6.18）的分布（红色区域）以及这一分布的高斯拟合（粉色实线），以及有地球物质效应下的似然函数自然对数值（式 6.19）的分布（蓝色区域）以及这一分布的高斯拟合（紫色实线）。以上基于  $6400 \times 10^4$  吨·年的有效曝光量，以及  $1/\sqrt{400E} [\text{MeV}]$  的高能量分辨率。 ..... 133
- 图 6.30 (a) MSW 振荡下，带电流富集 CC-rich 的能谱。(b) MSW 振荡下，弹性散射富集 ES-rich 的能谱。(c) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  下带电流富集 CC-rich 的能谱。(d) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  下弹性散射富集 ES-rich 的能谱。以上 DUNE 探测器的曝光量设置为  $40000 \times 20$  ton-year。 ..... 134
- 图 6.31 图中蓝线为 DUNE 关于  $c_1, c_2$  拟合均值下的  $\nu_e$  存活曲线，浅蓝色区域为液氩探测器概率曲线 1 倍 RMS 范围。粉色区域是曝光量为 6400 ton-year 的氯化锂探测器的结果，用以对比。黑色线为目前振荡参数  $\Delta m_{21}^2, \theta_{12}, \theta_{13}$  下的振荡概率曲线。DUNE 的有效曝光设置为  $40000 \times 20$  ton-year。 136

## 附表清单

表 1.1 Bahcall-Serenelli-Basu 2005 (BSB05) 和 Barcelona 2016 (B16) 这两种计算方法分别基于两种不同的太阳化学组成 GS98 <sup>[90]</sup> 和 AGS05 <sup>[91]</sup> (AGSS09 <sup>[92]</sup> ) 给出的太阳中微子到地表的通量和 1 倍标准差的预测。此表来自于 <sup>[94]</sup> 。	9
表 1.2 太阳中微子实验概述 (上), 表中, K-I 指的是 Kamiokande 一期, SK-I 指的是 Super-Kamiokande 一期, 依此类推。在 Kamiokande 之前的实验, 太阳中微子通量测量值采用 SNU 为单位, Kamiokande 和 Super-Kamiokande 的太阳中微子通量测量值采用 [ $10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ] 为单位。 .....	11
表 1.3 太阳中微子实验概述 (下), 表中, SNO-I 指的是 SNO 一期, 依此类推。太阳中微子通量测量值统一采用 [ $10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ] 为单位。 .....	12
表 1.4 下一代太阳中微子实验概述, 此表修改自文献 <sup>[94]</sup> 和文献 <sup>[102]</sup> 。 .....	17
表 1.5 几种温度下 LiCl 在水中的溶解度和相应的 ${}^7\text{Li}$ 的质量分数。 .....	27
表 2.1 不同物质势下, 式 2.3 中 $F$ 的表达式。此表来自于 <sup>[48]</sup> 。 .....	31
表 2.2 由 Cash 和 Karp 发现的 RKF 方法的系数, 本表来自于 <sup>[224]</sup> 。 .....	36
表 2.3 在不同函数的物质势下, 分层演化方法、RK4 方法、RKF 方法通过式 2.17 计算出的 $P_c$ , 和通过理论方法计算出的 $P_c$ (式 2.3) 的对比, 一同示出的还有共振处的绝热参数 $\gamma_R$ 。在计算机限制的最大的步数 $10^7$ 步下, 由 RK4 方法计算双曲函数势的结果是发散的。 .....	38
表 2.4 分层演化方法、RK4 方法、RKF 方法在不同物质势下, 达到 $10^{-4}$ 的精度, 至少需要的步数以及需要的计算时间。由于只关注步数和所用时间的数量级, 所以只需保留一位有效数字。双曲函数势下, RK4 方法在计算机限制的 $10^7$ 步内没有得到收敛的结果。 .....	41
表 3.1 表中列出的是 $\nu_e - {}^7\text{Li}$ CC 过程中, ${}^{37}\text{Li}$ 基态到 ${}^7\text{Be}$ 基态能级 (gs.-gs.) 的跃迁能量 $E_l$ , 以及 ${}^{37}\text{Li}$ 基态到 ${}^7\text{Be}$ 第一激发态能级 (gs.-ex.) 的跃迁能量 $E_l$ , 和对应的 B(GT) 和 B(F) 值 <sup>[227-228]</sup> 。其中本论文采用的 B(GT) 和 B(F) 来自文献 <sup>[227-228]</sup> , 并且和来自文献 <sup>[200]</sup> 的 B(GT) 和 B(F) 所计算的结果加以对比。一并展示的还有经过 ${}^8\text{B}$ 中微子能谱 <sup>[242]</sup> 加权后的 LiCC, ClCC 和弹性散射截面。 .....	60
表 3.2 采用 3、4、5 MeV 三种能量选择条件后, 由式 3.32 定义的地球物质效应, 分别在标准三代中微子情况和轻惰性中微子情况下的附加贡献的值。同时计算没有能量选择条件 (0 MeV) 下的结果用于对比。 .....	68

---

表 4.1 LiCl 中 LiCC 探测过程, ClCC 探测过程以及弹性散射探测过程关于太阳 $^8\text{B} \nu_e$ 事例率的预测, 表中包括 LiCl 水溶液中 $^7\text{Li}$ , $^{37}\text{Cl}$ 和 $e^-$ 的摩尔浓度, 其中 LiCl 浓度为 74.5 g/100g 水, 即 10°C 时的饱和溶解度。表中还显示了 $\nu_e$ 在 $^7\text{Li}$ , $^{37}\text{Cl}$ 上的带电流过程以及 $\nu_\alpha$ 在 $e^-$ 上的弹性散射过程的事例率, 这些事例率是通过未发生中微子振荡的 $^8\text{B} \nu_e$ 能谱 <sup>[242]</sup> 、振荡谱以及振荡谱加上 $T > 4 \text{ MeV}$ 或 $T > 5 \text{ MeV}$ 能量选择条件后计算的。关于事例率的所有数据都以 1/100 吨·年为单位。 .....	73
表 4.2 十支 MCP-PMT 的性质, 包括波形的上升时间, 下降时间, 半高宽的中位数, 以及暗噪声计数率, 峰谷比和增益的测量结果。 .....	76
表 4.3 归一化参数 $\alpha_j^0$ , $Q_k^0$ , $I_i^0$ 的拟合结果。 .....	79
表 5.1 采用 $\cos \theta_{\text{Sun}} = 0.5$ 的角度选择条件后以及 4 MeV 能量选择条件后, 标准三代中微子情况下 (MSW), 水平概率 $P_{ee} = 1/3$ 情况下 (Flat), 以及轻惰性中微子情况下 (Sterile), CC 事例数和 ES 事例数之比, 以及 CC-rich 和 ES-rich 两种样本下的信噪比。 .....	94
表 6.1 5 MeV, 4 MeV, 3 MeV 这三种能量选择条件下, 采用 6400 ton-year 有效曝光的 LiCl 水溶液探测器拟合 $P_{ee}$ 概率曲线, 表中展示出 $c_1$ , $c_2$ 的均值和 RMS, 以及两者的相关系数。 .....	109
表 6.2 SNO 和 SK 采用二次函数拟合 $P_{ee}$ 概率曲线, $c_0$ , $c_1$ , $c_2$ 的拟合结果。数据分别来自于文献 <sup>[11]</sup> 和文献 <sup>[19]</sup> 。 .....	111
表 6.3 $^{40}\text{Ar}$ 带电流的 $B_l(\text{F})$ 和 $B_l(\text{GT})$ , 本表来自于 <sup>[138]</sup> 。 .....	135

## 符号和缩略语说明

$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	电子型中微子, 缪子型中微子, 陶子型中微子
CC	带电流相互作用 (Charged-Current Interaction)
NC	中性流相互作用 (Neutral-Current Interaction)
MSW	以提出者 S.Mikheev, A. Smirnov 和 L.Wolfenstein 三人命名的物质效应理论
SM	粒子物理标准模型 (Standard Model)
$c_W, s_W$	$\cos \theta_W, \sin \theta_W$ , 其中 $\theta_W$ 为温伯格角
Super-K, SK	超级神冈实验 (Super-Kamiokande)
PMNS	以 B.Pontecorvo, Z. Maki, M. Nakagawa 和 S. Sakata 四人的名字命名的三代中微子混合矩阵
$c_{ij}, s_{ij}$	$\cos \theta_{ij}, \sin \theta_{ij}$ , $\theta_{ij}$ 是酉空间中 $ij$ 平面的旋转角
$c_{2\theta}, s_{2\theta}$	$\cos 2\theta, \sin 2\theta$
$c_{2\theta_m}, s_{2\theta_m}$	$\cos 2\theta_m, \sin 2\theta_m$ , $\theta_m$ 是物质中的有效质量态到味道态的混合矩阵中的混合角
SSM	太阳标准模型 (Solar Standard Model)
SNP	太阳中微子问题 (Solar Neutrino Problem)
SNO	萨德伯里中微子观测站 (Sudbury Neutrino Observatory)
SNU	太阳中微子单位 (Solar Neutrino Unit)
ES	弹性散射 (Elastic Scattering)
LS	液体闪烁体 (Liquid Scintillator)
LMA	大角混合 (Large Mixing Angle)
Hyper-K	顶级神冈 (Hyper-Kamiokande)
DUNE	极深地下中微子实验 (Deep Underground Neutrino Experiment)
JNE	中国锦屏中微子实验 (Jinping Neutrino Experiment)
PMT	光电倍增管 (Photomultiplier Tubes)
WbLS	水基液体闪烁体 (Water-based Liquid Scintillator)
SLS	慢液闪 (Slow Liquid Scintillator)
TPC	时间投影室 (Time Projection Chamber)
WIMP	弱相互作用大质量粒子 (Weakly Interacting Massive Particles)
CE $\nu$ NS	相干弹性散射 (Coherent Neutrino-Nucleus ES)
$^8\text{B } \nu_e$	硼-8 中微子

$hep \nu_e$	<i>hep</i> 中微子
MaVaN <sub>s</sub>	质量变化的中微子 (Mass Varying Neutrinos)
NSI	非标准相互作用 (Nonstandard Interaction)
PREM	初步地球参考模型 (Preliminary Reference Earth Model)
LiCl	氯化锂
LED	发光二极管 (Light Emitting Diode)
ODE	常微分方程组 (Ordinary Differential Equations)
RK4	四阶龙格-库塔方法 (Fourth Order Runge-Kutta method)
RKF	龙格-库塔-费尔伯格方法 (Runge-Kutta-Fehlberg Method)
GT	伽莫夫-特勒 (Gamow-Teller)
MCP	微通道板 (Micro-channel Plate)
ADC	模数转换器 (Analog-to-Digital Converter)
MSG	多重散射优度 (Multiple Scattering Goodness)
CC-Rich	富集带电流事例的样本
ES-Rich	富集弹性散射事例的样本
SNR	信噪比 (Signal-to-Noise Ratio)
FC	费尔德曼-科森方法 (Feldman-Cousin Method)
MVA	绝热最大破坏处 (Maximum Violation of Adiabaticity)

## 第1章 引言

1930年，W. Pauli<sup>[1]</sup>为了解释J. Chadwick<sup>[2]</sup>在 $\beta$ 衰变中观察到的连续反冲电子能谱，以及多个实验<sup>[3-5]</sup>观察到的氮核 $^{14}_7\text{N}$ 自旋统计异常，提出了一种全新的粒子——中微子。中微子是电中性粒子，与带电轻子组成弱同位旋二重态，其自旋 $1/2$ ，主要参与弱相互作用<sup>①</sup>，有中微子参与是弱作用的标志。

中微子根据弱作用中伴随参与的带电轻子，可以分为三种味道态：电子型中微子( $\nu_e$ )，缪子型中微子( $\nu_\mu$ )，陶子型中微子( $\nu_\tau$ )。太阳内部每时每刻发生的弱作用产生了大量的电子型中微子，是我们理解太阳演化的重要研究对象。这些电子型中微子在飞向地球探测器的途中会发生味道的相互转化<sup>[6]</sup>。在太阳核心处产生的中微子到达地球探测器必须穿过太阳物质，在夜晚到达地球探测器的中微子还会穿过地球物质。中微子和物质中的电子、质子、中子会发生向前相干散射， $\nu_e$ 能够发生带电流相互作用(Charged-Current Interaction，简称CC相互作用或者CC过程)和中性流相互作用(Neutral-Current Interaction，简称NC相互作用或者NC过程)， $\nu_{\mu,\tau}$ 只能发生中性流相互作用，因此， $\nu_e$ 和 $\nu_{\mu,\tau}$ 所受到的物质势是不同的，这会进一步加剧中微子的味道之间的转化，这称为中微子的物质效应<sup>[7-9]</sup>。

物质效应的Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein(简称MSW，以提出者S. Mikheyev, A. Smirnov和L. Wolfenstein三人命名)理论<sup>[7-9]</sup>能够预言在白天到达地球探测器的 $\nu_e$ 的存活概率 $P_{ee}$ 随着中微子能量 $E_\nu$ 变化的曲线，这一曲线的形状与太阳中微子振荡参数密切相关。因此，精确测量 $\nu_e$ 的存活概率曲线能够反过来约束太阳中微子振荡参数。在目前太阳中微子实验<sup>[10-11]</sup>和反应堆中微子实验<sup>[12]</sup>联合拟合的太阳中微子振荡参数下，MSW理论预言了，由于受到太阳物质效应的影响， $\nu_e$ 的存活概率 $P_{ee}$ 会随着中微子能量 $E_\nu$ 的下降而上升，这称为太阳高密度物质所致的概率上升效应<sup>[13]</sup>(Upturn Effect)。而在夜晚到达地球探测器的 $\nu_e$ 的存活概率，由于受到地球物质效应的影响，会比白天 $\nu_e$ 的存活概率稍微高一点，这称为昼夜不对称效应<sup>[14-16]</sup>(Day-Night Effect)。甚至进一步，可以由地球物质效应反解出中微子穿过地球路径上的电子数密度分布，这就是地球成像<sup>[17-18]</sup>(Earth Tomography)的原理。目前，概率上升效应<sup>[11,19]</sup>和昼夜不对称效应<sup>[19-22]</sup>都没有确凿的实验证，从而不排除一些超出标准模型(Standard Model，简称SM)的新物理出现。有些超出标准模型的新物理<sup>[23-26]</sup>能够在过渡区做出区别于概率上升效应的预言，如轻惰性中微子(Light Sterile Neutrino)模型<sup>[25-26]</sup>，所以精确测量 $\nu_e$ 的存活概率曲

<sup>①</sup> 中微子还能够参与引力相互作用，但是中微子极小的质量使得其所参与的引力可以忽略不计。

线还能够寻找超出标准模型的新物理。以上太阳中微子物理研究都与中微子能量有着密切的关系，因此，无论是验证 MSW 理论，还是寻找超出标准模型的新物理，都呼唤着新的能够直接探测中微子能量的探测技术，以期得到更高的探测灵敏度。

本章首先简要介绍中微子相关的基础物理理论，然后介绍与本研究紧密相关的太阳中微子物理，以及与之相关的太阳中微子实验。下一代太阳中微子实验也将陆续开展。目前三代中微子框架渐趋完整，下一代太阳中微子实验将开始探索新的物理目标。与这些实验相比，本研究开发基于氯化锂水溶液的带电流探测技术，在太阳中微子振荡参数的测量，概率上升效应的探测，太阳惰性中微子的寻找，以及地球物质效应和地球成像等物理目标上均有着独特的优势。最后介绍全文的行文结构。

## 1.1 中微子物理

中微子所参与的带电流作用和中性流作用目前依然由粒子物理标准模型精确描述<sup>[27-28]</sup>。中微子振荡<sup>[29]</sup>的发现是目前唯一超出标准模型的新物理，表明中微子至少存在两个质量不为零的质量本征态，通过扩展标准模型能够构造出中微子的质量。

### 1.1.1 标准模型简介

粒子物理标准模型将夸克、轻子、规范玻色子、希格斯粒子这四大类粒子纳入到  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  局域规范对称性中<sup>[30]</sup>。这四大类粒子如图1.1所示。标准模型中夸克和轻子都有三代，第二、三代粒子除了和第一代粒子质量不同外，可以认为是第一代粒子的简单复制。将参与弱作用的中微子称为活跃中微子（Active Neutrino）， $Z^0$  可以衰变为活跃正负中微子对，对  $Z^0$  衰变宽度的测量表明只有三代质量在  $M_{Z^0}/2 \simeq 46 \text{ GeV}$  以内的活跃中微子<sup>[31-34]</sup>。

标准模型中，希格斯场<sup>[36-39]</sup>与费米子左手征双重态  $F_L$ （如式1.1所示），以及下型费米子（如  $e, d$ ）右手征单态  $f_R^{\text{Down}}$ （如式1.3所示）发生汤川耦合<sup>[40]</sup>（Yukawa Coupling）；希格斯场的电荷共轭与费米子左手征双重态  $F_L$ （如式1.1所示），以及上型费米子（如  $u$ ）右手征单态  $f_R^{\text{Up}}$ （如式1.2所示）发生汤川耦合，费米子质量就能通过汤川耦合项的自发对称破缺<sup>[36-39]</sup>产生出来。标准模型中，中微子没有右手征态，所以无法产生质量。

$$F_L : \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$f_R^{\text{Up}} : u_R, c_R, t_R, \quad (1.2)$$

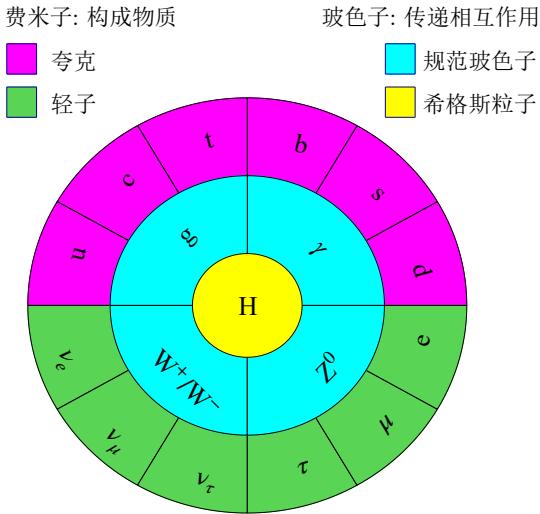


图 1.1 标准模型中的四大类粒子，分别是夸克（粉色），轻子（绿色），规范玻色子（淡蓝色），希格斯粒子（黄色）。图片修改自文献<sup>[35]</sup>。

$$f_R^{\text{Down}} : e_R, \mu_R, \tau_R, d_R, s_R, b_R. \quad (1.3)$$

标准模型中描述电弱相互作用的拉格朗日量为<sup>[41-42]</sup>：

$$\mathcal{L}_{\text{Int}} \equiv \frac{g}{2\sqrt{2}} \left( J_{-}^{\mu} W_{\mu}^{-} + J_{+}^{\mu} W_{\mu}^{+} + \frac{\sqrt{2}}{c_W} J_0^{\mu} Z_{\mu} \right) - e J_{\text{EM}}^{\mu} A_{\mu}, \quad (1.4)$$

其中  $W_{\mu}^{\pm}$ ,  $Z_{\mu}$ ,  $A_{\mu}$  是分别对应于  $W^{\pm}$ ,  $Z^0$ ,  $\gamma$  的规范场,  $J_{\pm}^{\mu}$ ,  $J_0^{\mu}$ ,  $J_{\text{EM}}^{\mu}$  分别是弱相互作用的带电流和中性流, 以及电磁相互作用的电磁流。弱带电流  $J_{\pm}^{\mu}$  和弱中性流  $J_0^{\mu}$  可以分别表达为<sup>[43]</sup>:

$$J_{\pm}^{\mu} = 2\bar{F}_L \gamma^{\mu} \tau_{\pm} F_L, \quad J_0^{\mu} = \left( I_3 c_W^2 - \frac{Y_L}{2} s_W^2 \right) 2\bar{F}_L \gamma^{\mu} F_L - \frac{Y_R}{2} s_W^2 2\bar{f}_R \gamma^{\mu} f_R, \quad (1.5)$$

其中  $\tau_{\pm} = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$  是弱同位旋的升降算符,  $\tau_i$  即泡利矩阵  $\sigma_i$ ,  $c_W$ ,  $s_W$  分别为温伯格角  $\theta_W$  的 cos 值和 sin 值。 $I_3$  是弱同位旋第三分量。 $Y_{L,R}$  分别是左手费米子和右手费米子的弱超荷。

由式 1.5 和盖尔曼-西岛关系 (Gell-Mann-Nishijima Formula)<sup>[44-47]</sup>:  $q = I_3 + \frac{Y}{2}$  可以得到弱中性流中左右手征场各自的耦合常数, 分别记为  $g_L$  和  $g_R$ <sup>[48]</sup>:

$$g_L = I_3 - q \sin^2 \theta_W, \quad g_R = -q \sin^2 \theta_W, \quad (1.6)$$

其中  $q$  是费米子的电荷, 那么矢量耦合常数  $g_V$  和轴矢量耦合常数  $g_A$  分别为:  $g_{V,A} = g_L \pm g_R$  ( $g_V$  对应 + 号,  $g_A$  对应 - 号), 各自的表达式为<sup>[48]</sup>:

$$g_V = I_3 - 2q \sin^2 \theta_W, \quad g_A = I_3. \quad (1.7)$$

### 1.1.2 中微子振荡

1962年，Z. Maki, M. Nakagawa 和 S. Sakata<sup>[49]</sup>提出了 $\nu_e, \nu_\mu$ 之间的混合，这比1963年N. Cabibbo<sup>[50]</sup>提出两代夸克之间的混合还要早。1967年，B. Pontecorvo<sup>[51]</sup>在中微子混合的基础上提出了相互振荡。1998年，超级神冈实验(Super-Kamiokande, 简称 Super-K 或者 SK)<sup>[29]</sup>模型无关地证明了大气中微子 $\nu_\mu$ 的振荡转化，这也是首次发现中微子振荡的实验证据，如图1.2所示。

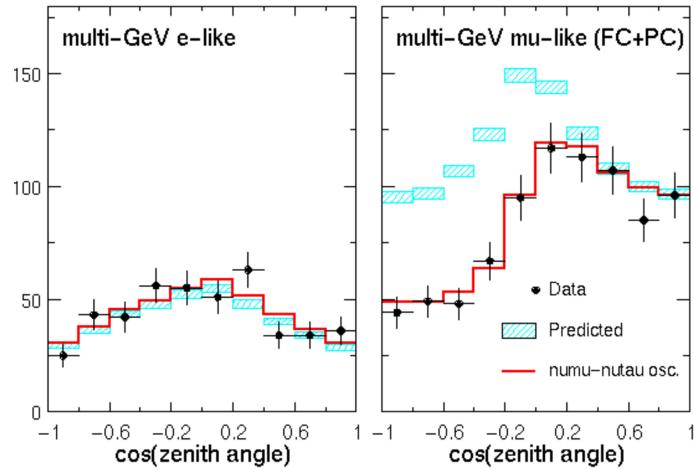


图1.2 Super-K实验<sup>[29]</sup>于1998年观测到大气中微子发生了 $\nu_\mu$ 的转化，而且是振荡转化。本图来源于<sup>[29]</sup>。

目前来说，三代中微子真空振荡的拼图渐渐完整，但同时一些实验也表明，中微子振荡可能存在着超出三代框架的新物理迹象。首先是加速器中微子实验LSND<sup>[52]</sup>。LSND实验在 $\bar{\nu}_\mu$ 束流中探测到了比预期更多的 $\bar{\nu}_e$ 。考虑到LSND实验的能量和基线长度，这一异常可以用质量平方差在 $1\text{ eV}^2$ 的新振荡模式来解释。除此以外，还有MiniBooNE实验<sup>[53-54]</sup>探测到了比预期更多的 $\nu_e$ 和 $\bar{\nu}_e$ 。反应堆中微子实验也发现<sup>[55]</sup>，产生的 $\bar{\nu}_e$ 比预期少了 $6\% \pm 2\%$ 。而在SAGE<sup>[56-57]</sup>和GALLEX<sup>[58-59]</sup>实验中，利用 $^{51}\text{Cr}$ 和 $^{37}\text{Ar}$ 放射源产生 $\nu_e$ ，利用 $^{71}\text{Ga}$ 作为探测器靶物质，同样得到偏离三代中微子振荡所预测的结果。在以上的短基线加速器实验反常，反应堆反中微子反常，以及镓实验反常，都可以通过引入新的振荡模式来解释，新的振荡模式可能与不参与弱相互作用的惰性中微子(Sterile Neutrino)有关。

假设中微子质量态是有着确定动量的平面波，中微子初始为 $\alpha$ 味道，在真空中飞行长度 $L$ 后，转化为 $\beta$ 味道的概率 $P_{\alpha\beta}$ 为<sup>[48]</sup>：

$$P_{\alpha\beta} = |\psi_{\alpha\beta}|^2 = \left| \sum_{i=1}^{k=3+n} U_{\alpha i}^* e^{-i \frac{\Delta m_{il}^2}{2E} L} U_{\beta i} \right|^2 = \sum_{i,j}^{k=3+n} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L}, \quad (1.8)$$

其中 $\psi_{\alpha\beta}$ 是 $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ 的跃迁振幅。考虑到在三代中微子外，可能还存在不参与弱

相互作用的  $n$  个惰性中微子，总共有  $k = 3 + n$  个中微子，式1.8中  $i, j$  遍历  $1 \sim k$ 。  
 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ ,  $E$  是中微子能量。 $U$  是质量态到味道态的转化矩阵， $U_{\alpha i}$  是中微子第  $i$  个质量态  $\langle v_i |$  到  $\alpha$  味道态  $\langle v_\alpha |$  的转化矩阵元。

再来讨论中微子质量态到味道态的转化矩阵  $U$ 。 $N$  维么正矩阵  $U$  有  $N^2$  个自由变量，带电流（式 1.5）中， $N$  个带电轻子和对应的  $N$  个左手征中微子的相位可以自由选择，从而抵消  $U$  中的相位。狄拉克中微子必须保留一个全局相位来保持总轻子数守恒，所以有  $C_N^2$  个旋转角和  $(N-1)(N-2)/2$  个狄拉克相位。马约拉纳中微子破坏总轻子数守恒，只有  $N$  个带电轻子可以自由选择相位，所以有  $C_N^2$  个旋转角和  $N(N-1)/2$  个马约拉纳相位。那么，两代中微子有 1 个旋转角和 0 个狄拉克相位（或者 1 个马约拉纳相位），三代中微子有 3 个旋转角和 1 个狄拉克相位（或者 3 个马约拉纳相位）。四代中微子有 6 个旋转角和 3 个狄拉克相位（或者 6 个马约拉纳相位）等等。

以三代狄拉克中微子为例，中微子的混合由  $3 \times 3$  的 Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata 矩阵（简称 PMNS 矩阵，以 B. Pontecorvo, Z. Maki, M. Nakagawa 和 S. Sakata 四人的名字命名）描述： $R_{23}W_{13}R_{12}$ ，如果是马约拉纳中微子还要右乘对角矩阵  $P_{12}$ 。其中  $R_{ij}$ ,  $W_{ij}$ ,  $P_{ij}$  是除了第  $i$  行第  $i$  列和第  $j$  行第  $j$  列交叉形成的  $2 \times 2$  矩阵块以外，其他对角元都为 1，非对角元都为 0 的矩阵，它们  $2 \times 2$  矩阵块的表达式为：

$$R_{ij} : \begin{bmatrix} c_{ij} & s_{ij} \\ -s_{ij} & c_{ij} \end{bmatrix}, \quad W_{ij} : \begin{bmatrix} c_{ij} & s_{ij}e^{-i\delta} \\ -s_{ij}e^{i\delta} & c_{ij} \end{bmatrix}, \quad P_{ij} : \begin{bmatrix} e^{i\eta_i} & \\ & e^{i\eta_j} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

其中  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $\theta_{ij}$  是酉空间中  $ij$  平面的旋转角，之后也采用这样的简记方法， $\delta$ ,  $\eta_i$  是复相位。PMNS 矩阵展开为：

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} P_{12}. \quad (1.10)$$

本研究采用的中微子振荡参数为：

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= 0.587^{[10]}, \quad \theta_{13} = 0.148^{[60]}, \quad \theta_{23} = 0.849^{[61]}, \\ \Delta m_{21}^2 &= 7.49 \times 10^{-5} \text{ eV}^2{}^{[10]}, \quad \Delta m_{31}^2 = 2.53 \times 10^{-3} \text{ eV}^2{}^{[61]}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

在接下来的内容中，将采用式1.11中参数的三代中微子称为标准三代中微子。

通常中微子振荡的推导都是基于等动量假设的量子力学推导，但是太阳中微子产生时是局域在产生区域附近处的，而不是平面波，动量存在不确定度。用确定动量的平面波描述只能算是一种近似，以波包描述中微子态更为准确。S. Nussinov<sup>[62]</sup>于 1976 年第一次考虑了中微子传播的波包性质，并推断存在一个相干长度，超过这

个长度，不同质量中微子的干涉是不可观测的。这是由于不同质量中微子的群速度不同，导致它们的波包发生了退相干。1998年，C. Giunti 和 C. Kim<sup>[63]</sup>推导了波包描述下中微子的转化概率为：

$$P_{\alpha\beta} \propto \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i2\pi \frac{L}{L_{osc}(i,j)}} e^{-\left(\frac{L}{L_{coh}(i,j)}\right)^2} e^{-2\pi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{osc}(i,j)}\right)^2}, \quad (1.12)$$

其中的三个指数项分别称为振荡项 (Oscillatory Term)，相干项 (Coherence Term)，局域项 (Localization Term)。 $L_{osc}(i,j)$  为  $P_{\alpha\beta}$  振荡相位变化  $2\pi$  的长度，称为振荡长度：

$$L_{osc}(i,j) = \frac{4\pi E}{\Delta m_{ij}^2} = 2.47 \frac{E \text{ [MeV]}}{\Delta m_{ij}^2 \text{ [eV}^2]} \text{ m.} \quad (1.13)$$

式1.12和基于平面波假设推导出的概率1.8差别在最后两个  $e$  指数项，这两项分别对应空间相干和动量空间相干。第一个  $e$  指数项中  $L_{coh}(i,j)$  称为相干长度，表达式为<sup>[63]</sup>：

$$L_{coh}(i,j) = \frac{2\sigma_x \sqrt{\mathbf{v}_i^2 + \mathbf{v}_j^2}}{|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|} \approx \frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{|\Delta \mathbf{v}|} \approx \frac{4\sqrt{2}E^2}{|\Delta m_{ij}^2|} \sigma_x, \quad (1.14)$$

其中  $\mathbf{v}_i$  是第  $i$  个质量态的群速度， $\sigma_x$  是波包的空间不确定度。不同质量态的中微子  $v_i$  尽管有相同的动量，但是有着不同的群速度  $\mathbf{v}_i$ 。从式1.14可以看到，相干长度取决于波包的空间不确定度  $\sigma_x$ ，以及  $i$  和  $j$  各自波包的群速度  $\mathbf{v}_i$  和  $\mathbf{v}_j$  之差，如式1.14所示，物理意义是两个有着不同群速度的波包在飞行一定长度  $L_{coh}(i,j)$  后不再保持良好的相干性。若飞行长度远大于相干长度，不同中微子质量态就会发生退相干。式1.12第二个  $e$  指数项中，根据 S. Nussinov 原始文献<sup>[62]</sup>对于太阳中微子波包大小的估计： $\sigma_x \simeq 10^{-8} \text{ m}$ <sup>[62,64]</sup>，有  $\sigma_x \ll L_{osc}^{\min}(2,1) \simeq 10^5 \text{ m}$ ，所以在太阳中微子情况中可以不用考虑局域项。

当  $L \ll L_{coh}(i,j)$ ，式1.12退回到量子力学所推导完全相干的公式1.8，当  $L \gg L_{coh}(i,j)$ ，质量态之间退相干，这正对应于太阳中微子情况。根据文献<sup>[62,65]</sup>对于太阳中微子波包大小的估计， $L_{coh}(2,1) \simeq 10^9 \text{ m} \ll L \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ， $L$  对应太阳中微子到达地球大致需要飞行的长度，太阳中微子满足退相干条件。退相干下中微子的转化概率  $\bar{P}_{\alpha\beta}$  为<sup>[48]</sup>：

$$\bar{P}_{\alpha\beta} = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2. \quad (1.15)$$

两代中微子只有 1 个混合角  $\theta$ ，混合矩阵为  $e^{i\theta\sigma_2}$  ( $\sigma_i$  为泡利矩阵)。在两代中微子完全相干的情况下，由式1.8可知，在真空中，初始味道的中微子消失概率和

存活概率分别为：

$$P_{\alpha\beta} = s_{2\theta}^2 s^2 \left( \pi \frac{L}{L_{osc}} \right), \quad P_{\alpha\alpha} = 1 - P_{\alpha\beta} = 1 - s_{2\theta}^2 s^2 \left( \pi \frac{L}{L_{osc}} \right), \quad (1.16)$$

其中  $c_{2\theta}$  和  $s_{2\theta}$  分别是  $\cos 2\theta$ ,  $\sin 2\theta$ ,  $s^2$  和  $c^2$  分别是  $\sin^2$  和  $\cos^2$ , 之后也采用这种简记方法。由式1.16可知, 混合角决定了振荡的振幅, 质量平方差决定了振荡频率。当  $L = L_{osc}/2$ , 存活概率达到最低点,  $L_{osc}$  反映了存活概率随着  $L$  变化的周期, 一个周期内, 真空振荡的概率关于  $L = L_{osc}/2$  是对称的。

以上是中微子真空振荡的讨论, 中微子在物质中的振荡在附录A中详细介绍。

### 1.1.3 中微子质量模型

狄拉克中微子的质量可以像带电轻子一样用希格斯机制来产生, 唯一需要扩展的是引入三个中微子场的右手分量  $\nu_R$ , 建立汤川耦合的中微子部分, 从而在拉格朗日量中产生狄拉克质量项:

$$\mathcal{L}^D = - \left( \overline{\nu'_L} M^D \nu_R + \text{H.c.} \right), \quad (1.17)$$

其中  $M^D$  是狄拉克质量矩阵, 中微子态上标'是为了将模型中的中微子态和参与弱相互作用的味道态, 以及中微子质量态区分开来。中微子只能以左手征的分量参与弱相互作用, 右手征的分量不参与弱相互作用,  $\nu_R$  即惰性中微子。无法通过弱作用识别惰性中微子的味道, 也就不需要做带'的模型中微子态、味道态和质量态的区分。

当对应于三代轻子引入三代右手中微子时  $n = 3$ , 此时  $M^D$  是  $3 \times 3$  方阵, 就可以类似于上型夸克(式1.2)对角化  $M^D$  得到中微子的质量。但是, 中微子极小的质量决定了汤川耦合系数相比于轻子也是极小的, 这并不自然<sup>[66]</sup>。更自然的是引入新的粒子产生马约拉纳质量项<sup>[67-68]</sup>:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \left( \overline{\nu'_L} M^L \nu_L' + \overline{\nu'_R} M^R \nu_R + \text{H.c.} \right), \quad (1.18)$$

其中同时包括了活跃中微子的马约拉纳质量  $M^L$  和惰性中微子的马约拉纳质量  $M^R$ 。进而通过跷跷板机制(Seesaw Mechanism)解释中微子极其微小的质量<sup>[66,69]</sup>。根据在标准模型的基础上引入新粒子的种类, 有三类跷跷板机制:

- 第一型跷跷板机制(Type I Seesaw): 引入重型费米子单态<sup>[66,69-72]</sup>。
- 第二型跷跷板机制(Type II Seesaw): 引入重型希格斯标量三重态<sup>[69,73-76]</sup>。
- 第三型跷跷板机制(Type III Seesaw): 引入重型费米子三重态<sup>[77-78]</sup>。

它们的组合又能构造出新的模型, 称为混合跷跷板机制<sup>[69,79-80]</sup>(Mixed Seesaw), 如 Type I+II Seesaw<sup>[69,79-80]</sup>。这些跷跷板模型本质上都是通过新物理的高能标来压低中微子的质量, 目前还有待实验检验。

## 1.2 太阳中微子

中微子振荡的发现<sup>[29]</sup>起源于 R. Davis<sup>[81]</sup>对于太阳中微子的观测，并将观测结果与太阳标准模型（Solar Standard Model，简称 SSM）进行比较，从而发现太阳中微子问题（Solar Neutrino Problem，简称 SNP）开始的。太阳中微子问题即 R. Davis 探测到的太阳中微子比太阳标准模型预测得要少，这也称为太阳中微子消失之谜。

### 1.2.1 太阳标准模型

太阳内部不断进行的热核聚变是太阳的能量来源。1938 年，H. Bethe<sup>[82]</sup>得到太阳内部热核反应过程的两种过程，如图1.3所示。这两种过程分别称为 pp 链和 CNO 循环，总过程都是将 4 个质子聚变成  ${}^4\text{He}$  核：

$$4\text{p} \longrightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 26.73\text{MeV}, \quad (1.19)$$

这两种过程总共产生 8 类中微子，分别是：pp, pep, hep,  ${}^7\text{Be}$ ,  ${}^8\text{B}$ ,  ${}^{13}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$ ,  ${}^{17}\text{F}$  中微子。

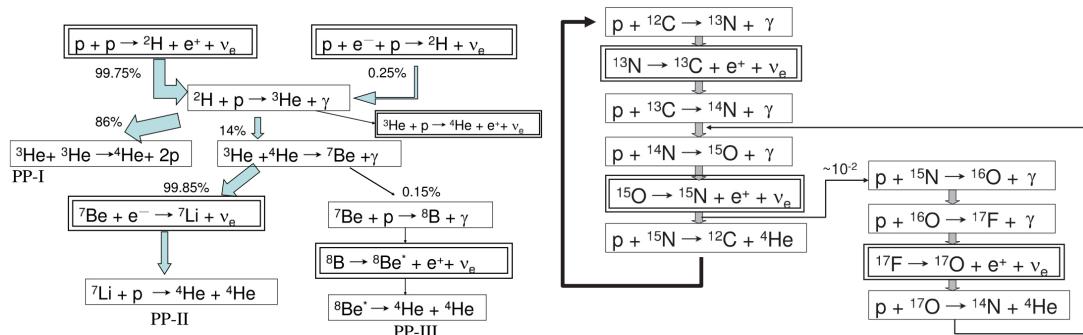


图 1.3 pp 链和 CNO 循环，本图来自于<sup>[83]</sup>。

J. Bahcall<sup>[84-87]</sup>等人于 1963 年起建立并逐渐完善太阳标准模型，这是采用计算机模拟太阳演化，模拟过程基于以下前提：

- 假设太阳初始的化学成分与使用光谱学测量方法得到的太阳表面化学成分相同，并输入核聚变反应截面到计算机中；
- 太阳演化过程满足静力平衡方程，质量和能量守恒方程，辐射和对流的输运方程；
- 太阳演化的边界条件即太阳当前的质量，半径，年龄和表面光度。

太阳标准模型关于中微子通量的预测由于过去几十年计算机算力的逐渐提高，计算结果也在逐渐精确。由 J. Bahcall, M. Pinsonneault 等人于 2000 年提出的 BP00<sup>[86]</sup>和 2004 年更新的 BP04<sup>[87]</sup>。J. Bahcall, A. Serenelli 和 S. Basu 于 2005 年提出的 BSB05<sup>[88]</sup>，以及 N. Vinyoles 等人于 2016 年提出的 B16<sup>[89]</sup>模型。这些计

算又可以分别基于两种不同的太阳化学组成，分别是 GS98<sup>[90]</sup>，这是 N. Grevesse 和 A. Sauval 于 1998 年提出的基于球对称太阳模型假设的计算，以及 AGS05<sup>[91]</sup>，这是 M. Asplund, N. Grevesse 和 A. Sauval 于 2005 年基于三维太阳模型所做的计算，同时将新的原子和分子数据作为新的输入参数，并且这一模型在 2009 年由 M. Asplund, N. Grevesse, A. Sauval 和 P. Scott 做了更新，即 AGSS09<sup>[92]</sup>。

两种基于不同的化学组成的计算方法给出的中微子通量预测有所差别，如表1.1所示。一般将原子序数比 H 和 He 大的称为金属，AGSS09 相比于 GS98 有着更低的金属丰度。可以从表1.1得知，由于高低金属丰度所带来的通量差异较大，由不同计算方法所带来的通量差异较小。CNO 中微子对于高低金属丰度更为敏感，精确测量 CNO 中微子有望解决太阳高低金属丰度问题<sup>[88,93]</sup>。

表 1.1 Bahcall-Serenelli-Basu 2005 (BSB05) 和 Barcelona 2016 (B16) 这两种计算方法分别基于两种不同的太阳化学组成 GS98<sup>[90]</sup> 和 AGS05<sup>[91]</sup> (AGSS09<sup>[92]</sup>) 给出的太阳中微子到地表的通量和 1 倍标准差的预测。此表来自于<sup>[94]</sup>。

通量 [ $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ]	BSB05-GS98	BSB05-AGS05	B16-GS98	B16-AGSS09
$\Phi_{pp}/10^{10}$	5.99( $1 \pm 0.009$ )	6.06( $1 \pm 0.007$ )	5.98( $1 \pm 0.006$ )	6.03( $1 \pm 0.005$ )
$\Phi_{pep}/10^8$	1.42( $1 \pm 0.015$ )	1.45( $1 \pm 0.011$ )	1.44( $1 \pm 0.01$ )	1.46( $1 \pm 0.009$ )
$\Phi_{hep}/10^3$	7.93( $1 \pm 0.155$ )	8.25( $1 \pm 0.155$ )	7.98( $1 \pm 0.30$ )	8.25( $1 \pm 0.30$ )
$\Phi_{\gamma\text{Be}}/10^9$	4.84( $1 \pm 0.105$ )	4.34( $1 \pm 0.093$ )	4.93( $1 \pm 0.06$ )	4.50( $1 \pm 0.06$ )
$\Phi_{^8\text{B}}/10^6$	5.69 ( $1^{+0.173}_{-0.147}$ )	4.51 ( $1^{+0.127}_{-0.113}$ )	5.46( $1 \pm 0.12$ )	4.50( $1 \pm 0.12$ )
$\Phi_{^{13}\text{N}}/10^8$	3.05 ( $1^{+0.366}_{-0.268}$ )	2.00 ( $1^{+0.145}_{-0.127}$ )	2.78( $1 \pm 0.15$ )	2.04( $1 \pm 0.14$ )
$\Phi_{^{15}\text{O}}/10^8$	2.31 ( $1^{+0.374}_{-0.272}$ )	1.44 ( $1^{+0.165}_{-0.142}$ )	2.05( $1 \pm 0.17$ )	1.44( $1 \pm 0.16$ )
$\Phi_{^{17}\text{F}}/10^6$	5.83 ( $1^{+0.724}_{-0.420}$ )	3.25 ( $1^{+0.166}_{-0.142}$ )	5.29( $1 \pm 0.20$ )	3.26( $1 \pm 0.18$ )

另一方面，日震学观测能够独立于太阳标准模型，提供关于太阳内部声速和物质密度的详细信息。AGSS09 既然使用了最新的原子数据，给出的预测应该更准确，但是实际上 AGSS09 太阳模型预测的声速和日震学有较大的偏差，而 GS98 太阳模型所预测的声速和日震学的观测值较为一致<sup>[89,95]</sup>，B16-GS98 所预测的每类中微子各自的能谱如图1.4所示。

## 1.2.2 太阳中微子实验

在 R. Davis 领导的 Homestake 实验<sup>[81]</sup>发现太阳中微子消失之后的几十年里，陆续涌现了越来越多的实验探测到了与太阳标准模型预测不符的中微子通量。包括 1980 年代末在日本开展的神冈 (Kamiokande) 实验<sup>[96]</sup>，1990 年在俄罗斯开展

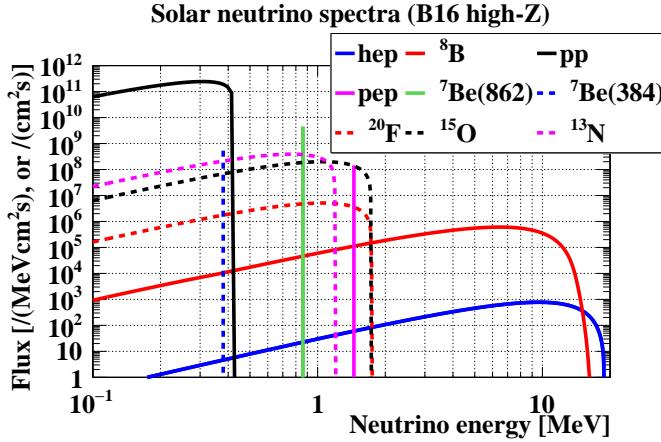
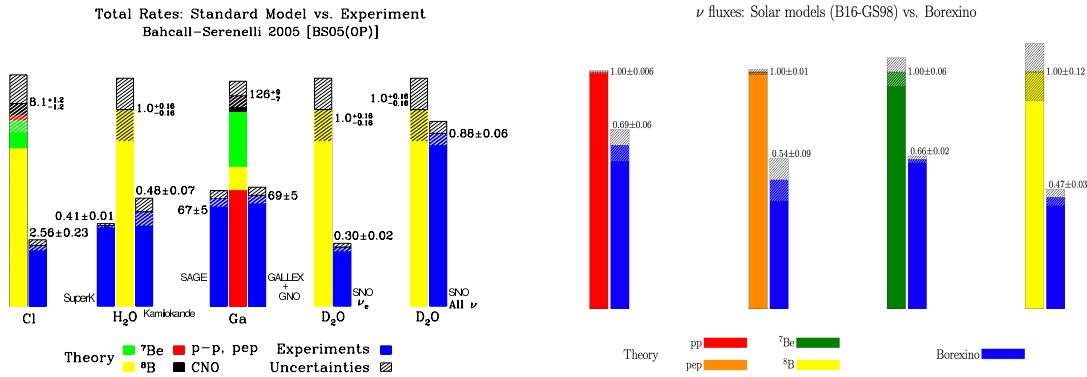


图 1.4 太阳标准模型 B16-GS98 关于太阳中微子能谱的预测，本图数据来自于<sup>[89]</sup>。

的 SAGE 实验<sup>[57]</sup>，1991 年在意大利格兰萨索国家实验室开展的 GALLEX/GNO 实验<sup>[97]</sup>，以及 1996 年在神冈基础上升级的超级神冈实验<sup>[10,21-22,98]</sup>，1999 年在加拿大开展的萨德伯里中微子观测站<sup>[6,99-100]</sup>（ Sudbury Neutrino Observatory，简称 SNO），均证实了 R. Davis 关于太阳中微子缺失的结果，如图 1.5(a) 所示。



(a) 多个太阳中微子实验预测的事例数和 BS05-GS98 预测的比较

(b) Borexino 测到的太阳中微子通量和 B16-GS98 预测的比较

图 1.5 (a) 多个太阳中微子实验所测到的太阳中微子通量和标准太阳模型 BS05-GS98 关于中微子通量的预测的比较，尽管这些中微子实验有着不同的能量阈值，但均出现了中微子通量的缺失现象，本图来源于<sup>[101]</sup>。(b) Borexino 所测到的太阳中微子通量和标准太阳模型 B16-GS98 关于中微子通量的预测的比较，同样观测到太阳中微子缺失现象，本图来源于<sup>[102]</sup>。

历史上已经开展的太阳中微子实验，它们的位置、深度、宇宙线通量、靶材料、基准体积、中微子能量阈值、敏感的中微子类型、运行时间、所测量到的太阳中微子通量在表 1.2 和表 1.3 所示。表 1.2 中 SNU 即太阳中微子单位（Solar Neutrino Unit，简称 SNU），1 SNU 表示的是在每个核子上每秒发生  $10^{-36}$  次反应。

表 1.2 太阳中微子实验概述（上），表中，K-I 指的是 Kamiokande 一期，SK-I 指的是 Super-Kamiokande 一期，依此类推。在 Kamiokande 之前 的实验，太阳中微子通量测量值采用 SNU 为单位，Kamiokande 和 Super-Kamiokande 的太阳中微子通量测量值采用  $[10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}]$  为单位。

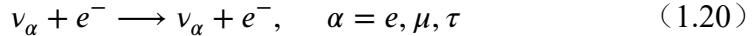
实验名称	位置	深度 [m]	宇宙线 $[\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$	靶材料	基准体积 [ton]	阈值 [MeV]	敏感的 中微子	运行时间	太阳中微子 通量
Homestake <sup>[103]</sup>	South Dakota	1478	$4.4 \times 10^{-9}$ <sup>[104]</sup>	$\text{C}_2\text{Cl}_4$	615	0.814	所有	1967 – 1994	$2.56 \pm 0.16 \pm 0.16$
SAGE <sup>[57]</sup>	Baksan, Russia	2100	$3 \times 10^{-9}$ <sup>[57]</sup>	Ga	50	0.233	所有	1990 – 2007	$65.4^{+3.1+2.6}_{-3.0-2.8}$
GALLEX <sup>[97]</sup>	Gran Sasso	1400	$3.3 \times 10^{-8}$ <sup>[97]</sup>	$\text{GaCl}_3$	30.3 Ga	0.223	所有	1991 – 1997	$73.1^{+6.1+3.7}_{-6.0-4.1}$
GNO <sup>[97]</sup>	Italy							1998 – 2003	$62.9^{+5.5+2.5}_{-5.3-2.5}$
Combined <sub>Ga</sub> <sup>[57]</sup>							所有		$66.1 \pm 3.1$
K-I	Kamioka	1000	$\sim 10^{-7}$ <sup>[105]</sup>	$\text{H}_2\text{O}$	1 k	9		1983 – 1986	
	Japan				7.2		<sup>8</sup> B	1987 – 1990	$2.80 \pm 0.19 \pm 0.33$
					6.7			1990 – 1996	
SK-I <sup>[98]</sup>					4.5			1996 – 2001	$2.38 \pm 0.02 \pm 0.08$
SK-II <sup>[21]</sup>	Kamioka	1000	$\sim 10^{-7}$ <sup>[105]</sup>	$\text{H}_2\text{O}$	22.5 k	6.5	<sup>8</sup> B	2002 – 2005	$2.41 \pm 0.05^{+0.16}_{-0.15}$
SK-III <sup>[22]</sup>	Japan				4			2006 – 2008	$2.40 \pm 0.04 \pm 0.05$
SK-IV <sup>[10]</sup>					3.5			2008 – 2018	$2.33 \pm 0.01 \pm 0.03$
Combined <sub>SK</sub> <sup>[10]</sup>							<sup>8</sup> B		$2.35 \pm 0.01 \pm 0.04$

表 1.3 太阳中微子实验概述（下），表中，SNO-I 指的是 SNO 一期，依此类推。太阳中微子通量测量值统一采用  $[10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}]$  为单位。

实验名称	位置	深度 [m]	宇宙线 $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$	靶材料	基准体积 [ton]	阈值 [MeV]	敏感的中微子	运行时间	太阳中微通量 $[10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}]$
SNO-I <sup>[6]</sup>					6.75			1999 – 2001	CC : $1.76 \pm 0.05 \pm 0.09$
Sudbury	Canada	2092	$3.3 \times 10^{-10}$ [107]	D <sub>2</sub> O	1 k		<sup>8</sup> B		NC : $5.09^{+0.44+0.46}_{-0.43-0.43}$
SNO-II <sup>[99]</sup>					5			2001 – 2003	ES : $2.35 \pm 0.22^{+0.15}_{-0.15}$
SNO-III <sup>[100]</sup>					6			2003 – 2006	NC : $4.94 \pm 0.21^{+0.38}_{-0.34}$
Combined <sub>SNO</sub> <sup>[11]</sup>							<sup>8</sup> B		NC : $5.25 \pm 0.16^{+0.11}_{-0.13}$
KamLAND	Kamioka [108-109] Japan	1000	$\sim 10^{-7}$ [105]	LS	1 k	0.2	<sup>7</sup> Be <sup>8</sup> B	2002 – 2011	$5.82 \pm 1.02 \times 10^3$
Borexino	Gran Sasso [93,110] Italy	1400	$3.3 \times 10^{-8}$ [111]	LS	278	0.2	$pp$ <sup>7</sup> Be <sup>8</sup> B CNO	2007 – 2021	$6.1 \pm 0.5^{+0.3}_{-0.5} \times 10^4$ 1.27 $\pm 0.19^{+0.08}_{-0.12} \times 10^2$ $4.99 \pm 0.11^{+0.06}_{-0.08} \times 10^3$ $5.68^{+0.39+0.03}_{-0.41-0.03} \times 10^2$ $7.0^{+3.0}_{-2.0}$

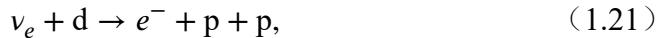
这些太阳中微子实验根据探测手段可以分为四类：

- **放射性化学实验：**包括以 Cl 为靶核的 Homestake 实验<sup>[112]</sup>，以 Ga 为靶核的 SAGE<sup>[57]</sup>， GALLEX/GNO<sup>[97]</sup>等实验，这些实验都是计数实验，没有中微子的方向和能量信息。
- **水切伦科夫 (Cherenkov) 实验：**利用中微子和电子的弹性散射 (Elastic Scattering, 简称 ES) 过程：

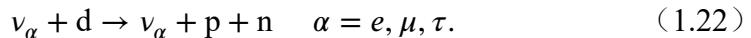


放出的电子在水中发出的切伦科夫光来探测中微子，这类过程对三种味道的中微子都敏感，优势在于可以同时探测反冲电子动能和入射的中微子方向，劣势在于光产额低导致能量分辨率低，能量阈值必须设高，所以采用这类技术的实验主要探测的是<sup>8</sup>B 中微子。这类实验包括神冈实验<sup>[96,106]</sup>，超级神冈实验<sup>[10,21-22,98]</sup>和 SNO 实验<sup>[6,99-100]</sup>。

- **重水实验：**SNO 还采用了重水 D<sub>2</sub>O 作为靶物质，在  $\nu_{e,\mu,\tau}-e^-$  的弹性散射过程之外还有  $\nu_e$  和氘核的带电流过程：



以及  $\nu_{e,\mu,\tau}$  和氘核的中性流过程：



SNO 实验带电流同样测到了  $\nu_e$  缺失，但是中性流测到的中微子通量和太阳标准模型预测在误差允许范围内一致，如图1.5(a)中 D<sub>2</sub>O all ν 所示。另外，考虑到  $\nu_e$  和  $\nu_{\mu,\tau}$  的截面比约为 6 : 1，所以弹性散射过程探测到的中微子通量也与太阳标准模型预测在误差范围内一致，如图1.6所示。

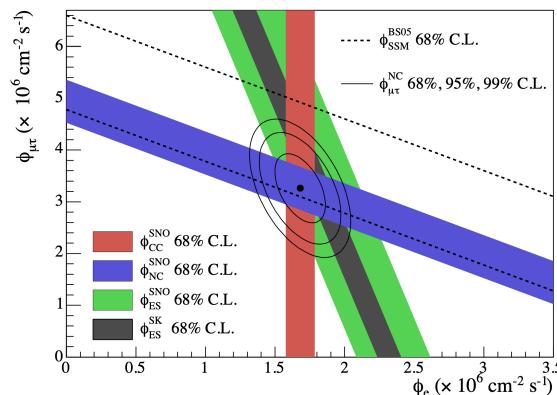


图 1.6 SNO 实验<sup>[6]</sup>于 2002 年观测到  $\nu_\mu$  和  $\nu_\tau$  出现的数量刚好等于  $\nu_e$  消失的数量。本图来源于<sup>[99]</sup>。并且  $\nu_e$  和  $\nu_{\mu,\tau}$  的截面比约为 6 : 1，所以弹性散射过程探测到的中微子通量也与太阳标准模型预测在误差范围内一致。

- **液闪实验:** 液体闪烁体(Liquid Scintillator, 简称 LS)探测器利用中微子能量激发出液闪分子中的电子，然后电子退激发出各向同性的光这一过程来探测中微子，光产额远高于切伦科夫探测器，所以能量阈值可以很低，优势正在于较低的能量阈值，高光产额和高能量分辨率，劣势在于缺少方向信息。这类实验包括 KamLAND<sup>[108-109]</sup> 和 Borexino<sup>[93,110]</sup>。其中 KamLAND<sup>[12]</sup> 确定了太阳中微子问题的解为大角混合 (Large Mixing Angle, 简称 LMA)。Borexino<sup>[113]</sup> 于 2018 年首次测量到了  $pp$  和  $pep$  中微子，测到的  $pp$  链中微子和 B16-GS98 的对比如图1.5(b)所示，同样观测到太阳中微子缺失现象。并且于 2020 年首次测量到了 CNO 中微子<sup>[93,110]</sup>。Borexino 已于 2021 年 10 月不再运行，2023 年 7 月，Borexino<sup>[114]</sup>用 2007 年到 2021 年的全部数据给出了 CNO 中微子测量的最终结果：CNO 中微子通量  $\Phi_{\text{CNO}} = 6.7^{+1.2}_{-0.8} \times 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ，以  $8\sigma$  排除无 CNO 中微子假设，与高金属丰度太阳模型相符，但精度还不足以完全排除低金属丰度太阳模型，如图1.7所示。

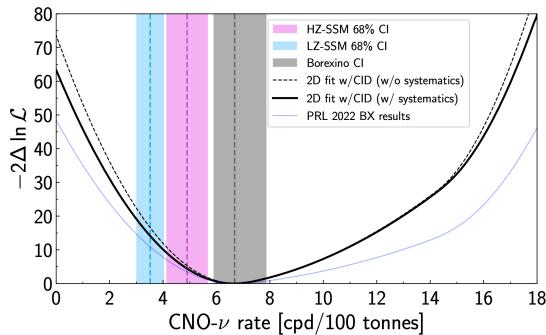


图 1.7 Borexino 于 2023 年 7 月使用全部的数据给出了 CNO 中微子的最终测量结果，以  $8\sigma$  排除无 CNO 中微子假设，与高金属丰度太阳模型（粉色区域）相符，但精度还不足以完全排除低金属丰度太阳模型（淡蓝色区域），本图来源于<sup>[114]</sup>。

### 1.2.3 下一代太阳中微子实验

下一代太阳中微子实验，包括 SNO+<sup>[115]</sup>，SK-GD<sup>[116]</sup>，JUNO<sup>[117]</sup> (Jiangmen Underground Neutrino Observatory)，顶级神冈<sup>[118]</sup> (Hyper-Kamiokande，简称 Hyper-K)，DUNE<sup>[119]</sup> (Deep Underground Neutrino Experiment)，THEIA<sup>[104]</sup>，中国锦屏中微子实验 (Jinping Neutrino Experiment，简称 JNE)<sup>[120-122]</sup>，它们的位置、深度、宇宙线通量、靶材料、基准体积、能量阈值、敏感的中微子类型、运行时间、物理目标在表1.4示出。这些实验根据探测手段同样可以分为四类：

- **水切伦科夫实验:** 如 SK-GD 和 Hyper-K。

**SK-GD:** SK-V 和 SK-VI 以  $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  的形式将钆 (Gd) 添加到纯水中<sup>[123]</sup>。Gd 对宇生本底产生的散裂中子的俘获截面比 H 大，且末态产生清

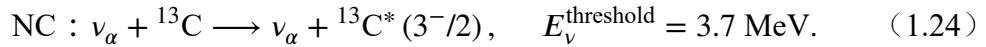
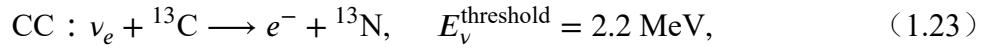
晰的 8 MeV  $\gamma$  级联信号，从而有效降低宇宙本底，提高太阳中微子测量精度。

**Hyper-K:** Hyper-K<sup>[118]</sup> 使用光子探测效率和时间分辨更好的光电倍增管 (Photomultiplier Tubes, 简称 PMT)，从而能够降低弹性散射的阈值，进而探测到低能中微子。凭借 187 kton 这一迄今为止最大的基准体积，Hyper-K 有望经过 20 年的曝光，能够以  $3.2\sigma$  的灵敏度探测到 *hep* 中微子<sup>[118]</sup>。

- **液闪实验:** 如 SNO+ 和 JUNO。

**SNO+:** SNO+ 实验从 SNO 实验升级而来，复用了 SNO 的很多装置<sup>[115]</sup>。一旦能很好地提取出本底，将有望在 CNO  $\nu_e$  测量上达到 15% 以下的精度<sup>[95,115]</sup>。

**JUNO:** JUNO 是目前为止最大的液闪探测器，能够达到  $3\%/\sqrt{E \text{ [MeV]}}$  的能量分辨率<sup>[124]</sup>。除了  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射，还可以通过  $^{13}\text{C}$  原子核上的带电流和中性流反应来探测太阳中微子<sup>[125]</sup>：



- **混合实验:** 这类实验结合了水切伦科夫实验方向性好和纯液闪实验能量分辨率高，能量阈值低两方面优点，能够同时测量电子方向及其能量，这在太阳中微子实验中至关重要。如 THEIA, JNE。

**THEIA:** 使用 100 kton 的 5% LS 的水基液体闪烁体<sup>[104]</sup> (Water-based Liquid Scintillator, 简称 WbLS)，THEIA 可以将 CNO 中微子测量的精度达到 10% 以内，有望最终解决太阳金属性问题。THEIA 还研究了在探测器中加入  $^7\text{Li}$  以提供带电流测量的可能性<sup>[104]</sup>。

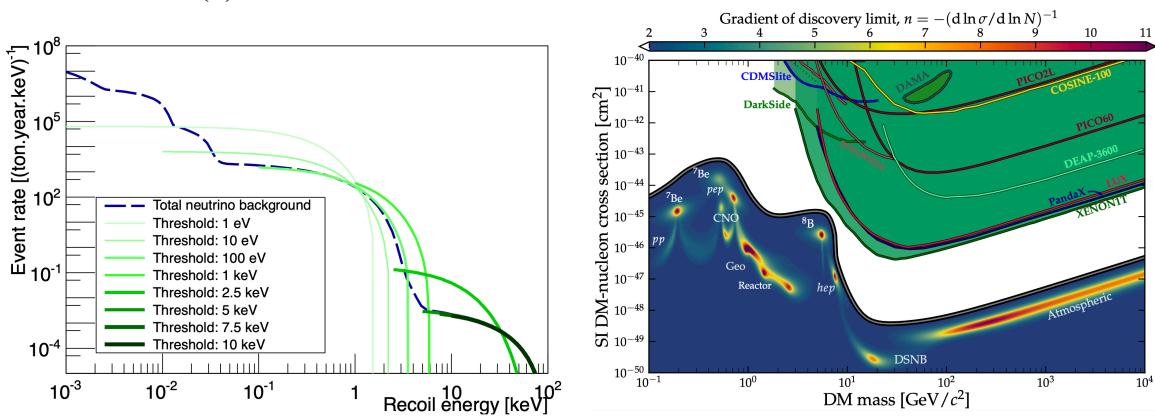
**JNE:** JNE 有着最厚的岩石覆盖<sup>[120]</sup>，是宇宙线本底最低的实验室之一<sup>[121]</sup>，如表1.4所示。JNE 计划采用一种新型慢液闪 (Slow Liquid Scintillator, 简称 SLS) 探测器<sup>[126-127]</sup>，能够拉伸闪烁光的脉冲形状，从而具有切伦科夫光和闪烁光的分离能力，有望在太阳中微子相关的多个问题上取得进展<sup>[120]</sup>。

- **惰性液体实验和固体实验:** 代表实验为采用液态氩 (Ar) 的 DUNE，以及一些暗物质探测实验，如采用液态氙 (Xe) 的 DARWIN<sup>[128-129]</sup>，XENONnT<sup>[130]</sup>，LUX<sup>[131-132]</sup>，PandaX<sup>[133]</sup>等，以及采用液态氩的 DarkSide-20k<sup>[134]</sup>，和采用固态锗 Ge 的 SuperCDMS 实验<sup>[135-136]</sup>，CDEX<sup>[137]</sup>实验等。

**DUNE:** 采用液氩的 DUNE 可以通过  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射 (式1.20) 和  $\nu_e$ - $^{40}\text{Ar}$  带电流过程来探测中微子<sup>[138]</sup>。DUNE 还采用了时间投影室 (Time Projection Chamber, 简称 TPC) 技术达到良好的径迹重建<sup>[119]</sup>。DUNE 能够精确测量  $^8\text{B}$  中微子通量，并有望发现 *hep* 中微子<sup>[138]</sup>。

**XENONnT, DarkSide-20k, SuperCDMS 等:** 这些暗物质实验通过测量反冲

核的动能来探测弱相互作用大质量粒子（Weakly Interacting Massive Particles，简称 WIMP）。作为暗物质的候选粒子，WIMP 到目前为止还没有被探测到，暗物质实验将增加靶体积从而达到更高灵敏度，但是这也将探测到太阳中微子。MeV 的太阳中微子和核子发生相干弹性散射（Coherent Neutrino-nucleus ES，简称 CEvNS）的能谱类似于 WIMP 的能谱，从而伪装成 WIMP 信号，如图1.8(a)所示，此时 WIMP 信号和中微子信号将无法区分，称为“中微子地板”<sup>[139]</sup>（Neutrino Floor），所以这些暗物质实验也有探测太阳中微子的潜力。如图 1.8(b) 所示，多个暗物质实验都在逼近“中微子地板”。



(a) CEvNS 的能谱拟合出不同质量的 WIMP      (b) 多个暗物质实验逼近“中微子地板”

图 1.8 (a) 中微子和 Xe 核发生 CEvNS，不同反应阈值下，对应不同种类的中微子，能够拟合出不同质量的 WIMP，本图来自于<sup>[139]</sup>。(b) 多个暗物质实验都在逼近“中微子地板”，即达到 WIMP 的参数空间能够被太阳中微子信号伪装出来，本图来自于<sup>[140]</sup>。

### 1.3 本文主要研究内容和研究意义

本研究主要关注的太阳中微子物理包括：太阳中微子振荡参数的测量，太阳高密度物质所致的概率上升效应，太阳轻惰性中微子，地球效应与地球成像。这些太阳中微子物理都和中微子能量有着重要关系，用带电流探测过程能够直接获得太阳中微子的能量信息，锂-7 (<sup>7</sup>Li) 的带电流探测方法就是备选之一。氯化锂 (LiCl) 化合物具有经济实惠，中性并且无毒的特点，其水溶液容易获取。本研究将详细探讨中国锦屏实验室将来采用 LiCl 水溶液探测太阳中微子的可行性，以及在太阳中微子物理研究上的优势。

#### 1.3.1 太阳中微子振荡参数的测量

太阳中微子的存活概率与  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\theta_{12}$  和  $\theta_{13}$  都有关，如式A.76所示。太阳中微子到地球后已经退相干了，所以太阳中微子实验对决定中微子振荡振幅的  $\theta_{12}$

表 1.4 下一代太阳中微子实验概述，此表修改自文献 [94] 和文献 [102]。

实验名称	位置	深度 [m]	宇宙线通量 [cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	靶材料	基准体积 [ton]	阈值 [MeV]	敏感的 中微子	运行时间	主要物理目标
SNO+	Sudbury [115]	2092	$3.3 \times 10^{-10}$ [107]	LS	800	sub-MeV	所有	2018-	寻找无中微子双 $\beta$ 衰变
SK-GD	Kamioka [116,141]	1000	$\sim 10^{-7}$ [105]	H <sub>2</sub> O	22.5 k	3.5/4.5	<sup>8</sup> B	2020-	更加精确地测量太阳中微子
JUNO	Jianmeng [124]	700	$4 \times 10^{-7}$ [124]	LS	20 k	sub-MeV	所有	将来	中微子的质量顺序
Hyper-K	Kamioka [105,118]	650	$\sim 10^{-6}$ [105]	H <sub>2</sub> O	187 k	3.5/4.5	<sup>8</sup> B	将来	更加精确地测量太阳中微子
DUNE	South Dakota [119,142]	1500	$4.4 \times 10^{-9}$ [104]	LAr	40 k	7~10	<sup>8</sup> B	将来	CP 相角的测量
THEIA	South Dakota [104]	1500	$4.4 \times 10^{-9}$ [104]	WbLS	25 k/100 k	/	/	将来	测量 CNO 中微子
JNE	Jinping [120]	2400	$3.5 \times 10^{-10}$ [121]	SLS	2 k	sub-MeV	所有	将来	彻底解决太阳金属性问题
									太阳中微子相关的多个问题

的约束较反应堆实验 KamLAND 好，但对决定中微子振荡频率的  $\Delta m_{21}^2$  的约束较 KamLAND 差，目前关于这三个参数的拟合结果如图1.9所示。

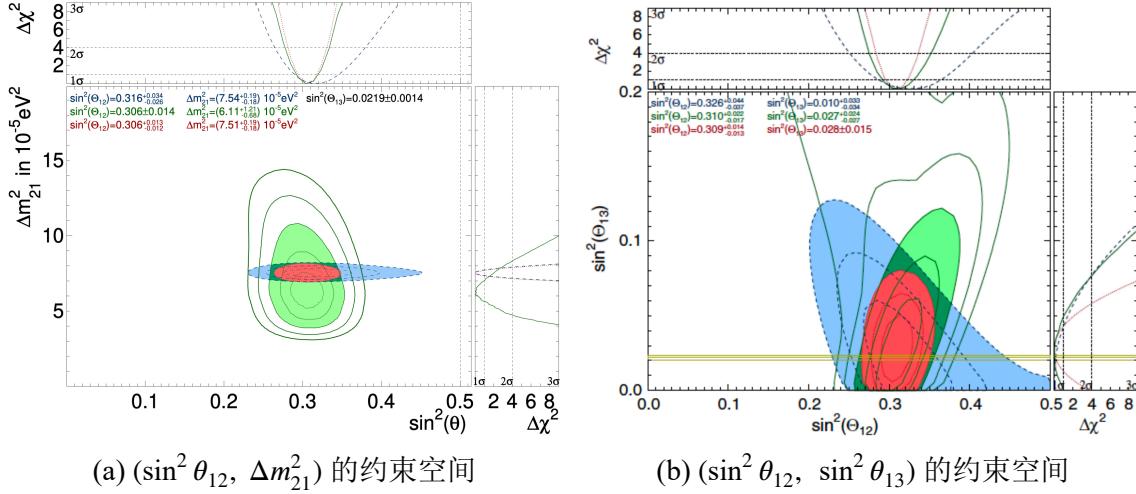


图 1.9 (a)  $\Delta m_{21}^2$  和  $\sin^2 \theta_{12}$  的允许区域，其中包括了太阳中微子实验结果（绿色区域）和 KamLAND 反应堆中微子实验结果（蓝色区域），以及联合拟合结果（红色区域）。本图来自于<sup>[143]</sup>。 (b)  $\sin^2 \theta_{13}$  和  $\sin^2 \theta_{12}$  的允许区域<sup>[10]</sup>，其中包括了太阳中微子实验结果（绿色区域）和 KamLAND 反应堆中微子实验结果（蓝色区域）以及联合拟合结果（红色区域）。黄色置信带来自于大亚湾中微子实验<sup>[144]</sup>，本图来自于<sup>[143]</sup>。

## 太阳中微子振荡参数测量的研究现状

反应堆 KamLAND 实验和太阳中微子实验（包括 SNO, Super-K）联合拟合结果确定了  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2)$  是大角混合解，即 LMA 解。Super-K<sup>[10]</sup>在 2016 年报告的结果显示：两类实验的最佳拟合点在  $\theta_{12}$  符合的特别好<sup>[10]</sup>，但是在  $\Delta m_{21}^2$  则有着大约  $2\sigma$  的差异<sup>[143]</sup>。而 Super-K 在 2020 中微子大会上报告的太阳中微子振荡参数的最新结果显示，这一  $2\sigma$  的差异在很大程度上已经降低了，如图 1.9(a) 所示。

## 下一代实验对于太阳中微子振荡参数的约束能力

DUNE<sup>[145]</sup>将 Super-K 在 2016 年报告的由太阳中微子实验联合拟合的振荡参数  $(\sin^2 \theta_{12} = 0.308, \Delta m_{21}^2 = 4.85 \times 10^{-5} \text{ eV}^2)$ <sup>[10]</sup>作为真实值，有效曝光量设置为 100 kton-year，经过模拟，有望将  $\Delta m_{21}^2$  约束达到 5.9% 的精度<sup>[138]</sup>，如图 1.10 所示。预计太阳中微子测出的  $\Delta m_{12}^2$  和反应堆实验 JUNO<sup>[117]</sup>测出的  $\Delta m_{12}^2$  能有  $5.6\sigma$  差异，如图1.10所示。

另外，Hyper-K 能够对太阳中微子实验和反应堆中微子实验之间关于  $\Delta m_{21}^2$  差异的灵敏度达到  $4 \sim 5\sigma$ <sup>[118]</sup>。

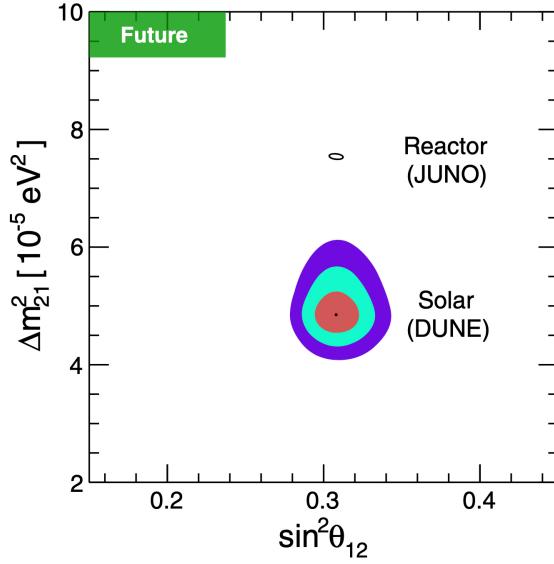


图 1.10 DUNE 关于太阳中微子振荡参数  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\theta_{12}$  的预期的约束能力, 以及和 JUNO 的模拟结果的对比, 本图来源于<sup>[138]</sup>。

### 1.3.2 太阳高密度物质所致的概率上升效应

根据大角混合 LMA 的预测 (式1.11) 和A.8.2节的讨论, 在太阳中微子物质效应主导的能区 (大于 5 MeV),  $\nu_e$  存活概率较大,  $s_{\theta_{12}}^2 \approx 0.32$ ; 而在太阳中微子真空效应主导的能区 (小于 2 MeV),  $\nu_e$  存活概率较小,  $(c_{\theta_{12}}^2)^2 + (s_{\theta_{12}}^2)^2 \approx 0.56$ 。中间应该存在一个过渡区, 在这个过渡区中,  $\nu_e$  的存活概率随着能量的降低, 会从较小值渐渐增大为较大值, 也就是发生了太阳高密度物质所致的概率上升效应<sup>[13]</sup>, 如图1.11(a)所示。

#### 概率上升效应的研究现状

整体来看, 目前关于 LMA 解所预测的中微子存活概率曲线的实验结果是, 在物质效应起主导作用的高能段 (大于 5 MeV), 实验上得到的  $\nu_e$  存活概率是探测到的  $\nu_e$  的事例数比上总的中微子事例数, 这得益于 SNO 关于中性流的测量, 如表1.3和图1.11(a)所示。而在真空效应起主导作用的低能段 (小于 2 MeV), 目前实验得到的  $\nu_e$  存活概率则是探测到的  $\nu_e$  的事例数比上标准太阳模型所预测的中微子事例数。也就是说实验所得到的在低能段的  $\nu_e$  存活概率是依赖于太阳标准模型的, 如图1.11(a)所示。

再单看过渡区通量最大的 <sup>8</sup>B 中微子的存活概率 (图1.12(a))。SNO 于 2013 年利用 LMA 解下的最佳拟合参数值, 比较了模拟出来的  $\nu_e$  存活概率随着能量的变化曲线和实验测量的结果<sup>[11]</sup>, 如图1.12(a)所示。虚线是太阳过来的  $\nu_e$  存活概率随着中微子能量的变化曲线, 灰色阴影带是理论预测  $1\sigma$  的不确定度, 蓝色线代表

SNO 测量到的  ${}^8\text{B}$  中微子存活概率的实验结果<sup>[11]</sup>，蓝色阴影带是实验测量结果的  $1\sigma$  误差。从图中我们可以看出，SNO 的实验结果表明，LMA 解下的概率上升效应仅仅只是 SNO 实验结果的一个子集。尚无法验证共振区中是否存在太阳高密度物质所致的概率上升效应。

另外，Super-K 在 Neutrino2020 大会上报告了太阳高密度物质所致的概率上升效应的最新测量结果<sup>[19]</sup>，如图1.12(b)所示，约  $1\sigma$  排除水平的振荡概率，但是依然未观测到显著的太阳高密度物质所致的概率上升效应。

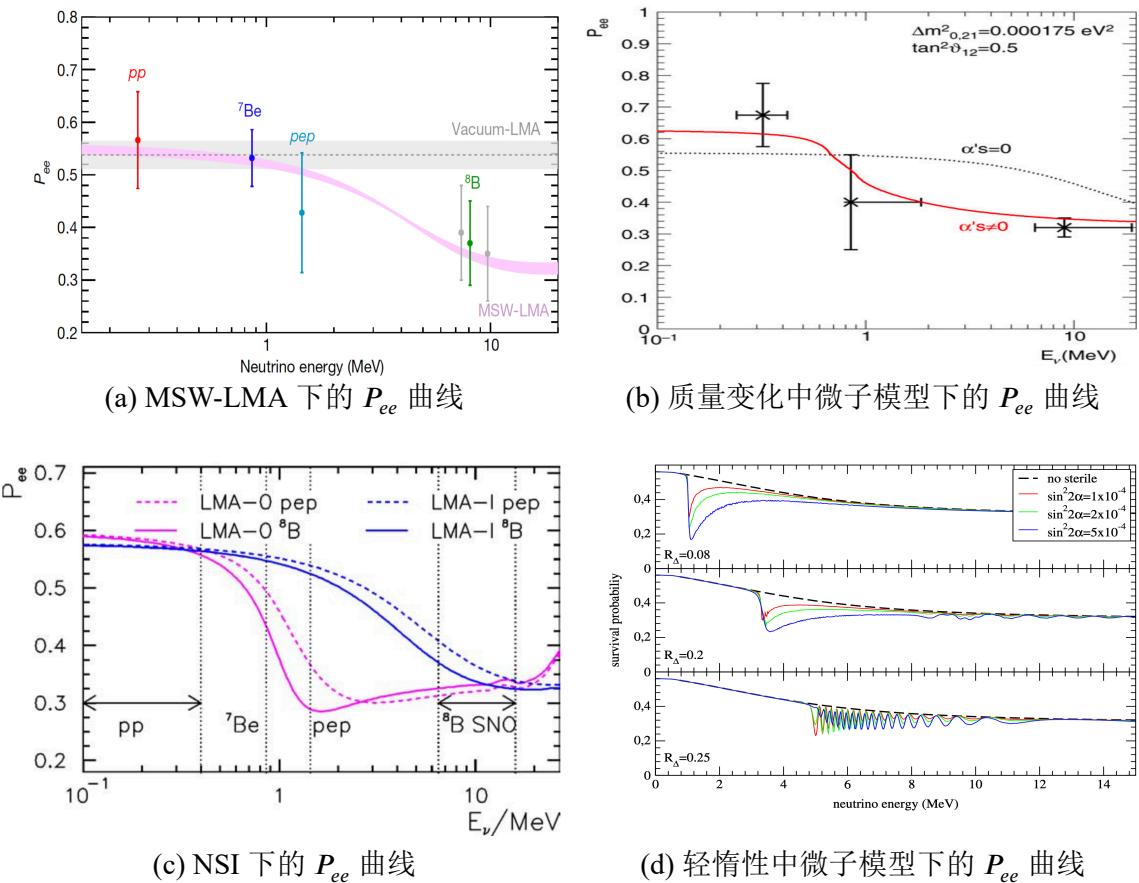


图 1.11 (a) LMA 解下  $\nu_e$  存活概率曲线会出现太阳高密度物质所致的概率上升效应，一并画出的还有太阳中微子实验关于  $P_{ee}$  的测量值，本图来源于<sup>[143]</sup>。(b) 质量变化的中微子影响共振区  $\nu_e$  存活概率，本图来源于<sup>[24]</sup>。(c) 非标准相互作用导致了偏离 LMA 所预测的结果，本图来源于<sup>[23]</sup>。(d) 轻惰性中微子的存在使得共振区中的  $\nu_e$  存活概率的图像不但出现了下沉的结构，还出现了全新的扭动的结构，本图来源于<sup>[26]</sup>。

综上，目前实验对于中微子存活概率在中间能段（大于 2 MeV，小于 5 MeV）的太阳高密度物质所致的概率上升效应没有验证，无论是 Super-K<sup>[19]</sup>还是 SNO<sup>[11]</sup>都没有发现概率上升效应的现象，MSW 效应是不完整的。

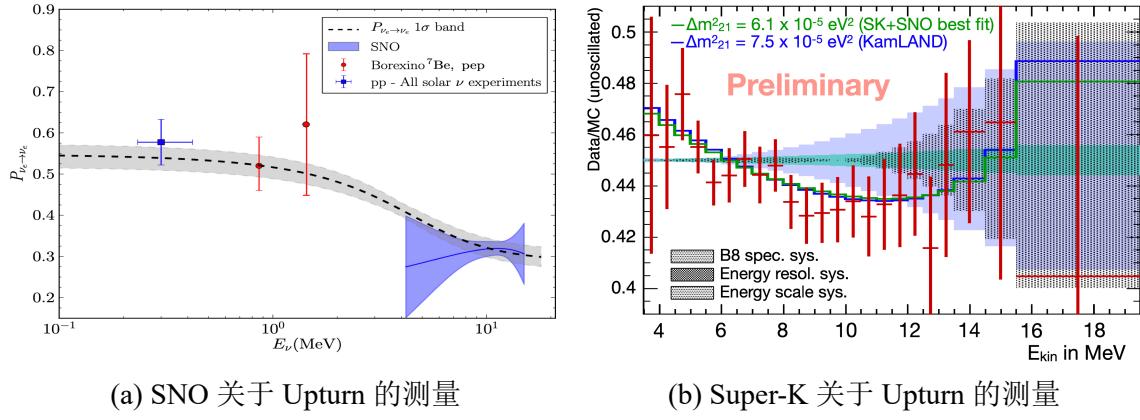


图 1.12 (a) SNO 关于太阳高密度物质所致的概率上升效应的测量结果, 虚线是最佳拟合值下,  $\nu_e$  存活概率随着能量的变化, 灰色阴影带是理论预测  $1\sigma$  的不确定度, 蓝色线代表 SNO 测量到的  $^8\text{B}$  中微子存活概率的实验结果<sup>[11]</sup>, 蓝色阴影区是实验结果的  $1\sigma$  误差, 本图来源于<sup>[146]</sup>。 (b) SK 关于太阳高密度物质所致的概率上升效应的最新测量结果, 约  $1\sigma$  排除水平的振荡概率, 本图来源于<sup>[19]</sup>。

### 下一代实验对于概率上升效应的探测能力

Hyper-K 采用了高性能的光电倍增管, 能够将弹性散射中反冲电子的能量阈值下探至 3.5 MeV, 有了这个较低的探测阈值, 再加上 187 kton 的超大靶体积, 预计能够在 2(11) 年的曝光下, 以  $3(5)\sigma$  探测到概率上升效应<sup>[118]</sup>。

#### 1.3.3 太阳轻惰性中微子模型

由于目前实验对于 LMA 解在中间过渡区所预测的概率上升现象的观测是缺失的, 那么在这个区域内, 就有可能发生新物理。很多文章都讨论了一些可能存在的新物理会影响着过渡区内  $\nu_e$  存活概率随着能量的变化曲线, 导致实际的  $P_{ee}$  曲线偏离 LMA 所预测的概率上升效应的结果。比如质量变化的中微子<sup>[24]</sup> (Mass Varying Neutrinos, 简称 MaVaNs), 如图1.11(b)所示。轻惰性中微子<sup>[25-26]</sup>, 如图1.11(d)所示, 以及非标准相互作用<sup>[23]</sup> (Nonstandard Interaction, 简称 NSI), 如图1.11(c)所示。本研究将聚焦于可能存在的轻惰性中微子所引起的太阳中微子振荡的新物理。

A. Smirnov 和 P. Holanda 于 2004 年首次提出了弱混合的轻惰性中微子模型<sup>[25-26]</sup>, 这一模型可以影响  $\nu_e$  存活概率在过渡区的曲线, 使得其出现下沉与扭动 (Dip and Wiggles) 的新物理结构, 如图1.11(d)所示。这一结构的出现将会抑制在过渡区的  $\nu_e$  通量。这一振荡模型的参数区间不同于之前所提到的反应堆反常、Gallium 反常、LSND 实验反常这些质量平方差在  $1 \text{ eV}^2$  附近的新物理。这一振荡模式的  $\Delta m^2$  在  $10^{-5} \text{ eV}^2$  甚至更小的量级。在这种情况下, 太阳轻惰性中微子模型

中的惰性中微子对应的质量态的本征值处于第一个质量态本征值和第二个质量态本征值之间，而不是远远大于它们，这样才能够影响 1-2 振荡参数相关的太阳中微子振荡。

在这一模型中，由于超出了标准三代中微子框架，我们就需要对三代中微子质量态转化到味道态的 PMNS 矩阵做扩展，从而获得四代中微子的转化矩阵。将物质中有着确定本征值，并且对应于真空中的第  $i$  个质量态  $\nu_i$  的态称为物质中第  $i$  个有效质量态  $\nu_{im}$ 。在弱混合的轻惰性中微子模型下， $\nu_{2m}$  和  $\nu_{3m}$  都可以独立演化出去。而  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{0m}$  在太阳内部物质下可能会出现一段甚至两段非绝热的转化区域<sup>[25-26]</sup>，可以见A.7节的详细讨论。这使得轻惰性中微子模型有着比标准三代中微子框架更为丰富的物理：在原有的  $\nu_e$  存活概率曲线中出现下沉与扭动的新物理结构，如图1.11(d)所示。在一些参数设置下，可以使得这一新物理结构发生在未被实验验证的过渡区内。过渡区中所出现的下沉与扭动这一新物理结构与惰性中微子混合参数  $\Delta m_{01}^2$ ， $\alpha$  紧密关联，其中  $\Delta m_{01}^2 = m_0^2 - m_1^2$ ， $m_0$  和  $m_1$  分别对应于惰性中微子和  $\nu_1$  的质量， $\alpha$  是惰性中微子和  $\nu_1$  的混合角。

文献<sup>[25-26]</sup>定义  $\Delta m_{01}^2$  和  $\Delta m_{21}^2$  之比为  $R_\Delta$ ：

$$R_\Delta = \frac{\Delta m_{01}^2}{\Delta m_{21}^2}. \quad (1.25)$$

$R_\Delta$  的大小将会影响  $\nu_e$  存活概率曲线下沉的位置，如图1.11(d)所示。 $R_\Delta$  越大，下沉位置越向较高的能段（5 MeV 以上）发展，而惰性中微子和  $\nu_1$  混合角  $\alpha$  的大小将会影响下沉的程度和扭动结构明显的程度。混合角  $\alpha$  越大，出现下沉与扭动的结构就越明显，如图1.11(d)所示。

### 太阳轻惰性中微子的研究现状

SNO 和 Super-K 目前的实验结果还无法断定在共振区是否会出现概率上升效应，如图1.12(a)和图1.12(b)所示。SNO 和 Super-K 的实验数据均表明  $P_{ee}$  在共振区的趋势与 LMA 所预测的趋势相反，而更贴近于轻惰性中微子模型下的预测<sup>[147]</sup>。

SNO 合作组做了关于  $\sin^2 2\alpha - R_\Delta$  参数空间下，5 MeV 的  ${}^8\text{B}$  中微子的存活概率的二维图<sup>[148]</sup>，如图1.13所示。然后 SNO 利用标准卡方方法，对 SNO 三期的数据以及其他太阳中微子实验数据做全局卡方分析，得到 90% 置信度下  $\sin^2 2\alpha$  的上限和  $R_\Delta$  的范围：

$$\sin^2 2\alpha < 9.9 \times 10^{-3}, R_\Delta = 0.11^{+0.04}_{-0.03}, \quad (1.26)$$

如图1.14所示。可以看到，基于太阳中微子实验的全局分析，尚不能很好地约束弱混合的轻惰性中微子混合参数。目前太阳中微子数据无法显著地证实轻惰性中微

子存在与否。

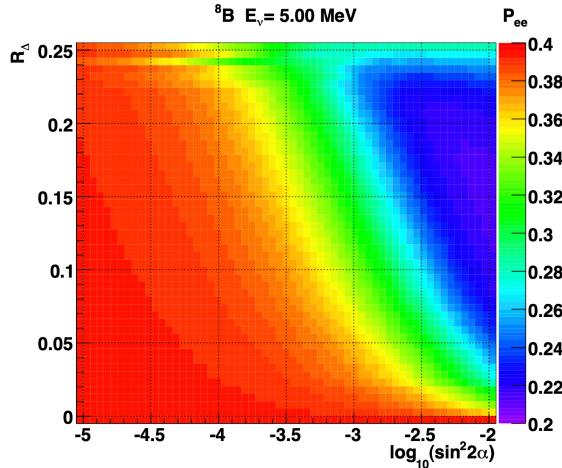


图 1.13 5 MeV  ${}^8\text{B}$  中微子在不同  $\sin^2 2\alpha - R_\Delta$  参数下的存活概率，使用的 LMA 解的参数为  $\Delta m_{21}^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ ,  $\tan^2 \theta_{12} = 0.4$ , 本图来源于<sup>[148]</sup>。

### 1.3.4 地球效应和地球成像

#### 地球效应

根据 LMA MSW 解的预测，在夜间探测到的太阳中微子穿过地球会受到地球物质效应的影响，使得  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  相较于白天更多地向  $\nu_e$  转化。从而使得  $\nu_e$  的通量有所提高，就造成了白天和晚上所探测到的中微子通量的不对称<sup>[14-16]</sup>，这称为昼夜不对称效应，此效应可定义为：

$$A_{DN} = \frac{D - N}{(D + N)/2}, \quad (1.27)$$

其中 D, N 分别是白天和夜晚观测到的  $\nu_e$  总事例数。目前实验对于昼夜不对称现象的观察并没有很高的显著度。一旦将来发现了超过  $5\sigma$  显著度的昼夜不对称效应，将是对 MSW 物质效应的直接检验。

式 1.27 中的昼夜不对称效应只是量化地球物质效应的手段之一，在大多数中微子实验所采用的弹性散射过程中，没有中微子能量信息，所以只能构造白天夜晚总事例数的不对称。与此相比的是，带电流过程能够获得中微子的能量信息，将有望能够构造一个新的检验指标，以期得到更高的地球物质效应的显著度。

#### 地球效应的研究现状

SNO 实验<sup>[149]</sup>于 2002 年测量了白天和夜晚太阳中微子的能谱和事例率，对于带电流事例，昼夜不对称效应为  $-0.14 \pm 0.063(\text{stat.})^{+0.015}_{-0.014}(\text{syst.})$ 。如果活跃中微子的总通量被额外限制为没有不对称性，即只有活跃中微子，没有惰性中微子这一

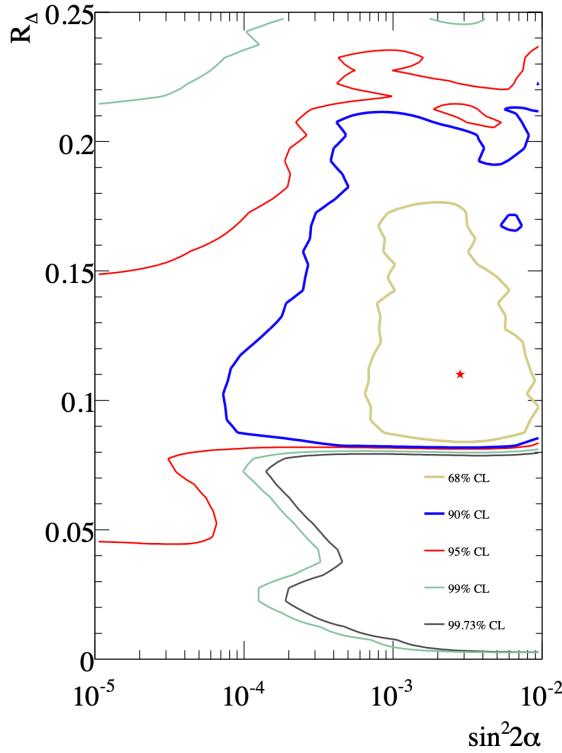


图 1.14 对惰性中微子混合参数的全局卡方分析，分析包括了 SNO 三期的实验数据，以及其他太阳中微子实验的数据，得到的最佳拟合点为  $\sin^2 2\alpha = 2.8 \times 10^{-3}$ ，以及

$$R_\Delta = 0.11, \chi^2_{\min}/\text{ndf} = 132.03/120。使用的 LMA 参数为 \\ \Delta m_{21}^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \tan^2 \theta_{12} = 0.4。本图来源于 [148]。$$

限制下，那么  $\nu_e$  的昼夜不对称性为  $-0.07 \pm 0.049(\text{stat.})^{+0.013}_{-0.012}(\text{syst.})$ 。

Super-K 四期于 2014 年发布测到的中微子昼夜不对称效应为  $-3.2 \pm 1.1(\text{stat.}) \pm 0.5(\text{syst.})\%$ ，约  $2.7\sigma$  显著度的非零昼夜不对称值<sup>[150]</sup>。这也是关于地球物质效应的第一个迹象，如图1.15(a)所示。之后 Super-K 实验又于 2016 年发布了测到的中微子昼夜不对称效应为  $-3.6 \pm 1.6(\text{stat.}) \pm 0.6(\text{syst.})\%$ <sup>[10]</sup>，尚未达到  $5\sigma$  的显著度，后来 Super-K 在 2020 年的中微子大会上将 SK-IV 测到的昼夜不对称效应更新了，如图1.15(b)所示，约  $2\sigma$  的显著度，这是因为<sup>[19]</sup>：

- 新的重建导致的事例迁移。
- 之前的分析使用了截至 2014 年 2 月的数据 (SK-IV: 1664 天)。
- 增加了约 1300 天的数据，数据朝着更小的 D/N 不对称性波动。

Super-K 实验一到四期对于昼夜不对称效应的测量结果分别为：

$$A_{\text{DN}}^{\text{SK-I}}[20] = -0.021 \pm 0.020 \text{ (stat.)}^{+0.013}_{-0.012} \text{ (syst.)}, \quad (1.28)$$

$$A_{\text{DN}}^{\text{SK-II}}[21] = -0.063 \pm 0.042 \text{ (stat.)} \pm 0.037 \text{ (syst.)}, \quad (1.29)$$

$$A_{\text{DN}}^{\text{SK-III}}[22] = -0.056 \pm 0.031 \text{ (stat.)} \pm 0.013 \text{ (syst.)}, \quad (1.30)$$

$$A_{\text{DN}}^{\text{SK-IV}}[19] = -0.021 \pm 0.011 \text{ (stat.)} \quad (\text{初步数据}). \quad (1.31)$$

Borexino于2011年测量了单能的 ${}^7\text{Be}\nu_e$ ，排除了0.867 MeV的 ${}^7\text{Be}$ 太阳中微子的昼夜不对称性<sup>[151]</sup>： $A_{DN} = 0.001 \pm 0.012(\text{stat.}) \pm 0.007(\text{syst.})$ ，这与LMA解关于低能中微子真空振荡占主导的预测一致。

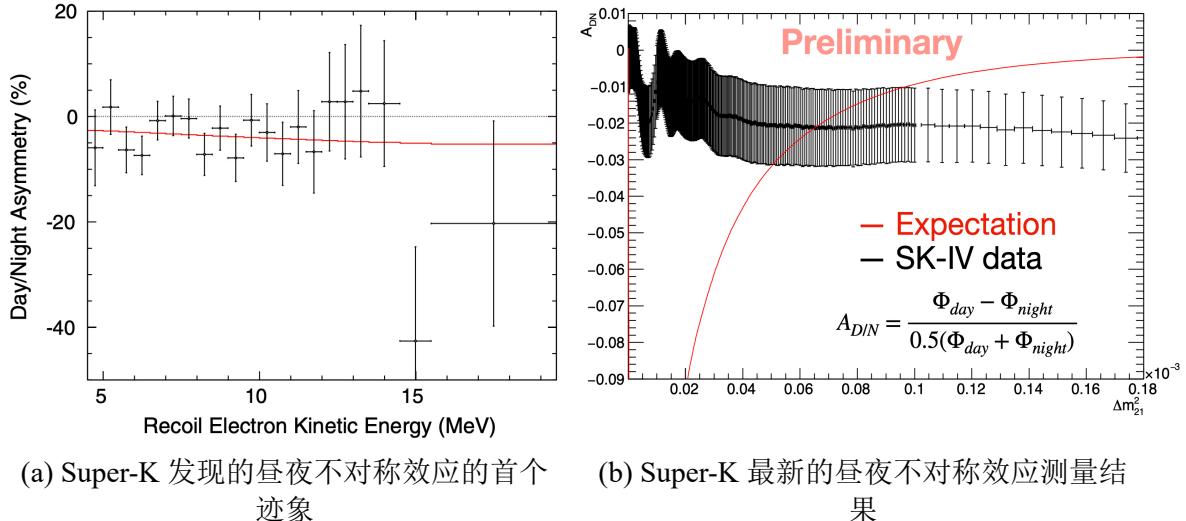


图 1.15 (a) Super-K 于 2014 年关于昼夜不对称效应的第一个迹象，本图来源于文献<sup>[150]</sup>。  
(b) Super-K 在 2020 年关于 SK-IV 更新的昼夜不对称效应，本图来源于文献<sup>[19]</sup>。两张图中黑色十字线都表示数据点，红色线是预期的昼夜不对称效应的变化。

## 下一代实验对于地球效应的探测能力

DUNE 的四万吨探测器在不到三年就能实现 100 kton-year 的曝光，在这么大的曝光下，预计测到白天中微子总事例数为  $D = 3.04 \times 10^4$ ，夜晚中微子总事例数为  $N = 3.29 \times 10^4$ ，本底总事例数为  $B = 0.83 \times 10^4$ ，最终测到的昼夜不对称效应可以达到  $10\sigma$ :  $A_{DN} \simeq -(7.9 \pm 0.8)\%$ <sup>[138]</sup>。这正得益于  $\nu_e$ - ${}^{40}\text{Ar}$  的截面大，以及在带电流过程中，中微子能量和电子能量强相关。

Hyper-K 预计 10 年的曝光下，昼夜不对称测量的灵敏度在  $4 \sim 8\sigma$  范围内<sup>[118]</sup>。

## 地球成像

中微子的地球成像根据成像原理可以分为中微子吸收成像<sup>[152-160]</sup>和中微子振荡成像<sup>[17-18, 161-181]</sup>。吸收成像对于中微子穿过地球的累积效应敏感，需要许多条基线才能重建地球的密度剖面，所以我们主要关注振荡成像。

中微子振荡成像的原理是，中微子在穿过地球过程中，考虑地球物质效应，利用中微子穿过地球后的重生效应（见A.9.2的讨论）或者中微子存活概率这样实验上可以测量的量，来重建出中微子穿过地球路径上的密度分布。地球成像的中微子源可以有多种，包括大气中微子<sup>[157-159]</sup>（如 KM3NeT 实验<sup>[182-185]</sup>），超新星中

微子<sup>[168]</sup>和太阳中微子<sup>[17-18]</sup>。

### 地球成像的研究现状

文献<sup>[17]</sup>采用傅里叶变换的解析方法重建中微子穿过地球路径上的密度，但是对于上地幔密度  $\rho \simeq 3 \text{ g/cm}^3$ ，要求路径长度  $L \ll 1700 \text{ km}$ ，超过这一长度解析方法就会失效。文献<sup>[161,165-166]</sup>把地球分为若干层数，每一层认为是常数密度。模拟生成中微子穿过地球后的转化概率（每一层的密度和厚度作为可调参数）。然后将模拟的重生效应与“真实”密度（比如初步地球参考模型，见附录A.2.2的讨论）分布下的转化概率作对比，从而得到最佳的地球密度分布的拟合结果，这一基于蒙特卡洛的模拟方法对路径长度没有要求。

以上是地球成像的理论和模拟研究，目前的中微子实验还没有足够的曝光给出地球成像的实验结果。

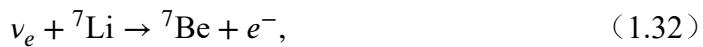
### 下一代实验地球成像的能力

DUNE 实验<sup>[180]</sup>采用大气中微子做地球成像，预期可以在 400 kton-year 的曝光下，分别以 9%，14%，22% 的精度确定地核，下地幔和上地幔的密度，甚至以 60 kton-year 的较低曝光就能以约 30% 精度确定地核的密度。

#### 1.3.5 带电流技术的发展

以上所提到的本研究关注的太阳中微子物理都和中微子能量密切相关，如果能够直接探测到太阳中微子能量，将对上述研究大有裨益。但是历史上的很多利用带电流的放射性化学实验，如 Homestake<sup>[186]</sup>，GALLEX/GNO<sup>[97,187]</sup>，SAGE<sup>[57]</sup>，它们受限于时代和实验条件，都是计数实验，并没有测量反冲电子能量，SNO 实验是目前唯一一个带电流测量中微子能量的实验<sup>[11]</sup>，但带电流信号所含的中性流本底太多。

人们提出了很多带电流测量中微子能量的核素，包括  $^{40}\text{Ar}$ <sup>[119,134]</sup>， $^{11}\text{B}$ <sup>[188]</sup> 和  $^{115}\text{In}$ <sup>[189]</sup>， $^{116}\text{Cd}$ <sup>[190]</sup>， $^{71}\text{Ga}$ <sup>[191]</sup>， $^{131}\text{Xe}$ ， $^{136}\text{Xe}$ <sup>[192]</sup>。 $^7\text{Li}$  也是其中之一，使用  $^7\text{Li}$  作为中微子探测靶物质的可行性最早由 J.Bahcall<sup>[193]</sup>提出，并且在 20 世纪 60 年代就已经有了很多讨论<sup>[194-196]</sup>，但当时还只是构想，并未变成现实。1980 年，L.Peak<sup>[197]</sup>首次提出使用氯化锂来探测  $\nu_e$ ，反应过程为：



但是对于末态  ${}^7\text{Be}$  信号同样采用放射化学方法提取<sup>[198-199]</sup>。

1996 年，文献<sup>[200]</sup>更新了  ${}^7\text{Li}$  的截面值，相较于之前的截面更大。但是，文

献<sup>[200]</sup>也提到了 SUNLAB 之前尝试使用 LiCl 水溶液作为太阳中微子切伦科夫探测器，但因为缺乏光透明度而受阻，尤其对于 PMT 探测效率高的紫外线缺乏光透明度，但测量的细节没有说明。文献<sup>[200]</sup>还建议采用 LiOH，但是 LiOH 是碱性的，水溶性又比 LiCl 低得多。另外，THIEA<sup>[104,201]</sup>也提出了装载<sup>7</sup>Li 的探测器的设想，给出了装载质量百分比为 10% <sup>7</sup>Li 的探测器，其预期事例率随着能量的变化。

最近对 LiCl 饱和水溶液光学性质的测量，特别是  $50.1 \pm 3.6$  m 长的衰减长度<sup>[202]</sup>，使得 LiCl 探测太阳中微子能够将 1960 年代的想法变为现实。更进一步，通过太阳角的角度选择条件，可以将  $\nu_e$  与 <sup>7</sup>Li 的反冲电子信号（式1.32），和  $\nu_\alpha-e^-$  的弹性散射电子信号（式1.20）区分开来<sup>[11,138,201]</sup>。本文将利用这一点，来研究采用 LiCl 水溶液探测太阳中微子，对于探索能量依赖的太阳中微子物理的具体研究优势。

### 氯化锂的纯化

对于氯化锂在中微子探测器的应用，氯化锂的提纯是一个关键问题。通常纯度  $\geq 99\%$  的市场样品，过滤是去除主要杂质的第一个必要步骤。文献<sup>[202]</sup>测量了 LiCl 在水中的溶解度随温度而变化，如表1.5所示，发现 LiCl 可以通过从高温开始，逐渐降低饱和溶液的温度进行重结晶和提纯。经过一轮用 0.1  $\mu\text{m}$  的滤膜过滤和一轮重结晶后，LiCl 水溶液变得均匀、无色、透明，并且铀、钍、钾的浓度可以被抑制。在这项原理研究之后，还需要更大规模的工程工作来满足实际的实验。

表 1.5 几种温度下 LiCl 在水中的溶解度和相应的<sup>7</sup>Li 的质量分数。

温度 (°C)	溶解度 (g/100 g 水)		<sup>7</sup> Li 质量分数 (%)
0	68.3		6.21
10	74.5		6.53
20	83.2		6.95
40	89.4		7.22
60	98.8		7.60
80	112.3		8.09

### 氯化锂水溶液中的光衰减长度

文献<sup>[202]</sup>用 84 cm 长的管和一个发光二极管（Light Emitting Diode，简称 LED）测量氯化锂纯化样品的衰减长度和紫外可见吸收光谱。LED 的发射光谱峰值在

430 nm, 波长范围从 375 nm 到 550 nm。实验<sup>[202]</sup>测量到 LiCl 样品的衰减长度为  $50.1 \pm 3.6$  m。

### 添加荧光成分的备选方案

喹诺酮 124 是先前在文献<sup>[201]</sup>中研究的波长位移剂。对于直径大于 10 米的探测器，紫外范围内的短波长切伦科夫光将被快速吸收，并且不会对最终的光输出有贡献。然而，这些光可以被转换成更长的波长，并作为各向同性闪烁光发射，以提高光输出。通过控制切伦科夫光和闪烁光的数量，既保持切伦科夫光的优势，位置、能量和方向又可以很好地重建出来<sup>[203]</sup>。文献<sup>[202]</sup>成功地将 1 ppm 喹诺酮 124 加入到饱和 LiCl 水溶液中，并证实了切伦科夫光和位移闪烁光的发射，这使得水基富锂切伦科夫闪烁探测器成为可能，在将来作为水基富锂切伦科夫探测器的备选方案。

## 1.4 本文章节安排

本文第 1 章对于基本的中微子物理，太阳中微子以及本文关注的太阳中微子物理做了简要介绍。第 2 章详细介绍模拟太阳中微子在太阳内部产生，在太阳物质和地球物质中的演化以及在日地之间飞行的全过程。第 3 章介绍氯化锂水溶液对于中微子的探测过程，并与  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射过程进行对比，说明氯化锂水溶液对于太阳中微子的研究优势。第 4 章介绍氯化锂水溶液的性质，随后设计一个以氯化锂水溶液为靶物质的探测器方案，预期了这一方案的探测器响应。第 5 章介绍本研究所用到的灵敏度分析方法。第 6 章介绍在第 4 章设计的氯化锂水溶液探测器方案，以及第 5 章灵敏度分析方法的基础上，氯化锂水溶液探测器在太阳中微子振荡参数的测量，概率上升效应的探测，太阳轻惰性中微子的探测，地球效应和地球成像等太阳中微子物理研究上的表现，第 7 章是全文的总结和展望。

## 第2章 太阳中微子产生、演化、飞行全过程模拟

模拟太阳中微子到达地球探测器，需要模拟太阳中微子在太阳内部产生，在太阳和地球物质中演化，以及在日地之间的真空飞行的全过程。中微子产生于太阳内部 0.3 个太阳半径区域。中微子在物质中的演化过程可以采用解析公式和多种数值方法计算，多种方法可以相互印证。然后，中微子由太阳表面穿过太阳和地球之间  $1.5 \times 10^{11}$  m 的日地距离飞向地球探测器，在到达地球时中微子的质量态已然退相干。飞行过程中通量成  $1/L^2$  ( $L$  为中微子的飞行长度) 衰减，并且地球自转和公转会对手中微子通量产生影响（在附录B详细讨论）。另外，如果中微子是在晚上到达地球的探测器，那么中微子还会穿过地球物质，受到地球物质效应的影响，最终才能到达探测器。

本章首先介绍太阳中微子在日核处产生的模拟，然后介绍中微子在物质中演化过程的计算方法，包括解析方法和数值方法，并比较了多种数值方法的准确性和效率。然后具体研究中微子在太阳内部的演化，在日地间的飞行，还将计算锦屏实验室对于太阳中微子全年的曝光函数。最后研究中微子在地球内部的演化，从而完成中微子到达地球探测器的整个过程的模拟。

### 2.1 太阳中微子的产生模拟

中微子在太阳内部产生区域分布由 B16-GS98 太阳标准模型所预测，如图2.1所示。模拟时根据产生区域分布抽样，将产生区域球体沿着半径均分为多个壳层，不同半径的壳层中，太阳中微子的份额  $Q(i)$  ( $i$  标记壳层) 为：

$$Q(i) = \zeta(R) d(R), \quad (2.1)$$

其中  $R$  是以太阳半径  $R_\odot$  为单位的区域位置， $\zeta(R)$  是太阳中微子的分布函数，如图2.1所示。

太阳中微子在不同中微子能量  $E_\nu$  区间的平均通量  $Flux(k)$  ( $k$  标记能量区间) 则根据图1.4中的能谱函数  $\phi(E_\nu)$  进行抽样：

$$Flux(k) = \phi(E_\nu) d(E_\nu). \quad (2.2)$$

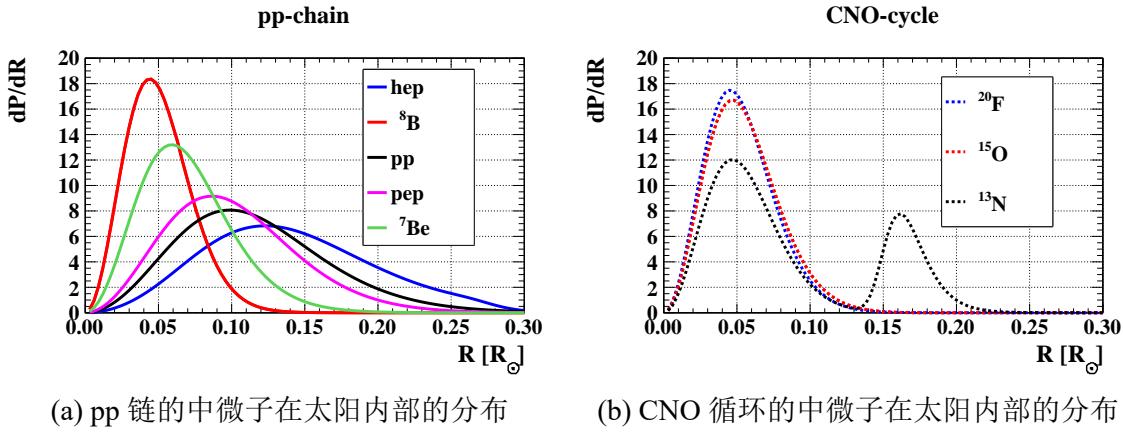


图 2.1 根据 SSM B16-GS98 预测, pp 链产生的中微子 (左图) 和 CNO 循环产生的中微子 (右图) 在太阳内部产生区域, 即 0.3 个太阳半径区域内, 以太阳半径  $R_{\odot}$  为单位的径向分布, 本图数据来自于<sup>[89]</sup>。

## 2.2 演化过程计算方法

中微子在物质中如果是绝热演化, 有效质量态的概率不变, 那么味道态的平均转化概率只和起始点和末尾点的转化矩阵元有关, 可以采用绝热演化的计算方法 (见A.4的讨论)。但是非绝热演化必须计算沿途中有效质量态相互转化的概率  $P_c$  (见A.5的讨论)。在一些特殊函数势下, 两代中微子和式1.11中参数下的标准三代中微子的非绝热演化可以采用解析方法 (见A.3, A.5和A.6的讨论)。轻惰性中微子演化的绝热参数除了和物质中的 1-4 振荡参数有关外, 还和物质中的 1-2 振荡参数有关, 如式A.70所示, 所以解析方法无法应用到轻惰性中微子演化计算中, 必须采用数值方法。这些数值方法包括分层演化方法<sup>[48]</sup> (Slab Method), 解常微分方程组常用的龙格-库塔<sup>[204-205]</sup> (Runge-Kutta) 方法。另外, 在保证精度的情况下, 自然希望在数值方法中选用效率最高的方法, 所以效率也是需要考虑的重要因素。

### 2.2.1 解析方法

L. Laudau<sup>[206]</sup> 和 C. Zener<sup>[207]</sup> 于 1932 年最先研究能级之间的非绝热转化, 他们二人分别采用围道积分和解微分方程的方法, 来计算中微子在太阳物质中非绝热演化中, 有效质量态  $\nu_{im}$  之间的转化概率  $P_c$  (见A.5节的讨论)。截止目前,  $P_c$  对于非绝热转化处是某些特殊的简单函数的物质势存在解析解<sup>[208-211]</sup>:

$$P_c = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\gamma_R F} - e^{-\frac{\pi}{2}\gamma_R \frac{F}{s_\theta^2}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}\gamma_R \frac{F}{s_\theta^2}}}, \quad \gamma_R = \left. \frac{\Delta m_m^2}{4E \left| \frac{d\theta_m}{dx} \right|} \right|_R = \frac{\Delta m^2 s_{2\theta}^2}{2E c_{2\theta} \left| \frac{dN_e}{N_e dx} \right|_R}. \quad (2.3)$$

其中  $\gamma_R$  为共振点处的绝热参数。公式成立的条件是初始点和终了点对应太阳中微子情况<sup>[211]</sup>, 即初始点是高物质密度, 终了点是低物质密度, 这会使得初始有效混

合角约为  $\pi/2$ , 终了点为真空混合角。 $F$  对于不同的物质势, 如正比例函数, 双曲函数, 指数函数有着不同的形式<sup>[48]</sup>, 如表2.1所示。

如果是极端非绝热情况, 式2.3退化为  $P_c = c_\theta^2$ , 这正是式A.35对应的情况。

表 2.1 不同物质势下, 式2.3中  $F$  的表达式。此表来自于<sup>[48]</sup>。

密度分布函数	$F$
$N_e \propto x^{[211-216]}$	1
$N_e \propto \frac{1}{x}^{[211]}$	$\frac{(1-t_\theta^2)^2}{1+t_\theta^2}$
$N_e \propto e^{-x^{[208-211,214,216-219]}}$	$1-t_\theta^2$

## 2.2.2 分层演化方法

驱动中微子味道态演化的  $U_F$  (即  $S$  矩阵) 由戴森级数<sup>[220]</sup>来描述:

$$U_F(x_0 \rightarrow x_n) = \mathcal{T} e^{-i \int_{x_0}^{x_n} \mathcal{H}_F(x) dx}, \quad (2.4)$$

其中  $\mathcal{T}$  是时序乘积,  $\mathcal{H}_F$  是驱动中微子味道态演化的哈密顿量。可以按照时间顺序将  $S$  矩阵分为多个阶段的乘积:

$$U_F(x_0 \rightarrow x_n) = e^{-i \mathcal{H}_{Fn}(x_n - x_{n-1})} \dots e^{-i \mathcal{H}_{Fj}(x_j - x_{j-1})} \dots e^{-i \mathcal{H}_{F1}(x_1 - x_0)}, \quad (2.5)$$

这就是分层的思想。式2.5中飞行路径总共分为  $n$  层,  $x_0$  和  $x_n$  分别是演化初始点和第  $n$  层的末端点, 即演化终了点,  $x_j$  是第  $j$  层的末端点和第  $j+1$  层的初始点。分层时可以将每层厚度设置为相同, 记为  $\Delta x$ 。此时有

$$U_F(x_0 \rightarrow x_n) = \prod_{j=0}^n U_{Fj}(\Delta x) = \prod_{j=0}^n e^{-i \mathcal{H}_{Fj} \Delta x}. \quad (2.6)$$

在两代中微子情况下,  $\mathcal{H}_F$  即式A.18, 还可以写为<sup>[48]</sup>:

$$\mathcal{H}_F = \frac{\Delta m^2 s_{2\theta} \sigma_1 - (\Delta m^2 c_{2\theta} - A_{CC}) \sigma_3}{4E} = \frac{\Delta m_m^2}{4E} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{n} = (s_{2\theta_m}, 0, -c_{2\theta_m}), \quad (2.7)$$

其中  $\vec{\sigma}$  是泡利矩阵组成的矢量, 由  $e^{i\theta_m \sigma_i} = c_{\theta_m} + i\sigma_i s_{\theta_m}$  和泡利矩阵的对易关系可得:

$$\mathcal{H}_F = e^{i\theta_m \sigma_2} \mathcal{H}_M e^{-i\theta_m \sigma_2}, \quad \mathcal{H}_M = \text{Diag} \left( -\frac{\Delta m_m^2}{4E}, \frac{\Delta m_m^2}{4E} \right) = \frac{\Delta m_m^2}{4E} (-\sigma_3), \quad (2.8)$$

$\mathcal{H}_M$  是驱动中微子有效质量态演化的哈密顿量。所以每一层初始点的味道态到这

一层末端点味道态的演化矩阵  $U_F(\Delta x) = e^{-iH_F\Delta x}$  为:

$$U_F(\Delta x) = \cos\left(\frac{\Delta m_m^2 \Delta x}{4E}\right) - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\Delta m_m^2 \Delta x}{4E}\right) = e^{i\theta_m \sigma_2} e^{-i\frac{\Delta m_m^2 \Delta x}{4E}(-\sigma_3)} e^{-i\theta_m \sigma_2}, \quad (2.9)$$

最后一个式子表明, 中微子态在物质中的演化可以视作在边界上以味道态连接, 在每段物质内部以有效质量态进行演化, 这是严格成立的。

如果是考虑有效质量态到有效质量态的演化时, 那么每一层从进入这一层前的有效质量态到这一层末尾有效质量态的演化矩阵为:

$$U_M(\Delta x) = e^{-i\frac{\Delta m_m^2 \Delta x}{4E}(-\sigma_3)} e^{-i\Delta\theta_m \sigma_2}, \quad (2.10)$$

其中  $\Delta\theta_m$  是这一层的有效混合角减去上一层的有效混合角。

以上是分层演化方法的全部过程。

需要注意的是, 分层演化的方法在步长(设为  $h$ )过长, 也就是每层的层厚  $\Delta x$  过大时, 计算的  $P_{ee}$  随着路径的变化图有所区别。例如考虑两代中微子情况,  $\Delta m_{21}^2 = 7.49 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ ,  $\theta_{12} = 0.587$ , 20 MeV  $\nu_e$  穿过带电流等效势  $V_{CC} = 3 \times 10^{-12} \text{ eV}$ , 厚度为  $1 \times 10^7 \text{ m}$  的常数密度物质, 由式A.19可知物质中有效质量平方差  $\Delta m_{21m}^2 = 1.14 \times 10^{-4} \text{ eV}^2$ , 由式1.13可知  $L_{osc} = 4.32 \times 10^5 \text{ m} \ll L$ 。

分层演化方法在不同层数下所计算的  $P_{ee}$  如图2.2所示。其中, 图2.2(a)、2.2(b)、2.2(c)、2.2(d)分别是分 5、25、45、65 层的情况, 图2.2(e)、2.2(f)则是分  $1 \times 10^3$ 、 $1 \times 10^7$  层的情况。当分层数目过少时,  $P_{ee}$  随着路径的变化图的颗粒度过低, 而当分层数很高时, 高颗粒度变化图下  $P_{ee}$  的结果是稳定的。从图2.2(a)到图2.2(f)可以看到, 分层数少下的变化图只是稳定变化图的等距离选点, 分层演化方法在常数密度下在每一层计算的  $P_{ee}$  是相同的, 终点处的  $P_{ee}$  也是相同的。

以上是基于常数密度的情况讨论, 如果密度是变化的, 例如设置  $V_{CC} = 3 \times 10^{-12} - 2 \times 10^{-12}(x/L - 0.5) \text{ eV}$ , 此时路径上的  $P_{ee}$  就会对分层数十分敏感, 如图2.3(a)到图2.3(d)所示, 这是由于不同分层下, 每层的物质势不同, 所以路径上的  $P_{ee}$  不同, 只有当分层数足够大, 使得  $L_{osc}$  远远大于每层厚度时, 路径上的  $P_{ee}$  才是稳定的, 如图2.3(e)和如图2.3(f)所示。此时由于  $L_{osc}^{\min} = 3.33 \times 10^5 \text{ m}$ , 远远大于每层厚度  $1 \times 10^4 \text{ m}$ (对应  $10^3$  层),  $1 \text{ m}$ (对应  $10^7$  层), 这就使得每层的物质势在一个振荡周期中变化很小, 保证了路径上的  $P_{ee}$  稳定的结果。

综上, 分层演化的方法想取得稳定解, 必须保证物质中最小的振荡长度远远大于每层的厚度  $\Delta x$ , 即远远大于步长  $h$ :

$$L_{osc}^{\min} \gg h. \quad (2.11)$$

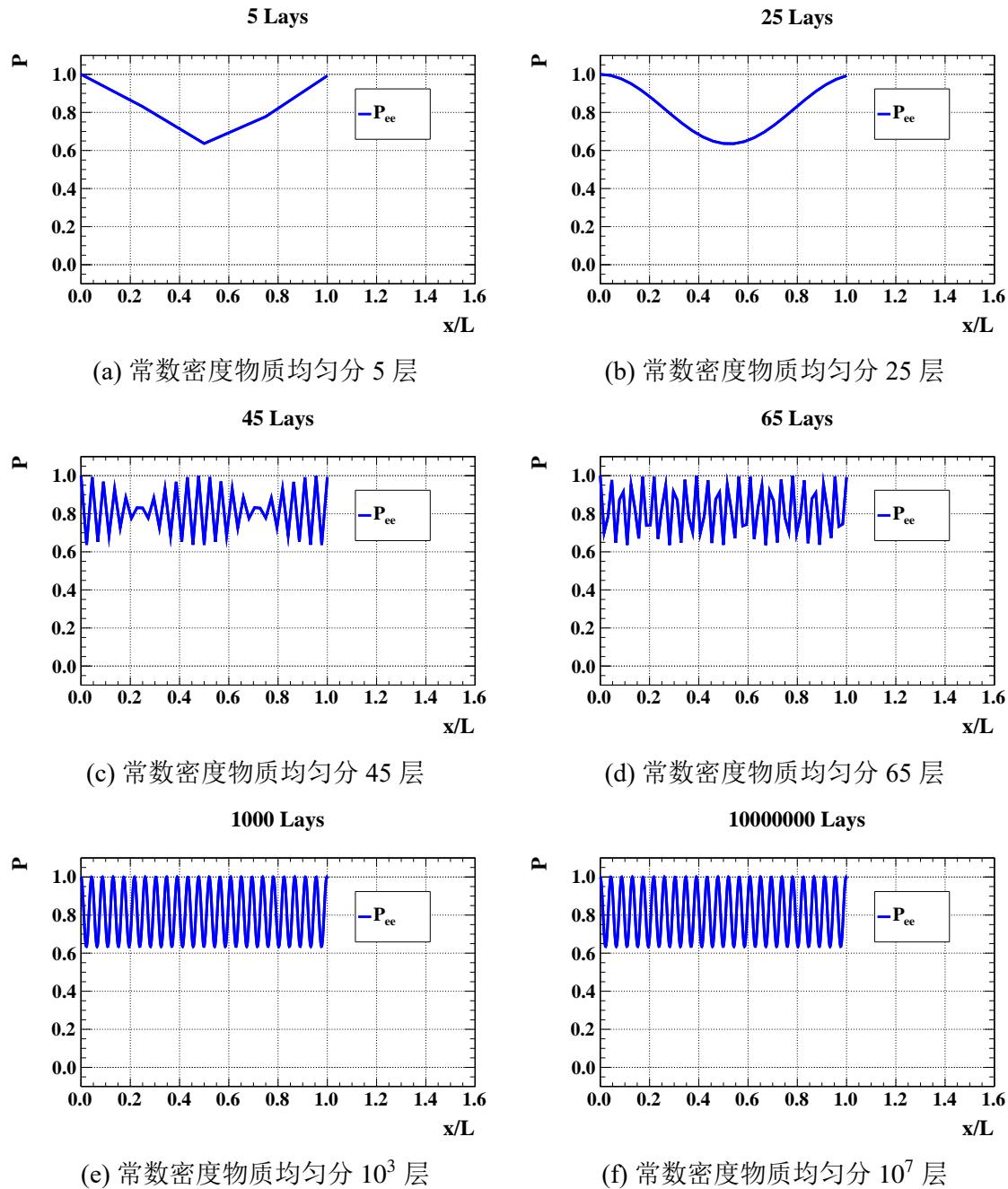


图 2.2 分层演化方法下，中微子穿越常数密度的物质，不同的分层数目所导致的  $P_{ee}$  随着路径的变化。

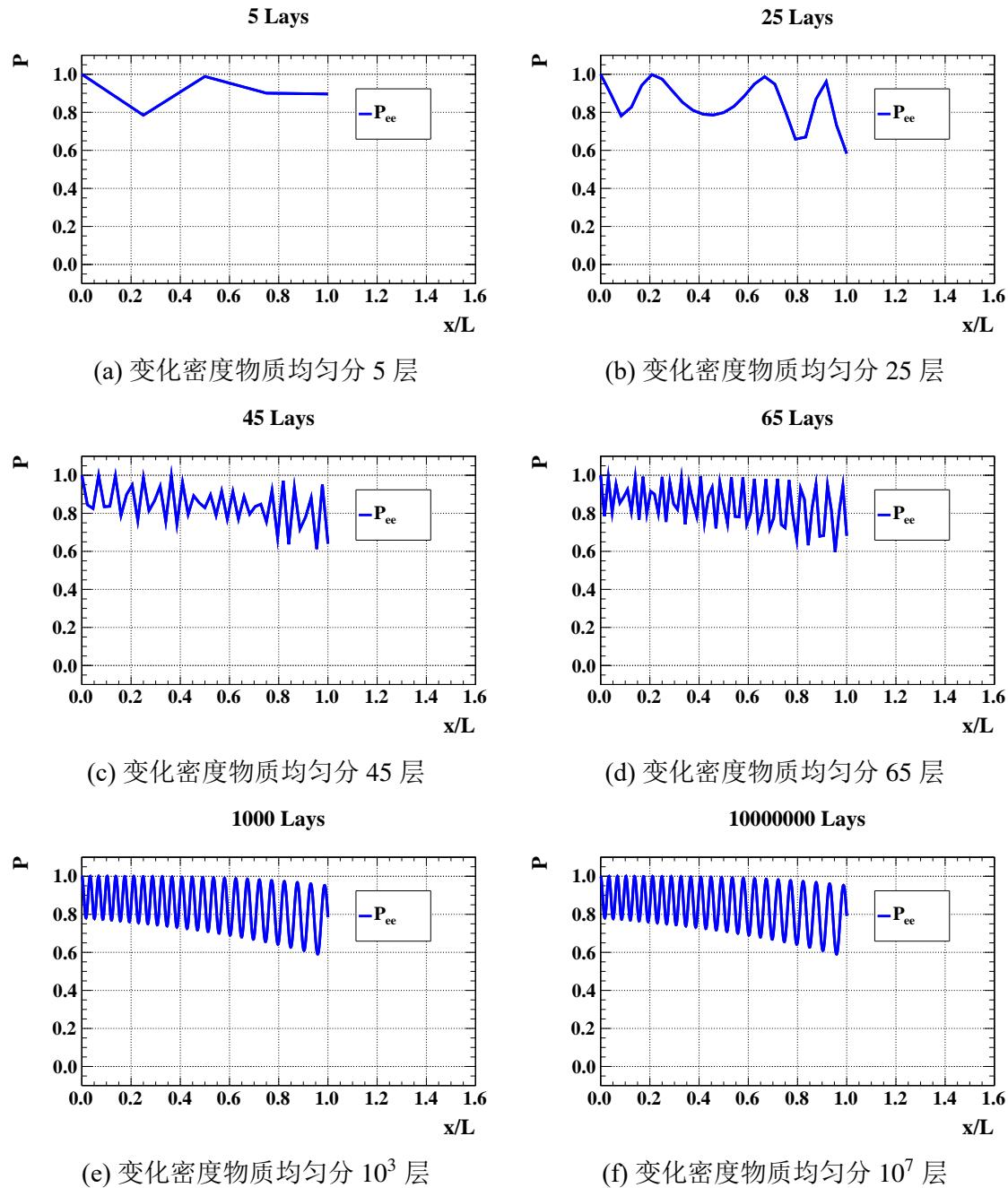


图 2.3 分层演化方法下，中微子穿越变化密度的物质，不同的分层数目所导致的  $P_{ee}$  随着路径的变化。

### 2.2.3 龙格-库塔方法

除了分层演化方法，中微子的演化方程A.8，即 MSW 方程，本质上就是一个常微分方程组（Ordinary Differential Equations，简称 ODE）。所以中微子的演化问题本质上是一个常微分方程组问题：

$$\frac{d}{dx} \Psi_{\alpha\beta} = F(x, \Psi_{\alpha\beta}), \quad F = -i\mathcal{H}_F \Psi_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

其中  $\Psi_{\alpha\beta}$  是初态  $\alpha$  到味道态  $\beta$  的跃迁振幅  $\psi_{\alpha\beta} \equiv \langle v_\beta | v_\alpha \rangle$  组成的矢量：

$$\Psi_{\alpha\beta} = (\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha \mu}, \psi_{\alpha \tau}, \psi_{\alpha s_1}, \dots, \psi_{\alpha s_n})^T, \quad (2.13)$$

常微分方程组目前已经有成熟的数值解法，常用的有欧拉法和龙格-库塔方法，欧拉法相比于龙格-库塔方法，在相同的步长下精度是不够的<sup>[221]</sup>。龙格-库塔方法是在欧拉法的基础上发展而来的，包括定步长的四阶龙格-库塔（Fourth Order Runge-Kutta，简称 RK4）方法<sup>[204-205]</sup>和自适应变步长的龙格-库塔-费尔伯格（Runge-Kutta-Fehlberg，简称 RKF）方法<sup>[222-225]</sup>。

四阶龙格-库塔方法为<sup>[221]</sup>：

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(x, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1}), \quad K_2 = hF(x + \frac{h}{2}, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + \frac{K_1}{2}), \\ K_3 &= hF(x + \frac{h}{2}, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + \frac{K_2}{2}), \quad K_4 = hF(x + h, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + K_3), \\ \Psi_{\alpha\beta}^j &= \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + \frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6} + O(h^5), \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中  $h = \Delta x$  即数值方法的步长， $\Psi_{\alpha\beta}^j$  作为第  $j$  步的终了值和第  $j+1$  步的初始值。

需要注意的是，当步长较长时。RK4 方法误差  $O(h^5)$  较大，容易导致结果发散，必须减小步长，可以通过增加步数或减少基线长度（如果基线长度不固定）这两种手段。

龙格-库塔-费尔伯格方法为五阶的龙格-库塔方法中的  $\Psi_{\alpha\beta}^j$  提供了一个四阶的嵌入对<sup>[222-225]</sup>  $\Psi_{\alpha\beta}^{*j}$ ，从而在每次计算中通过计算  $\Psi_{\alpha\beta}^j$  和  $\Psi_{\alpha\beta}^{*j}$  的差来评估误差，调整步长<sup>[221]</sup>。龙格-库塔-费尔伯格方法为<sup>[221]</sup>：

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(x_n, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1}), \\ K_2 &= hF(x_n + a_2 h, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + b_{21} K_1), \\ &\dots \\ K_6 &= hF(x_n + a_6 h, \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + b_{61} K_1 + \dots + b_{65} K_5), \\ \Psi_{\alpha\beta}^j &= \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 + c_4 K_4 + c_5 K_5 + c_6 K_6 + O(h^6), \\ \Psi_{\alpha\beta}^{*j} &= \Psi_{\alpha\beta}^{j-1} + c_1^* K_1 + c_2^* K_2 + c_3^* K_3 + c_4^* K_4 + c_5^* K_5 + c_6^* K_6 + O(h^5), \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中系数  $a_i, b_{ij}, c_i, c_i^*$  如表2.2所示，这是由 J. Cash 和 A. Karp 发现的<sup>[224]</sup>系数，有着比 E. Fehlberg<sup>[222]</sup>的原始值更高效的优点<sup>[221]</sup>。

表 2.2 由 Cash 和 Karp 发现的 RKF 方法的系数，本表来自于<sup>[224]</sup>。

$i$	$a_i$	$b_{ij}$			$c_i$	$c_i^*$
1					$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$			0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$		$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$	0
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$
					$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
$j =$		1	2	3	4	5

## 2.2.4 多种方法的比较

除了在短暂的非绝热区域以外，大部分区域都是绝热演化区域，有效质量态不会发生转化。所以有效质量态的概率在大部分区域是稳定的，只会在绝热破坏处发生相互转化，所以我们可以通过计算初始态到物质中有效质量态  $v_{im}$  的跃迁振幅  $\psi_{ei}^m$  的模方，即有效质量态  $v_{im}$  的概率  $P_{im}$  来验证不同的方法。物质中第  $i$  个有效质量态  $v_{im}$  的概率  $P_{im}$  为：

$$P_{im} = |\psi_{ei}^m|^2. \quad (2.16)$$

选取2.2.2节中相同的中微子振荡参数，以及相同的物质势和飞行长度设定。采用分层方法同时计算  $P_{ee} = |\psi_{ee}|^2$ 、 $P_1 = |\psi_{e1}|^2$ 、 $P_{1m} = |\psi_{e1}^m|^2$ ，如图2.4所示。可以看到，当  $L_{osc} \ll L$ ，图2.4中红线所示的味道态概率  $P_{ee}$  和绿线所示的质量态概率  $P_1$  的高频振荡会使得不同数值方法的计算结果难以比较，而图2.4中蓝线所示的有效质量态的概率  $P_{1m}$  则易于比较。

可见，如果计算味道态或质量态的概率，那么在太阳中微子问题中，一般有式1.13中的振荡长度远远小于飞行长度，这种高频振荡会使得不同数值方法计算的结果很难比较，相比之下，计算有效质量态的概率会更加直观。

由于标准三代中微子和轻惰性中微子情况都可以简化为两代中微子情况（见附录A.6和附录A.7），所以可以在两代中微子情况下验证数值方法的准确性。首先将分层演化方法、RK4、RKF 三种数值方法和解析方法做比较，然后比较这三

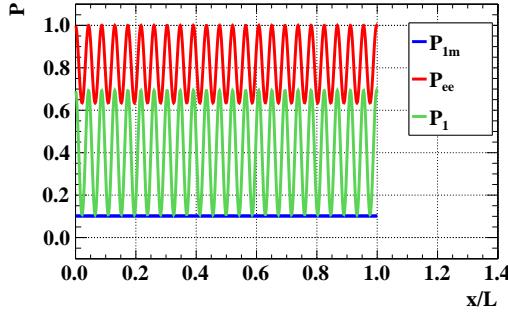


图 2.4  $P_{ee} = |\psi_{ee}|^2$  (红线)、 $P_1 = |\psi_{e1}|^2$  (绿线)、 $P_{1m} = |\psi_{e1}^m|^2$  (蓝线) 随着飞行路径的变化。

种数值方法的效率。

在两代中微子情况下, 由式A.19可知, 对于简单递增或递减的函数势最多只有一段绝热破坏处。采用数值方法时利用

$$P_c = \frac{P_{1m}^{(L)} - P_{1m}^{(0)}}{P_{2m}^{(0)} - P_{1m}^{(0)}} = \frac{P_{2m}^{(L)} - P_{2m}^{(0)}}{P_{1m}^{(0)} - P_{2m}^{(0)}} \quad (2.17)$$

来计算  $P_c$ , 其中  $P_{im}^{(0)}$  和  $P_{im}^{(L)}$  分别是起始处和终了处第  $i$  个有效质量态的概率。

下面分别在线性势, 指数势, 以及双曲函数势下将解析方法和分层演化方法、RK4 方法、RKF 方法做相互验证。为了尽可能和太阳中微子情况贴近, 可以将基线长度固定为太阳半径  $L = 6.961 \times 10^8$  m。中微子振荡参数采用  $\Delta m^2 = 1.56 \times 10^{-5}$  eV<sup>2</sup>,  $\theta = 0.021$  计算, 对应轻惰性中微子模型。构造物质势的函数时, 为了和解析解2.1做对照, 必须满足起始点物质势足够大, 使得  $\theta_m$  靠近  $\pi/2$ ,  $\nu_e \sim \nu_{2m}$ , 终了点是真空状态, 使得  $\theta_m \simeq \theta$ , 对应于太阳密度情况。中微子能量设置为最大特征能量 20 MeV, 因为由式A.27可知这是最有可能破坏绝热条件的能量。三种物质势函数如下设置:

- 线性函数势:

$$N_e = \begin{cases} 3 \times 10^1 - 10^2(x/L) [\text{N}_\text{A} \cdot \text{cm}^3] & (\text{对于 } 0 < x/L < 0.3), \\ 0 [\text{N}_\text{A} \cdot \text{cm}^3] & (\text{对于 } x/L > 0.3), \end{cases} \quad (2.18)$$

- 指数函数势 (近似描述太阳的物质势分布, 见式A.14):

$$N_e = 10^2 \times e^{-10(x/L)} - 10^2 \times e^{-10} [\text{N}_\text{A} \cdot \text{cm}^3], \quad (2.19)$$

- 双曲函数势:

$$N_e = 1/(x/L) - 1 [\text{N}_\text{A} \cdot \text{cm}^3], \quad (2.20)$$

三种函数势分别如图2.5所示。

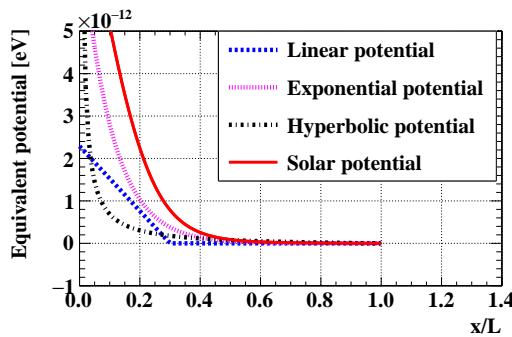


图 2.5 三种物质势的图像，包括线性函数势（蓝色虚线），指数函数势（粉色点线），双曲函数势（黑色点划线）。同时将太阳带电流等效势（红色实线）一并示出作为对比。

在不同函数的物质势下，将分层演化方法、RK4 方法、RKF 方法通过式2.17计算出的  $P_c$ ，和通过理论方法计算出的  $P_c$ （式2.3）进行对比，如表2.3所示。三种数值方法下的  $P_c$  结果和解析方法下的  $P_c$  结果略有不同，这是因为非绝热转化处不是一个点，而是存在一定展宽， $\nu_{2m}$  转换到  $\nu_{1m}$  后紧接着又有少部分回到  $\nu_{1m}$ ，在非绝热转化处连续发生相互转化。而解析方法下的  $P_c$  结果是单点绝热破坏下的结果（见附录A.5的讨论）。

另外，有限的计算机内存限制了数值方法的最大步数，在计算机限制的最大的步数  $10^7$  步下，由 RK4 方法计算双曲函数势的结果是发散的，如表2.3所示。

表 2.3 在不同函数的物质势下，分层演化方法、RK4 方法、RKF 方法通过式2.17计算出的  $P_c$ ，和通过理论方法计算出的  $P_c$ （式2.3）的对比，一同示出的还有共振处的绝热参数  $\gamma_R$ 。在计算机限制的最大的步数  $10^7$  步下，由 RK4 方法计算双曲函数势的结果是发散的。

密度分布函数	分层演化方法	RK4 方法	RKF 方法	$P_c$ 理论	$\gamma_R$
线性函数势	0.8260	0.8260	0.8260	0.8231	0.1239
指数函数势	0.6828	0.6828	0.6828	0.6833	0.2425
双曲函数势	0.5935	发散	0.5935	0.5936	0.3325

分层演化、RK4 方法、RKF 方法在线性势下计算的  $\nu_{1m}, \nu_{2m}$  的概率随着飞行路径的变化分别如图2.6(a)、2.6(b)、2.6(c)所示。然后，将分层演化分别和 RK4、RKF 方法对比，分别如图2.9(a)、2.9(b)所示。可见，三种数值方法的计算结果是一致的。另外，在指数函数势（图2.7(a)、2.7(b)、2.7(c)）和双曲函数势下（图2.8(a)、2.8(b)），三种方法同样保持很好的一致。

从以上不同物质势的验证情况来看，分层演化，RK4 方法均和理论推导的  $P_c$  符合的很好，并且，三种数值方法也能沿着中微子飞行路径得到始终相同的概率。

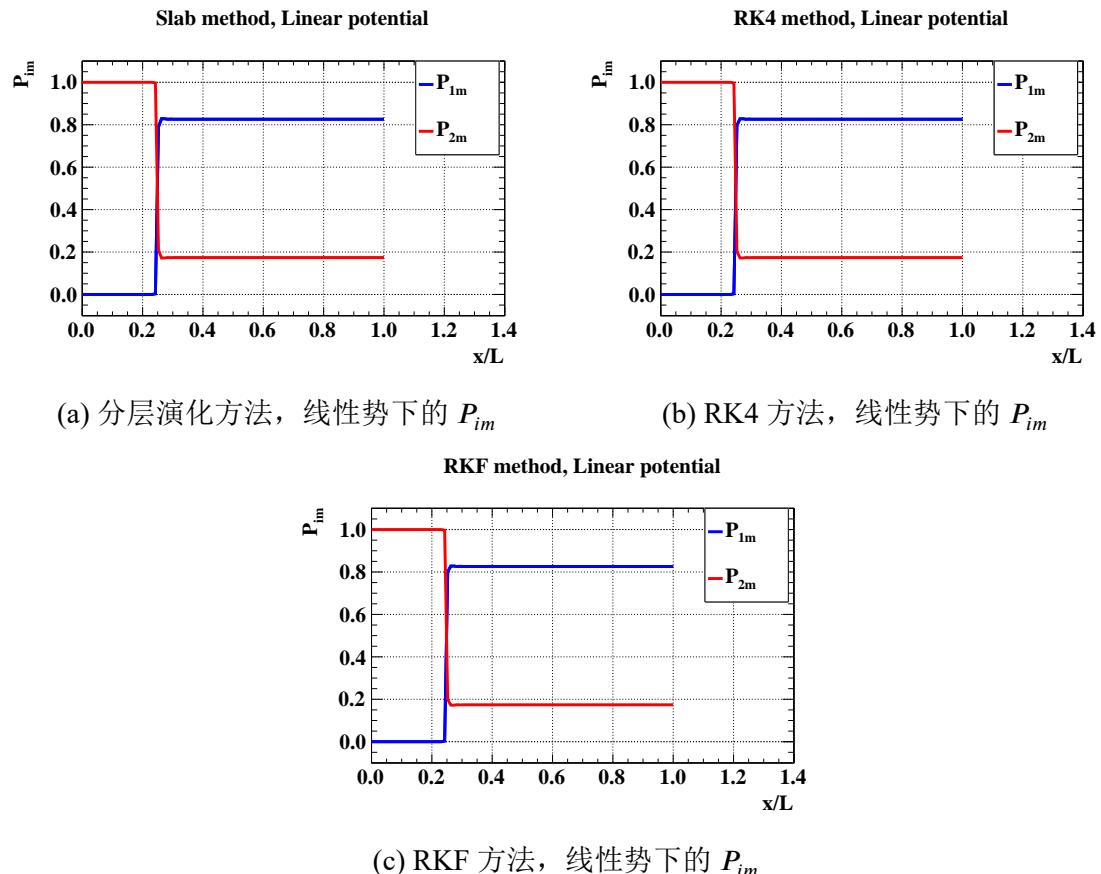


图 2.6 (a) 在线性函数势下, 采用分层演化方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(b) 在线性函数势下, 采用 RK4 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(c) 在线性函数势下, 采用 RKF 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。

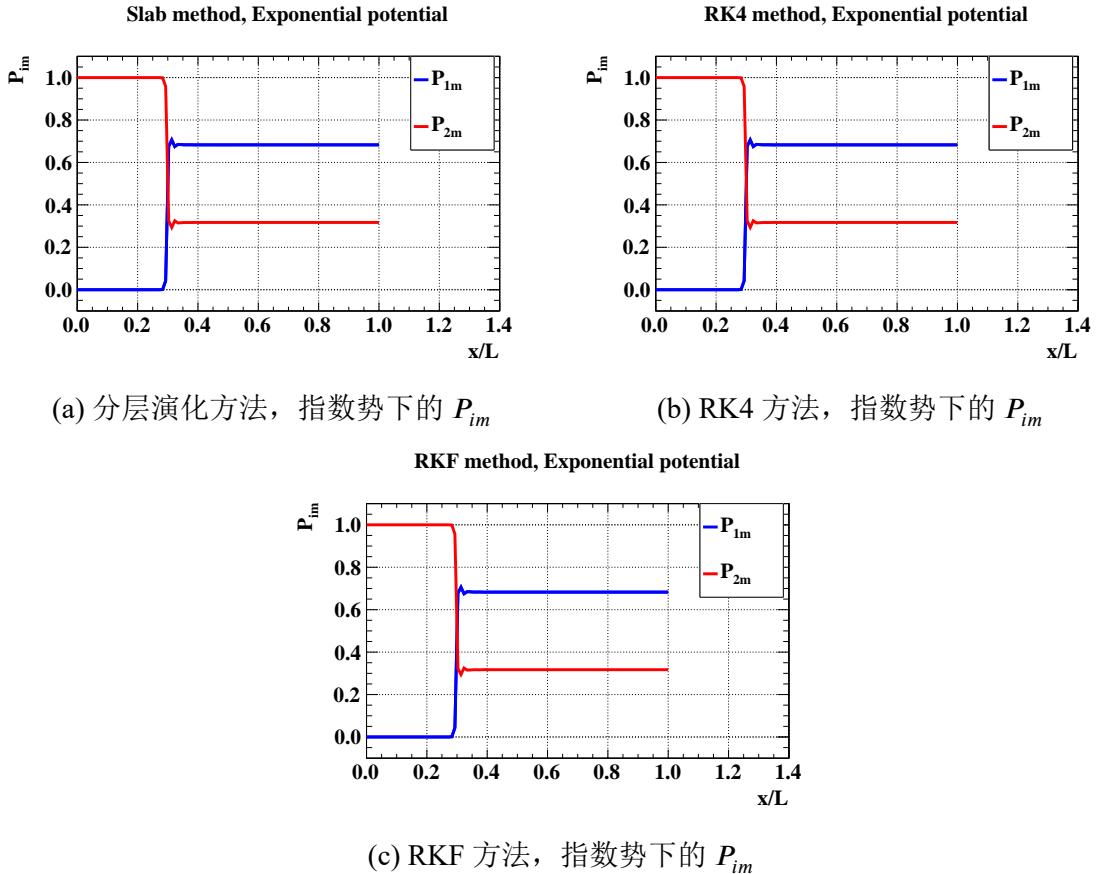


图 2.7 (a) 在指数函数势下, 采用分层演化方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(b) 在指数函数势下, 采用 RK4 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(c) 在指数函数势下, 采用 RKF 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。

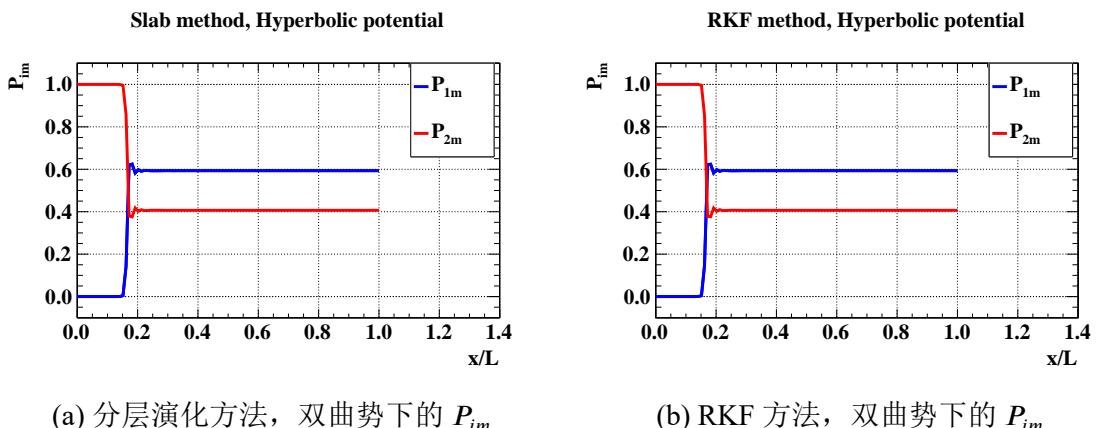


图 2.8 (a) 在双曲函数势下, 采用分层演化方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。(b) 在双曲函数势下, 采用 RKF 方法, 计算  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的概率  $P_{im}$  随着飞行路径的变化图。RK4 方法下关于双曲函数势的计算结果是发散的, 所以没有展示。

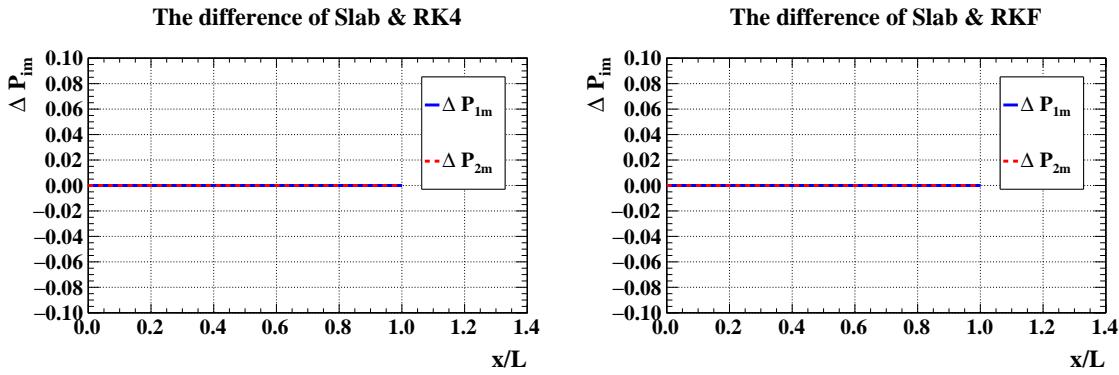


图 2.9 (a) 将分层演化和 RKF 方法得到的有效质量态的概率  $P_{im}$  作差, 作差的结果  $\Delta P_{im}$  在路径上始终归零。(b) 将分层演化和 RKF 方法得到的有效质量态的概率作差  $P_{im}$ , 作差的结果  $\Delta P_{im}$  在路径上始终归零。所以三种数值方法符合的很好。以上是在线性函数势下的对比, 在另外两种函数势的情况下也能得到一致的结果。

下面考查三种数值方法的效率，分层演化方法、RK4方法、RKF方法定义运行效率的方法是，可以先给一个特别大步数下的 $P_c$ 计算值，此时数值方法达到了稳定的结果，然后给出达到和这一稳定结果相同的某一精度至少需要的步数。分层演化方法、RK4方法、RKF方法在不同物质势下，达到 $10^{-4}$ 的精度，至少需要的步数以及需要的计算时间如表2.4所示。

表 2.4 分层演化方法、RK4 方法、RKF 方法在不同物质势下，达到  $10^{-4}$  的精度，至少需要的步数以及需要的计算时间。由于只关注步数和所用时间的数量级，所以只需保留一位有效数字。双曲函数势下，RK4 方法在计算机限制的  $10^7$  步内没有得到收敛的结果。

密度分布函数	分层演化方法	RK4 方法	RKF 方法
线性函数势	约 $5 \times 10^3$ 步	约 $8 \times 10^4$ 步	约 $2 \times 10^4$ 步
	约 $5 \times 10^{-2}$ s	约 $2 \times 10^0$ s	约 $2 \times 10^{-1}$ s
指数函数势	约 $8 \times 10^5$ 步	约 $3 \times 10^5$ 步	约 $3 \times 10^4$ 步
	约 $1 \times 10^1$ s	约 $5 \times 10^0$ s	约 $6 \times 10^{-1}$ s
双曲函数势	约 $5 \times 10^4$ 步	大于 $1 \times 10^7$ 步	约 $5 \times 10^4$ 步
	约 $8 \times 10^{-1}$ s	大于 $2 \times 10^2$ s	约 $6 \times 10^{-1}$ s

经过测试，效率方面，从表2.4可知，变步长的 RKF 方法可以根据每一步迭代的结果来灵活调节下一步的步长，所以 RKF 方法在效率上对比 RK4 方法有着显著优势。

从表2.4还可知，RK4方法在物质势变化剧烈处有发散的风险，必须增加步长，

但是有可能超过计算机容许的极限，所以接下来的模拟不考虑这一方法。而灵活调整步长的 RKF 方法则没有这一风险。在效率方法，分层演化方法和 RKF 方法各有优势，接下来的演化模拟将采用这两种方法，起到互相印证的效果。

## 2.3 在太阳内部的演化

考察中微子质量态的概率随着穿越太阳路径的变化，同样选取中微子最大特征能量为 20 MeV，由式A.27可知这是绝热条件最有可能破坏的能量。

### 2.3.1 中心处产生的中微子有效质量态的概率

假设  $\nu_e$  在太阳中心处产生，在标准三代中微子框架下，太阳中微子参数选取式1.11中的参数。采用数值方法计算的三个有效质量态沿着飞行路径的概率如图2.10所示，可以看到  $P_{im}$  几乎不发生变化，这和A.8.1节中通过理论推导得出标准三代中微子在太阳内部绝热演化的结论是一致的。并且由于初始密度很高，初始有效混合角  $\theta_m \sim \pi/2$  使得  $\nu_{2m}$  占绝大部分，如图2.10中红线所示。

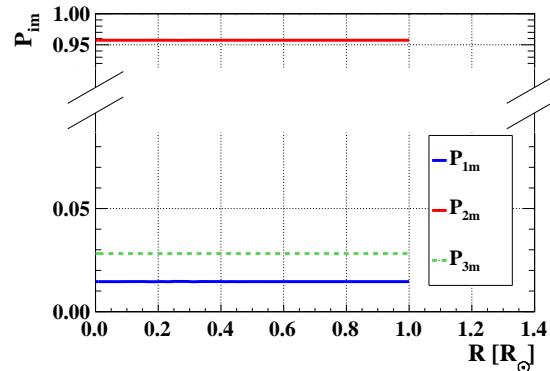


图 2.10 假设中微子在太阳中心处产生，三个有效质量态的概率随着太阳半径的变化。  
以上在标准三代中微子框架下，中微子能量为 20 MeV。

在轻惰性中微子模型中，采用的混合参数为  $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ ，对应图1.11(d)惰性中微子特征最明显的地方。四个有效质量态的概率如图2.11所示。可以看到两个质量态  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{0m}$  之间存在两处相互转化，分别对应于两处绝热最大破坏处，并且  $P_c$  接近于 1。

这是因为由图A.4(c)可知  $\gamma \ll 1$ ，在绝热破坏处发生极端非绝热转化，此时  $P_c = s_{\Delta\alpha_m}^2$ ，由图A.4(b)可知  $s_{\Delta\alpha_m}^2 = 1$ ，那么经过非绝热处后  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{0m}$  的概率值  $P_{1m}$  和  $P_{0m}$  应该发生调换。但是，由图2.11可以看出，两处非绝热转化处  $P_c$  都比 1 稍小，这是因为绝热演化并不是在单点破坏，而是存在一定展宽，如图A.4(c)所示，这会使得已经发生的  $\nu_{1m} \rightarrow \nu_{0m}$ ,  $\nu_{0m} \rightarrow \nu_{1m}$  的完全转化，在绝热破坏处很快会接

着发生  $\nu_{0m} \rightarrow \nu_{1m}$ ,  $\nu_{1m} \rightarrow \nu_{0m}$  的部分转化，使得  $P_c$  比 1 稍小。

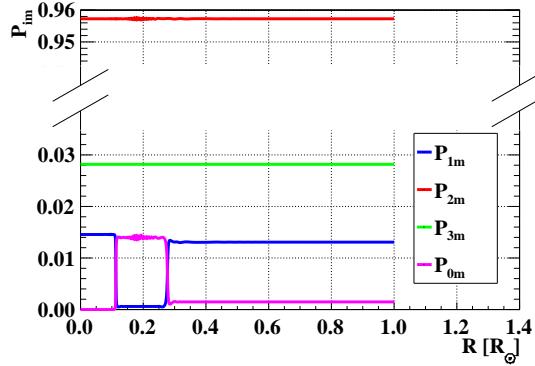


图 2.11 四个有效质量态的概率随着太阳半径的变化。以上在轻惰性中微子情况下，中微子能量为 20 MeV。 $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。

### 2.3.2 在太阳内部的产生区域积分与穿越路径

无论采用解析方法计算  $P_{ee}$ ，还是用数值方法计算  $P_{ee}$ ，都需要考虑中微子产生区域分布（图2.1）的影响，对整个中微子产生区域分布做积分，如果是数值方法，还要考虑不同区域产生的中微子穿过的路径也是不同的。

如果在三代框架下研究太阳中微子问题，LMA 的解下中微子是绝热演化，由于太阳中微子各个质量态始终处于绝热演化的状态，那么  $P_{im}$  与中微子传播路径上穿过的物质无关（路径无关正是绝热的意思）。演化过程与路径无关，只和产生点的有效混合角有关，只需要在产生区域对式A.75中微子有效混合角的余弦值做积分即可。产生区域积分之后的三个质量态从  $0.3 R_\odot$  开始的概率如图2.12所示，和产生区域积分之前的概率图2.10有着微小的偏差。

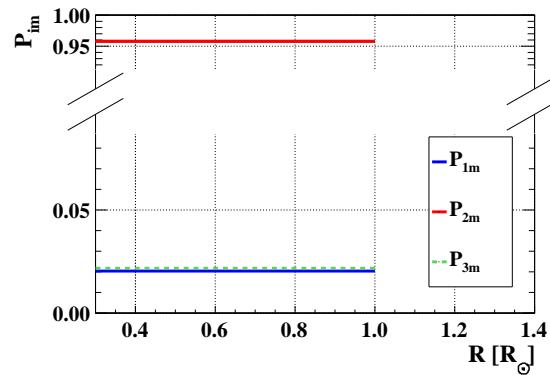


图 2.12 在经过产生区域积分后，三个有效质量态的概率随着太阳半径的变化。以上在标准三代中微子框架下，中微子能量为 20 MeV。

如果在轻惰性中微子模型下研究太阳中微子问题，因为是小角混合，非绝热效应显著，由于此时太阳中微子各个质量态可能发生相互转化的情况，所以中微

子的存活概率就是路径依赖的量（路径依赖正是非绝热的意思）。在 2 MeV 以上只有  ${}^8\text{B}$  中微子和  $hep$  中微子，太阳标准模型预言  $hep$  中微子的通量在 4 ~ 12 MeV 这一太阳中微子事例集中的能段，比  ${}^8\text{B}$  中微子的通量大约小 3 个数量级（图1.4），且  $hep$  中微子目前还没有观测到，所以我们主要关注  ${}^8\text{B}$  中微子， ${}^8\text{B}$  中微子在太阳内部 0.15 个太阳半径中产生。下面具体讨论对产生区域的分层，以及在不同分层区域中产生的  ${}^8\text{B} \nu_e$  的不同飞行路径。

### 在太阳内部的产生区域积分

模拟时需要将  ${}^8\text{B} \nu_e$  的产生区域细分，从而在每一块分割区域中采样，以区分不同区域产生的中微子穿过太阳路径的不同情况，最终求和得到中微子的存活概率。选取哪种产生区域的分层方式，需要从两个方面来考量：

- 计算  $P_{ee}$  结果的精度达到  $10^{-4}$ 。
- 充分利用对称性，从而提高数值计算的效率。

可以认为  ${}^8\text{B} \nu_e$  中微子产生于以太阳为中心，底面圆直径为  $0.3 R_\odot$ ，长度也为  $0.3 R_\odot$  的圆柱体区域，从而能够覆盖  ${}^8\text{B} \nu_e$  的整个产生区域。

然后将圆柱体区域进行细分，以日地连线方向为  $x$  轴，垂直于  $x$  轴的平面中任选互相垂直的轴为  $y, z$  轴构造坐标系，如图2.13所示。 $x$  轴方向分为  $2n_1$  段（ $n_1$  为正整数），用  $i$  ( $i = -n_1 \sim n_1 - 1$ ) 标记段的序号，垂直于  $x$  轴的圆平面又可以沿着半径方向等分为  $n_1$  个圆环，用  $j$  ( $j = 0 \sim n_1 - 1$ ) 标记圆环的序号，如图2.14所示。那么每个细分的小圆环柱体区域可以用

$$(i, j), \quad (i = -n_1 \sim n_1 - 1, j = 0 \sim n_1 - 1) \quad (2.21)$$

标记。由对称性可知，同一个圆环柱体内，环向上的中微子有着相同的飞行路径。每个小圆环柱体区域中的中微子份额  $Q(i, j)$  采用标准太阳模型所预言的密度分布（图2.1） $\zeta(r)$  进行抽样。

### 在太阳内部的穿越路径

不同区域产生的中微子有着不同的穿过太阳的路径，假设中微子在圆环柱体区域  $(i, j)$  的中心圆上均匀产生。中微子先穿越圆环柱体自身长度的一半，接下来则分为两种情况：

- 如果  $i < n_1 - 1$ ，中微子在穿越产生中微子的圆环柱体  $(i, j)$  长度的一半后，还要穿越下一个圆环柱体  $(i + 1, j)$ ，接着是  $(i + 2, j)$ , … 直至  $(n_1 - 1, j)$ ，才能完全穿出产生区域，即2.14的圆柱体产生区域。
- 如果  $i = n_1 - 1$ ，中微子在穿越产生中微子的圆环柱体  $(n_1 - 1, j)$  长度的一半

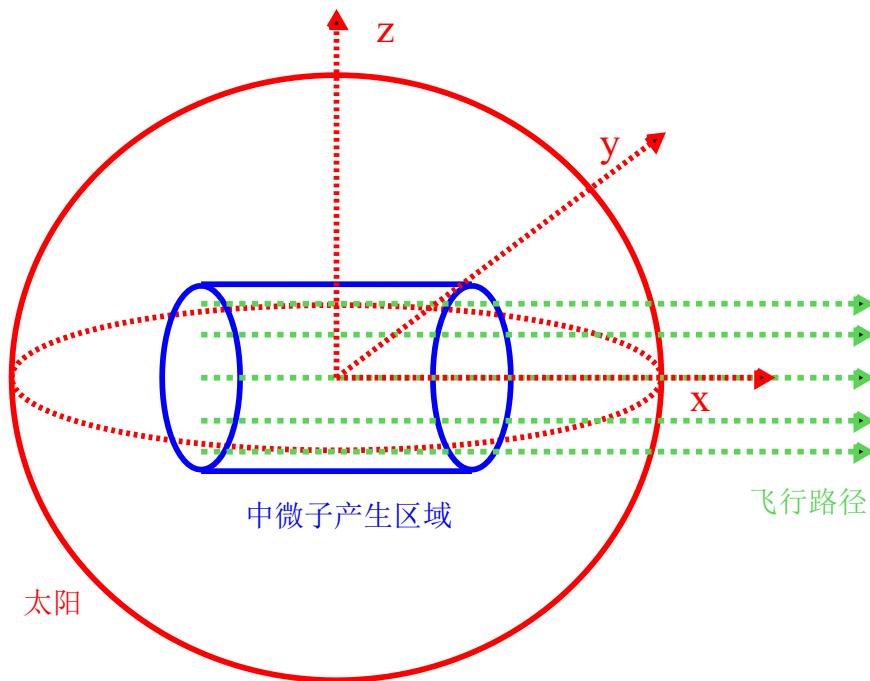


图 2.13 中微子在以太阳为中心, 底面圆直径为  $0.3 R_{\odot}$ , 长度也为  $0.3 R_{\odot}$  的圆柱体区域产生。圆柱体区域以日地连线方向为  $x$  轴, 垂直于  $x$  轴的平面中任选互相垂直的轴为  $y, z$  轴构造坐标系。

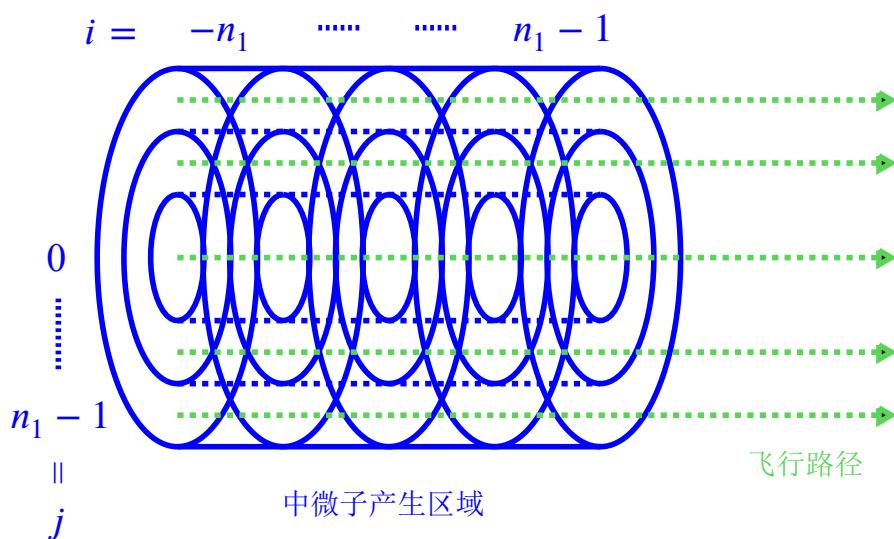


图 2.14 将中微子产生区域在  $x$  轴方向分为  $2n_1$  段 ( $n_1$  为正整数), 用  $i$  ( $i = -n_1 \sim n_1 - 1$ ) 标记段的序号, 垂直于  $x$  轴的平面又沿着半径方向等分为  $n_1$  个圆环, 用  $j$  ( $j = 0 \sim n_1 - 1$ ) 标记圆环的序号。

后，就直接穿出整个圆柱体产生区域。

中微子穿出产生的圆环柱体区域后，在 $x = 0.15R_{\odot} \sim 1.R_{\odot}$ 的路径中，分为 $n_2$ 段，每段的物质势从太阳物质势分布中抽样，并且当 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 1R_{\odot}$ ，物质势为0。然后在每段中采用分层演化模拟中微子演化过程。

以上就是中微子对于产生区域做积分的全过程。

## 2.4 日地之间的飞行过程

中微子在日地之间的飞行过程需要考虑中微子存活概率的抹平(Smearing)效应，同时考虑锦屏地下实验室由于地球自转和公转，对太阳中微子曝光的变化。

### 2.4.1 中微子存活概率的抹平效应

到达地球的 $\nu_e$ 存活概率的高频振荡部分会被抹平。抹平效应来自三方面原因[226]：

- 中微子在日地之间漫长的飞行长度，质量态波包之间的退相干。
- 太阳核心处中微子产生区域的积分，
- 探测器有限的能量分辨。

中微子质量态的退相干使得三代和轻惰性中微子框架下 $\nu_e$ 的存活概率 $P_{ee}$ ：

$$P_{ee} = \sum_i^{3 \text{ or } 4} |U_{ei}|^2 P_i^{(L)}, \quad (2.22)$$

$P_i^{(L)}$ 是终点处第*i*个质量态的概率。

#### 标准三代中微子情况(MSW)

下面设置三种情况考察标准三代中微子情况(MSW)下， $P_{ee}$ 的抹平效应：

- MSW Case I：只考虑由于穿过漫长日地距离后，中微子质量态的退相干导致的抹平效应， $\nu_e$ 存活概率如图2.15(a)蓝线所示。
- MSW Case II：在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应的基础上，对产生区域做积分， $\nu_e$ 存活概率如图2.15(a)红线所示。
- MSW Case III：在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应，以及中微子产生区域积分的基础上，考虑 $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$ 的能量分辨的影响。 $\nu_e$ 存活概率如图2.15(b)黑色虚线所示。

可以看到第一种情况和第二种情况的 $P_{ee}$ 有细微区别，而第二种情况和第三种情况几乎没有区别。

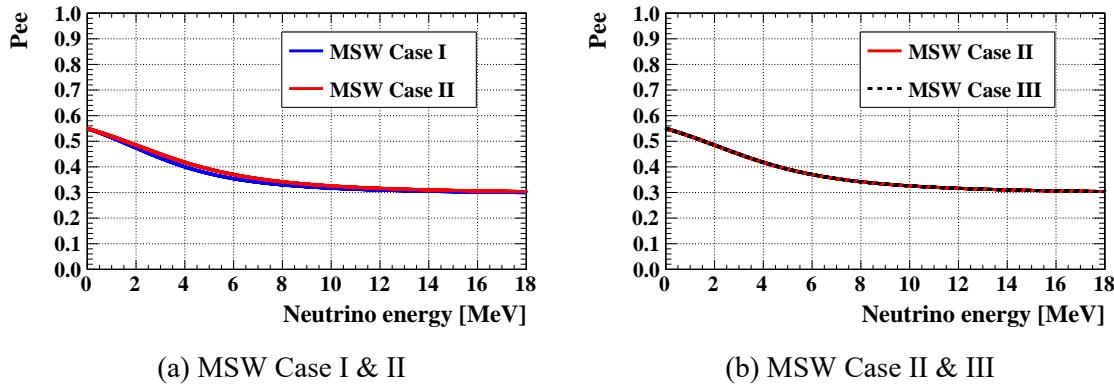


图 2.15 (a) 只考虑退相干效应 (蓝线), 以及在退相干的基础上, 还对中微子产生区域积分 (红线), 这两种情况的  $P_{ee}$  随着能量的变化曲线。(b) 在退相干的基础上, 还对中微子产生区域积分 (红线), 以及在退相干, 产生区域积分的基础上, 还考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  的能量分辨 (黑线), 这两种情况的  $P_{ee}$  随着能量的变化曲线。以上在标准三代中微子框架下, 中微子能量为 20 MeV。

### 轻惰性中微子情况 (Sterile)

下面同样设置三种情况考察轻惰性中微子  $P_{ee}$  的抹平效应，将已经做了产生区域积分的标准三代中微子概率曲线（MSW）和轻惰性中微子情况（Sterile）放在一起对比：

- **Sterile Case I:** 只考虑由于穿过漫长日地距离后，中微子质量态的退相干导致的抹平效应， $\nu_e$  存活概率如图2.16(a)蓝线所示。
  - **Sterile Case II:** 在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应的基础上，对产生区域做积分，将产生点区域分为  $n_1 = 30$ ，将穿越太阳的路径分为  $n_2 = 10^6$  层， $\nu_e$  存活概率如图2.16(b)蓝线所示。
  - **Sterile Case III:** 在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应，以及中微子产生区域积分的基础上，考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  的能量分辨的影响。 $\nu_e$  存活概率如图2.16(c)蓝线所示。

我们可以看到，经过质量态的退相干2.16(a)，产生区域积分2.16(b)以及有限的能量分辨2.16(c)先后的抹平效应之后，原有的扭动结构消失了，下沉的结构依然能够保留，正是保留下来的下沉结构导致和 MSW 曲线（图2.16(a)、2.16(b)、2.16(c)中的红线）的信号差异。

#### 2.4.2 锦屏地下实验室曝光函数的计算

由于地球自转和公转会导致太阳中微子的通量发生变化。公转会导致锦屏地下实验室全年约  $\pm 3\%$  的通量变化（见附录B.1的讨论）。自转会导致锦屏地下实验

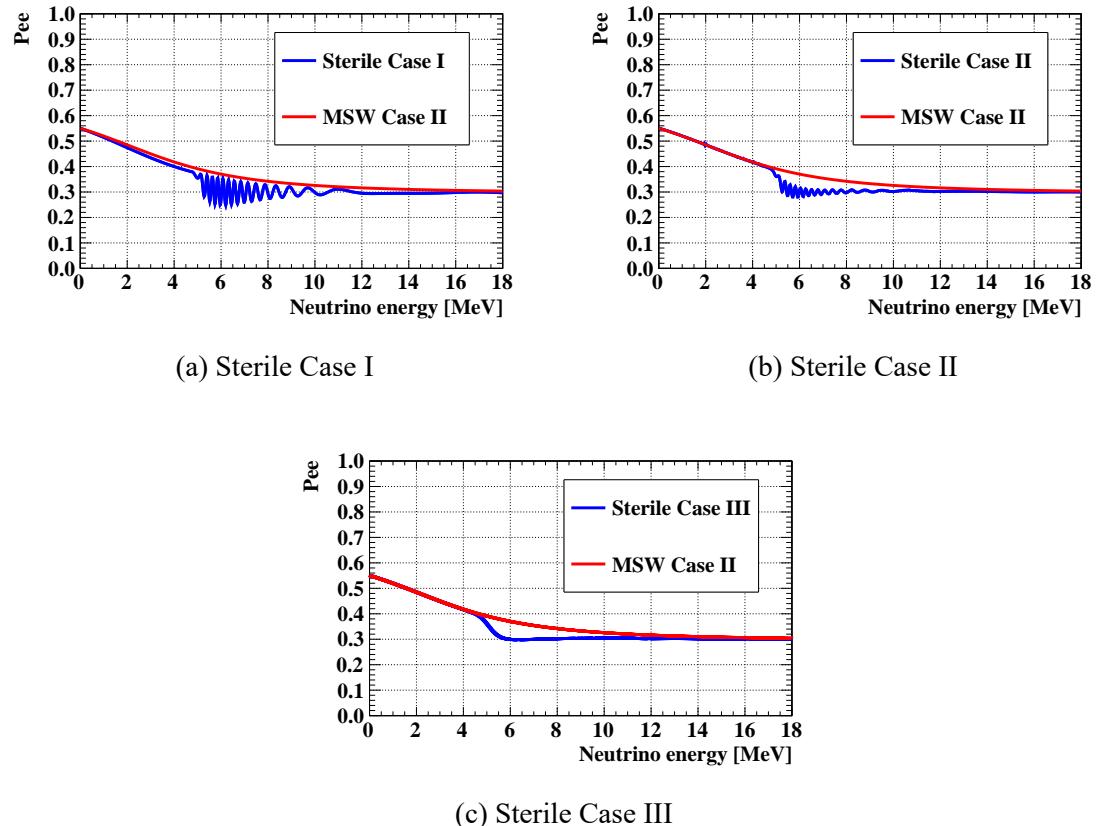


图 2.16 (a) 只考虑日地距离所带来的退相干效应,  $\nu_e$  存活概率随着能量的变化 (蓝线)。  
 (b) 在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应的基础上, 对产生区域做积分,  $\nu_e$  存活概率随着中微子能量的变化 (蓝线)。其中产生点区域被分为  $n_1 = 30$ , 将穿越太阳的路径分为  $n_2 = 10^6$  层。(c) 在考虑日地距离所带来的中微子质量态的退相干效应, 以及中微子产生区域积分的基础上, 再考虑有限能量分辨的影响。 $\nu_e$  存活概率随着中微子能量的变化 (蓝线)。其中能量分辨为  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$ 。一同示出的还有经过产生区域积分的标准三代中微子存活概率曲线 (红线)。以上中微子能量为 20 MeV。轻惰性中微子参数为  $R_\Lambda = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。

室在一天中的各个时间段的通量也不同（见附录B.2的讨论）。

不同中微子达到实验室对应入射天顶角  $\theta_Z$ , 如图2.17所示,  $\theta_Z$  即太阳方位和天顶方向之间的夹角。与  $\theta_Z$  互补的是太阳方位和天底方向之间的夹角, 称为天底角  $\eta$ 。 $\cos \theta_Z < 0$  或者  $\cos \eta > 0$  对应中微子穿过地球。自转会导致锦屏地下实验室对不同时刻达到的中微子的曝光权重有所不同（见B.2节的讨论）。

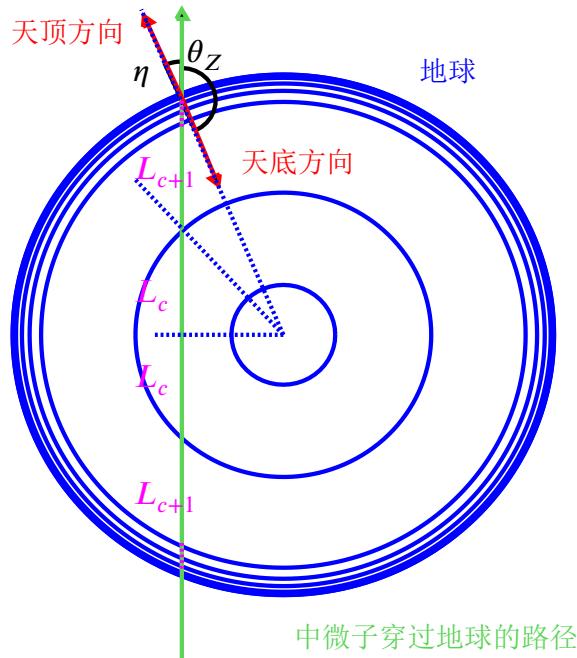


图 2.17 中微子穿越地球的路径。

将曝光关于  $\cos \eta$  的函数  $W(\cos \eta)$ , 或者关于  $\eta$  的函数  $W(\eta)$  称为曝光函数。我根据中国锦屏地下实验室的纬度  $\lambda = 0.4922$ , 计算了其曝光函数  $W(\cos \eta)$  和  $W(\eta)$ , 分别如图2.18(a)和2.18(b)所示。由于曝光函数具有对称性, 所以只需要画出  $[-1, 0]$  的范围。将锦屏地下实验室的曝光函数和世界上其他著名的中微子实验室, 如神冈、SNO、DUNE 的曝光函数进行对比, 如图2.19所示。可以看到, 锦屏地下实验室是目前覆盖的天顶角范围最大的中微子实验室。并且  $(\cos \theta_Z)_{\min} < -0.84$ , 所以锦屏地下实验室能够测量到穿过地核的中微子, 覆盖地核的范围也是最大的。由式B.9可知锦屏实验室覆盖  $\cos \theta_Z$  的范围为  $[-0.99655, 0.99655]$ , 只有  $[0, 0.083R_\oplus]$  ( $R_\oplus$  为地球半径) 的球形区域无法覆盖到, 可以覆盖 99.94% 的地核区域和全部的非地核区域, 这对研究地球物质效应时至关重要。

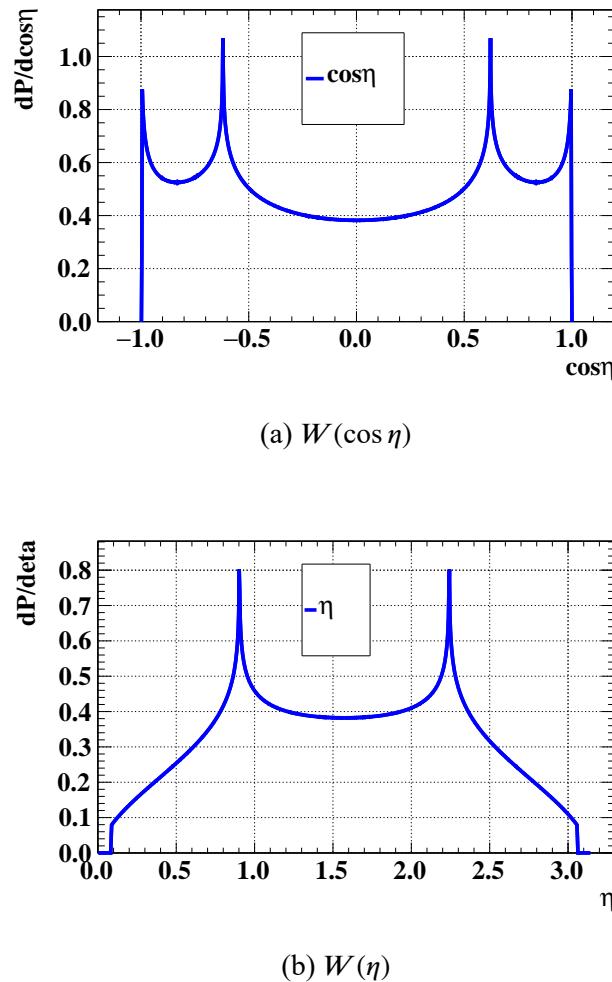


图 2.18 (a) 锦屏地下实验室的曝光函数  $W(\cos \eta)$ , 以  $\cos \eta$  为自变量。(b) 锦屏地下实验室的曝光函数  $W(\eta)$ , 以  $\eta$  为自变量。

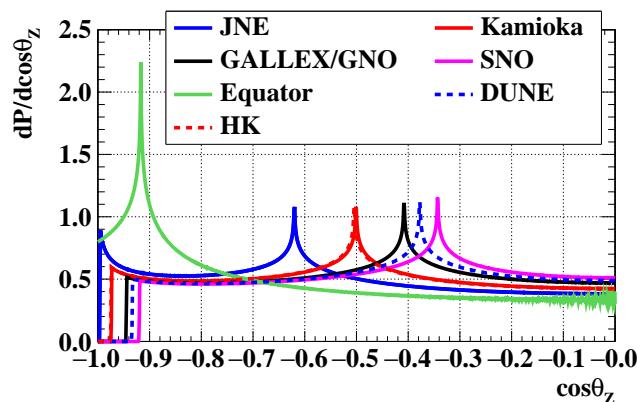


图 2.19 锦屏中微子实验和神冈、SNO、DUNE 等几个著名的中微子实验室的曝光函数。锦屏中微子实验是目前覆盖的天顶角范围最大的实验室。

## 2.5 在地球内部的演化

考察中微子质量态的概率随着穿越地球路径的变化，同样选取中微子最大特征能量为 20 MeV，由式A.27可知这是绝热条件最有可能破坏的能量。

### 2.5.1 穿过地球直径的中微子有效质量态的概率

在标准三代中微子和轻惰性中微子这两种情况下的有效质量态在穿越地心时，有效质量态的概率  $P_{im}$  随着路径的变化分别如图2.20(a)和图2.20(b)所示。可以看到，无论是标准三代中微子还是轻惰性中微子，穿越地球时质量态的概率几乎不变，只有  $P_{1m}$  和  $P_{2m}$  在古登堡界面（Gutenberg Discontinuity）（见附录A.2.2）处约 0.0025 的变化，这一数值计算结果和附录A.9的理论分析结果一致。

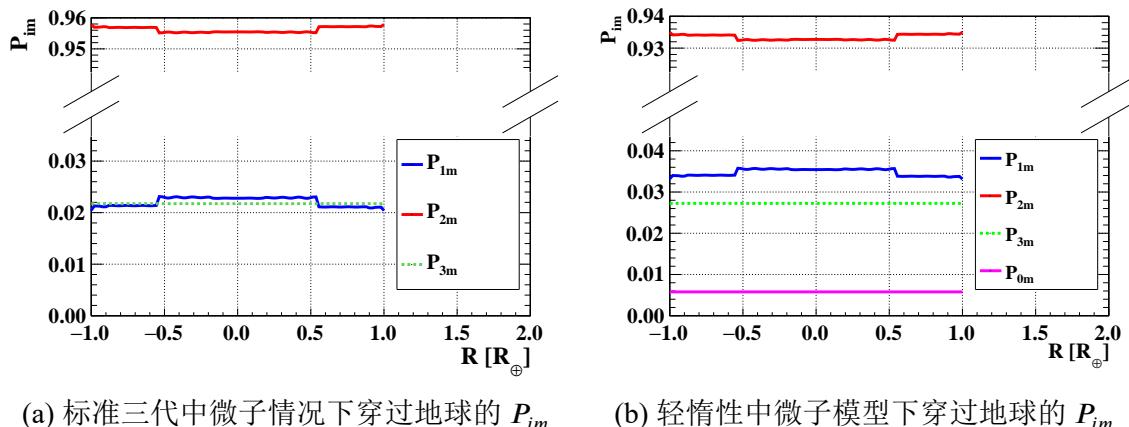


图 2.20 (a) 标准三代中微子情况下三个有效质量态的概率随着穿过地球中心的路径上的变化。(b) 轻惰性中微子情况下四个有效质量态的概率随着穿过地球中心的路径上的变化。 $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。以上两种情况均对中微子产生区域做了积分，中微子能量为 20 MeV。

### 2.5.2 在地球内部的穿越路径

在球对称的地球模型下，中微子到达探测器的路径将由  $\cos \eta$  唯一确定，如图2.17所示。同样假定地球有内到外被分为了  $n$  层，包括最内层的球体，半径为  $r_1$  和  $n - 1$  个球壳，半径分别为  $r_i$  ( $i = 2 \dots n$ )。穿越的最内层的编号  $c$  ( $c$  表示临界球壳) 由下式确定：

$$r_{c-1} \leq \sqrt{1 - \cos^2 \eta} < r_c. \quad (2.23)$$

中微子穿越第  $i$  层时方向和穿出点半径的夹角的  $\cos$  值记为  $\cos \eta_i$ , 有  $\eta_n = \eta_0 \cos \eta_i$  可以由第  $i+1$  层对应的  $\cos \eta_{i+1}$  导出:

$$\cos \eta_i = \frac{\sqrt{r_i^2 - r_{i+1}^2(1 - \cos^2 \eta_{i+1}^2)}}{r_i}. \quad (2.24)$$

由对称性可知, 只需求第  $i$  层中微子穿越长度的一半, 记作  $L_i$ :

$$i > c : L_i = r_i \cos \eta_i - r_{i-1} \cos \eta_{i-1}, \quad i = c : L_c = r_c \cos \eta_{ic}. \quad (2.25)$$

中微子穿越地球同样有不同的穿越路径:

- 若中微子射来的天顶角足够大, 使得中微子只穿越最外层, 那么穿越路径为:

$$L_{n-1} \rightarrow L_{n-1}. \quad (2.26)$$

- 若中微子穿越的层数大于 1, 那么中微子将由最外层  $n-1$  到所能到达的最内层  $c$  ( $c$  由2.23决定)。再由第  $c$  层到最外层, 直至从地球表面穿出:

$$L_{n-1} \rightarrow \cdots L_c \rightarrow L_c \cdots L_{n-1}. \quad (2.27)$$

以上是中微子穿过地球的全过程, 如图2.17所示。

以穿过地心的直径为中微子飞行路径, 白天和夜晚的中微子存活概率, 在标准三代中微子和轻惰性中微子情况下, 分别如图2.21(a)和2.21(c)所示。夜晚的中微子存活概率由于质量态在穿越地球时没有退相干, 所以会出现随着能量的振荡, 见A.9.2节的讨论。另外考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  能量分辨的影响, 白天和夜晚  $P_{ee}$  经过抹平效应后, 在标准三代中微子和轻惰性中微子情况下, 分别如图2.21(b)和2.21(d)所示。可以看到, 能量分辨同样对地球效应产生的  $P_{ee}$  在  $10^{-2}$  量级的振荡存在抹平效应。

## 2.6 本章小结

本章详细讨论了标准三代中微子情况和引入一个弱混合的轻惰性中微子情况下, 从中微子在太阳产生, 穿越太阳时的演化, 以及从太阳飞行至地球和夜间穿越地球时的演化全过程, 讨论时采用中微子质量态的演化, 因为中微子质量态除了在几处狭窄区域内发生非绝热演化外, 大部分区域的概率几乎不发生变化, 相比于味道态的高频振荡来说更加直观。随后验证了多种数值方法, 包括分层演化方法, 四阶龙格-库塔法, 以及龙格-库塔-费尔伯格方法的准确性和效率。得出结论: 三种数值方法能够得出一致的结果, 但是在效率方面, 四阶龙格-库塔法在计算某些物质势分布时容易发散, 分层演化方法和龙格-库塔-费尔伯格方法各有优势。

标准三代中微子在太阳内部绝热演化, 轻惰性中微子模型在太阳内部最多会

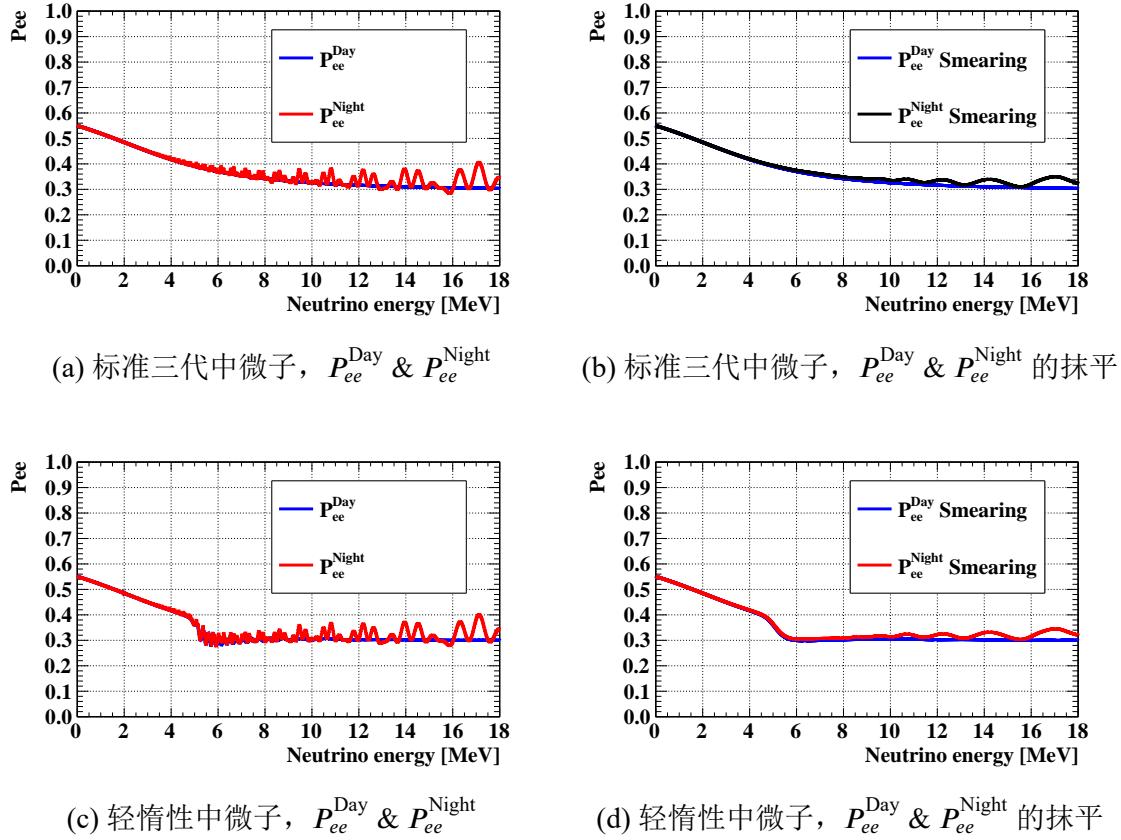


图 2.21 (a) 标准三代中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的中微子概率 (蓝线), 用于比较。 (b) 考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  能量分辨的影响, 标准三代中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的中微子概率 (蓝线), 用于比较。 (c) 轻惰性中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的  $P_{ee}$  (蓝线), 用于比较。 (d) 考虑  $10\% \sqrt{E[\text{MeV}]}$  能量分辨的影响, 轻惰性中微子情况下  $\cos \eta = 1$  的  $P_{ee}$  随着能量的变化 (红线), 一并画出的还有白天的中微子概率 (蓝线), 用于比较。

有两处非绝热区域。然后讨论了中微子在日地之间飞行的退相干效应，中微子产生区域积分以及有限的能量分辨对中微子存活概率的抹平效应。然后计算了锦屏地下实验室的曝光函数，发现锦屏地下实验室是目前覆盖的天顶角范围最大的中微子实验室： $\cos \theta_Z = [-0.99655, 0.99655]$ ，并且能够测量到穿过地核的中微子，覆盖的地核范围也是最大的，可以覆盖 99.94% 的地核区域和全部的非地核区域。中微子在地球内部演化过程中，无论是标准三代中微子，还是惰性中微子，有效质量态的概率基本不变。

## 第3章 氯化锂水溶液中的中微子探测过程

氯化锂水溶液中富含大量 Li, Cl,  $e^-$ , 以及 H, O, 能够通过多种探测过程来探测  $\nu_e$  和  $\bar{\nu}_e$ 。其中对于太阳中微子有两种典型的探测过程, 分别是带电流过程和弹性散射过程。带电流截面和弹性散射截面有着不同的计算方法。通过详细比较不同中微子振荡构型下, 带电流过程和弹性散射过程的太阳中微子的能谱, 发现带电流过程有着更高的信号强度。

本章首先讨论氯化锂水溶液对于中微子全部的探测过程和相应的截面, 以及不同探测过程所得到的末态带电粒子的能谱。然后详细阐述由于 LiCl 的带电流过程能够直接探测到中微子能量, 所以对于本研究所关注的概率上升效应, 轻惰性中微子的寻找, 以及地球物质效应和地球成像等能量依赖的中微子物理, 有着相比于  $\nu_\alpha-e^-$  弹性散射过程而言, 更为显著的探测优势。

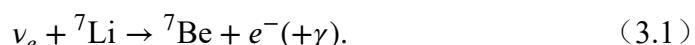
### 3.1 氯化锂水溶液对于中微子的探测过程

LiCl 水溶液能够同时实现对于  $\nu_e$  和  $\bar{\nu}_e$  的探测。

#### 3.1.1 电子中微子的探测

LiCl 水溶液中  $1 \sim 20$  MeV 中微子的主要相互作用是包括  $\nu_e$  在 Li 和 Cl 上的带电流过程以及  $\nu_\alpha$  在 Li 上的中性流过程:

- ${}^7\text{Li}$  上的  $\nu_e$  的 CC 过程 (LiCC) 为:



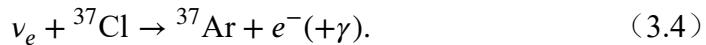
如图3.1所示, 反应3.1可以跃迁至  ${}^7\text{Be}$  基态, 其中费米跃迁和超允许的伽莫夫-特勒 (Gamow-Teller, 简称 GT) 跃迁都是可能的<sup>[227-228]</sup>, 此反应的阈值为 0.862 MeV。反应3.1还可以跃迁至  ${}^7\text{Be}$  第一激发态, 跃迁是超允许的伽莫夫-特勒跃迁<sup>[227-228]</sup>, 产生额外的 0.429 MeV 退激  $\gamma$ , 此反应的阈值为 1.291 MeV。LiCC 过程的末态有效动能  $T$  包括末态  $e^-$  的动能  $T_e$  和退激  $\gamma$  的动能  $T_\gamma$ :

$$T = T_e + T_\gamma. \quad (3.2)$$

末态有效动能  $T$  和中微子能量  $E_\nu$  的关系为:

$$T = E_\nu - 0.862\text{MeV}. \quad (3.3)$$

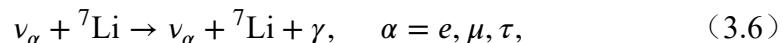
- $^{37}\text{Cl}$  上的  $\nu_e$  的 CC 过程 (ClCC):



ClCC 过程的中微子能量阈值为 0.814 MeV，非常接近 LiCC 阈值。ClCC 过程只有跃迁至  $^{37}\text{Ar}$  的 4.983 MeV 能级时，才同时包含费米跃迁和伽莫夫-特勒跃迁，这一反应的阈值为 5.797 MeV，其他的跃迁过程均是伽莫夫-特勒跃迁，如图3.2所示，可以在别处找到 ClCC 过程的更多细节<sup>[85,229]</sup>。ClCC 过程的末态有效动能  $T$  和中微子能量  $E_\nu$  的关系为：

$$T = E_\nu - 0.814 \text{ MeV}. \quad (3.5)$$

- $^7\text{Li}$  上的  $\nu_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) 的中性流过程 (LiNC):



发射的  $\gamma$  的能量为 0.478 MeV<sup>[227-228]</sup>，如图3.1所示。因为末态  $\gamma$  能量非常低，低于本研究中所关心的物理能区以及所假设的探测器探测阈值，所以我们在本文中跳过涉及 NC 过程的讨论。

- $e^-$  上的  $\nu_\alpha$  的弹性散射过程 (ES)，如式1.20所示。这一太阳中微子探测过程已经在很多实验中应用<sup>[98,230]</sup>。弹性散射过程的末态有效动能  $T$  等于末态  $e^-$  的动能  $T_e$ 。

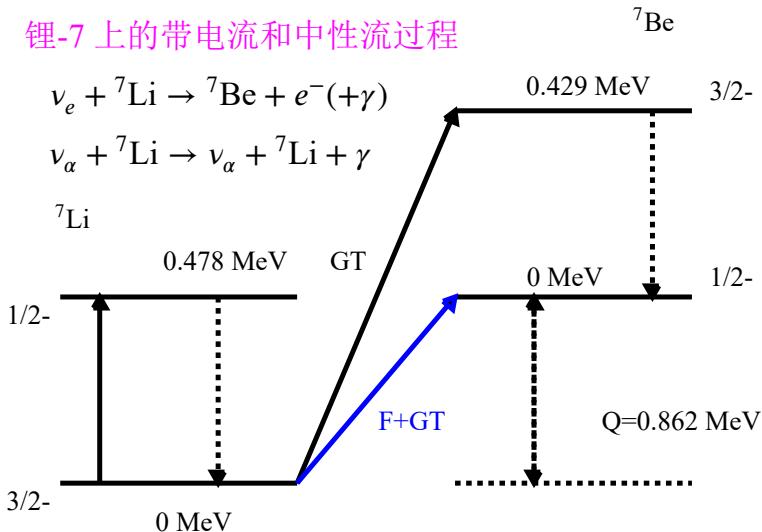
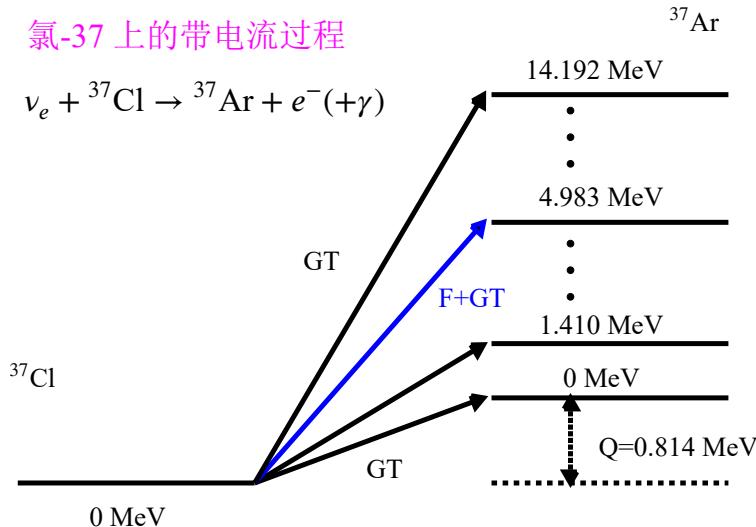


图 3.1 中微子在  $^7\text{Li}$  发生带电流和中性流过程，横线代表  $^7\text{Li}$  和  $^7\text{Be}$  的能级。

图3.2 电子中微子在 ${}^{37}\text{Cl}$ 发生带电流过程，横线代表 ${}^{37}\text{Cl}$ 和 ${}^{37}\text{Ar}$ 的能级。

### 3.1.2 反电子中微子的探测

$\text{LiCl}$ 水溶液也能用于 $\bar{\nu}_e$ 探测，例如对于地球中微子的探测，从而可以用作多用途探测器。水溶液包含许多氢，即自由质子，这是 $\bar{\nu}_e$ 的逆 $\beta$ 衰变过程的靶物质，如式3.7所示。



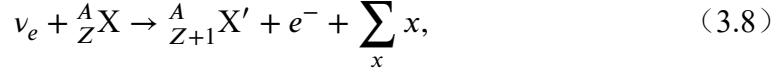
反应3.7产生的中子可以被 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{35}\text{Cl}$ 或者 ${}^1\text{H}$ 俘获，形成延迟信号。 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{35}\text{Cl}$ 以及 ${}^1\text{H}$ 对于中子的俘获截面分别为 $940 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ <sup>[231]</sup>、 $44 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ <sup>[232]</sup>、 $0.3 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ <sup>[231]</sup>。对于在 ${}^6\text{Li}$ 上的俘获<sup>[233]</sup>，延迟信号是一个氚核和一个 $\alpha$ 粒子；对于在 ${}^{35}\text{Cl}$ 上的俘获<sup>[11]</sup>，延迟信号是总能量为8.6 MeV几个光子；对于在 ${}^1\text{H}$ 上的俘获<sup>[234]</sup>，延迟信号是能量为2.2 MeV的单光子。在Li和Cl同位素的自然丰度输入下， ${}^6\text{Li}$ 上的中子俘获概率约为66%， ${}^{35}\text{Cl}$ 上的中子俘获概率约为32%， ${}^1\text{H}$ 上的中子俘获概率约为2%。延迟符合在提取 $\bar{\nu}_e$ 信号和抑制本底方面的表现非常出色。值得注意的是， ${}^6\text{Li}$ 上中子俘获产生的氚核和 $\alpha$ 核在水中低于切伦科夫阈值，需要闪烁光来探测它们。

## 3.2 散射截面的计算

### 3.2.1 带电流截面的计算

对于太阳中微子来说，带电流相互作用只与 $\nu_e$ 的探测有关，因为 $\nu_\mu$ 和 $\nu_\tau$ 没有足够的能量产生它们相应的轻子 $\mu$ 和 $\tau$ 。 $\nu_e$ 和核子X发生反应，会生成末态核

$X'$  和电子  $e^-$  以及其他一些可能的副产物  $x$ , 反应式为:



核子  $X$  可以看做是静止的, 中微子和核子反应阈值最一般的表达式为:

$$E_\nu^{\text{threshold}} = \frac{(m_{X'} + m_e + \sum_x m_x)^2}{2m_X} - \frac{m_X}{2}, \quad (3.9)$$

根据<sup>[85,235-237]</sup>, 带电流截面的表达式为:

$$\sigma = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_e^2}{\pi} p_e \omega_e F(Z, \omega_e) [\langle 1 \rangle^2 + C_A^2 \langle \sigma \rangle^2], \quad (3.10)$$

其中  $V_{ud}$  是夸克的 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (简称 CKM, 以提出者 N. Cabibbo, M. Kobayashi 和 T. Maskawa 三人命名) 矩阵<sup>[50,238]</sup>的  $u-d$  矩阵元,  $C_A = 1.2723$ <sup>[239]</sup>。 $F(Z, \omega_e)$  是费米函数<sup>[236]</sup>,  $\langle 1 \rangle^2$  和  $\langle \sigma \rangle^2$  是费米和伽莫夫-泰勒对应核跃迁矩阵元的平方, 核跃迁矩阵元需要通过实验来测定, 通常用 ( $p, n$ ) 或 ( ${}^3\text{He}, t$ ) 反应来完成。更多细节可参见参考文献<sup>[227-228]</sup>, 在实验测量中分别用  $B(F)$  和  $B(GT)$  表示。反应3.1中  ${}^7\text{Be}$  基态和第一激发态的  $B(GT)$  值分别为 1.19 和 1.06<sup>[227-228]</sup>。 $\omega_e$  和  $p_e$  分别是以电子质量  $m_e$  为单位的电子能量和动量, 能量  $\omega_e$  由

$$\omega_e = \frac{E_\nu + [M(A, Z-1) - M(A, Z)] + m_e - \bar{E}_{ex}}{m_e}, \quad (3.11)$$

确定, 即在式3.8中不考虑除了末态核和电子的其他副产物, 且  $m_e, m_{X'} - m_X \ll m_X$ 。式3.11中,  $\omega_e$  同时取决于  $E_\nu, m_e$ , 末态原子质量  $M(A, Z)$ , 初态原子质量  $M(A, Z-1)$  和末态原子的平均激发能量  $\bar{E}_{ex}$ <sup>[235]</sup>, 对于这一能量的计算, 有一个很好的近似: 对于  $Z < 10$ ,  $\bar{E}_{ex} \approx 24.5Z^{1/3}$  eV,  $Z > 10$ ,  $\bar{E}_{ex} \approx 23Z^{2/5}$  eV<sup>[240]</sup>。那么式3.9中的能量阈值变为:

$$E_\nu^{\text{threshold}} = \bar{E}_{ex} - [M(A, Z-1) - M(A, Z)], \quad (3.12)$$

末态还需要针对原子电子的屏蔽效应对结果进行修正<sup>[236]</sup>。式3.10中费米函数  $F(\omega_e, Z)$  变为<sup>[236]</sup>:

$$F(\omega_e, Z) \Rightarrow F(E_e - V_0, Z) \left[ \frac{(E_e - V_0)^2 - m_e^2 c^4}{E_e^2 - m_e^2 c^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{E_e - V_0}{E_e} \right), \quad (3.13)$$

其中  $V_0$  的表达式为<sup>[241]</sup>:

$$V_0 \approx 1.45 \alpha^2 |Z|^{\frac{4}{3}} m_e, \quad (3.14)$$

其中  $\alpha$  是精细结构常数，在  $E_{\min}$  和  $E_{\max}$  能量范围之间的总截面  $\sigma_{\text{total}}$  为：

$$\sigma_{\text{total}} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \sum_l \sigma_l(\omega_e) \phi(E_\nu) dE_\nu, \quad (3.15)$$

其中  $\sigma_l$  为通过式3.10计算的核跃迁到第  $l$  个激发态的反应截面  $\sigma_l$ 。 $\phi(E_\nu)$  是太阳中微子能谱函数（图1.4）。

我们计算了  ${}^7\text{Li}$  跃迁到  ${}^7\text{Be}$  基态和第一激发态的截面。作为  $E_\nu$  的函数的结果如图3.3所示。由未发生中微子振荡的  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  能谱<sup>[242]</sup>加权的总截面是  $3.759 \times 10^{-42} \text{ cm}^2$ 。这些用于计算 LiCC 截面的量在表3.1中列出。遵循相同的计算程序，并使用来自<sup>[229]</sup>的 B(GT) 和 B(F) 的强度输入，可以重复出 ClCC 过程的截面，微分截面如图3.3所示。由未发生中微子振荡的  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  能谱<sup>[242]</sup>加权的总截面为  $1.069 \times 10^{-42} \text{ cm}^2$ ，一并在表3.1中列出。

如表3.1所示，我们关于  ${}^{37}\text{Cl}$  的结果与文章<sup>[229]</sup>中的  $1.08 \times 10^{-42} \text{ cm}^2$  的结果在 1% 以内一致，其中采用了相同的程序和输入参数。然而，我们对  ${}^7\text{Li}$  的新结果比文章<sup>[200]</sup>中的计算结果高出约 7.5%，差异来自 B(GT) 输入，以及对参考文献<sup>[200]</sup>中已知的镜像  $\beta$  衰变率的归一化。为了比较，文献<sup>[200]</sup>的 B(GT) 输入和 LiCC 截面同样在表3.1展示。图3.3和表3.1中还显示了  $\nu_e-e^-$  弹性散射截面和  $\nu_{\mu,\tau}-e^-$  弹性散射截面<sup>[243]</sup>。对于  ${}^8\text{B}$  中微子，LiCC 总截面约为 ClCC 总截面的 3.5 倍，约为 ES 过程总截面的 60 倍。

在这里，并没有进行彻底的不确定性分析，但是考虑到中微子-镓通量校准实验<sup>[244-245]</sup>中，对于中微子通量的校验精度达到了 2%，可以认为将来 LiCC 总截面能够实现 2% 的精度。

### 3.2.2 弹性散射截面的计算

$\nu_e-e^-$  的弹性散射同时包括带电流和中性流的贡献，如图3.4所示。1971 年，G. 't Hooft<sup>[246]</sup>由 S. Weinberg<sup>[42]</sup>的电弱理论率先给出中微子和电子的弹性散射的微分截面：

$$\frac{d\sigma}{dT_e}(E_\nu, T_e) = \frac{\sigma_0}{m_e} \left[ g_1^2 + g_2^2 \left( 1 - \frac{T_e}{E_\nu} \right)^2 - g_1 g_2 \frac{m_e T_e}{E_\nu^2} \right], \quad (3.16)$$

其中  $g_1 \equiv 1 + g_L^{(\nu_\ell)}$  ( $\ell = e^-$ )， $g_1 \equiv g_L^{(\nu_\ell)}$  ( $\ell = \mu^-, \tau^-$ )， $g_2 \equiv g_R^{(\nu_\ell)}$  ( $\ell = e^-, \mu^-, \tau^-$ )， $g_L$ ,  $g_R$  为左手征耦合常数和右手征耦合常数，如式1.6计算可得：

$$\begin{aligned} g_1^{(\nu_e)} &= \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \simeq 0.73, \quad g_2^{(\nu_e)} = \sin^2 \theta_W \simeq 0.23, \\ g_1^{(\nu_{\mu,\tau})} &= -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \simeq -0.27, \quad g_2^{(\nu_{\mu,\tau})} = \sin^2 \theta_W \simeq 0.23. \end{aligned} \quad (3.17)$$

表 3.1 表中列出的是  $\nu_e - {}^7\text{Li}$ CC 过程中,  ${}^7\text{Li}$  基态到  ${}^7\text{Be}$  基态能级 (gs.-gs.) 的跃迁能量  $E_l$ , 以及  ${}^7\text{Li}$  基态到  ${}^7\text{Be}$  第一激发态能级 (gs.-ex.) 的跃迁能量  $E_l$ , 和对应的 B(GT) 和 B(F) 值<sup>[227-228]</sup>。其中本论文采用的 B(GT) 和 B(F) 来自文献<sup>[227-228]</sup>, 并且和来自文献<sup>[200]</sup>的 B(GT) 和 B(F) 所计算的结果加以对比。一并展示的还有经过  ${}^8\text{B}$  中微子能谱<sup>[242]</sup>加权后的 LiCC, ClCC 和弹性散射截面。

反应道	$E_l$ [MeV]	B(GT)	B(F)	$\sigma({}^8\text{B})$ [ $10^{-42} \text{ cm}^2$ ]
本论文计算结果	${}^7\text{Li}$ gs.-gs.	0	1.19	1.00
采用的 B(GT) 和 B(F)	${}^7\text{Li}$ gs.-ex.	0.429	1.06	1.289
来自文献 <sup>[227-228]</sup>	${}^7\text{Li}$ total			3.759
W. Haxton 于 1996 年 的计算结果 <sup>[200]</sup>	${}^7\text{Li}$ gs.-gs.	0	1.747	1.00
	${}^7\text{Li}$ gs.-ex.	0.429	1.630	1.198
	${}^7\text{Li}$ total			3.497
B(GT) 和 B(F) 来自 <sup>[229]</sup>	${}^{37}\text{Cl}$ total			1.069
	$e^-$			0.061

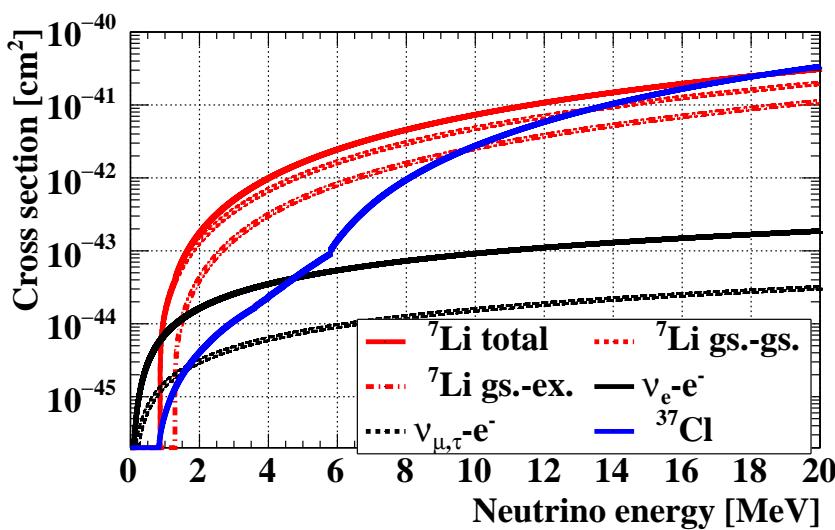


图 3.3 图中展示的是  $\nu_e$  在  ${}^7\text{Li}$  上的带电流相互作用截面随着  $\nu_e$  能量的函数曲线。同时包括基态和第一激发态的截面 (红色实线),  ${}^7\text{Be}$  基态的贡献 (红色虚线),  ${}^7\text{Be}$  第一激发态的贡献 (红色点虚线), 它们分开各自展示。 $\nu_e$  在  ${}^{37}\text{Cl}$  上的带电流相互作用截面随着  $\nu_e$  能量的函数曲线也一并展示了 (蓝线)。其中在 5.797 MeV 处的拐点是由于  ${}^{37}\text{Cl}$  到  ${}^{37}\text{Ar}$  的 4.983 MeV 激发态的费米跃迁。 $\nu_e$  和  $e^-$  的弹性散射截面 (黑色实线),  $\nu_{\mu,\tau}$  和  $e^-$  的弹性散射截面 (黑色虚线) 同时画在图上, 以便一起比较。

由运动学可知末态电子动能和最大动能的表达式为:

$$T_e = \frac{2m_e E_\nu^2 \cos^2 \theta}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta}, \quad T_e^{\max}(E_\nu) = \frac{2E_\nu^2}{m_e + 2E_\nu}. \quad (3.18)$$

$\theta$  是电子的散射角, 当  $\theta = 0$ , 末态电子的动能有最大值。对于确定的末态电子动能, 需要的入射中微子能量的最小值可以由式3.18反解, 即在确定的电子动能下, 参与反应的中微子有一个最小的必要能量:

$$E_\nu^{\min}(T_e) = \frac{T_e}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2m_e}{T_e}} \right) = \frac{T_e + |\vec{p}_e|}{2}. \quad (3.19)$$

关于  $\cos \theta$  的微分散射截面为<sup>[48]</sup>:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \sigma_0 \frac{4E_\nu^2 (m_e + E_\nu)^2 \cos \theta}{[(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta]^2} \cdot \left[ g_1^2 + g_2^2 \left( 1 - \frac{2m_e E_\nu \cos^2 \theta}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta} \right)^2 - g_1 g_2 \frac{2m_e^2 \cos^2 \theta}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2 \theta} \right]. \quad (3.20)$$

微分散射截面关于电子动能和  $\cos \theta$  的分布分别如图3.5(a)和3.5(b)所示。

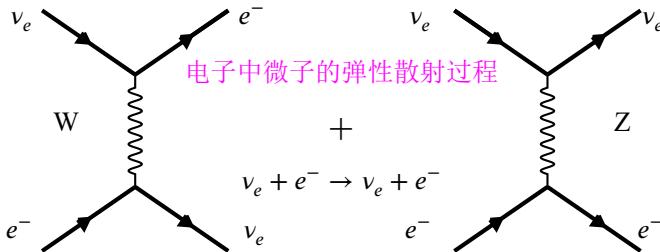


图 3.4  $\nu_e$ - $e^-$  的弹性散射同时包括带电流和中性流的贡献。

综上所述, 中微子和电子的弹性散射过程有着以下三个特点:

- 对于确定的中微子能量, 反冲电子能量是连续分布的, 如图3.5(a)所示;
- 电子方向与太阳中微子入射方向关联, 如图3.5(b)所示;
- 带电流和中性流共同参与, 如图3.4所示。

### 3.3 不同振荡构型下的太阳中微子能谱

不同振荡构型下的太阳中微子能谱有着不同的特征,  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  的原始能谱以及不同振荡构型下, 包括 MSW 物质效应的情况, 以及考虑了轻惰性中微子情况下的能谱如图3.6(a)所示。作为参考, 在图3.6(a)中还绘制了一个平坦的存活概率  $P_{ee}$  下的能谱, 其中,  $P_{ee}$  设置为  $1/3$ ,  $P_{e\mu} + P_{e\tau} = 2/3$ 。在图3.6(b)中, 用三种不同振荡构型

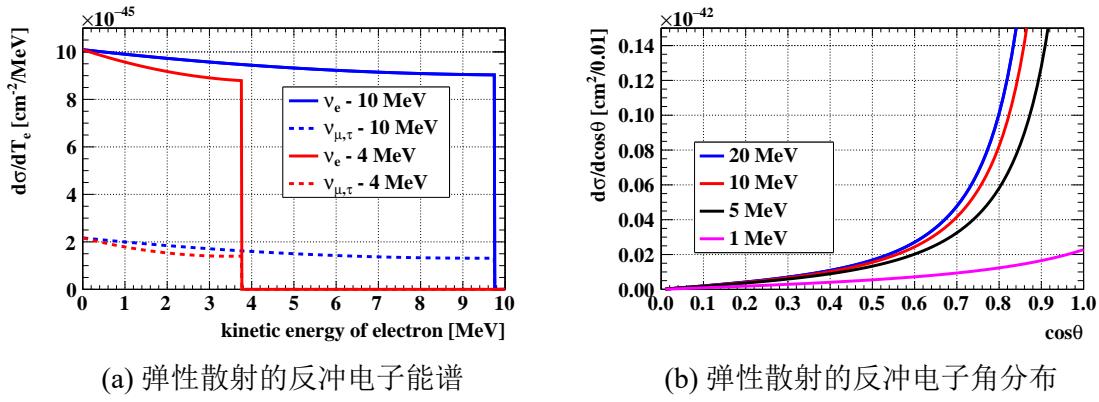


图3.5 (a) 对于确定能量入射的中微子，反冲电子的能谱，包含了  $\nu_e-e^-$  和  $\nu_{\mu,\tau}-e^-$  两种弹性散射情况，以及 10 MeV, 4 MeV 两种中微子能量情况。(b)  $\nu_e-e^-$  微分散射截面在  $E_\nu = 1、5、10、20$  MeV 关于  $\cos\theta$  的分布。

的能谱 (Osci) 中每个能量区间的事例数除以原始能谱 (No Osci) 中每个能量区间的事例数：

$$R(E_\nu) = \frac{N(E_\nu) | \text{Osci}}{N(E_\nu) | \text{No Osci}}, \quad (3.21)$$

得到的即为不同振荡构型下  $\nu_e$  的存活概率  $P_{ee}$ ，如图3.6(b)所示。

在图3.6(b)中，MSW解的  $P_{ee}(E_\nu)$  清晰地呈现出从高能量到低能量的概率上升效应，为了得到概率上升效应具体的定量值，计算了  $E_\nu = 4.862$  MeV 和  $E_\nu = 10.862$  MeV 的存活概率的相对差异，作为一个量化概率上升效应的定量指标。这样设置的中微子能量减去  ${}^7\text{Li}$  的反应阈值（如式3.3所示），就分别对应于 4 MeV 和 10 MeV 的 LiCC 末态有效动能  $T$ 。从图3.6(b)可以得到这个量化概率上升效应的定量指标结果为：

$$\frac{P_{ee}(4.862 \text{ MeV}) - P_{ee}(10.862 \text{ MeV})}{P_{ee}(10.862 \text{ MeV})} = 23\%. \quad (3.22)$$

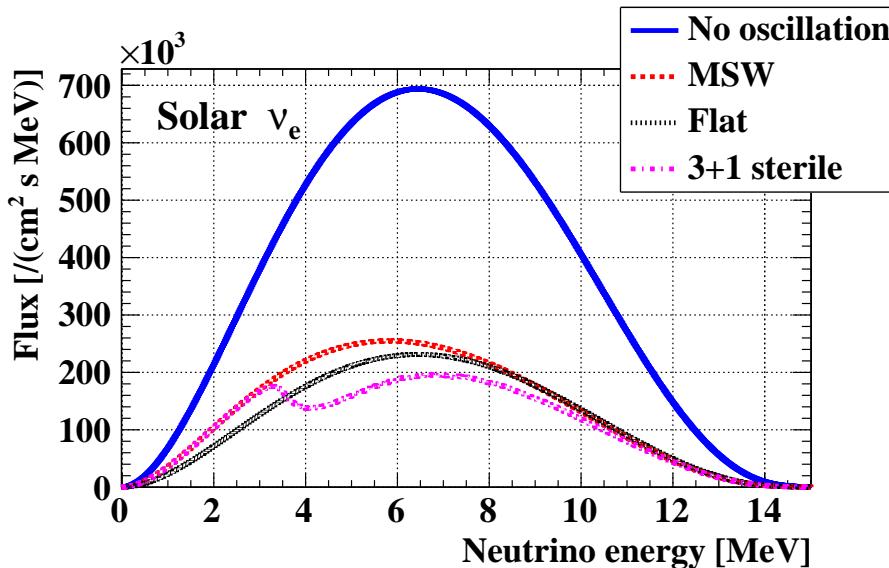
经过单个  ${}^7\text{Li}$  核或单个  ${}^{37}\text{Cl}$  核的带电流反应后，末态有效动能能谱  $N_{\text{LiCC},1}$  和  $N_{\text{ClCC},1}$  采用：

$$N_{\text{LiCC or ClCC},1}(T) = \sum_l^{\text{levels}} \phi(E_\nu(T)) \sigma_{\text{Li or Cl-}l}(E_\nu(T)) \text{BR}_l P_{ee}(E_\nu(T)), \quad (3.23)$$

计算，其中跃迁到第  $l$  个激发态的反应截面  $\sigma_{\text{Li or Cl-}l}(E_\nu(T))$  在式3.3, 3.3, 3.11中计算，包括  ${}^7\text{Be}$  或者  ${}^{37}\text{Ar}$  的所有末态能级。无中微子振荡情况对应  $P_{ee}(E_\nu(T)) = 1$ 。

由于反应3.1和3.4反应阈值相近，LiCC 和 ClCC 末态电子能谱可以合并起来：

$$N_{\text{CC},1} = N_{\text{LiCC},1} + N_{\text{ClCC},1}. \quad (3.24)$$



(a) 不同振荡构型下的中微子能谱

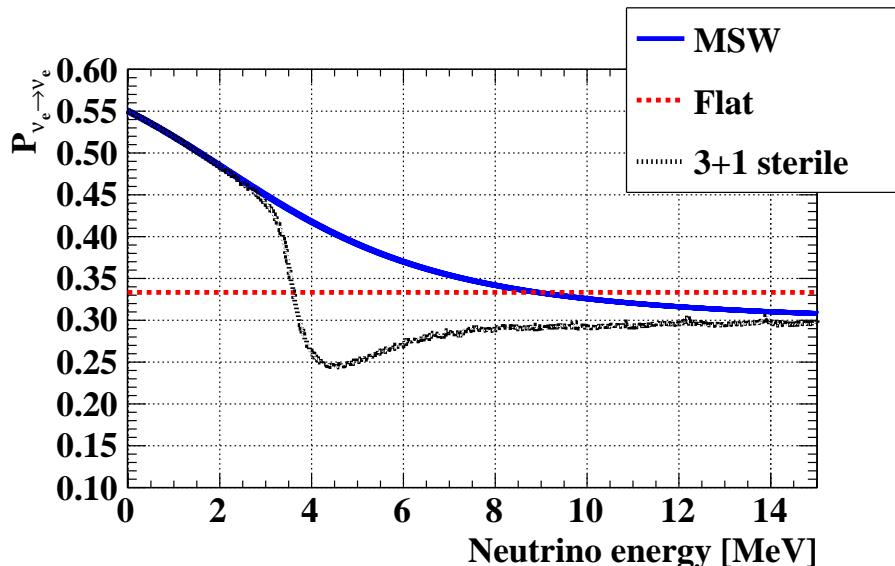
(b) 不同振荡构型下的  $R(E_\nu)$ 

图 3.6 (a) 由 B16-GS98 预测的太阳  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  能谱和不同振荡构型下，到达地球时的太阳  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  能谱。 (b) 不同振荡构型的太阳  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  能谱与原始能谱之比  $R(E_\nu)$ ，即不同振荡构型下  $\nu_e$  的存活概率曲线。对于轻惰性中微子来说，混合参数为  $\alpha = 0.021$ ,  $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5}\text{eV}^2$ 。

${}^8\text{B}$  中微子 CC 事例在不同振荡构型下的动能谱和未发生中微子振荡的动能谱展示在图3.7(a)中，然后定义  $R_{\text{CC}}(T)$  为：

$$R_{\text{CC}}(T) = \frac{N_{\text{CC},1}(T) \mid \text{Osci}}{N_{\text{CC},1}(T) \mid \text{No Osci}}, \quad (3.25)$$

这是末态有效动能能谱在振荡情况 (Osci) 和无振荡情况 (No Osci) 之比。CC 事例的  $R_{\text{CC}}(T)$  如图3.7(b)所示。

对于弹性散射过程，由于存活的  $\nu_e$ 、 $\nu_\mu$ 、 $\nu_\tau$  都散射在电子上，反冲电子的动能谱  $N_{\text{ES},1}(T)$  包含所有这三种贡献，所以单个电子的反冲电子动能能谱由

$$\begin{aligned} N_{\text{ES},1}(T) = & \int_{T_e^{\max}(E_\nu) > T} dE_\nu \phi(E_\nu(T)) \{ \sigma_e(E_\nu, T) P_{ee}(E_\nu(T)) \\ & + \sigma_{\mu,\tau}(E_\nu, T) [1 - P_{ee}(E_\nu(T))] \} \end{aligned} \quad (3.26)$$

计算，其中  $\sigma_e(E_\nu, T)$  和  $\sigma_{\mu,\tau}(E_\nu, T)$  分别是  $\nu_e$  和  $\nu_{\mu,\tau}$  的微分散射截面作为中微子能量  $E_\nu$  和末态电子动能  $T$  的函数<sup>[48]</sup>（见式3.16和图3.5(a)）。图3.8(a)显示了弹性散射过程的末态电子在不同振荡构型下的能谱和未发生中微子振荡的能谱。

同样定义  $R_{\text{ES}}(T)$  为：

$$R_{\text{ES}}(T) = \frac{N_{\text{ES},1}(T) \mid \text{Osci}}{N_{\text{ES},1}(T) \mid \text{No Osci}}, \quad (3.27)$$

这是  $\nu_e$  弹性散射下振荡动能谱 (Osci) 与未发生中微子振荡能谱 (No Osci) 的比率。 $R_{\text{ES}}(T)$  的能谱如3.8(b)所示。

## 3.4 对于太阳中微子的研究优势

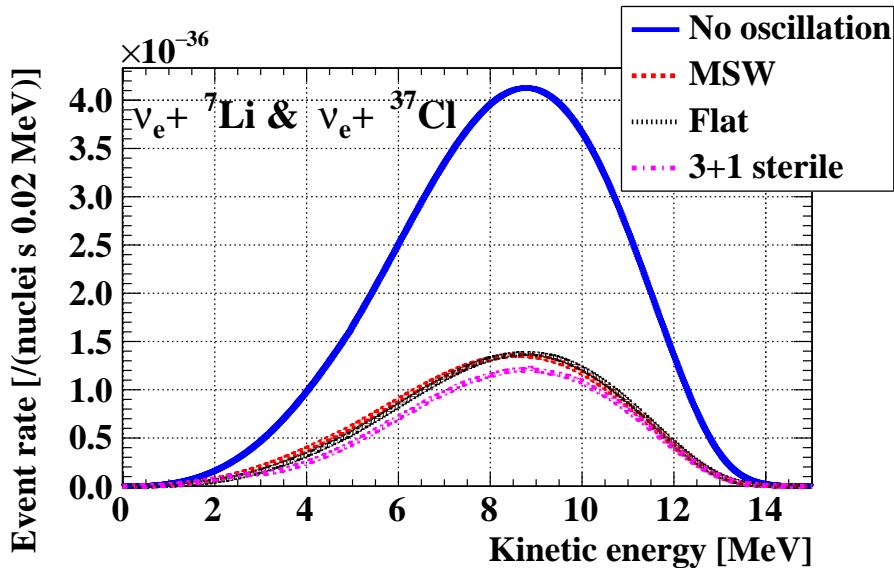
本节将比较 CC 过程和 ES 过程下，概率上升效应效应，轻惰性中微子，以及地球物质效应的信号强度和研究优势。

### 3.4.1 概率上升效应的研究优势

在图3.7(b)中，对于标准三代中微子的 MSW 振荡研究来说，我们可以计算  $R_{\text{CC}}(4 \text{ MeV})$  和  $R_{\text{CC}}(10 \text{ MeV})$  之间的相对差异为：

$$\text{MSW : } \frac{R_{\text{CC}}(4 \text{ MeV}) - R_{\text{CC}}(10 \text{ MeV})}{R_{\text{CC}}(10 \text{ MeV})} = 23\% \quad (3.28)$$

CC 探测过程的结果有着与式3.22中的原始结果一致的信号强度，这是因为确定中微子能量下，不同振荡构型每个能量区间的事例和原始能谱每个能量区间的事例只相差  $P_{ee}(E_\nu(T))$  的比例，如式3.23所示。从图3.7(b)中我们还可以看到，对于平坦的  $P_{ee}$  振荡构型，在  $R_{\text{CC}}(T)$  中和平坦的  $P_{ee}$  振荡构型一样没有有趣的特征，如



(a) 不同振荡构型下的 CC 能谱

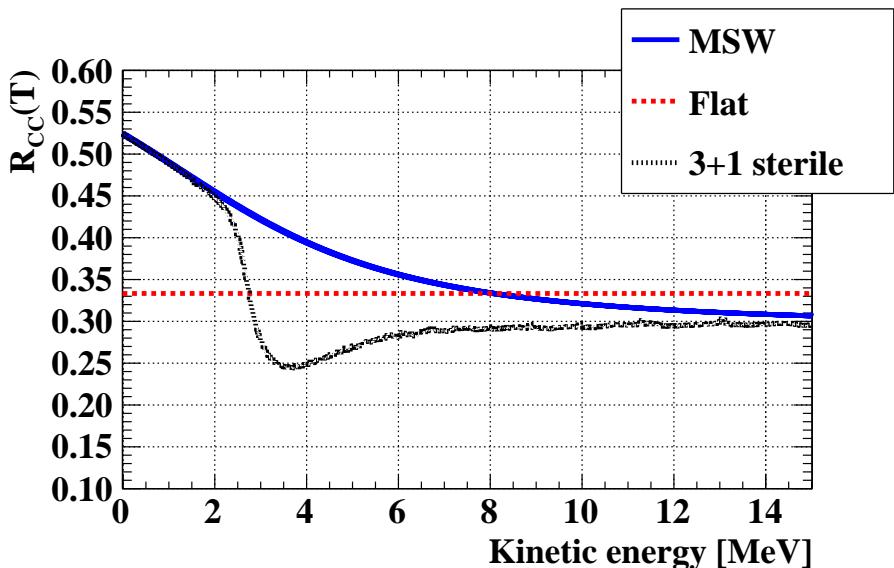
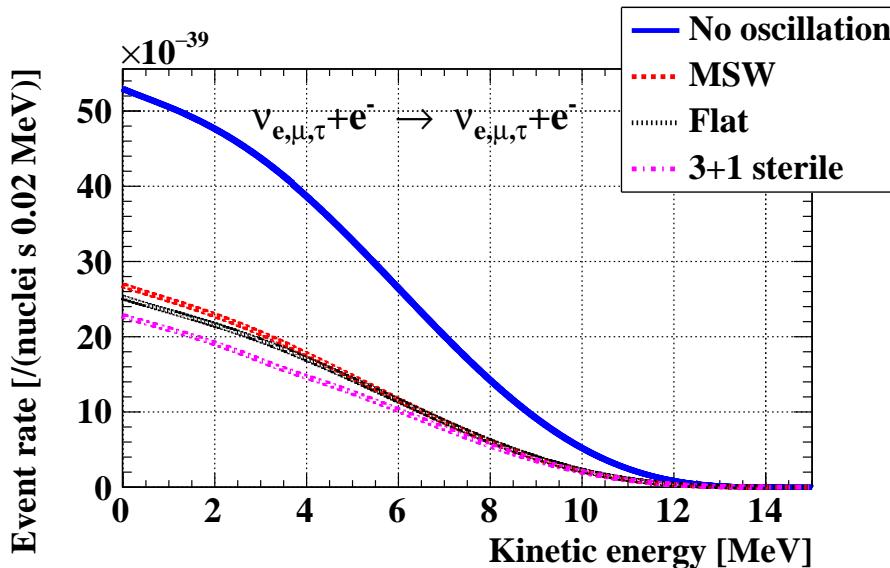
(b) 不同振荡构型下的  $R_{CC}(T)$ 

图 3.7 (a) 在带电流探测过程中, 不同振荡构型的太阳  ${}^8\text{B}$  电子中微子的 CC 事例的末态有效动能能谱。(b) 不同振荡构型下的动能能谱与未发生中微子振荡的动能能谱之比  $R_{CC}(T)$ 。对于轻惰性中微子来说, 混合参数为  $\alpha = 0.021$ ,  $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5}\text{eV}^2$ 。



(a) 不同振荡构型下的 ES 能谱

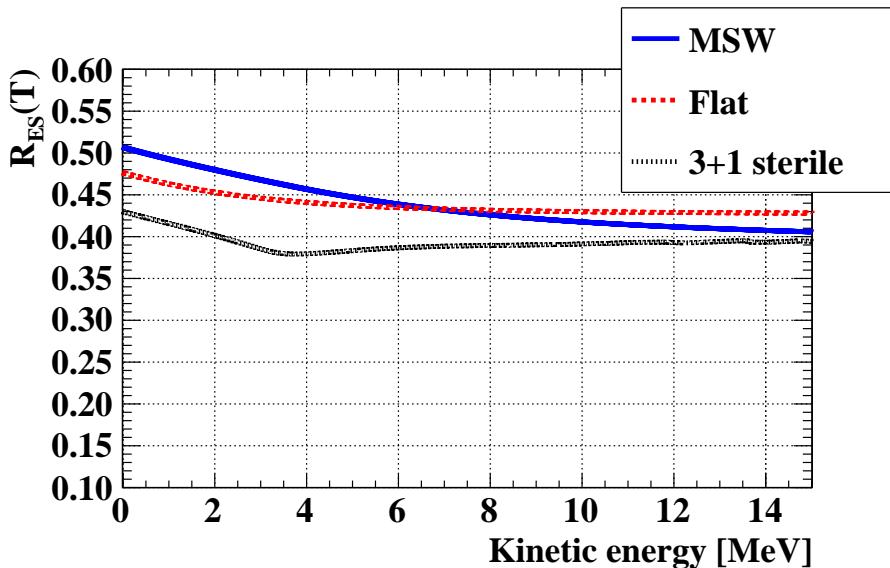
(b) 不同振荡构型下的  $R_{ES}(T)$ 

图 3.8 (a) 在弹性散射探测过程中, 不同振荡构型的太阳  ${}^8\text{B} \nu_e$  和电子反应产生的反冲电子能谱。(b) 不同振荡构型下反冲电子能谱和未发生中微子振荡的太阳  ${}^8\text{B} \nu_e$  和电子反应产生的反冲电子能谱之比  $R_{ES}(T)$ 。对于轻惰性中微子来说, 混合参数为  $\alpha = 0.021$ ,  $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5}\text{eV}^2$ 。

图3.7(b)所示。

相比之下，在图3.8(b)中，对于 MSW 振荡研究， $R_{\text{ES}}(4 \text{ MeV})$  和  $R_{\text{ES}}(10 \text{ MeV})$  的相对差异为：

$$\text{MSW} : \frac{R_{\text{ES}}(4 \text{ MeV}) - R_{\text{ES}}(10 \text{ MeV})}{R_{\text{ES}}(10 \text{ MeV})} = 9.6\%. \quad (3.29)$$

然而，我们注意到，即使对于平坦的存活概率，在  $R_{\text{ES}}(T)$  比率图3.8(b)中也有微小的概率上升效应效应。平坦存活概率下的相对差异为：

$$\text{Flat} : \frac{R_{\text{ES}}(4 \text{ MeV}) - R_{\text{ES}}(10 \text{ MeV})}{R_{\text{ES}}(10 \text{ MeV})} = 2.7\%. \quad (3.30)$$

这是由于水平的  $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu,\tau}$  转化概率会使中微子到达地球时大概有  $1/3 \nu_e$ ,  $2/3 \nu_{\mu,\tau}$ 。当没有  $\nu_{\mu,\tau}$  时， $R_{\text{ES}}$  显然是水平的，当有  $\nu_{\mu,\tau}$  时，由图3.5(a)可知，在越低能量， $\nu_{\mu,\tau}$  会有着更大的贡献，4 MeV 有着比 10 MeV 更大的  $R_{\text{ES}}$ ，导致水平概率依然出现概率上升现象，这是实验带来的，不是本身就存在的，所以需要扣除。扣除之后得到弹性散射过程中，净的概率上升效应为：

$$\text{Net MSW} : 9.6\% - 2.7\% = 6.9\%. \quad (3.31)$$

因此，弹性散射过程的净的信号强度只有 6.9%，这是去除了水平概率导致 2.7% 的概率上升效应后的值，这要远比式3.22和3.28中的概率上升效应效应小。

总之，在 LiCl 水溶液探测器中，LiCl 上带电流过程的概率上升效应信号的强度远大于弹性散射过程的概率上升效应信号的强度。

### 3.4.2 太阳轻惰性中微子的研究优势

以一组轻惰性中微子混合参数  $\alpha = 0.021$ ,  $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$  为例，振荡中微子谱和  $\nu_e$  存活概率  $P_{ee}(E_\nu)$  如图3.6(a)和3.6(b)所示，其中没有考虑地球物质效应，因为地球效应引起的差异对本研究来说并不显著<sup>[148,247]</sup>。在图3.6(a), 图3.7(a)和图3.8(a)中，可以看到在 14 MeV 以上基本没有事例，所以在图2.21(b)和图2.21(d)中，对于 3、4、5 MeV 这三种能量选择条件下，定义地球物质效应的附加贡献为：

$$\alpha = \frac{\int_{E_\nu^{\text{threshold}}}^{14} (P_{ee}^{\text{Night}} - P_{ee}^{\text{Day}}) dE_\nu}{\int_{E_\nu^{\text{threshold}}}^{14} (P_{ee}^{\text{Day}} + P_{ee}^{\text{Night}}) / 2 dE_\nu} \quad (3.32)$$

三种能量选择条件下的附加贡献如表3.2所示。经过计算，惰性中微子情况下的地球物质效应只会对  $P_{ee}$  整体产生 3.6% 以内的贡献。并且惰性中微子情况下白天和夜晚的  $P_{ee}$  的差异，与三代中微子情况下白天和夜晚的  $P_{ee}$  的差异是一致的（见图2.21(b), 图2.21(d)的对比，以及附录A.9.2的讨论）。所以在研究太阳轻惰性中微子模型时，可以不用考虑惰性中微子的地球物质效应。

表 3.2 采用 3、4、5 MeV 三种能量选择条件后，由式3.32定义的地球物质效应，分别在标准三代中微子情况和轻惰性中微子情况下的附加贡献的值。同时计算没有能量选择条件（0 MeV）下的结果用于对比。

能量选择条件	0 MeV	3 MeV	4 MeV	5 MeV
标准三代中微子 (MSW)	1.77%	2.46%	2.73%	3.03%
轻惰性中微子 (Sterile)	1.98%	2.81%	3.15%	3.52%

轻惰性中微子情况下的能谱，以及和原始能谱的比值分别如图3.6(a)和3.6(b)所示，LiCC 和 CICC 带电流过程的动能谱之和如图3.7(a)所示，以及与未发生中微子振荡情况下的动能能谱的比值如图3.7(b)所示。另外，弹性散射过程的反冲电子动能谱及其与未发生中微子振荡情况下的反冲电子动能谱的比值分别如图3.8(a)和3.8(b)所示。

通过这些比较，我们看到图3.6(b)中轻惰性中微子的丰富结构信息，包括下沉和扭动的结构都在带电流过程中被保留，如图3.7(b)所示；然而，在图3.8(b)中，它几乎被弹性散射过程抹平了。这意味着当用带电流通道来搜寻轻惰性中微子，相比于弹性散射道只需要更少的信号统计。

### 3.4.3 地球物质效应的研究优势

在考虑地球物质效应时，按照绝热过程计算三代活跃中微子振荡。然后继续进行地球物质效应的振荡计算。采用多层地球模型<sup>[248]</sup>，并采用分层近似的数值方法计算，见2.5节的讨论。

在图3.9中， $\nu_e$  存活概率  $P_{ee}$  为中微子能量  $E_\nu$  和由探测时间（即太阳和地球的相对位置）确定的太阳中微子的天顶角  $\cos(\theta_Z)$  的函数。对于穿过地球的中微子， $\cos(\theta_Z)$  为负。 $\cos(\theta_Z) = -0.84$  对应于地幔地核分界的古登堡界面（见A.2.2节的讨论）。 $-0.84 < \cos(\theta_Z) < 0$  区域对应于中微子穿过地幔的情况， $-1 < \cos(\theta_Z) < -0.84$  区域对应于中微子先后穿过地幔-地核-地幔的情况。在地幔区域，即 $-0.84 < \cos(\theta_Z) < 0$  区域，可以看到许多交替出现的辐射状黄线和绿线，每条辐射状黄线或绿线对应一个大致恒定的  $\cos(\theta_Z)/E_\nu$ ，即  $L/E_\nu$ ，其中  $L$  是中微子穿过地球的路径长度。当中微子经过地核时，中微子先后穿过地幔-地核-地幔，使得 $-1 < \cos(\theta_Z) < -0.84$  的区域出现了更为复杂的结构。这是因为只穿过地幔时，可以近似为穿过常数密度的物质，在  $\nu_e$  存活概率中，只有一种振荡模式（见A.9.2节的讨论），这种振荡模式的相位和  $\cos(\theta_Z)/E_\nu$  成正比，在图3.9中有着相同  $\cos(\theta_Z)/E_\nu$  的辐射状线条上，都有着大致相同的振荡相位，所以呈现出大致相同颜色。但是当中微子穿

过地核时，中微子先后经过地幔-地核-地幔，大致有着三种振荡模式共同在起作用（见A.9.2节的讨论），所以振荡图样更为复杂。更多细节可在参考文献<sup>[249-250]</sup>中找到。

利用 LiCl 上的带电流过程，获得了每个太阳角的动能谱，如式3.23所示。图3.10中显示了  $R_{CC}$  作为动能  $T$  和  $\cos(\theta_Z)$  函数的二维图像。图3.11是对于弹性散射过程  $R_{ES}$ （在等式3.27中定义）作为动能  $T$  和  $\cos(\theta_Z)$  函数的二维图像。

通过图3.10和图3.11的对比，我们可以得出以下结论：

第一，图3.9中的原始丰富的地球结构纹路在 CC 图3.10中被很好地保留，但是在弹性散射图3.11中，我们可以看到，在  $6 \text{ MeV} < T < 12 \text{ MeV}$  这一能量区间中，原始丰富的地球结构纹路，包括  $-0.84 < \cos(\theta_Z) < 0$  交替出现的辐射状黄线和绿线，以及  $-1 < \cos(\theta_{\text{Sun}}) < -0.84$  更为复杂的结构几乎被抹除。

第二，在中微子概率图3.9的  $6 \text{ MeV} < E_\nu < 12 \text{ MeV}$  区域中最容易看到这些结构，并且带电流的有效动能谱和弹性散射的电子动能谱均在这段能量区间具有较多的统计数据，如图3.7(a)和图3.8(a)所示。当中微子穿过地球，在  $6 \text{ MeV} < T < 12 \text{ MeV}$  这一能量区间中， $R_{CC}$  的范围在  $0.312 \sim 0.387$ ，而  $R_{ES}$  的范围在  $0.417 \sim 0.450$ ，由变化 0.075 下降为变化 0.033%，相对变化由 21.5% 下降为 7.6%，信号强度减弱。

第三，在 ES 图中高于 10 MeV 的区域尽管存在一些残留结构，如图3.11所示，但是弹性散射信号的统计值较低，如图3.8(a)所示。

总之，带电流过程相比于弹性散射过程更有助于探测到地球物质效应。

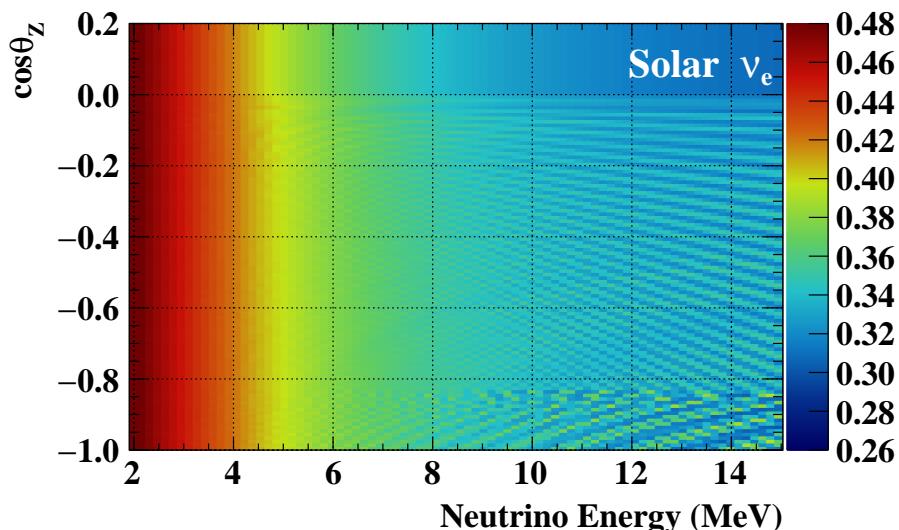


图 3.9 太阳  ${}^8\text{B} \nu_e$  的存活概率关于中微子能量和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值的二维函数图像，对于中微子穿过地球的情况， $\cos(\theta_Z) < 0$ 。

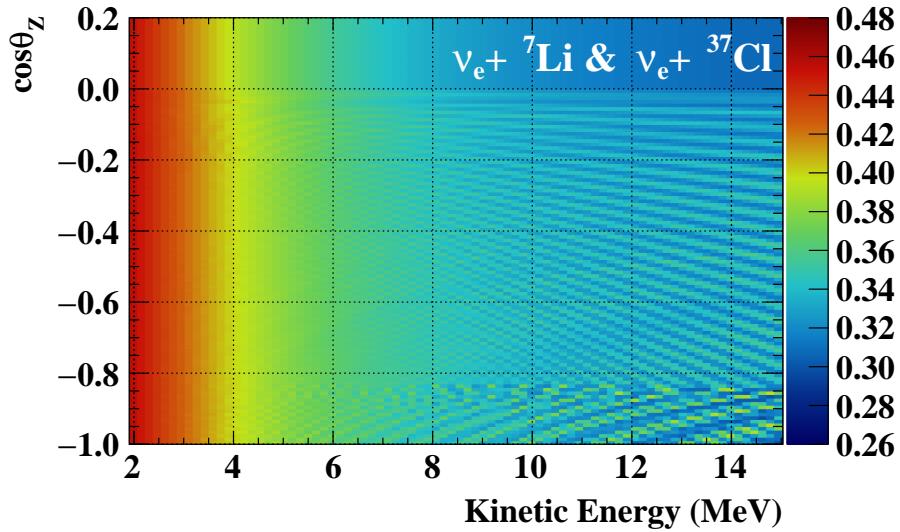


图 3.10 带电流探测过程中，MSW 振荡下 CC 的事例率和未发生中微子振荡的事例率之比，即  $R_{CC}$ ，关于末态有效动能和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值的二维函数图像。

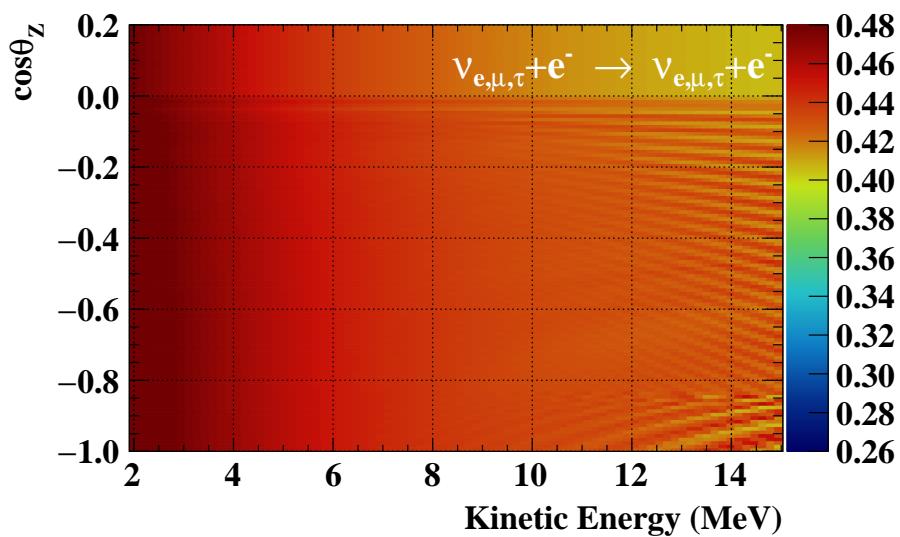


图 3.11 弹性散射探测过程中，MSW 振荡下的事例率和未发生中微子振荡的事例率之比，即  $R_{ES}$ ，关于反冲电子动能和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值的二维函数图像。

### 3.5 本章小结

本章详细讨论了太阳中微子在 LiCl 水溶液中带电流过程和弹性散射这两种重要的探测过程，对于  ${}^8\text{B}$  中微子，LiCC 总截面约为 ClCC 总截面的 3.5 倍，约为 ES 过程总截面的 60 倍。

带电流下中微子能量和反冲电子能量一一对应，所以中微子能谱相关的信息能够得到很好的保留。但是弹性散射作为多个重要的中微子实验所采用的主要探测过程，对于每一个入射的中微子能量都会存在一个平台状的反冲电子的能谱结构，如图3.5(a)所示。原始中微子能谱需要卷积上平台状的反冲电子的能谱（式3.26）才能得到实际的动能谱（图3.8(a)），这使得原始能谱中很多能量相关的信息模糊了，从而带电流过程在能量相关的太阳中微子物理中有着巨大优势。

在概率上升效应方面，给出了概率上升效应的定量公式（式3.22），LiCl 的带电流保留了原始能谱 23% 的概率上升效应（式3.28），而弹性散射探测过程中只有 6.9%（式3.31）的上升效应。在轻惰性中微子研究方面，同样下沉和扭动的结构在带电流的能谱图中得到很好的保留，但是在弹性散射能谱图中这些结构信息也减弱了。在地球效应研究方面，由于中微子对于不同天顶角和不同能量有着不同的振荡相位，使得中微子存活概率关于天顶角和能量的二维图出现振荡纹路，这些纹路反映了中微子沿途中的密度信息，这些纹路在带电流探测过程中同样得到保留，但是在弹性散射探测过程中被抹平了绝大部分，信号强度的相对变化由 21.5% 下降到 7.6%。综上所述，带电流探测过程在以上能量相关的太阳中微子物理中，相比于弹性散射过程均能够发挥更大优势。

## 第4章 氯化锂水溶液探测器性质分析

氯化锂带电流探测过程相比于弹性散射过程，在能量相关的太阳中微子物理中有着更高的信号强度。这启发我们设计一个基于氯化锂水溶液的切伦科夫探测器方案，并给出这一方案的性质预期。

在本章中，将介绍氯化锂水溶液的性质，同时计算 LiCl 水溶液中的  ${}^7\text{Li}$ 、 ${}^{37}\text{Cl}$  和  $e^-$  的摩尔浓度，以及探测到的太阳中微子的预期事例率。同时锦屏实验将部署北方夜视生产的新型光电倍增管，本章还将验证新型光电倍增管有着高能量分辨和高量子效率的特点。随后提出了一个小型的 LiCl 水溶液探测器方案和相应的探测器属性，如能量分辨率，角度分辨率，探测阈值和基准体积等。最后基于这些预期属性给出事例的判选条件。

### 4.1 氯化锂水溶液的性质

LiCl 盐成本低，无色、无味、易燃、无毒<sup>[202]</sup>。在室温下可以容易地获得具有高  ${}^7\text{Li}$  摩尔浓度的 LiCl 水溶液。室温下 LiCl 饱和水溶液的密度测量约为 1.2 g/mL。 ${}^7\text{Li}$  的天然丰度为 92.41%<sup>[251]</sup>，而  ${}^{37}\text{Cl}$  的天然丰度为 24.24%。

W. Haxton 曾于 1996 年提出 LiCl 水溶液的衰减长度特别短，不适合做太阳中微子探测器<sup>[200]</sup>，但是在 W. Haxton 的原始文献<sup>[200]</sup>中并没有说明 LiCl 水溶液的制备和光衰减长度的测量细节。最近对 LiCl 水溶液中，光衰减长度为  $50.1 \pm 3.6$  m 的测量结果<sup>[202]</sup>使得 LiCl 水溶液能够作为太阳中微子的水切伦科夫探测器。

LiCl 在水中的溶解度相当高，在 10°C 溶解度为 74.5 g/100 g 水，在 20°C 溶解度为 83.2 g/100 g 水，对应 45.29% w/w LiCl，7.5% w/w Li (w/w 是质量分数)。表 1.5 显示了几种温度下的溶解度<sup>[252]</sup>。

LiCl 在水中的高浓度使得 10 m 半径的球形靶物质依然能够富含足够的 LiCl。而 W. Haxton<sup>[200]</sup>提出的 LiOH 在水中的溶解度远远小于 LiCl。LiOH 水溶液中，LiOH 的浓度对应 5% w/w LiOH，1.5% w/w Li。而且 LiOH 是强碱性，使得玻璃和金属无法作为靶物质的容器。

LiCl 水溶液作为切伦科夫探测介质，还可以添加一些波长位移剂可以显著提高光产额<sup>[253]</sup>，在 LiCl 水溶液中加入波长位移剂可以得到产额可以与切伦科夫光相比的各向同性的闪烁光，从而在提高光产额的同时，又能保持良好的方向重建<sup>[203,254]</sup>。

## 4.2 氯化锂水溶液的事例率预测

根据表1.5中 LiCl 在水中的溶解度，通过简单计算可知，10°C 下的 LiCl 水溶液中， ${}^7\text{Li}$ 、 ${}^{37}\text{Cl}$ 、 $e^-$  的摩尔浓度分别为 11、2.9、610 mol/L，如表4.1所示。然后计算了 LiCl 中 LiCC 探测过程，ClCC 探测过程以及弹性散射探测过程关于太阳  ${}^8\text{B}$  中微子事例率的预测，如表4.1所示。在表中计算了未发生中微子振荡的  ${}^8\text{B}$  中微子谱、振荡谱和振荡谱加上  $T > 4 \text{ MeV}$  和  $T > 5 \text{ MeV}$  的 LiCC、ClCC 和所有带电流信号的积分事例率，以及弹性散射的积分事例率，一并在表4.1中列出。

从表4.1中可以看出，在没有施加能量选择条件下，对于振荡的能谱，带电流事例率与弹性散射事例率之比为 127 : 143， ${}^7\text{Li}$  上  $\nu_e$  的带电流事例率与  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射事例率相当。并且随着  $T > 4 \text{ MeV}$  的能量选择条件的加入， ${}^7\text{Li}$  上  $\nu_e$  的带电流事例率与  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射事例率进一步增强到 119 : 56。 ${}^7\text{Li}$  上  $\nu_e$  的带电流事例率约为  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射事例率的两倍。随着  $T > 5 \text{ MeV}$  的能量选择条件的加入， ${}^7\text{Li}$  上  $\nu_e$  的带电流事例率与  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射事例率进一步增强到 110 : 40。 ${}^7\text{Li}$  上  $\nu_e$  的带电流事例率比  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射事例率的两倍还要多。另外， ${}^{37}\text{Cl}$  上的带电流事例率贡献约 7% 的总 CC 事例率。

总之，如表4.1所示，在提议的 LiCl 水溶液中，带电流（主要是 LiCC）和弹性散射的总事例率相当。而当做了  $T > 4 \text{ MeV}$  或  $T > 5 \text{ MeV}$  的能量选择条件后，带电流事例占据了主导地位。

表 4.1 LiCl 中 LiCC 探测过程，ClCC 探测过程以及弹性散射探测过程关于太阳  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  事例率的预测，表中包括 LiCl 水溶液中  ${}^7\text{Li}$ ， ${}^{37}\text{Cl}$  和  $e^-$  的摩尔浓度，其中 LiCl 浓度为 74.5 g/100g 水，即 10°C 时的饱和溶解度。表中还显示了  $\nu_e$  在  ${}^7\text{Li}$ ， ${}^{37}\text{Cl}$  上的带电流过程以及  $\nu_\alpha$  在  $e^-$  上的弹性散射过程的事例率，这些事例率是通过未发生中微子振荡的  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  能谱<sup>[242]</sup>、振荡谱以及振荡谱加上  $T > 4 \text{ MeV}$  或  $T > 5 \text{ MeV}$  能量选择条件后计算的。关于事例率的所有数据都以 1/100 吨·年为单位。

	${}^7\text{Li}$	${}^{37}\text{Cl}$	所有带电流事例率	$e^-$
摩尔浓度 (mol/L)	11	2.9	NA	610
事例率 (无振荡)	349	26	375	310
事例率 (振荡)	119	8.5	127	143
事例率 (振荡 & $> 4 \text{ MeV}$ )	111	8.5	119	56
事例率 (振荡 & $> 5 \text{ MeV}$ )	102	8.4	110	40

考虑到探测器通常情况下在 20°C 的室温下运行，为了避免沉淀，可以将实际的 LiCl 浓度设置为 15°C 下的值，以便安全运行。在这样的 LiCl 水溶液中，由

表1.5中数据做插值可知 LiCl 溶解度为 78.8 g/100 g,  ${}^7\text{Li}$ 、 ${}^{37}\text{Cl}$  和  $e^-$  的摩尔浓度分别为 11.5、3.0 和 622 mol/L。

### 4.3 北方夜视光电倍增管高量子效率的验证

光电倍增管被用于探测水切伦科夫实验和液闪实验的光子，能够将光子转化为光电子，并且大量倍增产生电信号，所以实验采用的 PMT 对于探测器的能量分辨率十分重要。锦屏二期将部署北方夜视生产的 8 英寸的微通道板（Microchannel Plate, 简称 MCP）PMT, MCP-PMT 和传统的通过内部多个二次发射极产生一系列二次电子来放大信号的 PMT 不同，MCP-PMT 使用微通道板中的电子倍增过程来放大信号，有着尺寸更小，增益更高，以及时间响应更快的优势。尤其是相对于传统 PMT，有着更高的量子效率，我将通过实验来验证这一点。

#### 4.3.1 实验设置和流程

测量 MCP-PMT 的量子效率时，将一只滨松（Hamamatsu）生产的 PMT 和三只北方夜视生产的 PMT 同时放入一个暗箱中，将已知量子效率的滨松 PMT 作为参考 PMT，滨松 PMT 可以起到刻度的作用。暗室由聚苯乙烯板分成四部分，如图4.1所示。实验采用 Wiener EDS 30330p 高压模块来给 PMT 供给高压。皮秒激光器产生的波长为 405 nm 的激光首先通过一个衰减器，然后通过一个分束器分为四路，每一路的末端有一个  $4 \text{ cm}^2$  的扩散板，最终照射到 PMT 光阴极的顶部。PMT 产生的电子触发信号输入模数转换器（Analog-to-Digital Converter, 简称 ADC）中，最终将电信号转化为数字信号在实验室电脑上被分析，实验室电脑也能够远程控制。

每次运行最多可以同时测量四只 PMT，整个测量过程测量十只 MCP-PMT，共分为三批进行：

- 第一批：滨松 PMT+ 三只北方夜视 PMT，
- 第二批：滨松 PMT+ 三只北方夜视 PMT，
- 第三批：四只北方夜视 PMT。

采用一种轮转的测量方法，每批四只 PMT 测量一次后整体逆时针旋转一格，如图4.1所示。每批 PMT 总共轮转四次。这样每只 PMT 能够在每个位置上都测量一遍，从而消除不同测量位置和每次轮转下不同光强的影响。

在每次运行后，都会检查触发率随着时间的变化情况。某次运行过程中四只 PMT 的触发率随着等时间间隔生成的 ROOT 文件编号的变化如图4.2所示。可以看到四只 PMT 的触发率随着时间基本保持不变，这说明了分束器的比例保持稳定。



图 4.1 将一批四只 PMT 放在暗箱中。采用轮转的方式测量夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的量子效率。测量一次后整体逆时针旋转一格，重复测量四次。

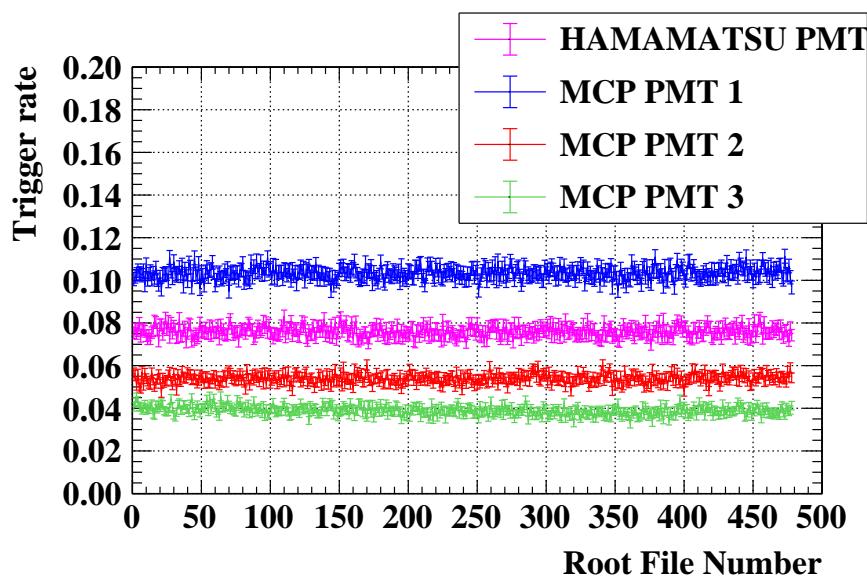


图 4.2 某次运行过程中，四只 PMT 的触发率随着等时间间隔生成的 ROOT 文件编号的变化。

### 4.3.2 实验测量结果和分析

十支 MCP-PMT 的波形的上升时间、下降时间、半高宽的中位数，以及暗噪声计数率，峰谷比和增益，如表4.2所示。MCP-PMT 的平均增益在  $1 \times 10^7$  左右。

在某次运行中，四只 PMT 的信号的电荷分布分别如图4.3(a), 4.3(b), 4.3(c), 4.3(d)所示。三只 MCP-PMT 在单光电子峰后面有着很长的尾巴，这是由于存在一个以上的电子打入的情况，相比之下，滨松 PMT 单光电子峰就很干净，MCP-PMT 的长尾能够提高探测效率(量子效率  $\times$  收集效率)。采用双高斯函数拟合 MCP-PMT 和滨松 PMT 增益谱，拟合区间为增益谱的谷到 300 mV · ns 处：

$$F = A_1 \exp\left(-\frac{(Q - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{(Q - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (4.1)$$

其中只有第一个高斯项对应一个电子打入的情况。可以采用增益谱的谷到 300 mV · ns 处这一区间内，RMS / mean 的值定义 PMT 的能量分辨。从图4.3可知，MCP-PMT 有着更高的能量分辨。

表 4.2 十支 MCP-PMT 的性质，包括波形的上升时间，下降时间，半高宽的中位数，以及暗噪声计数率，峰谷比和增益的测量结果。

PMT 型号	高压 [V]	上升时间 [ns]	下降时间 [ns]	半高宽 [ns]	暗噪声率 [kHz]	峰谷比	增益 [1e7]
PM2107-9017F	1800	4.02	17.7	9.88	85.78	5.71	1.00
PM2107-9012	1768	3.97	16.91	9.75	269.36	4.52	1.05
PM2106-9145	1727	3.78	15.58	9.33	224.86	6.75	1.05
PM2112-2010	1767	3.64	13.86	8.77	42.79	7.73	0.96
PM2112-9089F	1857	3.60	12.43	8.03	225.25	5.33	0.97
PM2107-9029F	1748	3.93	16.6	9.85	120.50	4.96	1.01
PM2106-9103F	1720	4.04	14.53	9.37	330.41	4.25	0.94
PM2112-2002	1720	4.02	13.65	8.95	305.23	4.38	1.01
PM2112-9041F	1720	3.79	14.54	8.81	7.98	4.55	0.84
PM2112-2005	1720	3.73	13.98	8.85	46.49	4.94	1.17

我们得到四只 PMT 的触发率随着位置的变化，如图4.4所示，可以看到，如果以滨松 PMT 作参考，每一只 PMT 的触发率波动很大，这是因为每只 PMT 轮换位置时，光强发生了变化。

假设四次运行中，每次运行的光强为  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )。滨松 PMT 的量子效率

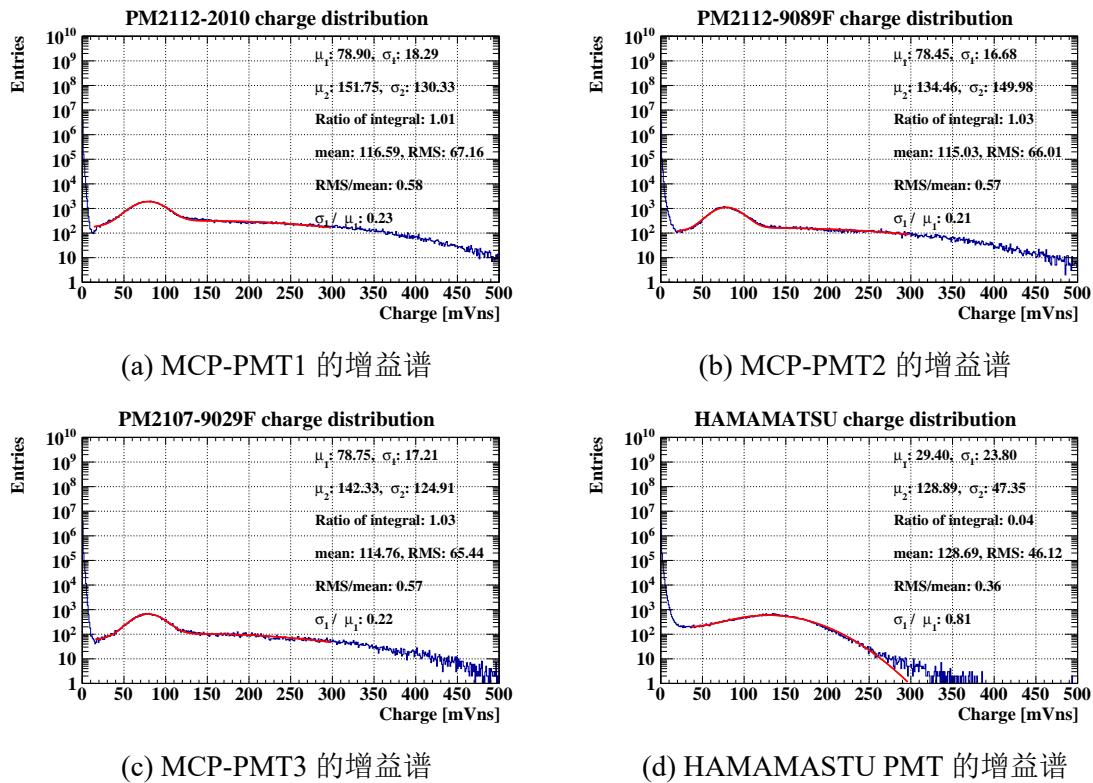


图 4.3 (a) MCP-PMT1 的电荷分布。(b) MCP-PMT2 的电荷分布。(c) MCP-PMT3 的电荷分布。(d) HAMAMASTU PMT 的电荷分布。以上是某次运行下的结果，图中红线是各个 PMT 采用双高斯拟合的结果。

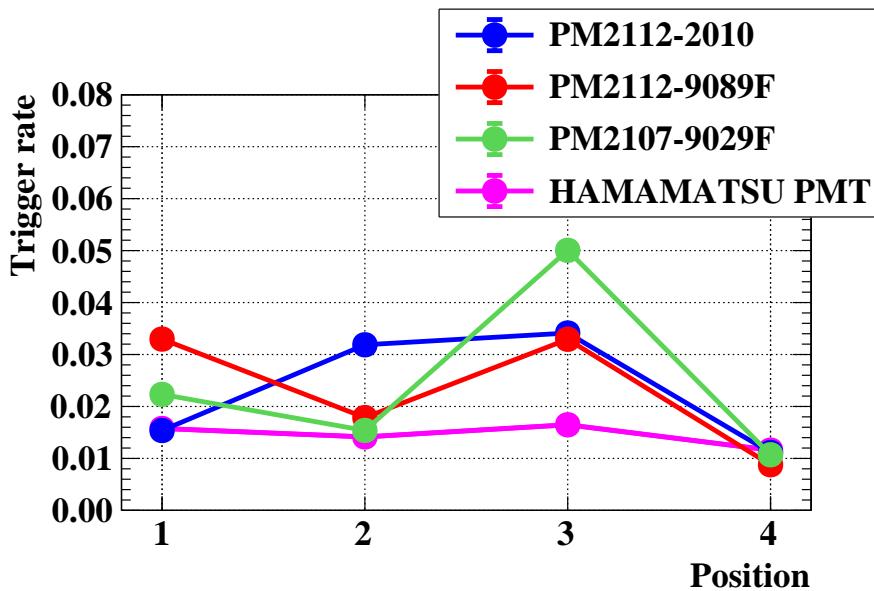


图 4.4 四只 PMT 在四个不同位置的触发率。

设为  $Q_0$ , 这是已知的, 被测量的三只 PMT 的量子效率分别设为  $Q_k (k = 1, 2, 3)$ 。分束器的比例  $\alpha_j (j = 0, 1, 2, 3)$  和 PMT 放置的位置直接相关, 对应图4.1中第  $j + 1$  个位置处的分束器比例。那么测量到的触发率  $R_{jk}^i$  为:

$$R_{jk}^i = \alpha_j Q_k I_i = \frac{\alpha_j Q_k}{\alpha_0 Q_0} (I_i \alpha_0 Q_0). \quad (4.2)$$

$\alpha_j$  之间,  $Q_k$  之间,  $I_i$  之间都存在比例关系, 必须归一化  $\alpha_j$ ,  $Q_k$ ,  $I_i$ 。分束器比例  $\alpha_j$  以滨松 PMT 在第一次运行时, 所在位置 (即位置 1) 的分束器比例  $\alpha_0$  为基准, 归一化后的分束器比例记为  $\alpha_j^0 = \alpha_j / \alpha_1$ 。PMT 量子效率  $Q_k$  以滨松 PMT 的量子效率  $Q_0$  为基准, 归一化后的量子效率  $Q_k^0 = Q_k / Q_0$ 。第  $i$  运行的光强  $I_i$  归一化后为  $I_i^0 = I_i \alpha_1 Q_0$ 。总共有  $4 \times 4$  个形式为式4.2的等式, 4 次光强 +3 个分束器比例 +3 只 PMT 的量子效率共 10 个未知数。方程数大于未知量个数, 方程有解。总的方程式写成矩阵形式可以表示为:

$$AX = R, \quad (4.3)$$

其中 A, X, R 的表达式分别如式4.4, 式4.5, 式4.6所示。

$$A = \left[ \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right], \quad (4.4)$$

$$X = (\ln \alpha_1^0, \ln \alpha_2^0, \ln \alpha_3^0, \ln Q_1^0, \ln Q_2^0, \ln Q_3^0, \ln I_1^0, \ln I_2^0, \ln I_3^0, \ln I_4^0)^T, \quad (4.5)$$

$$R = (\ln R_{00}^1, \ln R_{10}^2, \ln R_{20}^3, \ln R_{30}^4, \dots, \ln R_{33}^1, \ln R_{03}^2, \ln R_{13}^3, \ln R_{23}^4)^T. \quad (4.6)$$

采用 TMinuit 最小化式4.7中的  $f$ :

$$f = \sum_{l=1}^{16} \frac{[(AX)(l) - R(l)^{\text{exp}}]^2}{\sigma_{R(l)}^2}, \quad \sigma_{R(l)} = \frac{\sigma_{R_{jk}^i}}{R_{jk}^i}, \quad (4.7)$$

其中  $\sigma_{R(l)}$  是  $R$  (式4.6) 中第  $l$  个矩阵元  $\ln R_{jk}^i$  的误差,  $\sigma_{R_{jk}^i}$  是  $R_{jk}^i$  的误差。总共有 16 个测量结果, 忽略在不同运行阶段的触发率  $R_{jk}^i$  的相关性。最终  $\alpha_j$ ,  $E_k$ ,  $I_i$  的拟合结果如表 4.3 所示。

表 4.3 归一化参数  $\alpha_j^0$ ,  $Q_k^0$ ,  $I_i^0$  的拟合结果。

归一化参数	拟合结果
$\alpha_1^0$	$8.987 \times 10^{-1} \pm 1.082 \times 10^{-5}$
$\alpha_2^0$	$1.477 \times 10^0 \pm 2.108 \times 10^{-5}$
$\alpha_3^0$	$5.092 \times 10^{-1} \pm 5.300 \times 10^{-6}$
$Q_1^0$	$1.432 \pm 1.606 \times 10^{-5}$
$Q_2^0$	$1.407 \pm 1.570 \times 10^{-5}$
$Q_3^0$	$1.431 \pm 1.599 \times 10^{-5}$
$I_1^0$	$1.491 \times 10^{-2} \pm 1.730 \times 10^{-7}$
$I_2^0$	$1.561 \times 10^{-2} \pm 2.028 \times 10^{-7}$
$I_3^0$	$1.165 \times 10^{-2} \pm 1.425 \times 10^{-7}$
$I_4^0$	$2.320 \times 10^{-2} \pm 2.849 \times 10^{-7}$

从图4.5(a)可知, 夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的相对触发率波动很大, 这正是由于夜视 PMT 和滨松 PMT 在同一位置测量时是在不同的运行阶段, 对应不同的光强。需要去掉不同的运行阶段光强的影响, 去掉光强影响之后的相对触发率如图4.5(b)所示, 稳定在 1.5 上下。

根据滨松 PMT 的量子效率为 20%, 可以推知夜视 PMT 量子效率约为 30%, 和夜视给出的参考值大致相符。采用这种方法测量了另外六只 PMT 的量子效率, 基本都稳定在 30%。

在接下来的探测器方案设计中, 可以假设 PMT 光电阴极覆盖率约为 50%, PMT 光子探测效率(量子效率乘以收集效率)约为 30%。在未来的真实实验中, 必须进行进一步的优化。

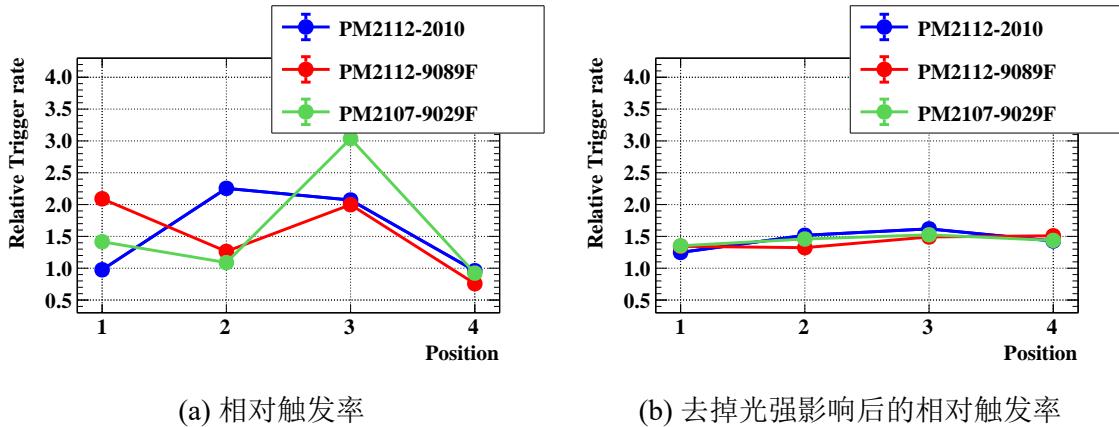


图 4.5 (a) 夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的相对触发率。(b) 去掉光强的影响之后, 夜视 PMT 相对于滨松 PMT 的相对触发率。

## 4.4 探测器方案

根据上述讨论的 LiCl 水溶液的性质, 可以设计一个小型的 LiCl 水溶液的探测器方案, 并讨论 LiCl 水溶液探测器的能量分辨率, 角度分辨率, 本底情况和能量阈值等属性。LiCl 水溶液探测器是探测带电粒子在水中穿过所发出的切伦科夫光, 而 SNO+<sup>[255]</sup> 和 Super-Kamiokande<sup>[10]</sup> 同样是纯水的切伦科夫探测器, 在带电粒子重建的性质上, 和氯化锂探测器是相似的, 所以在讨论这些属性时, 可以根据 SNO+<sup>[255]</sup> 和 Super-Kamiokande<sup>[10]</sup> 这些水切伦科夫实验的经验, 从而给出氯化锂水溶液探测器的预期属性。

### 4.4.1 氯化锂水溶液探测器方案

考虑一个在中国锦屏中微子实验的探测器方案, 包括两个相同的小型探测器。每个探测器的结构类似于 SNO (SNO+) 实验<sup>[11]</sup>。探测器的草图如图 4.6 所示。从外到内, 它由缪子屏蔽区、水缓冲区和中心靶区组成:

- 缪子屏蔽区充满了水, 并配备了光电倍增管来屏蔽宇宙射线缪子和放射性本底。
- 球形水缓冲区进一步屏蔽来自外部的辐射本底, 并装备有大约 3000 ~ 5000 只 8 英寸的 PMT, 以探测来自中心靶区域的光学光子信号。
- 中心靶区充满 LiCl 溶液, 是中微子相互作用的靶物质。

其中, 水缓冲区容器的直径为 14 米。中心靶区装有氯化锂水溶液的亚克力容器的直径是 12 米。注意 LiCl 水溶液对金属有腐蚀性。必须使用玻璃、亚克力、聚四氟乙烯或聚四氟乙烯衬里的容器。在这项工作中, 我们重点研究了来自  ${}^8\text{B} \nu_e$  的信号。

为了减少来自 PMT 和探测器结构的辐射本底, 只有中心基准体积可用于物理

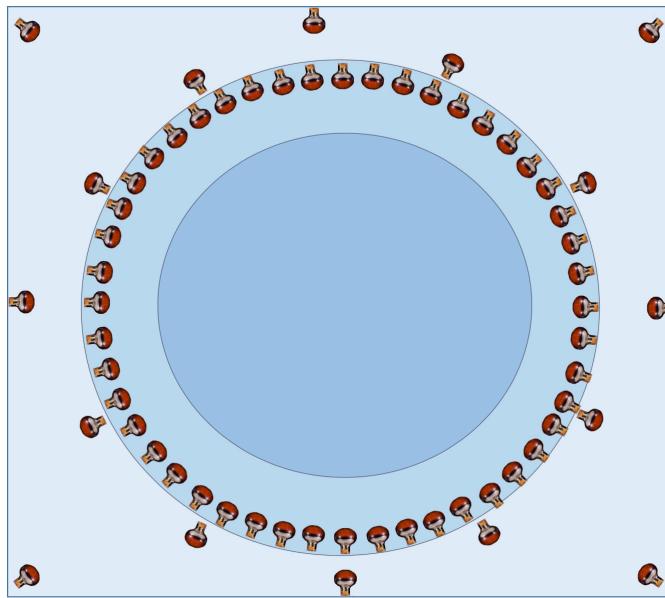


图 4.6 LiCl 溶液中微子探测器示意图。从外向内依次是缪子屏蔽区、水缓冲区和中心靶区。缪子屏蔽区充满了水，并配备了 PMT 来屏蔽宇宙射线缪子和屏蔽放射性本底。水缓冲区进一步屏蔽来自外部的辐射本底，并配备 PMT 探测来自中心靶区的光学光子信号。中心靶区充满 LiCl 溶液，是中微子相互作用靶物质。

研究。因为我们关注能量大于 5 MeV 的信号，所以直径为 8 米的中心球形体积为直径为 12 米的亚克力容器的基准体积。探测器的基准区域是  $268 \text{ m}^3$  或  $320 \text{ ton}$ 。基准体积中  ${}^7\text{Li}$  的总量为  $2.95 \times 10^6 \text{ moles}$  或  $20.6 \text{ ton}$ 。

#### 4.4.2 Super-K 探测器和 SNO (SNO+) 探测器的性质

Super-K<sup>[256]</sup>是一个直径 39.3 m，高度为 41.4 m 的圆柱体探测器，装有 5 万吨超纯水，示意图如图 4.7(a) 所示。

SNO 探测器是一个球形探测器，球形的亚克力容器中装有 1000 吨重水，如图 4.7(b) 所示，十分贴近锦屏百吨探测器的设计<sup>[203]</sup>。

#### 能量分辨

用 PMT 探测来自带电粒子的切伦科夫光信号，粒子的能量分辨率遵循均值为探测到的光电子总数 (PEs) 的泊松不确定性。如果光产额为  $N \text{ PE/MeV}$ ，不确定度就为  $\sqrt{N}$ ，光子数和能量成正比关系，所以能量分辨率  $\sigma(E)/E$  为：

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{1}{\sqrt{NE [\text{MeV}]}}. \quad (4.8)$$

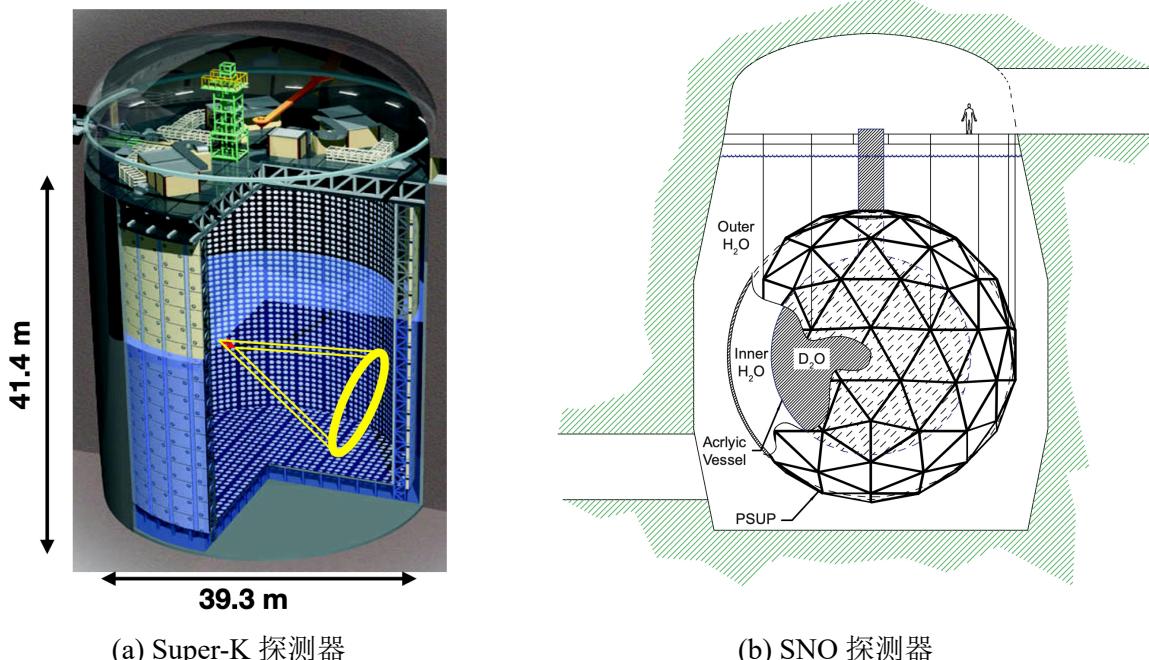


图 4.7 (a) Super-K 探测器的示意图。本图来自于<sup>[19]</sup>。(b) SNO 探测器的示意图。本图来自于<sup>[11]</sup>。

此时高斯型能量分辨函数  $R(E, E_{\text{rec}})$  为:

$$R(E, E_{\text{rec}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(E)} \exp\left(-\frac{(E - E_{\text{rec}})^2}{2\sigma^2(E)}\right), \quad (4.9)$$

其中  $E_{\text{rec}}$  是重建的电子能量,  $E$  是实际电子能量。

若更全面的考虑暗噪声等非统计误差对于能量分辨的影响, 此时产生的光子数和电子能量没有正比关系, 无法应用式4.8得出能量分辨。这种情况下的能量分辨可以参考 Super-K 实验。Super-K 实验通过模拟单能电子在水中发出切伦科夫光<sup>[10]</sup>, 来确定测到的电子动能的不确定度和电子动能之间的关系:

$$\text{SK-I}^{[98]} : \sigma(E) = 0.2468 + 0.1492\sqrt{E} + 0.0690E, \quad (4.10)$$

$$\text{SK-II}^{[21]} : \sigma(E) = 0.0536 + 0.5200\sqrt{E} + 0.0458E, \quad (4.11)$$

$$\text{SK-III}^{[22]} : \sigma(E) = -0.1230 + 0.3760\sqrt{E} + 0.0349E, \quad (4.12)$$

$$\text{SK-IV}^{[10]} : \sigma(E) = -0.0839 + 0.3490\sqrt{E} + 0.0397E. \quad (4.13)$$

当  $E_e$  增加时, 能量分辨率提高, 因为对于更大的  $E_e$ , PMT 探测到的光电子的统计增加。由式4.13可知, SK-IV 探测器能量分辨率从 12.17% (对于  $E_e \simeq 16$  MeV) 到 19.32% (对于  $E_e \simeq 4$  MeV) 不等<sup>[10]</sup>。

SNO 的能量分辨为<sup>[257]</sup>:

$$\text{SNO-I}^{[6]} : \sigma(E) = -0.0684 + 0.3310\sqrt{E} + 0.0425E, \quad (4.14)$$

$$\text{SNO-II}^{[258]} : \sigma(E) = -0.1310 + 0.3830\sqrt{E} + 0.0373E, \quad (4.15)$$

$$\text{SNO-III}^{[100]} : \sigma(E) = -0.2995 + 0.5031\sqrt{E} + 0.0228E. \quad (4.16)$$

SNO 探测器的能量分辨随着电子动能的变化如图 4.8(a) 所示, 一并示出的还有 Super-K 四期的能量分辨随着电子动能的变化以及 5、10、20 PE/MeV 光产额对应的能量分辨。可以看到, Super-K 探测器和 SNO 探测器的能量分辨大致和 5 PE/MeV 光产额对应的能量分辨相当。

经过图 4.8(a) 中不同能量分辨抹平之后的  $P_{ee}$  曲线如图 4.8(b) 所示。在图 4.8(b) 中还示出了原始的  $P_{ee}$  曲线和一种假想的超低光产额对应的能量分辨, 超低光产额对应的能量分辨会使得原始的  $P_{ee}$  曲线抹平成一条直线。而当光产额大于 5 PE/MeV, 不同能量分辨抹平的  $P_{ee}$  曲线差异很小。

由于讨论的物理在过渡区 (2 MeV 以上),  $P_{ee}$  曲线在过渡区是缓慢变化的, 所以能量分辨所带来的差异并不显著。

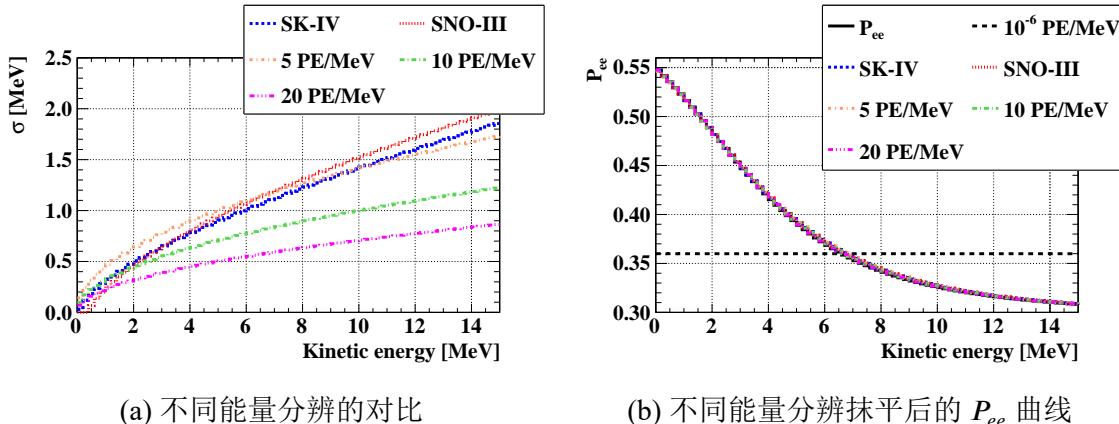


图 4.8 SNO 和 SK-IV 实验, 以及 5、10、20 PE/MeV 光产额对应的能量分辨随电子动能的变化。

## 角度分辨

方向测量在事例重建和本底降低中起着重要的作用。由于电子质量小, 在切伦科夫辐射期间经历多次散射过程。每次多重散射过程都会使电子的方向发生小的偏转, 从而使切伦科夫锥体的方向发生偏转, 这称为多重散射 (Multiple Scattering), 能量越低的电子越容易发生这种散射过程。这种多重散射过程会降低切伦科夫探测器测量电子方向的能力。

在 Super-K 实验中, 定义了一个量——多重散射优度 (Multiple Scattering Goodness, 简称 MSG)<sup>[10]</sup>。经历更多次库仑散射的电子方向重建精度更差, 并且比经历较少次库仑散射的电子有着更低的多重散射优度值, 因此多重散射优度反映了电子方向的重建精度。

对于太阳中微子弹性散射研究, 将重建的末态粒子方向与使用太阳位置计算的太阳方向之间的角度称为太阳角  $\theta_{\text{Sun}}$ , 如图 4.9 所示。角度分辨定义为真实太阳方向周围圆锥中包含 68.3% 的事例的太阳角  $\theta_{\text{Sun}}$ 。SK-IV 的角度分辨与 SK-III 的角度分辨接近<sup>[10,22]</sup>, SK-III 的角度分辨相比于 SK-I 在  $E_e \simeq 10 \text{ MeV}$  处大约提高 10%<sup>[10]</sup>。SK-IV 的角度分辨率从  $20^\circ$  (对于  $E_e \simeq 16 \text{ MeV}$ ) 到  $37^\circ$  (对于  $E_e \simeq 5 \text{ MeV}$ )<sup>[10]</sup>, 当  $E_e$  增加时, 角分辨率提高, 这是由于上述多重散射对于低能电子更经常发生, 高能电子则较少。

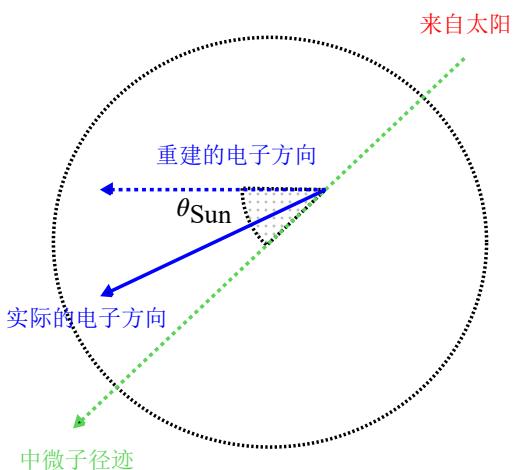


图 4.9 太阳角  $\theta_{\text{Sun}}$  的示意图, 即重建电子的方向和中微子入射方向的夹角, 这与实际电子的方向和中微子入射方向的夹角有所区别。

另外, 在 SNO 实验中<sup>[11]</sup>, 已经能够对于能量大于 5 MeV 的电子, 实现大约  $35^\circ$  (68% C.L.) 的角度分辨。

### 本底情况和能量阈值

Super-K 通过水循环系统, 让供应水的温度高于探测器中水的温度, 发生的对流过程可以排除产生放射性本底的氡气。在 5 MeV 能量阈值下, 本底基本被排除<sup>[10]</sup>。

SNO+<sup>[255]</sup>实验使用了氮气来排除产生放射性本底的氡气, 在这一措施实施之前, 在 5 MeV 的能量选择条件下, SNO 实验除了弹性散射信号外, 还有大量各向同性的本底, 如图 4.10(a) 所示。但是在这一措施实施之后, 在 5 MeV 的能量选择

条件下，弹性散射信号中几乎没有任何本底，如图 4.10(b) 所示。

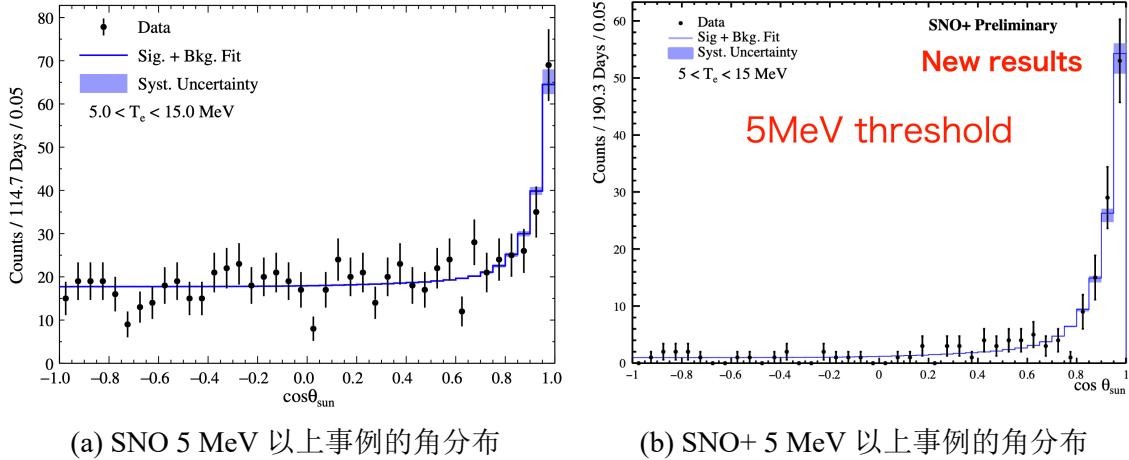


图 4.10 (a) SNO 在使用氦气排除氧气之前，在 5 MeV 的能量选择条件下，除了弹性散射信号外，还有大量各向同性的本底，本图来自于<sup>[259]</sup>。(b) SNO+ 采用氦气排除氧气之后，在 5 MeV 的能量选择条件下，各向同性的本底变得很低<sup>[255]</sup>。本图来自于<sup>[260]</sup>。

#### 4.4.3 氯化锂水溶液探测器属性预期

基于以上对于 SNO+<sup>[255]</sup>和 Super-K<sup>[10]</sup>探测器的能量分辨率，角度分辨率，本底情况和能量阈值等属性的讨论，我们可以分析氯化锂水溶液探测器关于这些属性的预期。

##### 能量分辨

在假定的光电阴极覆盖和 PMT 光子探测效率下，锦屏中微子实验的完整模拟工作<sup>[203]</sup>显示预期的光产额大于 10 PE/MeV，稍微优于 Super-K 和 SNO 的结果，如图4.8所示。光产额 10 PE/MeV 下能量分辨为  $\sqrt{E \text{ [MeV]}/10}$ 。这一能量分辨率对3.3节中 LiCC 谱，ClCC 以及 ES 谱的影响分别如图4.11(a)和图4.11(b)所示。可以看到 CC 能谱发现了些许变形，ES 能谱变化则很小。这是因为 ES 能谱大部分事例集中在能量较低 ( $T < 6 \text{ MeV}$ ) 的区间，这些区间的能量分辨高，CC 谱大部分事例集中在能量较高 ( $T > 6 \text{ MeV}$ ) 的区间，这些区间的能量分辨低。

##### 角度分辨

锦屏中微子实验的完整模拟工作<sup>[203]</sup>显示了与 Super-K<sup>[10]</sup>和 SNO<sup>[11]</sup>的结果一致的角度分辨。对于 5 MeV 以上的电子，约 35° 的角度分辨。能量依赖的角度分辨率可以从 Super-K<sup>[10]</sup>实验中提取出来用于本研究。

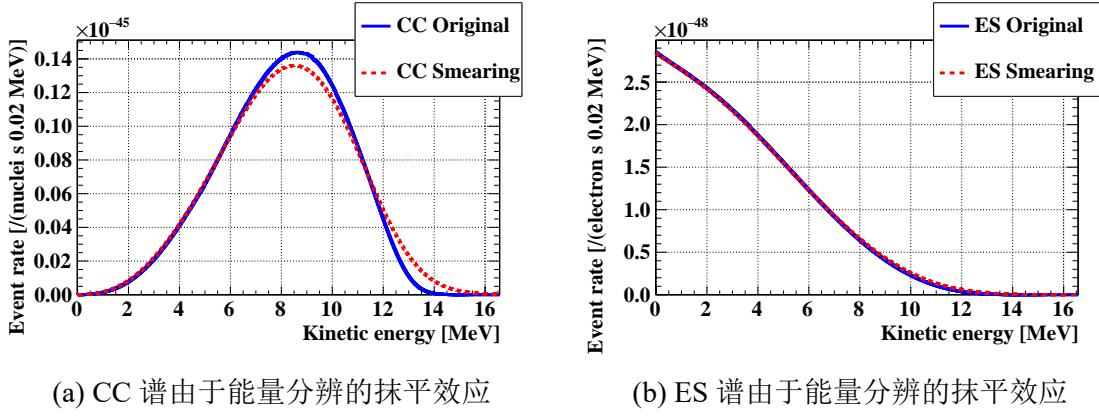


图 4.11 (a) 能量分辨率对 CC 谱的影响。(b) 能量分辨率对 ES 谱的影响。能量分辨率设为  $1/\sqrt{10E}$  [MeV]。

## 本底情况

锦屏地下实验有着比 SNO+ 更深的埋深和更低的宇宙线通量<sup>[120]</sup>，如表1.3和表1.4所示，宇宙线通量达到  $10^{-10}$  [ $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ] 量级。预期锦屏地下实验室能够实现同样的极低本底的实验条件。

## 4.5 事例判选

由以上对氯化锂水溶液探测器属性的预期，给出探测器的能量判选条件和角度判选条件。

### 4.5.1 能量判选条件

如4.4.3所述，锦屏实验在 5 MeV 的能量选择条件下将达到和 SNO 一样极低的本底。

另外，我们还对含有一些闪烁成分的解决方案感兴趣，即水基液体闪烁体，其中闪烁光产量与切伦科夫光相当<sup>[126-127,201]</sup>。这进一步提高了光输出和能量分辨率，并保持了方向重建的类似性能<sup>[203,254]</sup>。除了 SNO+ 的经验以外，我们将在锦屏中微子实验添加闪烁光成分，提高光产额从而实现更高的能量分辨，那么之前由于较低能量分辨而被带入到 4 MeV 以上的本底预计也能够被很好去除。

更进一步，4.3节的测量结果表明，MCP-PMT 有着相比于滨松 PMT 更好的能量分辨和更高的量子效率。考虑到更好的能量分辨率有望抑制低能量区间放射性或仪器本底，我们对于电子的探测阈值甚至有望下探至 3 MeV。

综上所述，下面的模拟研究，除了测试 5 MeV 阈值外，也测试了更乐观的 4 MeV 阈值，甚至 3 MeV 阈值。

### 4.5.2 角度判选条件

LiCC 和 ClCC 过程的反冲电子的角分布, 如这几篇文章指出的<sup>[85,193,200]</sup>, 相对于入射中微子方向接近均匀分布。由于末态退激  $\gamma$  各向同性地发射, 在真实实验中重建的方向分布甚至可以更加均匀, 所以在模拟过程中, 假设带电流过程的末态电子角分布是均匀的。

相反, 来自弹性散射过程的反冲电子倾向于向前的方向, 见3.2.2节的讨论。从 Super-K<sup>[98]</sup>和 SNO+<sup>[255]</sup>结果中提取弹性散射过程中  $\theta_{\text{Sun}}$  的真实分布, 如图4.12所示。相应地, 带电流事例的数量与弹性散射事例的数量的比率根据表4.1中的 5 MeV 事例选择下的 110 : 40 设置。

带电流过程和弹性散射过程中末态电子角分布的差异可用于分离这两种类型的信号<sup>[11,138,201]</sup>。可以对重建的太阳角度采用 60 度的角度选择条件, 即  $\cos(\theta_{\text{Sun}}) = 0.5$ , 来分离弹性散射和带电流信号。经过这一角度判选条件后, 事例被分为了两种样本, 分别是:  $\cos(\theta_{\text{Sun}}) < 0.5$  的事例大部分为 CC 事例, 称这一样本为富集带电流事例的样本, 记作 CC-rich 样本,  $\cos(\theta_{\text{Sun}}) > 0.5$  的事例大部分为 ES 事例, 称这一样本为富集弹性散射事例的样本, 记作 ES-rich 样本。

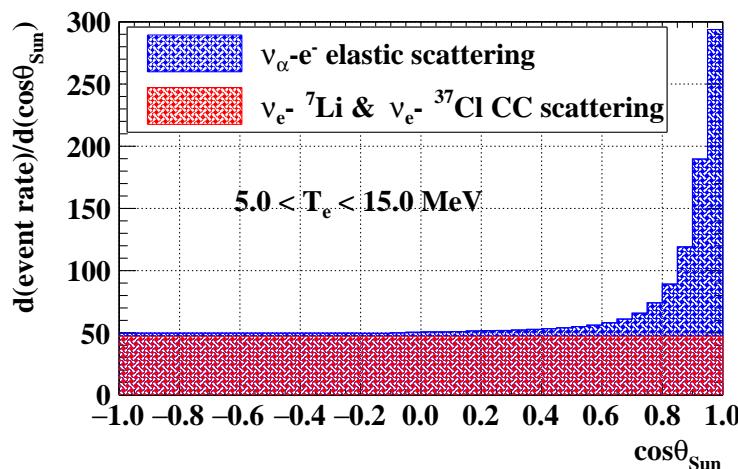


图 4.12 带电流事例率和弹性散射事例率关于重建的太阳角  $\theta_{\text{Sun}}$  的分布,  $T > 5 \text{ MeV}$ ,  $\nu_\alpha$  弹性散射的信号是从文献<sup>[98]</sup>和文献<sup>[255]</sup>提取出来的。 $\nu_e - {}^7\text{Li}$  和  $\nu_e - {}^{37}\text{Cl}$  的 CC 过程假设是均匀的, CC 过程的事例数和 ES 过程的事例数之比由表4.1的最后一列得到。

### 4.5.3 事例判选条件

综上所述, 事例判选条件为:

- 末态有效动能  $T > 5 \text{ MeV}$  (或者选择激进的  $T > 4 \text{ MeV}$  和  $T > 3 \text{ MeV}$ )。
- $\cos(\theta_{\text{Sun}}) < 0.5$  为富集带电流事例的样本 CC-rich,  $\cos(\theta_{\text{Sun}}) > 0.5$  为富集弹

性散射事例的样本 ES-rich。

## 4.6 本章小结

本章在氯化锂水溶液的性质的基础上，详细讨论了氯化锂水溶液探测器的方案和性质，讨论的同时对比了成熟的 Super-K 探测器和 SNO 探测器。我们对氯化锂探测器属性的预期参考了 SNO+<sup>[255]</sup> 和 Super-Kamiokande<sup>[10]</sup> 实验的经验。锦屏中微子实验的完整模拟工作<sup>[203]</sup> 显示预期的光产额大于 10 PE/MeV，略微优于 Super-K 和 SNO 的结果。并且，能量分辨所带来的  $\nu_e$  存活概率曲线的差异并不显著。

另外关于角度分辨，锦屏中微子实验的全探测器模拟工作<sup>[203]</sup> 给出了和上述两个实验一致的角度分辨：对于 5 MeV 以上的电子，约 35° 的角度分辨。能量依赖的角度分辨率分布从 Super-K 实验中提取出来，并用在本研究中。

能量分辨与光电倍增管关系密切，我们测量了即将在锦屏百吨上部署的 MCP-PMT 的一系列性质。相比于滨松 PMT，MCP-PMT 有着能量分辨更高的优点。随后验证了北方夜视生产的 MCP-PMT 的量子效率约为滨松生产的 PMT 的量子效率的 1.5 倍，约为 30%，和夜视给出的参考值相符。

基于预期的氯化锂水溶液探测器的属性，给出了事例判选条件： $T > 5 \text{ MeV}$ （或者选择激进的  $T > 4 \text{ MeV}$  和  $T > 3 \text{ MeV}$ ）， $\cos(\theta_{\text{Sun}}) < 0.5$  为富集带电流事例的样本 CC-rich， $\cos(\theta_{\text{Sun}}) > 0.5$  为富集弹性散射事例的样本 ES-rich。以上设计的氯化锂探测器方案和事例选择条件是之后太阳中微子物理探测灵敏度研究工作的基础。

## 第5章 灵敏度分析方法

我们将基于上一章氯化锂水溶液探测器方案，给出太阳中微子相关的多个物理目标的探测灵敏度。这些物理目标的灵敏度分析方法存在共性的地方，比如关于弹性散射事例的选择效率，系统误差项的形式，以及拟合统计量和拟合方法。这些共性处将在本章一并讨论。

在本章中，首先讨论在4.5.3节中的角度判选条件下，弹性散射事例的选择效率，然后基于 6400 ton-year (320 ton-20 year) 的总曝光和 10 PE/MeV 的光产额，分别给出标准三代中微子和轻惰性中微子两种情况下预期的能谱，作为我们之后的数据集。最后讨论系统误差项和在之后的灵敏度分析中采用的拟合统计量和拟合方法。

### 5.1 弹性散射事例的选择效率

在应用4.5.3节中的角度选择条件  $\cos \theta_{\text{Sun}} < 0.5$  后，我们考察弹性散射事例的选择效率。我们将  $\cos \theta_{\text{Sun}} < 0.5$  的弹性散射事例占总的弹性散射事例的比重记作  $\epsilon_\gamma$ ，那么弹性散射事例的选择效率就是  $1 - \epsilon_\gamma$ ，如图5.3所示。

在 Super-K 实验<sup>[10]</sup>中，考察了不同的多重散射优度 (MSG)，包括  $0.35 < \text{MSG} < 0.35$ ,  $0.35 < \text{MSG} < 0.45$ ,  $\text{MSG} > 0.45$ ，以及不同的电子动能能量的范围  $3.49 \text{ MeV} < T_e < 3.99 \text{ MeV}$ ,  $3.99 \text{ MeV} < T_e < 4.49 \text{ MeV}$ ,  $4.49 \text{ MeV} < T_e < 4.99 \text{ MeV}$ ,  $6.99 \text{ MeV} < T_e < 7.49 \text{ MeV}$ 。根据这些不同的多重散射优度范围和电子动能范围，将弹性散射事例关于  $\cos \theta_{\text{Sun}}$  的能谱分为了 12 个子样本<sup>[10]</sup>，我们从文献<sup>[10]</sup>中的图 20 提取了这 12 个子样本，并且在扣除完本底后又做了归一化，如图5.1所示。一并示出的还有  $\cos \theta_{\text{Sun}} = 0.5$  的角度选择条件，可以看到，弹性散射事例的选择效率依赖于多重散射优度和电子动能范围。

不同多重散射优度下，弹性散射事例的选择效率对电子动能的依赖如图5.2所示。我们参考多重散射优度最大的那条效率随能量变化的趋势线，根据4.4.2的讨论，在这条最大多重散射优度下的趋势线中，电子的方向是偏折最小的，方向性保持的最好，并且方向重建的精度最高。根据这条趋势线做插值，就能得到不同电子动能下的弹性散射事例的选择效率。从图5.2可知，在 5 MeV 以上弹性散射事例的选择效率高达 93.7%。

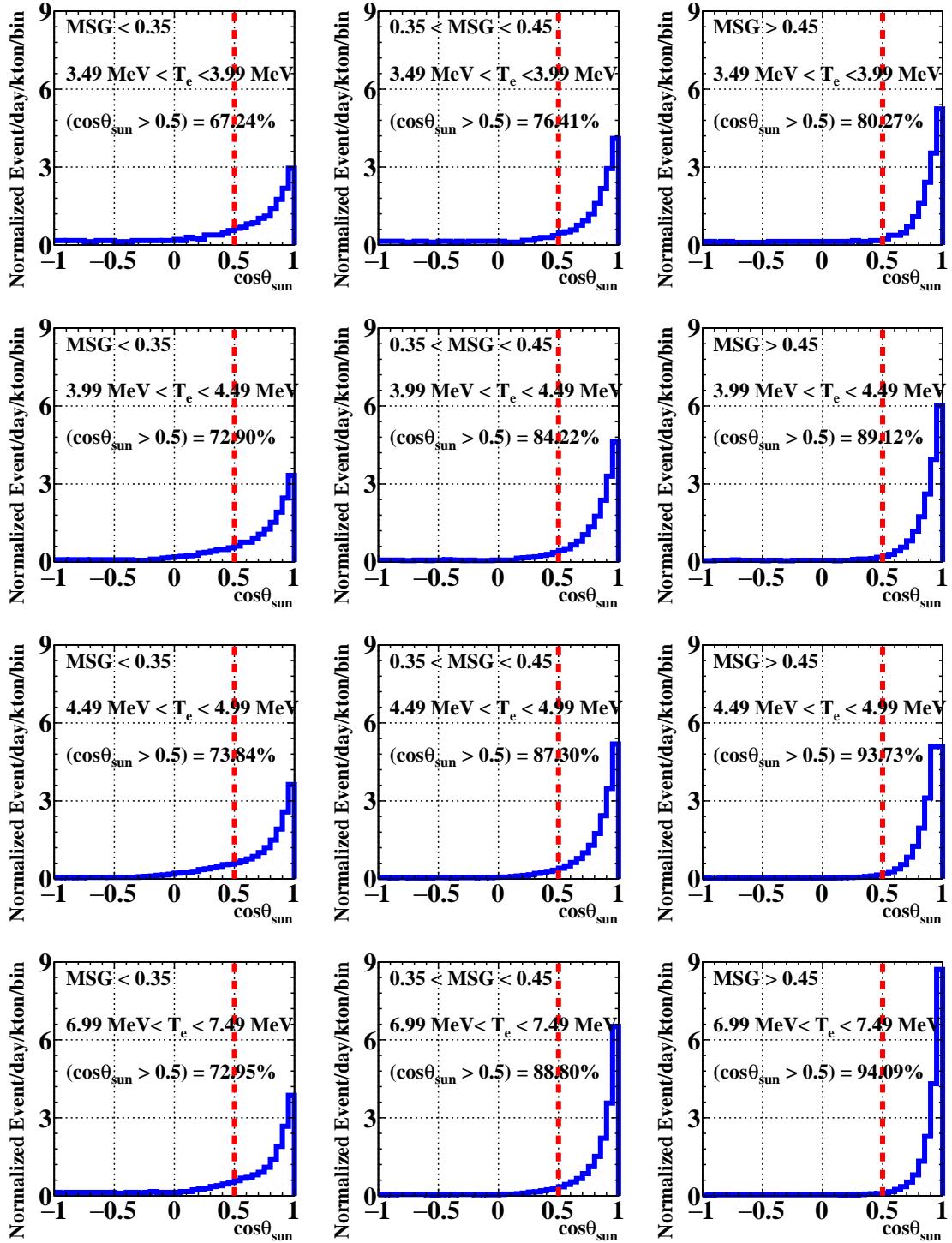


图 5.1 从文献<sup>[10]</sup>提取事例在不同多重散射优度 (MSG) 和电子动能范围内关于  $\cos\theta_{\text{sun}}$  的能谱，并且在扣除完本底后又做了归一化（蓝色直方图）。然后做了  $\cos\theta_{\text{Sun}} = 0.5$  的角度选择条件（红色虚线），得到不同情况下弹性散射事例的选择效率。

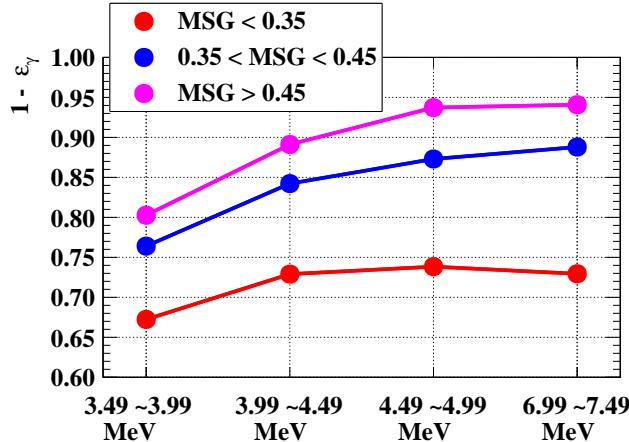


图 5.2 弹性散射事例的选择效率  $1 - \varepsilon_\gamma$  在不同的多重散射优度 (MSG) 随着电子动能范围的变化图。在计算不同能量下弹性散射事例的选择效率时，参考多重散射优度最大的线 (粉线)。

## 5.2 模拟能谱

基于以下三个设置，分别在三代中微子和惰性中微子情况下模拟预期的中微子能谱。

- 6400 ton-year (320 吨探测器，20 年的有效运行时间) 的探测器有效曝光， $10 \text{ PE/MeV}$  的光产额，即  $1/\sqrt{10E [\text{MeV}]}$  的能量分辨率。采用 SNO<sup>[11]</sup>于 2013 年对于  $^8\text{B} \nu_e$  通量的测量结果： $\Phi_{^8\text{B}} = (5.25 \pm 0.20) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ 。
- LiCl 溶液中  $^7\text{Li}$ ,  $^{37}\text{Cl}$ , 以及  $e^-$  的摩尔浓度，如表4.1所示。
- 单个  $^7\text{Li}$  和  $^{37}\text{Cl}$  核探测到的  $^8\text{B} \nu_e$  的能谱3.23以及单个  $e^-$  探测到的  $^8\text{B} \nu_e$  的能谱3.26。

由以上三个条件可以计算 LiCC 过程 (式3.1) 和 ClCC 过程 (式3.4) 的末态有效动能能谱： $N_{\text{LiCC}}$  和  $N_{\text{ClCC}}$ ，同样是末态有效动能  $T$  的函数 (定义见式3.3)，计算如下：

$$N_{\text{LiCC or ClCC}}(T) = t N_{\text{Li or Cl}} N_{\text{LiCC or ClCC}, 1}(T), \quad (5.1)$$

其中  $N_{\text{Li or Cl}}$  是 LiCl 水溶液中  $^7\text{Li}$  or  $^{37}\text{Cl}$  的核子数。 $N_{\text{LiCC}, 1}$  和  $N_{\text{ClCC}, 1}$  分别对应单个  $^7\text{Li}$  和单个  $^{37}\text{Cl}$  上的末态有效动能能谱 (式3.23)。 $t$  是探测器有效运行时间。LiCC 和 ClCC 有着十分相近的探测阈值 (见式3.3和式3.5)，那么所有 CC 事例的能谱为 LiCC 和 ClCC 的末态有效动能之和：

$$N_{\text{CC}}(T) = N_{\text{LiCC}}(T) + N_{\text{ClCC}}(T). \quad (5.2)$$

ES 过程 (式1.20) 的反冲电子动能能谱则为：

$$N_{\text{ES}}(T) = t N_e N_{\text{ES}, 1}(T), \quad (5.3)$$

其中  $N_e$  是 LiCl 水溶液中电子的数量。 $N_{ES,1}$  对应单个电子上的末态电子动能能谱（式3.26）。

将式4.9中的高斯能量分辨函数应用于式5.2得到的  $N_{CC}(T)$  和式5.3得到的  $N_{ES}(T)$  中，如式5.4所示：

$$\begin{aligned} N_{CC}(E_{rec}) &= N_{CC}(T) \otimes R(T, E_{rec}), \\ N_{ES}(E_{rec}) &= N_{ES}(T) \otimes R(T, E_{rec}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

根据式5.4，CC（包括 LiCC 和 ClCC）和 ES 过程的相应的能谱  $N_{CC}(E_{rec})$  和  $N_{ES}(E_{rec})$  就可以得到，如图5.4所示。一并示出的还有  $N_{LiCC}(E_{rec})$  和  $N_{ClCC}(E_{rec})$ 。

可以将 CC 能谱和 ES 能谱分成若干个 1 MeV 区间，每个区间中的事例数用  $N_{CC,i}$  或  $N_{ES,i}$  表示，其中  $i$  是区间编号，第  $i$  个区间的事例数为  $N_{CC,i}$  或  $N_{ES,i}$ 。

根据 Super-K<sup>[10]</sup> 和 SNO+<sup>[255]</sup> 对于弹性散射电子太阳角的测量，应用弹性散射的角度选择条件  $\cos\theta_{Sun} > 0.5$  之后，获得了具有  $\varepsilon_\gamma$  的弹性散射事例和 75% 的带电流事例的富含带电流事例的样本 CC-rich，以及具有  $1 - \varepsilon_\gamma$  的弹性散射事例和 25% 的带电流事例的富含弹性散射事例的样本 ES-rich，如图5.3所示。这两种样本的事例数如式5.5表示。

$$\begin{aligned} N_{CC\text{-rich},i} &= N_{CC,i} 75\% + N_{ES,i} \varepsilon_\gamma, \\ N_{ES\text{-rich},i} &= N_{CC,i} 25\% + N_{ES,i} (1 - \varepsilon_\gamma). \end{aligned} \quad (5.5)$$

从图5.2可知，平均而言， $\varepsilon_\gamma$  约为 10%，如图5.3所示。

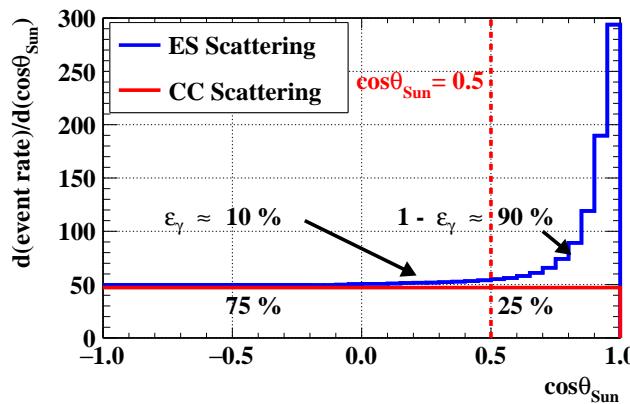


图 5.3 应用弹性散射的角度选择条件  $\cos\theta_{Sun} > 0.5$  之后，从而分离带电流事例和弹性散射事例。

在  $T > 4$  MeV 的能量选择条件下，没有振荡情况，没有做角度选择条件的 LiCC, ClCC, ES 能谱图如图5.4所示。三代中微子振荡（MSW）下，经过能量分辨函数4.9卷积，以及在  $T > 4$  MeV 能量选择条件和  $\cos(\theta_{Sun}) < 0.5$  角度选择

条件之后的 CC-rich 和 ES-rich 能谱分别如图5.5(a)和图5.5(b)所示。其中，在原始 0.02 MeV/能量区间 的基础上，以每 1 MeV 重新划分了能量区间。每个区间中的事例数用  $N_{CC,i}$  或  $N_{ES,i}$  表示，其中  $i$  是区间编号，从而得到预测的  $N_{CC\text{-rich},i}$  (图5.5(a)) 和  $N_{ES\text{-rich},i}$  (图5.5(b))。一并示出的还有 CC-rich 和 ES-rich 中各自的 LiCC、ClCC、ES 成分。

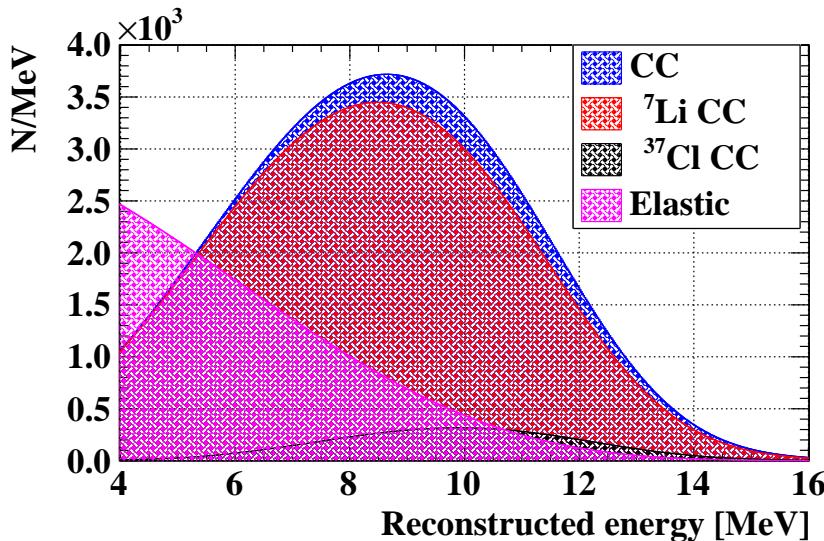


图 5.4 没有振荡情况，没有做角度选择条件的 CC (蓝色), LiCC (红色), ClCC (黑色), ES (粉色) 等信号的能谱图，基于 6400 ton-year 和  $1/\sqrt{10E} [\text{MeV}]$  的能量分辨。

水平概率  $P_{ee} = 1/3$  情况下， $N_{CC\text{-rich},i}$  和  $N_{ES\text{-rich},i}$  分别如图5.5(c)和图5.5(d)所示。水平概率情况下的 CC-rich 和 ES-rich 能谱和三代中微子情况下对应的能谱在过渡区 4 ~ 10 MeV 存在显著差异，可以预期氯化锂水溶液探测器对于无概率上升效应有排除能力。

轻惰性中微子情况下， $N_{CC\text{-rich},i}$  和  $N_{ES\text{-rich},i}$  分别如图5.5(e)和图5.5(f)所示。对比于三代中微子情况对应的图5.5(a)和图5.5(b)，可以看到轻惰性中微子情况下带电流信号的能谱和弹性散射信号的能谱均有在 4 ~ 10 MeV 有事例数明显下降的现象，对应1.11(d)中  $P_{ee}$  概率下沉的结构，但是没有出现扭动的结构，这是因为 MeV 量级的能量分辨所导致的。

在 CC-rich 样本中，CC 事例是信号，ES 事例是本底；在 ES-rich 样本中，ES 事例是信号，CC 事例是本底。定义信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, 简称 SNR) 为：

$$\text{SNR} = \begin{cases} N_{CC}/N_{ES} & (\text{对于CC-rich样本}), \\ N_{ES}/N_{CC} & (\text{对于ES-rich样本}). \end{cases} \quad (5.6)$$

如表5.1所示，在经过了角度选择条件之后以及 4 MeV 能量选择条件后，CC-rich 样

本在标准三代中微子情况（图5.5(a)），水平振荡情况（图5.5(c)），轻惰性中微子情况（图5.5(e)）的信噪比在 16 左右，而未做角度选择条件下的样本的信噪比约为 2。可见，做了角度选择条件下的带电流样本均有着比未做角度选择条件下的带电流样本（图5.4）更好的信噪比，如表5.1所示。

表 5.1 采用  $\cos \theta_{\text{Sun}} = 0.5$  的角度选择条件后以及 4 MeV 能量选择条件后，标准三代中微子情况下 (MSW)，水平概率  $P_{ee} = 1/3$  情况下 (Flat)，以及轻惰性中微子情况下 (Sterile)，CC 事例数和 ES 事例数之比，以及 CC-rich 和 ES-rich 两种样本下的信噪比。

	CC : ES	CC-rich	ES-rich
标准三代中微子 (MSW)	2.15	16.1	1.68
水平概率 (Flat)	2.14	16.0	1.68
轻惰性中微子 (Sterile)	2.09	15.6	1.72

## 5.3 系统误差的处理

在灵敏度分析中，系统误差主要来自于三个方面，分别是带电流截面的误差，记为  $\eta_\sigma$ ；弹性散射事例选择效率的误差，记为  $\eta_\epsilon$ ；以及高低金属丰度和探测器基准质量所带来的归一化误差，记为  $\eta_{\text{Norm}}$ 。

### 5.3.1 带电流截面误差

考虑带电流截面的误差  $\eta_\sigma$  时，可以考虑中微子-镓的通量校准实验，这个实验通过将探测器暴露于人造  $^{51}\text{Cr}$  中微子源<sup>[58,244-245]</sup>。测量了逆  $\beta$  衰变  $^{71}\text{Ga}(\nu_e, e^-)^{71}\text{Ge}$  的截面值为  $[5.55 \pm 0.60 \text{ (stat)} \pm 0.32 \text{ (syst)}] \times 10^{-45} \text{ cm}^2$ ，和理论预测的比值的误差为  $0.95 \pm 0.12 \text{ (experiment)}^{+0.035}_{-0.027} \text{ (theory)}^{[245]}$ 。在最近的 BEST (Baksan Experiment on Sterile Transitions) 实验中<sup>[261]</sup>，测量到的  $^{71}\text{Ga}(\nu_e, e^-)^{71}\text{Ge}$  截面为  $[5.69^{+0.28}_{-0.06}] \times 10^{-45} \text{ cm}^2$ ，约 2.99% 的不确定度。所以在将来，可以预期带电流截面的不确定度达到 2%，我们可以将接下来模拟研究中带电流截面的不确定度定为 2%。

### 5.3.2 弹性散射事例选择效率误差

目前实验通过电子的刻度技术能够将弹性散射事例选择效率的误差达到 1%，但是这对于进入 CC-rich 的弹性散射事例来说，误差将会达到  $1\% / 10\% = 10\%$ ，如图5.3所示，所以  $\epsilon_\gamma$  的误差  $\eta_\epsilon$  需要定为 10%，弹性散射事例选择效率误差为  $1 - \epsilon_\gamma(1 + \eta_\epsilon)$ 。

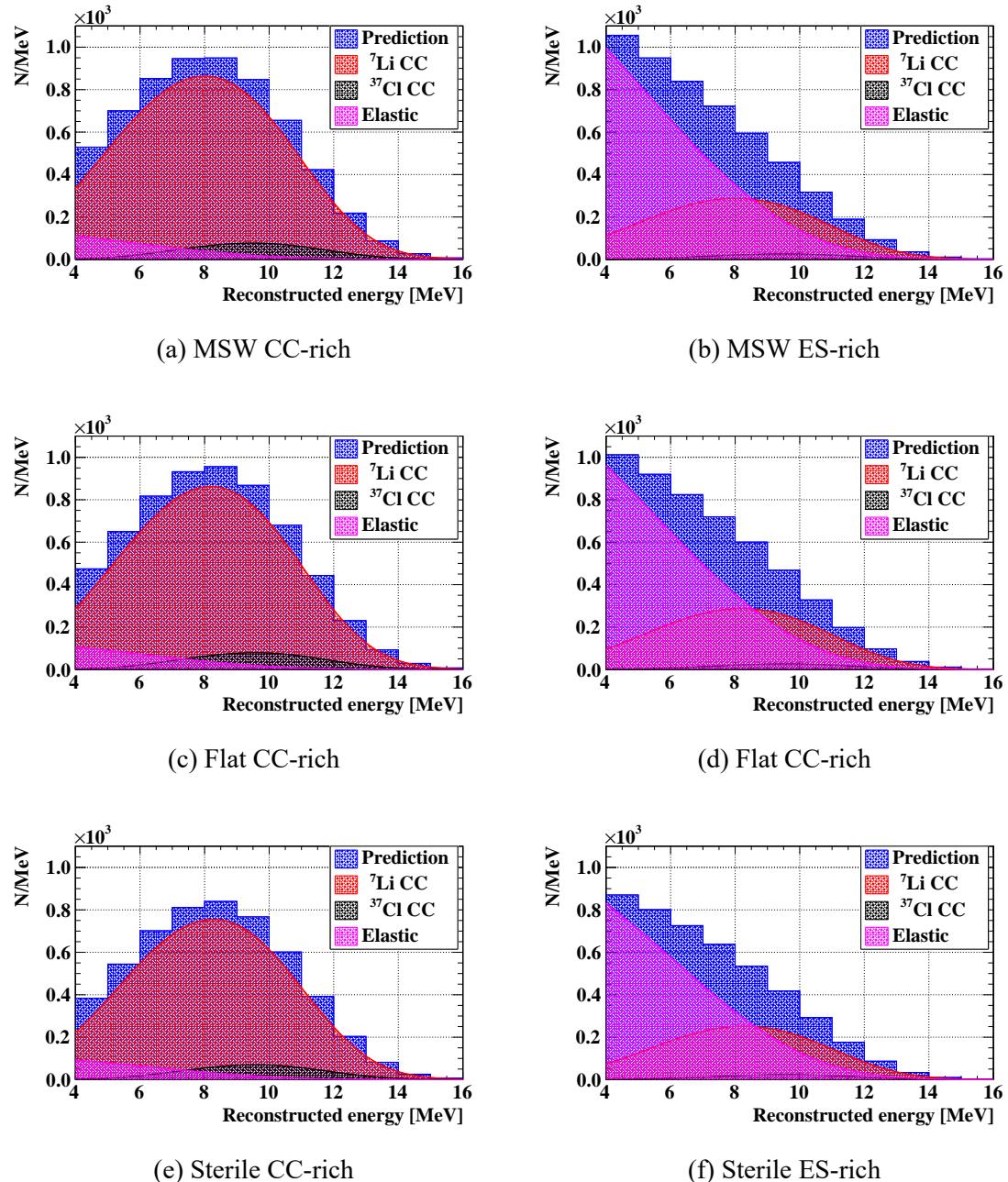


图 5.5 (a) MSW 振荡下, 带电流富集 CC-rich 的能谱。(b) MSW 振荡下, 弹性散射富集 ES-rich 的能谱。(c) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  情况下带电流富集 CC-rich 的能谱。(d) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  情况下弹性散射富集 ES-rich 的能谱。(e) 轻惰性中微子情况下带电流富集 CC-rich 的能谱。(f) 轻惰性中微子情况下弹性散射富集 ES-rich 的能谱。惰性中微子混合参数选取为  $\alpha = 0.021$ ,  $\Delta m_{01}^2 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ 。以上 LiCl 探测器的曝光量设置为 6400 ton-year, 水溶液中 LiCl 浓度假定为 78.8 g/100 g 水。

### 5.3.3 靶质量、取数时间、中微子通量总误差

目前关于决定中微子通量的太阳标准模型到底是高金属丰度还是低金属丰度还没有一个定论，如图1.7所示。在B16模型<sup>[89]</sup>中，无论是高金属丰度，还是低金属丰度， ${}^8\text{B} \nu_e$  通量的不确定度都为12%，如表1.1所示。太阳标准模型中关于 ${}^8\text{B} \nu_e$  通量的误差过大，我们还可以采用SNO ${}^8\text{B} \nu_e$  通量的测量值。

根据地面实验的测量结果<sup>[262-263]</sup>，在本研究中感兴趣的能区中的 ${}^8\text{B}$  中微子能谱，其理论误差非常小，所以理论能谱的不确定性在本研究中被忽略。

除此以外，探测器基准质量也存在不确定度，统称为归一化误差。所以归一化误差  $\eta_{\text{Norm}}$  包括高低金属丰度的不确定度<sup>[264]</sup>和基准质量的影响。

在太阳中微子振荡参数和轻惰性中微子参数的灵敏度研究中， ${}^8\text{B} \nu_e$  的绝对通量会对拟合产生较大影响，所以采用SNO<sup>[11]</sup>于2013年对于 ${}^8\text{B} \nu_e$  通量的测量结果： $\Phi_{^8\text{B}} = (5.25 \pm 0.20) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ，这个测量结果有3.8%的不确定度，加上基准体积的误差，可以指定归一化误差为5%。

而在概率上升效应的灵敏度研究中，因为重点关注不同模型下的 $\nu_e$  存活概率曲线的斜率和MSW预测的 $\nu_e$  存活概率曲线的差异，所以对于 ${}^8\text{B} \nu_e$  的绝对通量不敏感，此时可以粗略指定归一化误差为10%。

## 5.4 拟合统计量和拟合方法

### 5.4.1 拟合统计量

根据式5.5中的预测采用泊松随机采样，对于每个样本，有两个子数据集， $D_{\text{CC-rich},i}$  和  $D_{\text{ES-rich},i}$  分别是CC-rich和ES-rich样本通过泊松随机数生成的。每个随机样本都用如式5.7所示的奈曼  $\chi^2$  (Neyman chi-square) 进行拟合。

$$\begin{aligned} \chi^2 = & \sum_i (D_{\text{CC-rich},i} - P_{\text{CC-rich},i})^2 / D_{\text{CC-rich},i} \\ & + \sum_i (D_{\text{ES-rich},i} - P_{\text{ES-rich},i})^2 / D_{\text{ES-rich},i} + \text{Pull}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中  $P_{\text{CC-rich},i}$  和  $P_{\text{ES-rich},i}$  分别为对于富含带电流事例和富含弹性散射事例的样本的预测能谱。考虑到事例数计算式5.5，并进一步考虑了对于之后的拟合过程中，由于之前所讨论的探测器系统误差所带来的影响，得到预期的能谱，如式5.8所示：

$$\begin{aligned} P_{\text{CC-rich},i} &= [N_{\text{CC},i} 75\% (1 + \eta_\sigma) + N_{\text{ES},i} \epsilon_\gamma (1 + \eta_\epsilon)] \times (1 + \eta_{\text{Norm}}) \\ P_{\text{ES-rich},i} &= [N_{\text{CC},i} 25\% (1 + \eta_\sigma) + N_{\text{ES},i} (1 - \epsilon_\gamma (1 + \eta_\epsilon))] \times (1 + \eta_{\text{Norm}}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中考虑了LiCC散射截面不确定性  $\eta_\sigma$ 、ES过程中的选择效率不确定度  $\eta_\epsilon$  和由于高低金属丰度的不确定度<sup>[264]</sup>和基准质量的影响所带来的归一化不确定度  $\eta_{\text{Norm}}$

这三个主要的系统误差。相应地，由于系统误差所带来的对于  $\chi^2$  的贡献为 Pull，如式5.9所示：

$$\text{Pull} = (\eta_\sigma / 2\%)^2 + (\eta_\epsilon / 10\%)^2 + (\eta_{\text{Norm}} / 10\%)^2. \quad (5.9)$$

除了采用奈曼  $\chi^2$ ，还可以采用皮尔逊  $\chi^2$ ，或者是基于泊松似然比的  $\chi^2$ ，但是，根据文献<sup>[265]</sup>，奈曼  $\chi^2$  和皮尔逊  $\chi^2$  会各自偏向真值的两边。根据文献<sup>[265]</sup>中的图4，只有当每个区间的事例数预测值大于 50 时，奈曼  $\chi^2$  和皮尔逊  $\chi^2$  的偏差才会消失，这三种方法才能够得到一致的结果，所以我们采用 1 MeV/bin 的粗分能量区间，从而保证每个区间的事例数预测值大于 50。

#### 5.4.2 拟合方法

在之后的拟合过程中，我们采用了两种完全不同的拟合方法，一种是扫描一定范围下的参数，从而最小化拟合统计量，得到最优的参数值，另一种是借助 MINUIT 最小化程序包在 ROOT 中的版本 TMinuit<sup>[266]</sup>。经过测试，两者得到的结果是一致的，从而可以相互印证，但是前者相对于后者来说速度慢，拟合值分布离散，所以我们将主要采用 TMinuit 进行拟合。

#### 5.4.3 阿西莫夫数据集

在模拟研究中，当观测量设置为期待值时，即不考虑任何的系统误差和统计误差，这一数据集就称为阿西莫夫数据集（Asimov Dataset）<sup>[267]</sup>，此时待拟合的能谱即为式5.5。我们在之后的轻惰性中微子物理分析过程中将比较不同参数下阿西莫夫数据集的差异，并与考虑了误差的拟合结果加以对比，从而检查拟合过程中系统误差的影响。

### 5.5 本章小结

本章讨论了弹性散射事例的选择效率，选取 Super-K 实验中多重散射优度最好的选择效率的趋势线，在 5 MeV 以上弹性散射事例的选择效率高达 93.7%。然后模拟了在后续分析中，至关重要的三代中微子和轻惰性中微子下的 CC-rich 和 ES-rich 能谱，后续的拟合正是基于设置的真实参数以及非真实参数下的能谱的差异。应用弹性散射的角度选择条件  $\cos \theta_{\text{Sun}} > 0.5$  之后，CC-rich 样本中的信噪比，即 CC 事例数与 ES 事例数之比由 2 提高至 16 左右。

原始能谱需要卷积上高斯能量分辨函数，同时还需要考虑来自三个方面的系统误差。分别是带电流截面的误差，设为 2%，弹性散射事例选择效率的误差，设为 10%，以及由靶质量、取数时间、中微子通量共同贡献的归一化误差，这一误差

在混合参数的灵敏度研究中设为 5%，在概率上升效应的研究中设为 10%。

最后，采用奈曼<sup>[268]</sup>  $\chi^2$  时，在 1 MeV 的粗分能量区间下计算  $\chi^2$ ，保证每个能量区间事例数的预期值大于 50，从而避免奈曼  $\chi^2$  拟合的偏差<sup>[265]</sup>。拟合方法则采用效率更高的 TMinuit。

## 第6章 灵敏度分析结果

基于第4章的氯化锂水溶液探测器方案和第5章的灵敏度分析方法，可以给出氯化锂水溶液探测器对于中微子振荡参数的测量，概率上升效应的探测，太阳惰性中微子的寻找，以及地球物质效应和地球成像等物理目标的灵敏度。

本章将分别给出氯化锂水溶液探测器方案关于以上物理目标灵敏度的具体结果，并对结果分别加以检查和分析。

### 6.1 太阳中微子振荡参数的探测灵敏度研究

拟合太阳中微子的振荡参数时，由于太阳中微子的振荡参数同时和  $\theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  以及  $\theta_{13}$  有关，如式A.76所示，拟合时需要同时拟合这三个参数。大亚湾实验在2018年将  $\theta_{13}$  结果测量为  $\theta_{13} = 0.1485 \pm 0.0026$ ，精度约 1.73%，远高于目前太阳中微子实验的精度（图1.9(a)）。所以，下面可以分别将  $\theta_{13}$  视作系统误差和物理参数来做拟合。

我们在做灵敏度研究中采用 6400 ton-year 的有效曝光量和 10 PE/MeV 的光产额，5 MeV 的能量选择条件，以及 SNO<sup>[11]</sup>于 2013 年对于  ${}^8\text{B}$   $\nu_e$  的测量结果： $\Phi_{^8\text{B}} = (5.25 \pm 0.20) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ 。

#### 6.1.1 $\theta_{13}$ 作为系统误差的拟合

首先将目前振荡参数的最佳拟合值（式1.11）作为真实值，即  $\sin^2 \theta_{12} = 0.307$ ,  $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.49$ 。然后令  $\sin^2 \theta_{12}$  的范围在 [0.2, 0.4],  $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2$  的范围在 [2, 12]。 $\theta_{13}$  的大亚湾测量结果作为不确定度为 2% 的系统误差。共产生了  $1 \times 10^5$  个模拟样本，对每一个模拟样本都做了拟合，将拟合结果填充至  $20 \times 20$  的二维直方图，由拟合结果的二维分布得到  $1 \sim 5\sigma$  的置信范围，如图6.1所示，其中  $1 \sim 3\sigma$  的置信范围由蓝色实线包围， $4 \sim 5\sigma$  的置信范围由蓝色虚线包围。

将图6.1分别投影到  $\sin^2 \theta_{12}$  (图6.2(a)) 和  $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2$  (图6.2(b)) 上。同时示出  $1\sigma$  范围。我们得到  $\sin^2 \theta_{12} = 0.302 \pm 0.019$ ，约 6.3% 的精度， $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.675 \pm 1.519$ ，约 20% 的精度。而在图1.9(a)中，由太阳中微子实验（绿色范围）确定的  $\sin^2 \theta_{12}$  精度为 4.6%， $\Delta m_{21}^2(10^{-5})$  精度为 16%。

通过将图6.1和图1.9(a)作对比，可以看出，基于 6400 ton-year 的有效曝光，对太阳中微子振荡参数  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  的约束能力和目前的太阳中微子实验的全局拟合结果（图1.9）相比，我们  $5\sigma$  范围和太阳中微子全局拟合  $3\sigma$  范围差不多。但是

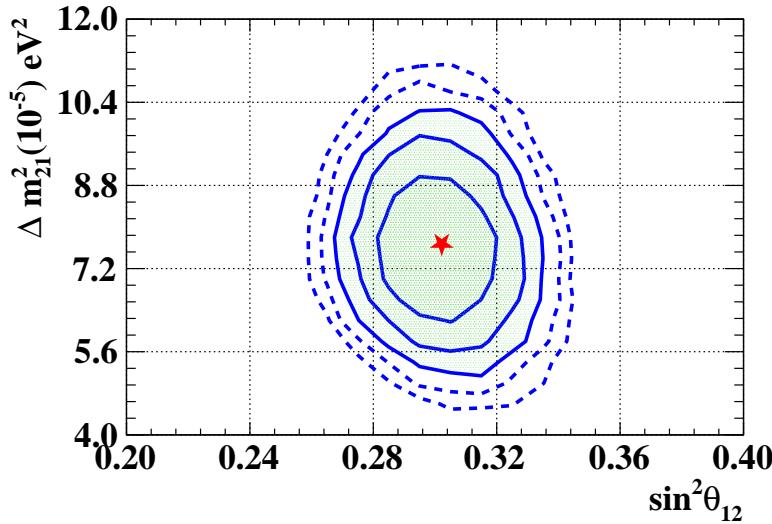


图 6.1  $\theta_{13}$  设置为 2% 精度的系统误差, 曝光量为  $320 \times 20$  ton-year 的 LiCl 探测器对太阳中微子振荡参数  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  的约束空间, 实线代表  $1 \sim 3\sigma$ , 虚线代表  $4 \sim 5\sigma$ 。

我们  $1\sigma$  范围大于太阳中微子全局拟合  $1\sigma$  范围，可以期望，在更高的曝光下，LiCl 水溶液探测器在将来能够贡献有竞争力的结果。

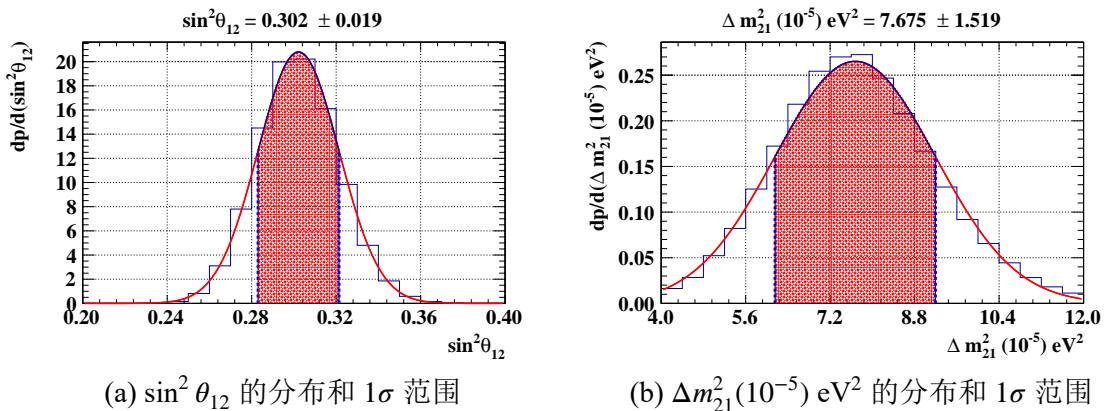


图 6.2 (a) 将图6.1投影到  $\sin^2 \theta_{12}$  轴上, 同时示出  $1\sigma$  范围, 得到  $\sin^2 \theta_{12} = 0.302 \pm 0.019$ 。  
 (b) 将图6.1投影到  $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2$  轴上, 同时示出  $1\sigma$  范围, 得到  

$$\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.675 \pm 1.519$$

为了验证图6.1的结果，我们将  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数对分为  $6 \times 6$  的格点，如图6.3所示。在每个格点上首先比较不同  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2 (10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数对下和真实的太阳中微子振荡参数下的  $P_{ee}$  曲线，如图6.5所示，可以看到对应6.1中  $3\sigma$  区域内的  $P_{ee}$  曲线差异较小，而在  $3\sigma$  区域外，在 5 MeV 以上  $P_{ee}$  曲线差异较大，和拟合结果印证。

最后，我们检查了二维图中每个区间拟合结果的系统误差分布，发现四个系统误差的中心值都在 0 附近，说明系统误差没有对拟合结果产生影响。对于  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2)$  参数对的拟合精度随着曝光量的变化如图6.4所示。对于  $\sin^2 \theta_{12}$ ，大约每 1000 ton-year 可以将精度提升 1.1%，对于  $\Delta m_{21}^2$ ，大约每 1000 ton-year 可以将精度提升 1.9%。

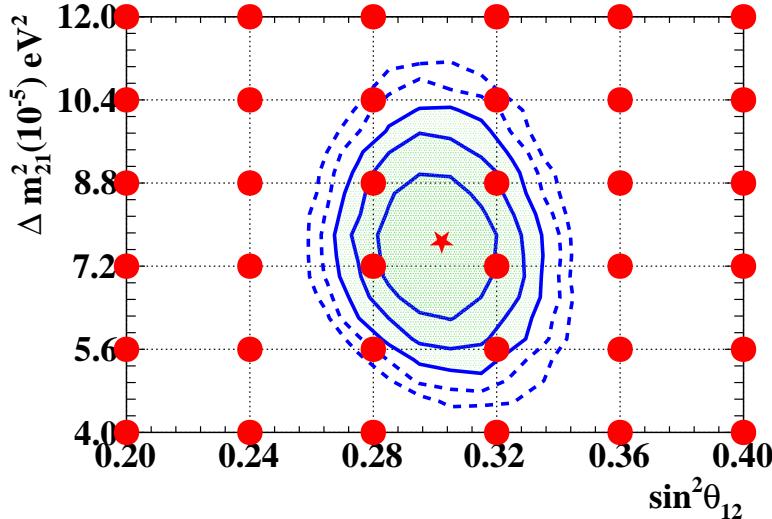


图 6.3 对  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数对分为  $6 \times 6$  的格点，用于检查每个格点上的拟合结果。

### 6.1.2 $\theta_{13}$ 作为待拟合参数的拟合

接下来放开  $\theta_{13}$ ，同时拟合  $\theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  以及  $\theta_{13}$ ，此时的拟合结果为图6.6(a)和图6.6(b)所示。可以看到，相比于  $\theta_{13}$  作为系统误差的结果，即图6.1，放开  $\theta_{13}$  后，对于  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2)$  参数对的约束能力下降，约束范围变得更大。并且值得注意的是，图6.6(a)和图6.1原先的等高线范围相比，在左上角还延伸了一大片区域。

在图6.6(a)中存在两个以局域极值为中心的等高线区域，我们在图6.6(a)标记出这两个局域极值。这两个局域极值分别对应于  $\sin^2 \theta_{12} = 0.213$ ,  $\Delta m_{21}^2 = 15.5 \times 10^{-5}$  和  $\sin^2 \theta_{12} = 0.288$ ,  $\Delta m_{21}^2 = 7.49 \times 10^{-5}$ 。检查这两处拟合的三个系统误差中心值均在 0 附近，并且  $\sin^2 \theta_{12} = 0.288$ ,  $\Delta m_{21}^2 = 7.49 \times 10^{-5}$  拟合出来的  $\sin^2 \theta_{13}$  的中心值也在 0 附近，如图6.7(a)所示。但是在  $\sin^2 \theta_{12} = 0.213$ ,  $\Delta m_{21}^2 = 15.5 \times 10^{-5}$  处，拟合出来的  $\sin^2 \theta_{13}$  的中心值为 0.323，如图6.7(b)所示。

综上，两处局域极值处为：

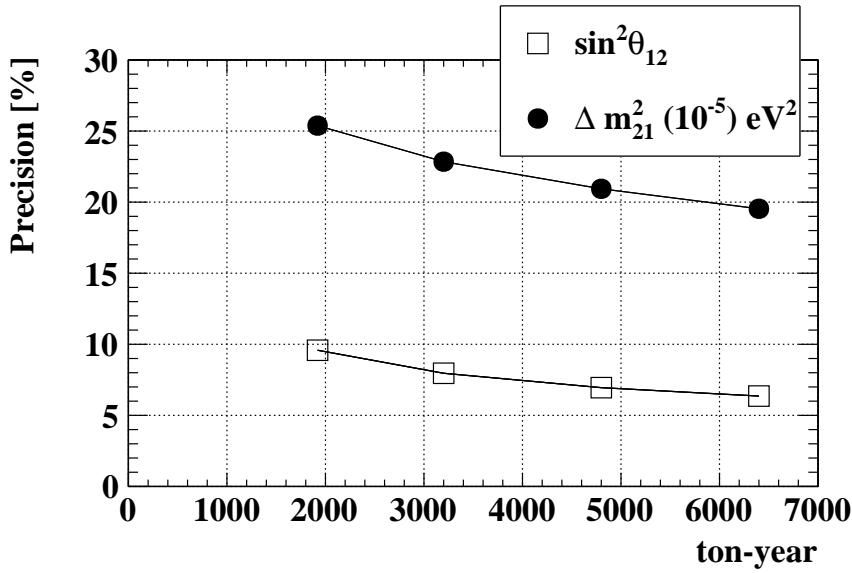


图 6.4 对于  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2 (10^{-5} \text{ eV}^2))$  参数对的拟合精度随着曝光量的变化。 $\theta_{13}$  作为系统误差，在 5 MeV 能量选择条件下。

- $\sin^2 \theta_{12} = 0.213, \Delta m_{21}^2 = 15.5 \times 10^{-5}, \sin^2 \theta_{13} = 0.323,$
- $\sin^2 \theta_{12} = 0.288, \Delta m_{21}^2 = 7.49 \times 10^{-5}, \sin^2 \theta_{13} = 0.$

将两处局域极值下的  $\nu_e$  存活概率曲线放在一起对比，同时将真实值下的存活概率曲线（MSW）一同对比，如图6.8所示，可以看到，三条存活概率曲线在 5 MeV 以上，尤其是在统计较高的 6 ~ 12 MeV 能量区间处是基本一致的，这就说明了  $\theta_{13}$  可以通过取两个不同的值，导致基本相同的概率曲线，产生两处  $\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2$  局域极值。但是在 5 MeV 以下，第一个局域极值的  $P_{ee}$  曲线完全偏离了真实值下的  $P_{ee}$  曲线，而二个局域极值的  $P_{ee}$  曲线更贴近真实值下的  $P_{ee}$  曲线，可见图6.6的两处振荡参数的简并是由于 5 MeV 能量选择条件所带来的，第一处局域极值是非物理的，实际正确的拟合结果应该是第二处局域极值。

## 6.2 概率上升效应的探测灵敏度研究

在 Super-K 实验和 SNO 实验中，采用了二次函数来拟合  $\nu_e$  存活概率曲线<sup>[10]</sup>，这一函数给出了  $P_{ee}$  的一种简单描述的模型，并且除了能够检验 MSW 效应外，还能够检验非标准相互作用<sup>[23]</sup>（图1.11(c)），质量变化的中微子<sup>[24]</sup>（图1.11(b)）等新物理。为了对比，我们也将氯化锂水溶液关于太阳高密度物质所致的概率上升效应的研究中，采用二次函数来拟合  $\nu_e$  存活概率曲线。同时基于一次函数对  $\nu_e$  存活概率曲线做拟合，给出氯化锂水溶液探测器对于概率上升效应的探测灵敏度随着曝光量的变化。

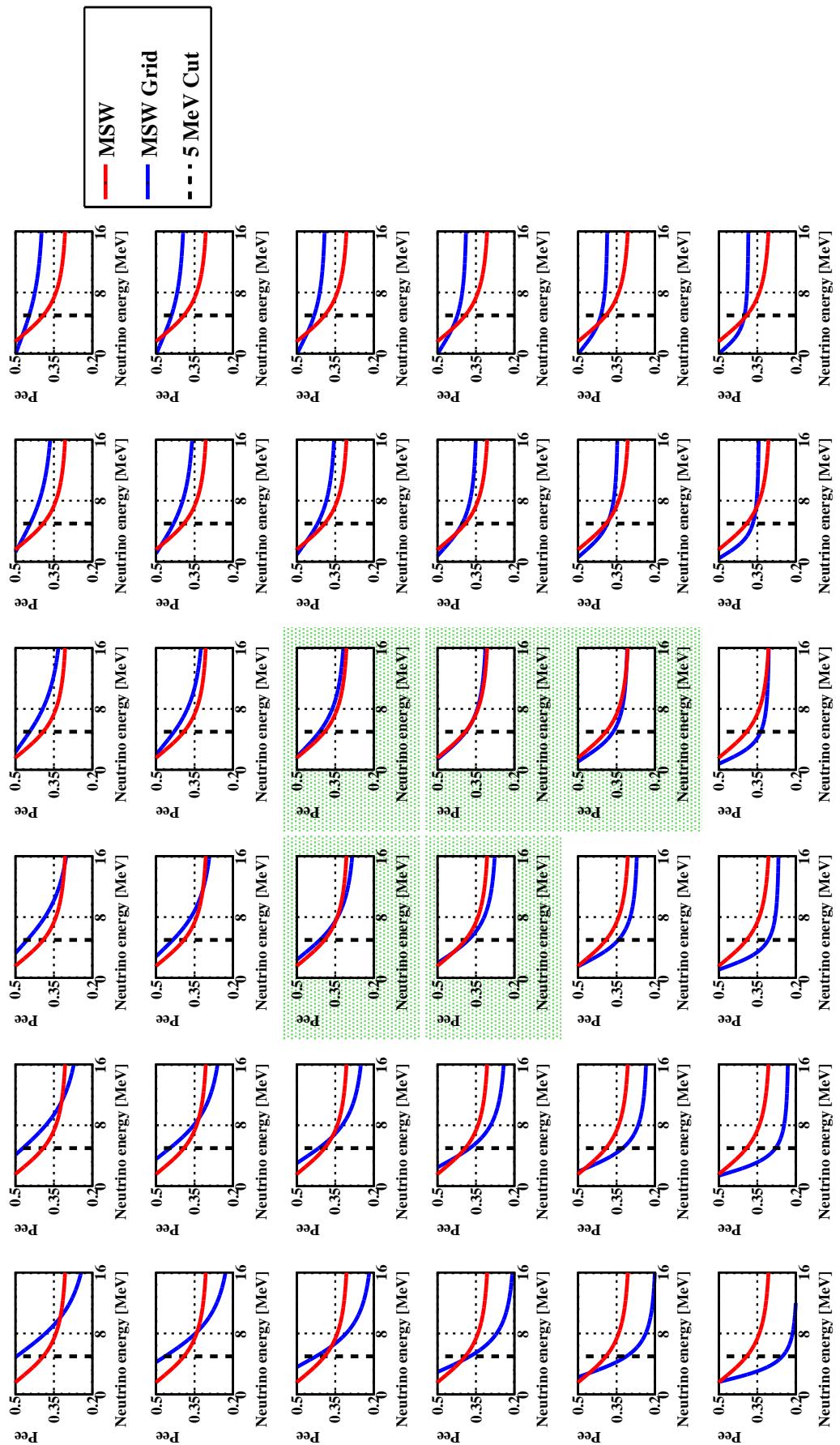


图 6.5 在  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2, 10^{-5}) \text{ eV}^2$  参数空间的  $6 \times 6$  格点上检查每一个格点的  $P_{ee}$  (蓝色) 和真实参数下的  $P_{ee}$  (红线) 的对比, 同时画出  $5 \text{ MeV}$  能量选择条件 (黑色虚线)。

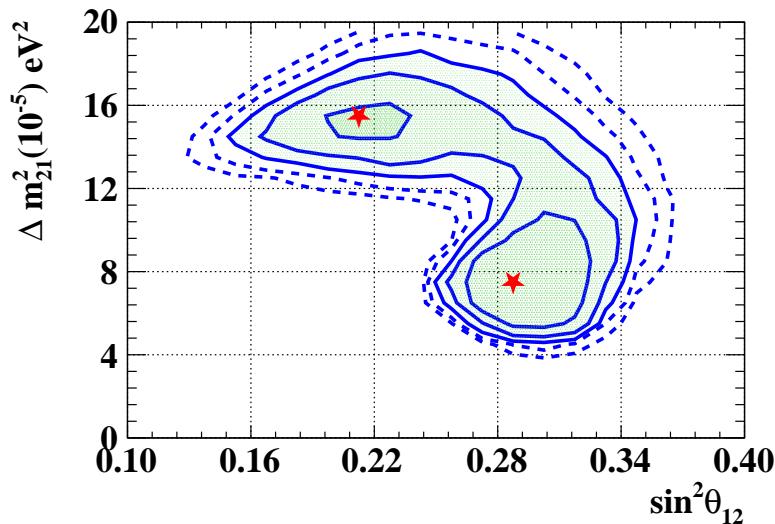
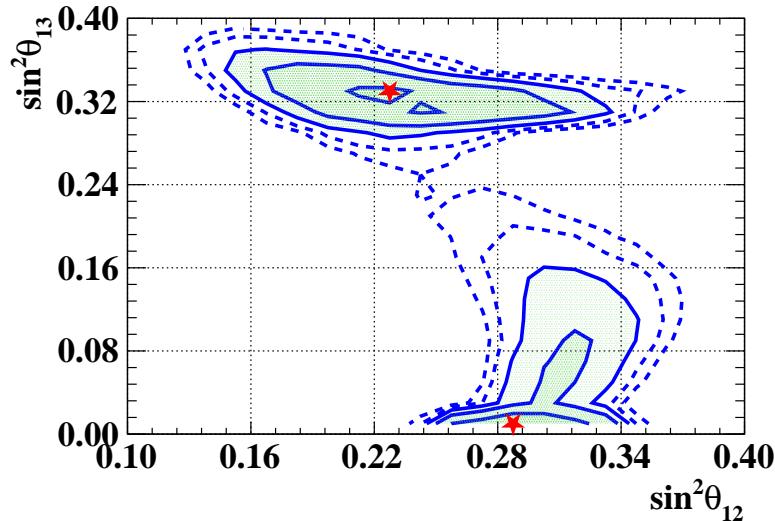
(a)  $(\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2)$  的约束区域(b)  $(\sin^2 \theta_{12}, \sin^2 \theta_{13})$  的约束区域

图 6.6 (a) 放开  $\theta_{13}$  后, 关于太阳中微子振荡参数  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  的约束灵敏度。(b) 放开  $\theta_{13}$  后, 关于太阳中微子振荡参数  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\sin^2 \theta_{13}$  的约束灵敏度。图中实线代表  $1\sim3\sigma$ , 虚线代表  $4\sim5\sigma$ 。以上基于曝光量为  $320\times20$  ton-year 的 LiCl 探测器。

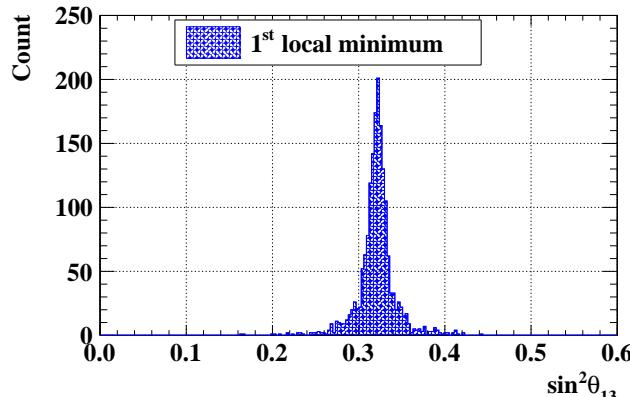
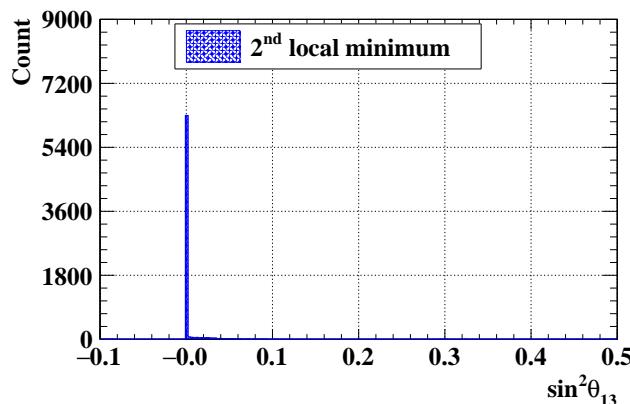
(a) 第一处局域极值  $\sin^2 \theta_{13}$  的分布(b) 第二处局域极值  $\sin^2 \theta_{13}$  的分布

图 6.7 (a) 对应于6.6(a)标记的第一处局域极值处,  $\sin^2 \theta_{13}$  拟合结果的分布。(b) 对应于6.6(a)标记的第二处局域极值处,  $\sin^2 \theta_{13}$  拟合结果的分布。

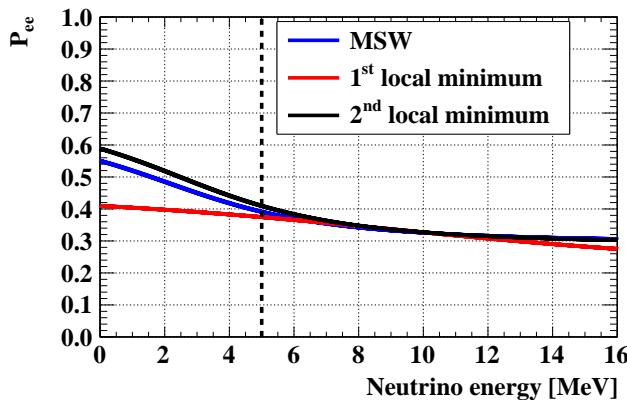


图 6.8 在  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\Delta m_{21}^2$  两处局域极值连同拟合的  $\sin^2 \theta_{13}$  中心值得到的  $\nu_e$  存活概率曲线, 第一处局域极值对应红线, 第二处局域极值对应蓝线, 同时将真实值下的存活概率曲线所对应的黑线一同对比。

### 6.2.1 概率曲线的二次函数拟合

SNO<sup>[11]</sup>和 Super-Kamiokande<sup>[10]</sup>实验中使用  $E_\nu$  的二次函数来拟合  ${}^8\text{B} \nu_e$  的存活概率曲线。使用 10 MeV 存活概率作为参考点,  ${}^8\text{B} \nu_e$  的存活概率为:

$$P_{ee}(E_\nu) = c_0 + c_1(E_\nu - 10) + c_2(E_\nu - 10)^2, \quad (6.1)$$

其中  $c_0$  是  ${}^8\text{B} \nu_e$  在 10 MeV 的存活概率, 与概率上升效应无关,  $c_1$  是  ${}^8\text{B} \nu_e$  存活概率曲线在 10 MeV 的斜率,  $c_2$  是与  ${}^8\text{B} \nu_e$  存活概率曲线在 10 MeV 的曲率  $\rho$  以及在 10 MeV 的斜率  $c_1$  都有关:

$$c_2 = \rho(1 + c_1^2)^{3/2}. \quad (6.2)$$

拟合过程中模型相关的三个参数  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , 以及三个系统误差  $\eta_\sigma$ ,  $\eta_\varepsilon$ ,  $\eta_{\text{Norm}}$  同时参与拟合。我们主要关注  $c_1$ ,  $c_2$  的拟合结果, 因为只有这两个参数与概率上升效应有关。

分别采用 5 MeV, 4 MeV 和 3 MeV 能量选择条件, 同时采用 320 ton-20 year 的探测器曝光设置, 模拟了 30000 个蒙特卡洛样本, 并对这 30000 个蒙特卡洛样本分别做拟合, 拟合出来的  $\chi^2$  分布如图6.9所示。在拟合过程中同时拟合了带电流能谱和弹性散射能谱。

由于在  $N$  MeV 的能量选择下, 拟合涉及  $2 \times (16 - N)$  个区间的事例, 待拟合参数为 6 个, 和系统误差相关的参数有 3 个, 系统误差的均值和方差是已知的, 所以预期  $\chi^2$  分布服从自由度为  $2 \times (16 - N) - 6 + 3$  的卡方分布:

$$\text{ndf} = 29 - 2N \text{ 对于 } N \text{ MeV 能量选择条件.} \quad (6.3)$$

在图6.9同时画出自由度为  $29 - 2N$  的卡方分布作为比较。5 MeV, 4 MeV 和 3 MeV 的能量选择下, 预期  $\chi^2$  分布分别服从自由度为 19, 21, 23 的卡方分布, 从图6.9可以看出,  $\chi^2$  的分布和预期自由度的卡方分布符合的均比较好, 说明  $P_{ee}$  概率曲线在 5 MeV, 4 MeV 和 3 MeV 的能量选择下, 均能够用二次函数的模型来描述。

在不同能量选择条件下, 拟合的  $c_1$ ,  $c_2$  分布二维图如图6.10中的第一列所示。我们可以得到在不同能量选择条件下  $c_1$ ,  $c_2$  的均值和 RMS, 以及两者的相关系数, 如表6.1所示。由这些量可以得到 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域, 如图6.10中的第二列所示。

然后画出在  $c_1$ ,  $c_2$  的 1 倍 RMS 范围内所有的概率曲线, 它们构成了概率曲线 1 倍 RMS 的展宽, 如图6.11所示。我们可以看到, 振荡概率曲线在 7 ~ 11 MeV 能量区间下拟合得最好, 因为在这段能量区间的带电流事例数占比高。SNO<sup>[11]</sup>和 SK<sup>[19]</sup>采用二次函数拟合振荡概率的实验结果如表6.2所示。可以由表6.2在图6.11中同时画

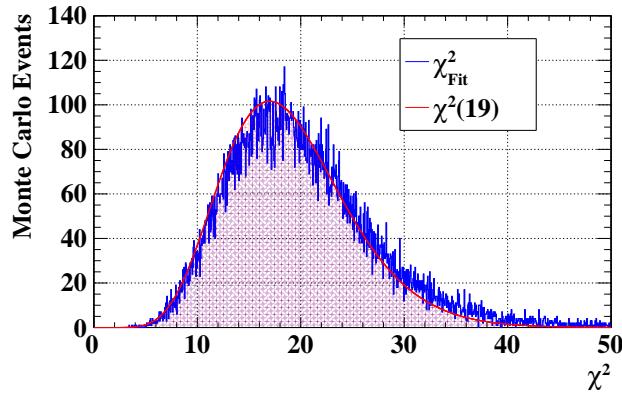
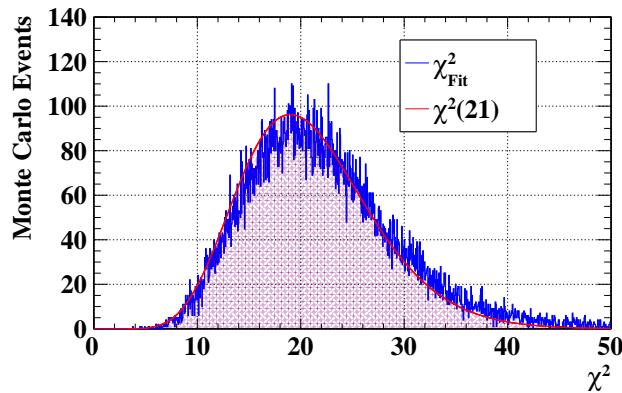
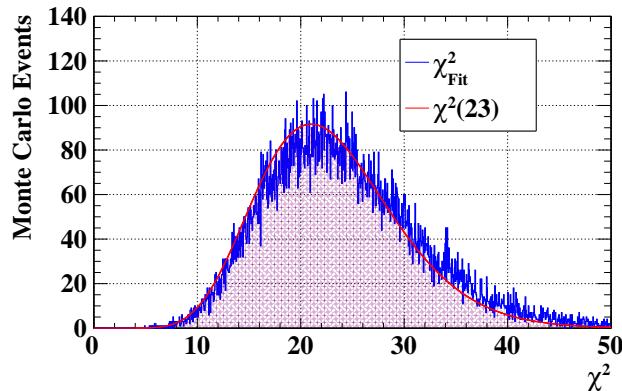
(a) 二次函数拟合, 5 MeV Cut 下的  $\chi^2$  分布(b) 二次函数拟合, 4 MeV Cut 下的  $\chi^2$  分布(c) 二次函数拟合, 3 MeV Cut 下的  $\chi^2$  分布

图 6.9 (a) 图中蓝线为 5 MeV 能量选择条件下, 30000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布, 红线为自由度为 19 的卡方分布作为比较。(b) 4 MeV 能量选择条件下, 蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布和自由度为 21 的卡方分布的比较。(c) 3 MeV 能量选择条件下, 蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布和自由度为 23 的卡方分布的比较。

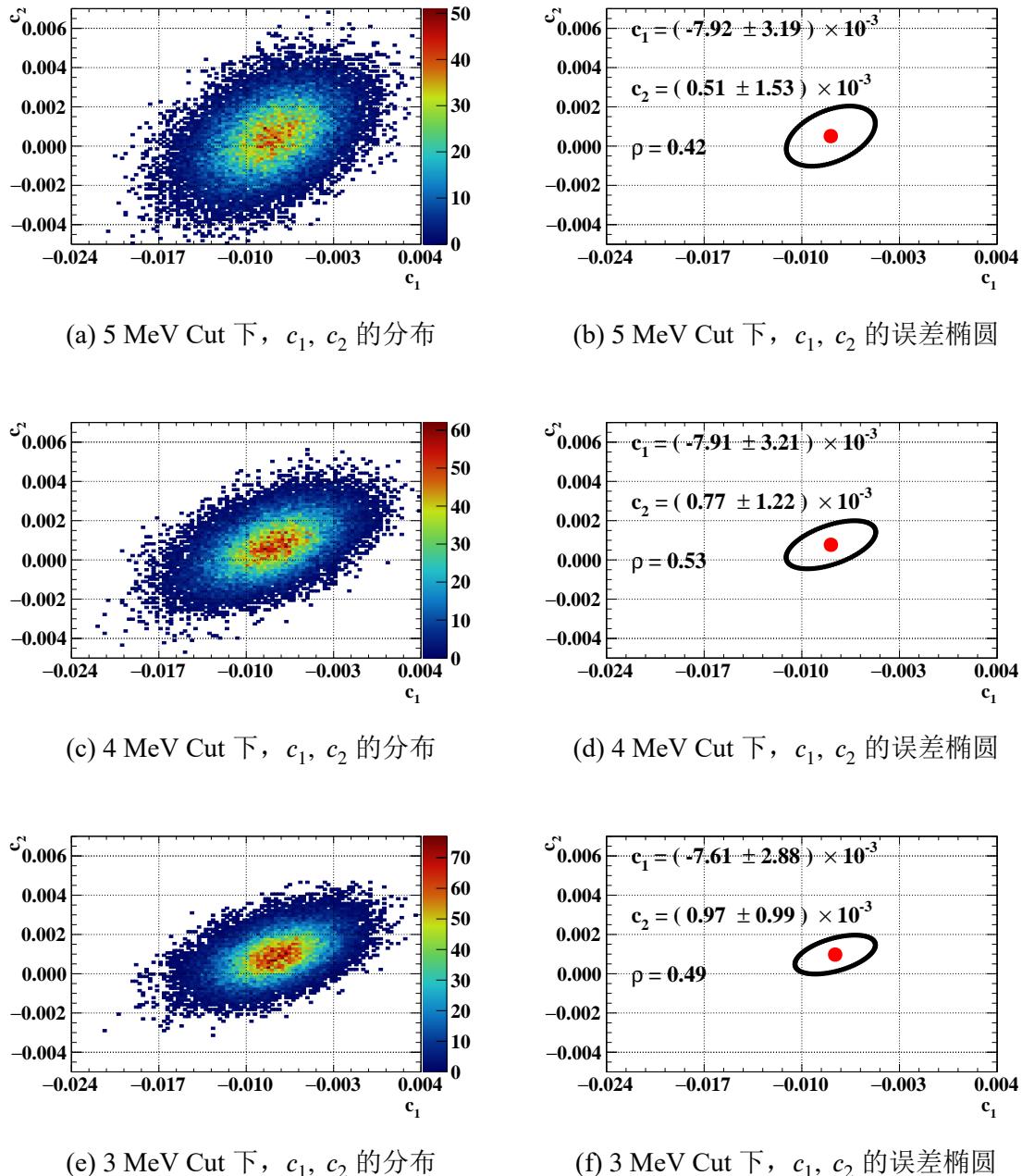


图 6.10 (a) 5 MeV 能量选择下  $c_1$ ,  $c_2$  分布二维图。 (b) 5 MeV 能量选择下,  $c_1$ ,  $c_2$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1$ ,  $c_2$  均值点在图上用红点标记出来。(c) 4 MeV 能量选择下  $c_1$ ,  $c_2$  分布二维图。(d) 4 MeV 能量选择下,  $c_1$ ,  $c_2$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1$ ,  $c_2$  均值点在图上用红点标记出来。(e) 3 MeV 能量选择下  $c_1$ ,  $c_2$  分布二维图。(f) 3 MeV 能量选择下,  $c_1$ ,  $c_2$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1$ ,  $c_2$  均值点在图上用红点标记出来。

表 6.1 5 MeV, 4 MeV, 3 MeV 这三种能量选择条件下, 采用 6400 ton-year 有效曝光的 LiCl 水溶液探测器拟合  $P_{ee}$  概率曲线, 表中展示出  $c_1$ ,  $c_2$  的均值和 RMS, 以及两者的相关系数。

<b>5 MeV</b>	<b><math>c_1</math></b>	<b><math>c_2</math></b>
拟合值	$(-7.92 \pm 3.19) \times 10^{-3}$	$(0.51 \pm 1.53) \times 10^{-3}$
相关系数	1 0.42	0.42 1
<b>4 MeV</b>	<b><math>c_1</math></b>	<b><math>c_2</math></b>
拟合值	$(-7.91 \pm 3.21) \times 10^{-3}$	$(0.77 \pm 1.22) \times 10^{-3}$
相关系数	1 0.53	0.53 1
<b>3 MeV</b>	<b><math>c_1</math></b>	<b><math>c_2</math></b>
拟合值	$(-7.61 \pm 2.88) \times 10^{-3}$	$(0.97 \pm 0.99) \times 10^{-3}$
相关系数	1 0.49	0.49 1

出 SNO (紫色), 以及 SK (绿色) 关于  $P_{ee}$  的实验拟合结果, 用于和 LiCl 水溶液探测器 (粉色) 的模拟结果比较。

可以从图6.11看到, 和 SNO, 以及 SK 的实验结果相比, LiCl 水溶液探测器采用蒙特卡洛数据拟合出来的概率曲线有着更为清晰显著的概率上升效应趋势和更窄的 1 倍 RMS 展宽。

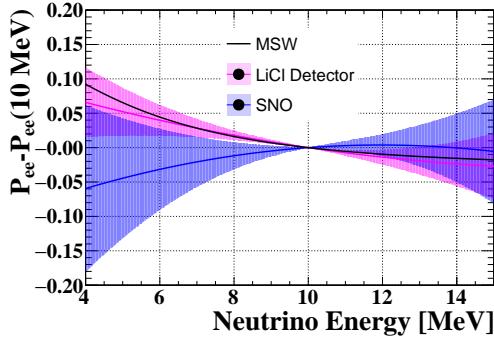
### 6.2.2 概率曲线的一次函数拟合

如果只关心对于概率上升效应的探测灵敏度, 那么不用关心振荡概率曲线的曲率, 只需要着重于振荡概率曲线的斜率, 所以可以采用一个简单的线性函数来拟合振荡概率曲线:

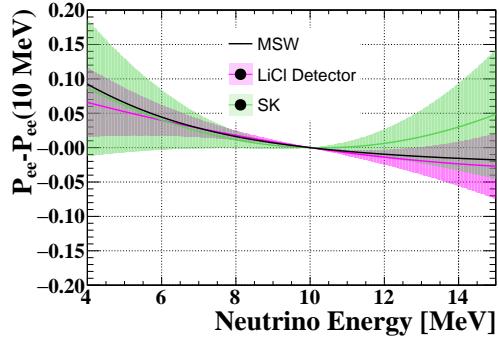
$$P_{ee}(E_\nu) = c_0 + c_1(E_\nu - 10). \quad (6.4)$$

分别采用 5 MeV, 4 MeV 和 3 MeV 能量选择条件, 同时采用 320 ton-20 year 的探测器曝光设置, 模拟了 20000 个蒙特卡洛样本, 并对这 20000 个蒙特卡洛样本分别做拟合, 拟合得到的 20000 个  $\chi^2$  分布如图6.12所示。

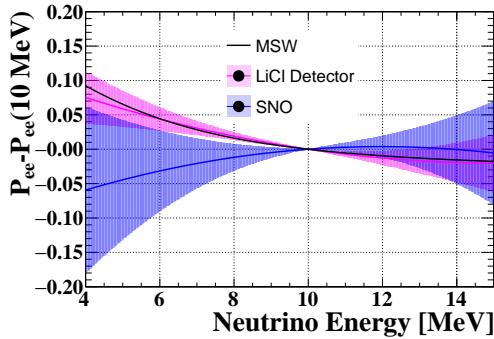
采用一次函数拟合时,  $N$  MeV 的能量选择下, 拟合同样涉及  $2 \times (16 - N)$  个



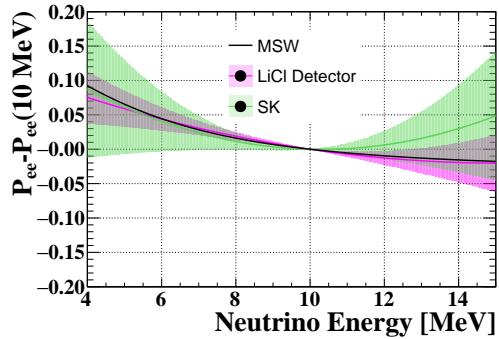
(a) 5 MeV Cut, LiCl 探测器对比 SNO



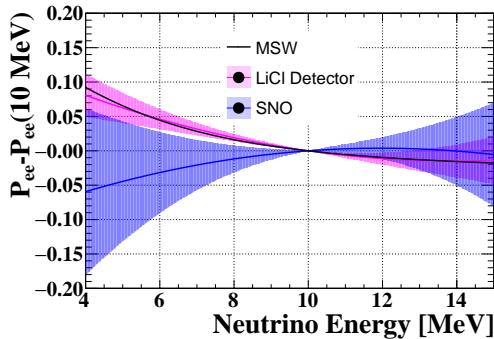
(b) 5 MeV Cut, LiCl 探测器对比 SK



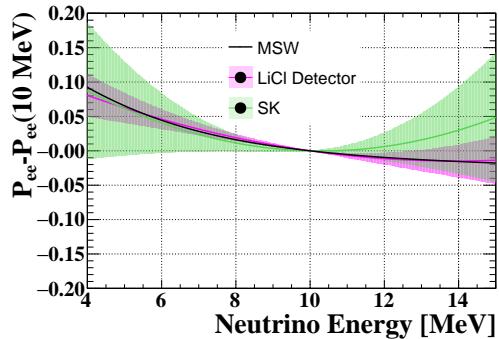
(c) 4 MeV Cut, LiCl 探测器对比 SNO



(d) 4 MeV Cut, LiCl 探测器对比 SK



(e) 3 MeV Cut, LiCl 探测器对比 SNO



(f) 3 MeV Cut, LiCl 探测器对比 SK

图 6.11 (a) 5 MeV 能量选择下, 6400 ton-year LiCl 水溶液关于  $P_{ee}$  的二次函数拟合以及 1 倍 RMS 展宽 (粉色区域), 同时和 SNO 关于  $\nu_e$  存活曲线测量的实验结果以及 1 倍 RMS 展宽 (蓝色区域) 加以对比。(b) 5 MeV 能量选择下, 6400 ton-year LiCl 水溶液关于  $P_{ee}$  的二次函数拟合以及 1 倍 RMS 展宽 (粉色区域), 同时和 SK 关于  $\nu_e$  存活曲线测量的实验结果以及 1 倍 RMS 展宽 (绿色区域) 加以对比。(c) 4 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SNO 结果的对比。(d) 4 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SK 结果的对比。(e) 3 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SNO 结果的对比。(f) 3 MeV 能量选择下, LiCl 探测器和 SK 结果的对比。图中黑色线为目前最佳振荡参数, 即式 1.11 中,  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$  下的振荡概率曲线。

表 6.2 SNO 和 SK 采用二次函数拟合  $P_{ee}$  概率曲线,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  的拟合结果。数据分别来自于文献<sup>[11]</sup>和文献<sup>[19]</sup>。

SNO <sup>[11]</sup>	$c_0$	$c_1$	$c_2$
拟合值	$0.317 \pm 0.016$	$0.0039^{+0.0065}_{-0.0067}$	$-0.0010 \pm 0.0029$
	1	-0.299	-0.366
相关系数	-0.299	1	-0.206
	-0.366	-0.206	1
SK <sup>[19]</sup>	$c_0$	$c_1$	$c_2$
拟合值	$0.329 \pm 0.022$	$-0.0013 \pm 0.0059$	$0.0022 \pm 0.0026$
	1	-0.126	-0.281
相关系数	-0.126	1	0.672
	-0.281	0.672	1

区间的事例, 待拟合参数为 5 个, 和系统误差相关的参数有 3 个, 系统误差的均值和方差是已知的, 所以预期  $\chi^2$  分布服从自由度为  $2 \times (16 - N) - 5 + 3$  的卡方分布:

$$\text{ndf} = 30 - 2N \text{ 对于 } N \text{ MeV 能量选择条件.} \quad (6.5)$$

5 MeV, 4 MeV 和 3 MeV 的能量选择下, 预期  $\chi^2$  分布分别服从自由度为 20, 22, 24 的卡方分布。在图6.12中同时画出自由度为  $30 - 2N$  的卡方分布作为比较。可以看出, 当能量选择条件越低时,  $\chi^2$  的分布就会偏离预期自由度的卡方分布越厉害, 这是因为能量选择条件越低,  $P_{ee}$  概率曲线就越不满足一次函数的模型, 从图6.14中拟合的一次函数(粉线)和 MSW 下的  $P_{ee}$  曲线的比较中, 可以看出这一点。

采用一次函数拟合, 分别在 5 MeV, 4 MeV, 3 MeV 能量选择下, 拟合的  $c_1$  和  $c_0$  的二维分布如图6.13所示。 $c_1$  和  $c_0$  呈负相关, 因为概率  $P_{ee}$  的整体上移(下移)需要斜率下降(斜率上升)来抵消能谱的变形。拟合出来的振荡概率曲线如图6.14所示。同样, 我们可以看到, 振荡概率曲线在 7 ~ 11 MeV 能量区间下拟合得最好, 因为在这段能量区间的带电流事例数占比高。

### 6.2.3 探测灵敏度分析

为了得到探测器对于概率上升效应的灵敏度, 在振荡概率曲线的一次函数拟合的基础上, 通过拟合得到的  $c_1$  分布从负无穷积分到 0, 来量化对于无概率上升效应的排除灵敏度。

研究中设置了多组探测器曝光情况, 包括  $320 \text{ ton} \times 2$ 、6、10、15、20 year 总

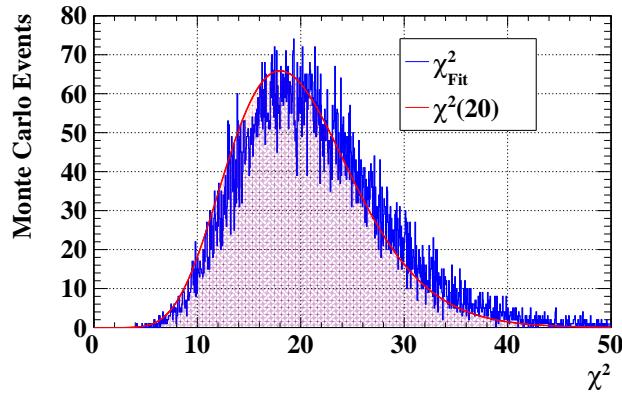
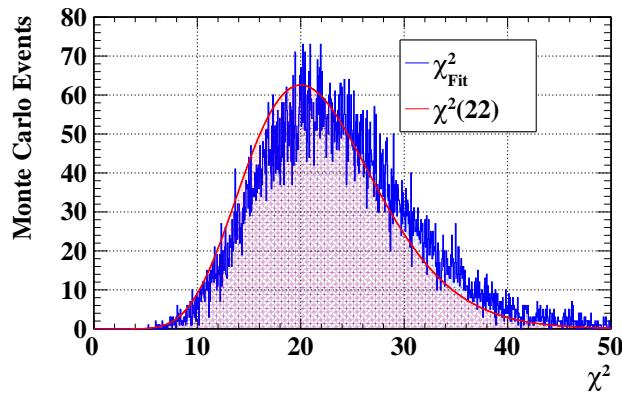
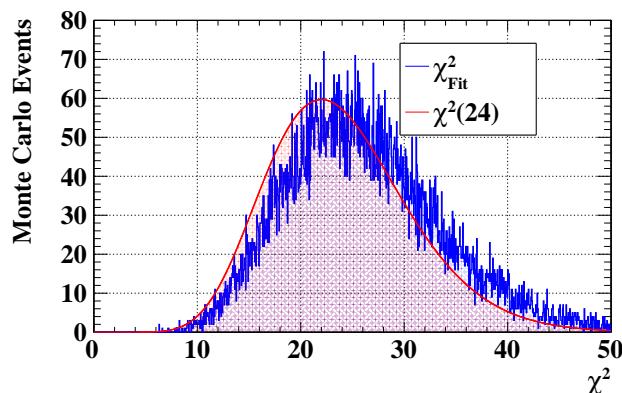
(a) 一次函数拟合, 5 MeV Cut 下的  $\chi^2$  分布(b) 一次函数拟合, 4 MeV Cut 下的  $\chi^2$  分布(c) 一次函数拟合, 3 MeV Cut 下的  $\chi^2$  分布

图 6.12 (a) 图中蓝线为 5 MeV 能量选择条件下, 20000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布, 红线为自由度为 20 的卡方分布作为比较。(b) 4 MeV 能量选择条件下, 20000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布和自由度为 22 的卡方分布的比较。(c) 3 MeV 能量选择条件下, 20000 个蒙特卡洛样本拟合的  $\chi^2$  分布和自由度为 24 的卡方分布的比较。

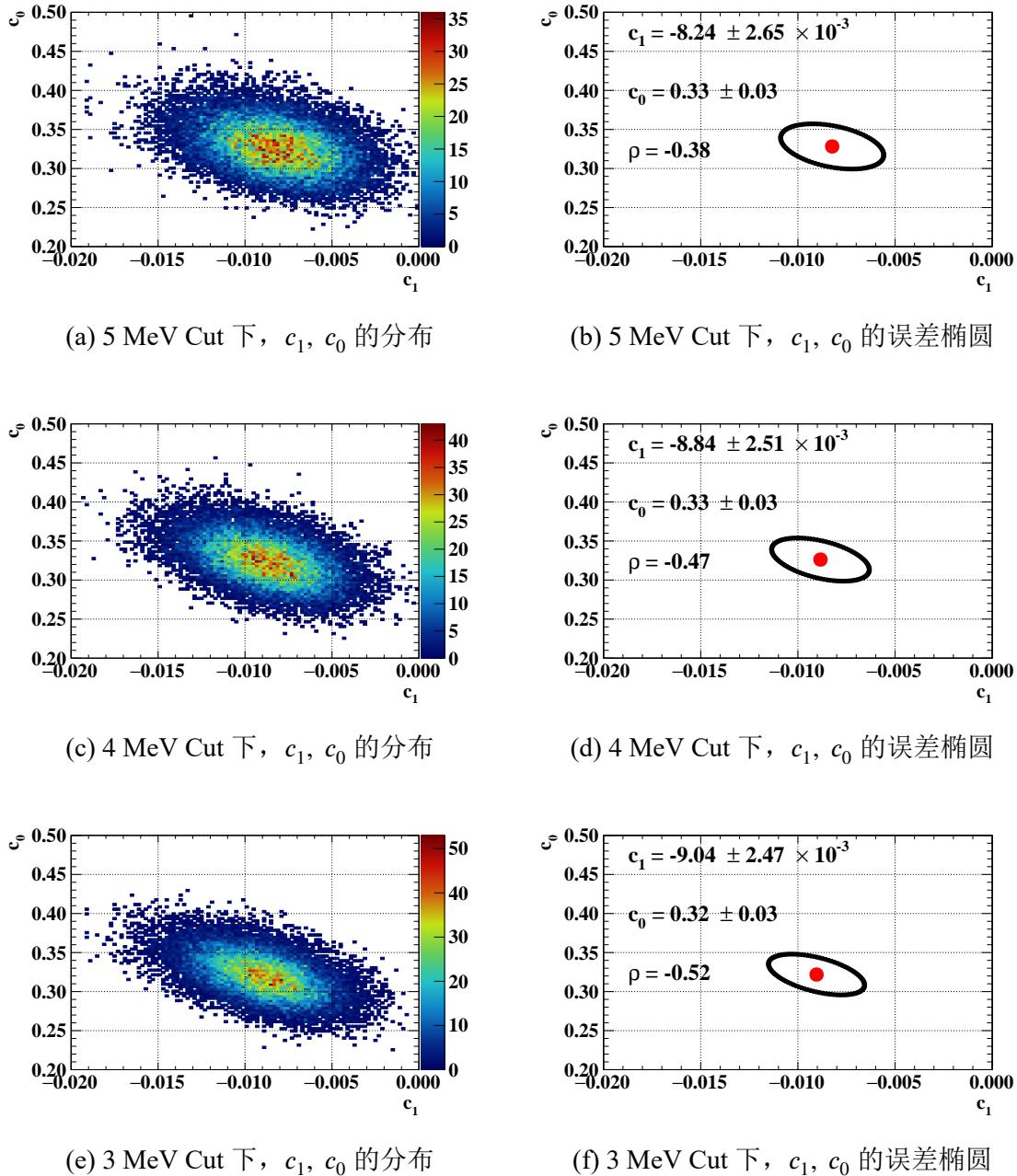


图 6.13 (a) 5 MeV 能量选择下  $c_1, c_0$  分布二维图。 (b) 5 MeV 能量选择下,  $c_1, c_0$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1, c_0$  均值点在图上用红点标记出来。(c) 4 MeV 能量选择下  $c_1, c_0$  分布二维图。(d) 4 MeV 能量选择下,  $c_1, c_0$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1, c_0$  均值点在图上用红点标记出来。(e) 3 MeV 能量选择下  $c_1, c_0$  分布二维图。(f) 3 MeV 能量选择下,  $c_1, c_0$  的 1 倍 RMS 范围覆盖的椭圆区域。 $c_1, c_0$  均值点在图上用红点标记出来。

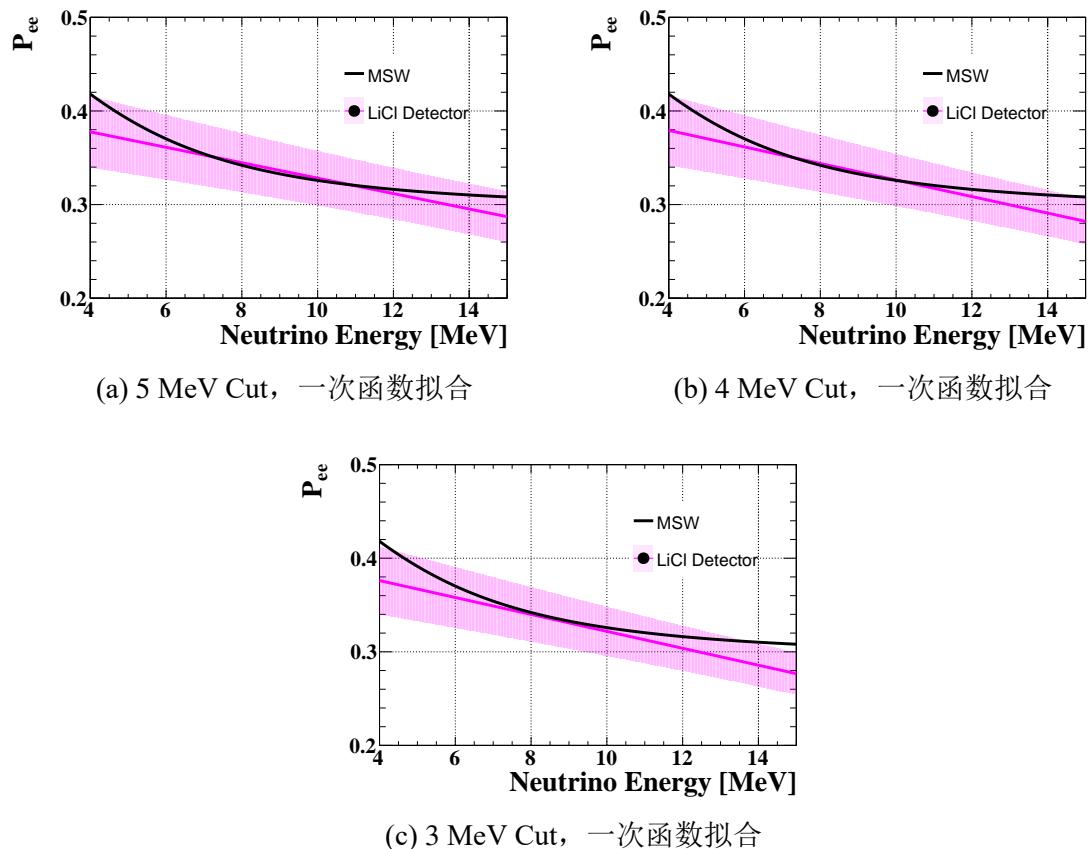


图 6.14 (a) 5 MeV 能量选择条件下，采用一次函数拟合振荡概率曲线的拟合结果和 1 倍 RMS 展宽。(b) 4 MeV 能量选择条件下，采用一次函数拟合振荡概率曲线的拟合结果和 1 倍 RMS 展宽。(c) 3 MeV 能量选择条件下，采用一次函数拟合振荡概率曲线的拟合结果和 1 倍 RMS 展宽。图中黑线为目前太阳中微子振荡参数最佳拟合值下的存活概率曲线。

共 5 组曝光量，在每组曝光设置下生成 20000 个蒙特卡罗数据样本并采用 6.2.2 一致的步骤拟合  $c_0$  和  $c_1$ 。

如果  $c_1$  的拟合值为正数，则拒绝概率上升效应，如果  $c_1$  的拟合值为负数，则接受概率上升效应。由于两万的  $c_1$  拟合值呈现出高斯分布，如图6.15所示，所以对于无概率上升效应的排除灵敏度  $S$  采用：

$$S = \int_{-\infty}^0 \text{Gaus}(\mu_{c1}, \sigma_{c1}) dc_1 \quad (6.6)$$

来量化。

对于我们建议的探测器设置和曝光， $\mu_{c1}$  总是负值，即偏向于概率上升效应。排除灵敏度  $S$  和对应的  $n [\sigma]$  关系为：

$$n [\sigma] = \Phi^{-1} \left( \frac{1 - S}{2} \right)_{\mu=0, \sigma=1} \quad (6.7)$$

图6.16展示了灵敏度与 LiCl 探测器有效曝光量的关系，其中分别展示了 5 MeV，4 MeV 和 3 MeV 这三种能量选择条件下的结果。从图6.16可以看到，在 5 MeV 能量选择条件下，达到  $3\sigma$  的排除灵敏度需要 5000 ton-year 的有效曝光。在激进一点的 4 MeV 能量选择条件下，达到  $3\sigma$  的排除灵敏度需要 3000 ton-year 的有效曝光。在更激进一点的 3 MeV 能量选择条件下，达到  $3\sigma$  的排除灵敏度需要 2200 ton-year 的有效曝光。

基于 6400 吨年的有效曝光量和 4 MeV 能量选择条件，氯化锂水溶液探测器排除无概率上升效应的灵敏度能够达到  $3.7\sigma$ 。

Hyper-K<sup>[118]</sup> 拒绝无概率上升效应的灵敏度随着探测器有效曝光量的变化如图6.17所示。从图6.17可以看到，Hyper-K 达到相同大小的灵敏度需要比 LiCl 探测器高大约两个数量级的曝光。

总之，我们期望用 LiCl 水溶液探测器研究太阳高密度物质所致的概率上升效应时，能够对以往结果有所改进，并且在将来的中微子实验上有着极具竞争力的水平。

### 6.3 太阳轻惰性中微子的探测灵敏度研究

在轻惰性中微子模型中，惰性中微子和活性中微子的混合是弱混合，混合参数靠近物理边界，评估灵敏度时必须采用费尔德曼-科森方法（Feldman-Cousin Method，简称 FC Method）<sup>[269]</sup> 来确定 LiCl 探测器对于轻惰性中微子参数区间的排除灵敏度<sup>[270]</sup>。

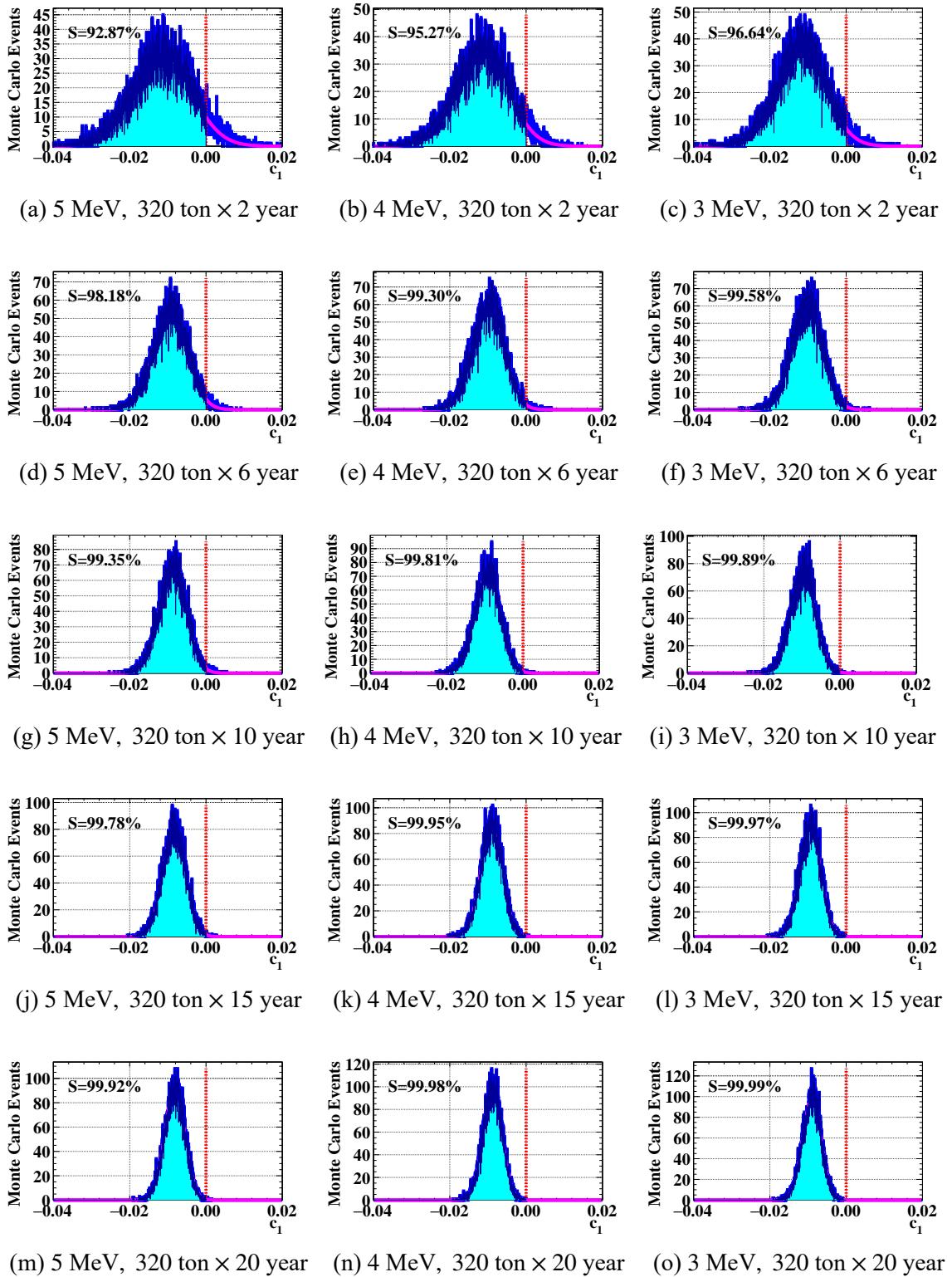


图 6.15 图中 1 ~ 3 列分别对应 5、4、3 MeV 这三种能量选择条件下,  $c_1$  的拟合结果, 而 1 ~ 5 行则分别对应 320 ton  $\times$  2、6、10、15、20 year 共 5 组曝光量下,  $c_1$  的拟合结果。从图中可知,  $c_1$  满足高斯分布, 通过从负无穷积分到 0 (淡蓝色区域), 来量化不同能量选择条件和曝光量下, 对于无概率上升效应的排除灵敏度  $S$ , 并在图中标识。

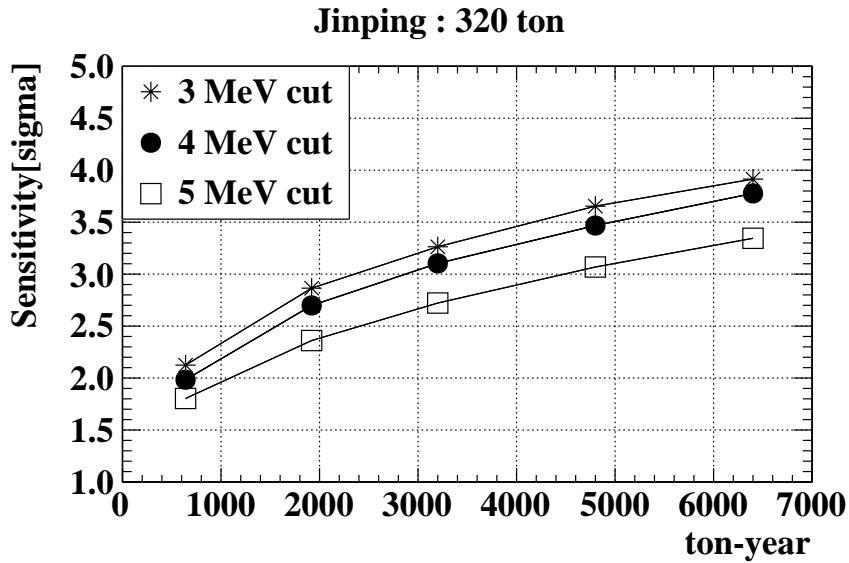


图 6.16 LiCl 水溶液拒绝无概率上升效应的灵敏度与探测器有效曝光量的关系。其中分别展示出了 5 MeV (方框), 4 MeV (实心圆) 和 3 MeV (星形) 这三种能量选择条件下的结果。

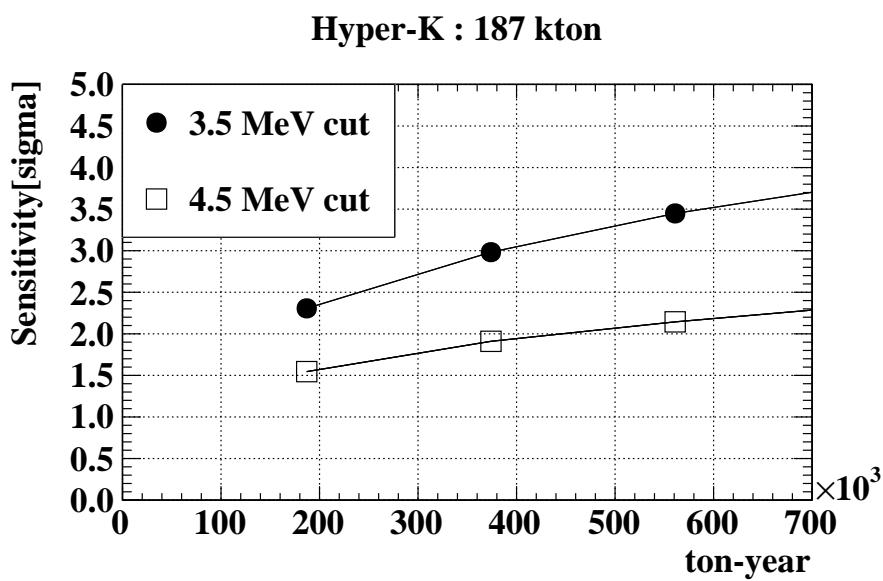


图 6.17 Hyper-K 拒绝无概率上升效应的灵敏度与探测器有效曝光量的关系。其中分别展示了 4.5 MeV (方框), 3.5 MeV (实心圆) 这两种能量选择条件下的结果。本图数据点来自文献<sup>[118]</sup>。

### 6.3.1 费尔德曼-科森方法的应用

下面具体介绍费尔德曼-科森方法的应用，主要包括以下 6 个步骤：

1. 将轻惰性中微子的参数空间  $(\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  分为  $40 \times 40$  的离散网格，对任一轻惰性中微子的混合参数对  $(\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  产生 500 个蒙特卡洛样本。
2. 对每一个蒙特卡洛样本，做同时释放物理参数和系统误差的全局拟合，得到  $\chi^2_{\text{Global}}$ 。
3. 对每一个蒙特卡洛样本，做固定物理参数，只释放系统误差的局域拟合，得到  $\chi^2_{\text{Local}}$ 。
4. 对每一个蒙特卡洛样本，计算局域拟合下的  $\chi^2_{\text{Local}}$  和全局拟合下的  $\chi^2_{\text{Global}}$  的差  $\Delta\chi^2$ 。
5. 在无惰性中微子假设下产生 500 个蒙特卡洛样本。重复第二步骤、第三步骤、第四步骤。
6. 通过将任一轻惰性中微子的混合参数对的  $\Delta\chi^2$  和零假设下的  $\Delta\chi^2$  对比，计算对特定混合参数对  $(\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  的排除灵敏度。

#### 产生蒙特卡洛样本

为了和 SNO 考察的参数空间做比较（图1.13），我们选取轻惰性中微子的混合参数  $\alpha$  和  $\Delta m_{01}^2$  的参数空间为：

$$\log_{10}(\sin^2 2\alpha) \in [-5, -2], \Delta m_{01}^2 \in [0, 25 \times 10^{-6}] \text{ eV}^2. \quad (6.8)$$

这一区间的  $\alpha$  范围和图1.13一致，但是图1.13中

$$R_\Delta \in [0, 0.25] \text{ 对应 } \Delta m_{01}^2 \in [0, 17.75 \times 10^{-6}] \text{ eV}^2. \quad (6.9)$$

我们所考察的参数空间中  $\Delta m_{01}^2$  的范围更大。

将这片参数空间均匀分割成  $40 \times 40$  的网格。对于每个网格上的格点，根据 6400 ton-year 的曝光设置生成  $40 \times 40$  个参数对下的带电流事例和弹性散射事例的期望能谱（见5.2节的讨论），如图5.5(e)和图5.5(f)所示。然后如式5.4和式5.5那样添加探测器效应，即同样考虑到带电流相互作用截面的不确定度为 2% ( $\eta_\sigma = \text{Gaus}(0, 0.02)$ )，探测效率的不确定度为 10% ( $\eta_\epsilon = \text{Gaus}(0, 0.10)$ )，归一化的不确定度为 10% ( $\eta_{\text{Norm}} = \text{Gaus}(0, 0.10)$ )，均由高斯分布随机产生。

检验特定参数对  $(\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  的假设：

$$H(X, Y) : \{\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2 : \sin^2 2\alpha = X, \Delta m_{01}^2 = Y\}, \quad (6.10)$$

基于该参数对的预期能谱，产生服从泊松分布的蒙特卡洛随机样本。为一个参数对生成了总共 500 个富含带电流事例的样本  $D_{\text{CC-rich}}$  和 500 个富含弹性散射事例的样本  $D_{\text{ES-rich}}$ 。

## 全局拟合

拟合每一组富含带电流事例的样本  $D_{\text{CC-rich}}$  和富含弹性散射事例的样本  $D_{\text{ES-rich}}$ ，拟合过程中让所有参数可调，一并参与拟合，包括轻惰性中微子的混合参数和代表系统误差的参数 [ $\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2, \eta_\sigma, \eta_\varepsilon, \eta_{\text{Norm}}$ ]，采用最小二乘法拟合蒙特卡洛样本：

$$\begin{aligned}\chi^2 = & \sum_i (D_{\text{CC-rich},i} - P_{\text{CC-rich},i})^2 / D_{\text{CC-rich},i} \\ & + \sum_i (D_{\text{ES-rich},i} - P_{\text{ES-rich},i})^2 / D_{\text{ES-rich},i} . \\ & + (\eta_\sigma / 2\%)^2 + (\eta_\varepsilon / 10\%)^2 + (\eta_{\text{Norm}} / 10\%)^2\end{aligned}\quad (6.11)$$

为一个蒙特卡洛拟合得到最佳的  $\chi^2$ ，记为  $\chi^2_{\text{Global}}$ 。

我们生成了 500 组蒙特卡洛样本，可以获得 500 个  $\chi^2_{\text{Global}}$ 。拟合得到的物理参数和系统误差记为  $([\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2, \eta_\sigma, \eta_\varepsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(X, Y))_{\text{Global}}$ 。表示在全局拟合下得到的物理参数和系统误差的拟合值。

## 局域拟合

现在固定轻惰性中微子的混合参数 ( $\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2$ ) 为  $(X, Y)$  格点上的参数，即 ( $\sin^2 2\alpha = X, \Delta m_{01}^2 = Y$ )，只让代表系统误差的参数  $\eta_\sigma, \eta_\varepsilon, \eta_{\text{Norm}}$  可调，再一次拟合蒙特卡洛样本，得到最佳的  $\chi^2$ ，记为  $\chi^2_{\text{Local}}$ 。可以获得 500 个  $\chi^2_{\text{Local}}$ 。拟合得到的系统误差记为  $([\eta_\sigma, \eta_\varepsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(X, Y))_{\text{Local}}$ 。

**计算  $\Delta\chi^2$ :**

对于一个每一个蒙特卡洛样本，计算：

$$\Delta\chi^2_{X,Y} = \chi^2_{\text{Local}} - \chi^2_{\text{Global}}. \quad (6.12)$$

我们能够得到 500 个基于  $H(X, Y)$  假设下产生的  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$ 。换句话说，对于每一个参数格点，我们能够得到  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  这一分布。经过这一步骤后，能够去掉系统误差等多余参数 (Nuisance Parameters) 对  $\Delta\chi^2_{X,Y}$  的贡献。

## 零假设下的模拟

在前面步骤中，使用的蒙特卡洛样本是在参数对  $[\sin^2(2\alpha) = X, \Delta m_{01}^2 = Y]$  假设下生成的。现在我们在无惰性中微子假设

$$H(0, 0) : \{\sin^2(2\alpha), \Delta m_{01}^2 : \sin^2(2\alpha) = 0, \Delta m_{01}^2 = 0\} \quad (6.13)$$

下生成 500 组蒙特卡洛样本  $D_{CC\text{-rich}}^0$  和富含弹性散射事例的样本  $D_{ES\text{-rich}}^0$ 。

然后和之前步骤基本一致，重复之前的步骤从而得到 500 个特定参数对下的  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$ 。换句话说，我们可以得到特定的一个参数格点下的  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  这一分布。

## 灵敏度计算

首先从 500 个  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  中得到  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  的中位数： $\text{med}(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$ 。然后将每一个  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  与  $\text{med}(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  作比较，可以得到  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  比  $\text{med}(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  少的数量所占  $(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  的比例。我们将这个比例记为  $\alpha_{X,Y}$ ，如式 6.14 所示。

$$\alpha_{X,Y} = \int_0^{\text{med}(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0,0))} f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y)) d(\Delta\chi^2_{X,Y}). \quad (6.14)$$

我们可以计算出每一个参数格点相应的  $\alpha_{X,Y}$ 。这是一个二维直方图。对于这个二维直方图，可以绘制出 0.90 和 0.99 的等高线，如图 6.18 所示。可以看到，图 6.18 中，基于 6400 吨年的有效曝光量和 5 MeV 能量选择条件，氯化锂水溶液探测器对于混合参数对  $(\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2)$ ，排除能力在 99% 及以上的置信区间覆盖了顶点为  $(10^{-4}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 0)$  的近似三角形区域。

### 6.3.2 拟合结果的检查

为了检查图 6.18 中的灵敏度结果，将轻惰性中微子的参数空间分为  $6 \times 6$  的格点，如图 6.19 所示。每个格点上  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  和  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  分别对应图 6.20 中蓝线和红线。一并示出的还有自由度为 2 的  $\chi^2(2)$  分布，用淡蓝色线表示。

另外，每个格点上惰性中微子的  $P_{ee}$  曲线（Sterile）和三代中微子的  $P_{ee}$  曲线（MSW）分别对应图 6.21 中蓝线和红线。一并示出的还有 5 MeV 的能量选择条件。

根据 Wilks 定理， $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  满足自由度为 2 的卡方分布， $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  不满足卡方分布，如图 6.20 中红线和淡蓝色线的对比。但是如果在一些惰性中微子参数对下， $\nu_e$  的存活概率曲线很接近 0 假设所预测的  $\nu_e$  的存活概率曲线（如图 6.21 中蓝色和红线的对比），那么  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  的分布就很接近  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  的分布（如图 6.20 中蓝线和红线的对比），此时对于这些惰性中微子混合

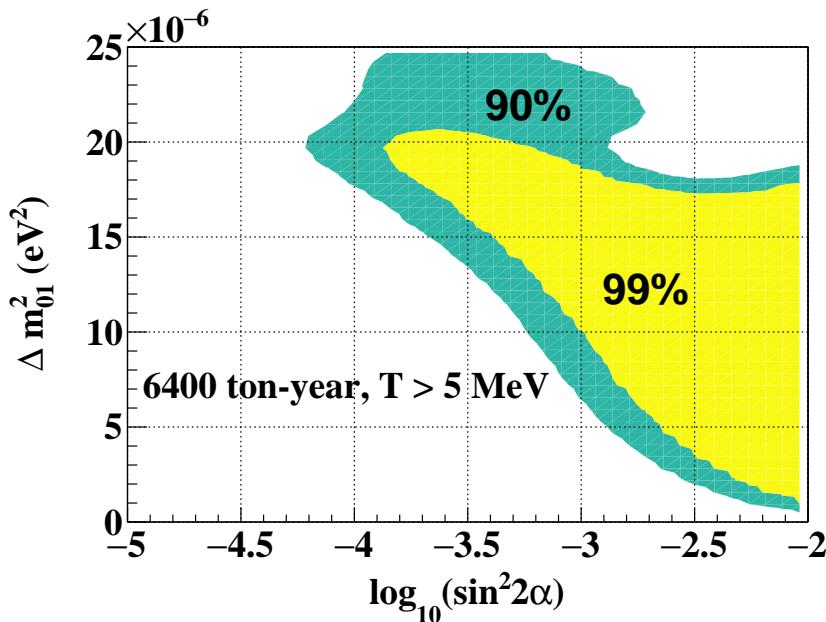


图 6.18 LiCl 探测器对轻惰性中微子参数空间的 99% 排斥灵敏度（黄色区域），以及 90% 排斥灵敏度（绿色区域）。曝光量为 6400 ton-year，能量选择条件为 5 MeV。

参数空间的排除能力就弱。

在图6.21中，我们可以看到，在  $T > 5 \text{ MeV}$  的能量区间，惰性中微子下的  $P_{ee}$  曲线和三代中微子的  $P_{ee}$  曲线差异越大，那么对应的排除灵敏度就越高。差异越小的参数空间对应的排除灵敏度就越弱。在某些参数空间下，虽然惰性中微子和 0 假设的概率曲线相差很大，但是差异如果集中在 5 MeV 以下，那么对于这些参数空间的排除能力也很弱。

### 6.3.3 误差的影响

为了考察灵敏度等高线的结果中误差的影响，首先不考虑系统误差，在不同的轻惰性中微子混合参数对下得到预期能谱，即阿西莫夫数据集。计算和标准参数下的阿西莫夫数据集之间的  $\chi^2$ ，由  $\chi^2$  的二维分布得到 90% 和 99% 的等高线。如图6.22所示。实际拟合的情况（图6.18），和由阿西莫夫数据集计算的等高线轮廓（图6.22）相比，在右上角的区域（图6.19蓝色阴影区域）内排除能力显著变小。说明这部分区域的系统误差和物理参数发生了简并。

下面考察系统误差是如何和物理参数发生简并的。在同时关闭系统误差和统计误差的情况下，分别考察以下四种情况：

- 首先，考察在  $H(X, Y)$  假设下，产生的蒙特卡洛样本的全局拟合，此时由于样本是在  $(X, Y)$  格点上生成，并且没有任何误差，那么拟合出来的  $([\sin^2(2\alpha), \Delta m_{01}^2] | H(X, Y))_{\text{Global}}$  一定是在真实值  $[\sin^2(2\alpha) = X, \Delta m_{01}^2 = Y]$

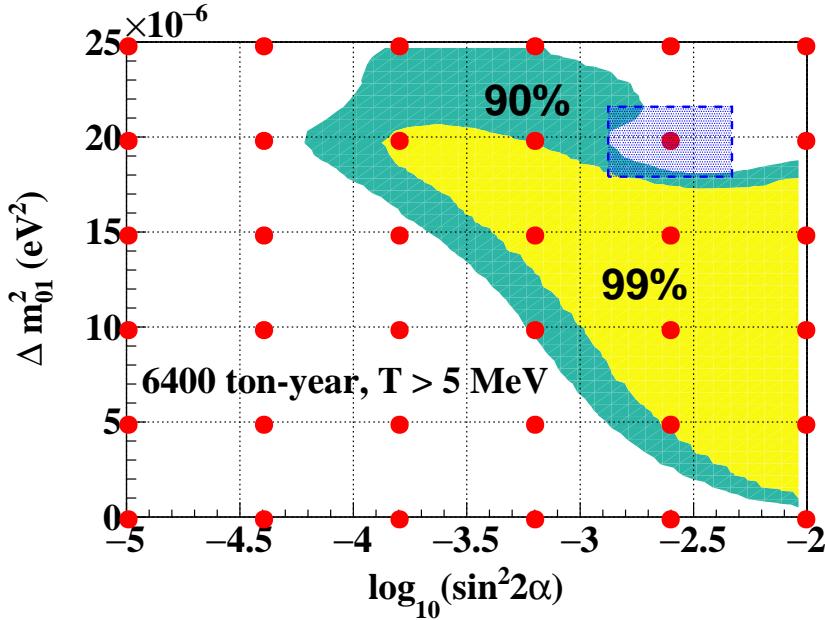


图 6.19 将  $(\log_{10}(\sin^2 2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  参数对分为  $6 \times 6$  的格点，用于检查每个格点上的灵敏度结果，蓝色阴影区域是排除能力和通过阿西莫夫数据集得到的结果差异最明显的区域，需要重点考察。

上，拟合出来的系统误差  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(X, Y))_{\text{Global}}$  一定为 0。

- 考察  $H(X, Y)$  假设下产生的蒙特卡洛样本的局域拟合，此时固定  $(X, Y)$  为真实值，拟合出来的系统误差  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(X, Y))_{\text{Local}}$  也一定为 0。
- 考察  $H(0, 0)$  假设下产生的蒙特卡洛样本的全局拟合。此时由于样本是在无惰性中微子假设下生成，并且没有任何误差，所以对于任何一个样本拟合得到的  $([\sin^2(2\alpha), \Delta m_{01}^2] | H(0, 0))_{\text{Global}}$  都是相同的： $\sin^2(2\alpha) \simeq 0, \Delta m_{01}^2 \simeq 0$ 。拟合得到的  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Global}}$  也是相同的，并没有特别的物理。
- 考察  $H(0, 0)$  产生的蒙特卡洛样本的局域拟合。此时样本是在没有惰性中微子情况下生成的，且固定  $(X, Y)$  为真实值。 $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Local}}$  的中心值关于  $(\sin^2(2\alpha), \Delta m_{01}^2)$  的二维分布如图6.23所示。从图6.23，系统误差  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Local}}$  的中心值偏离了 0。

第四种情况下系统误差  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Local}}$  的中心值发生了偏离 0 的现象，是因为在每个  $(X, Y)$  格点上拟合得到的  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0, 0))_{\text{Local}}$  能够抵消每个格点上的惰性中微子下的能谱和没有惰性中微子下的能谱之间的差异，从而发生了系统误差和物理参数的简并。系统误差参数有能力造出来轻惰性中微子参数的信号。

为了验证系统误差和物理参数发生了简并，将  $H(0, 0)$  下 CC-rich 和 ES-rich 的能谱（红线），和  $H(X, Y)$  下 CC-rich 和 ES-rich 的能谱（蓝线），以及  $H(X, Y)$  下考

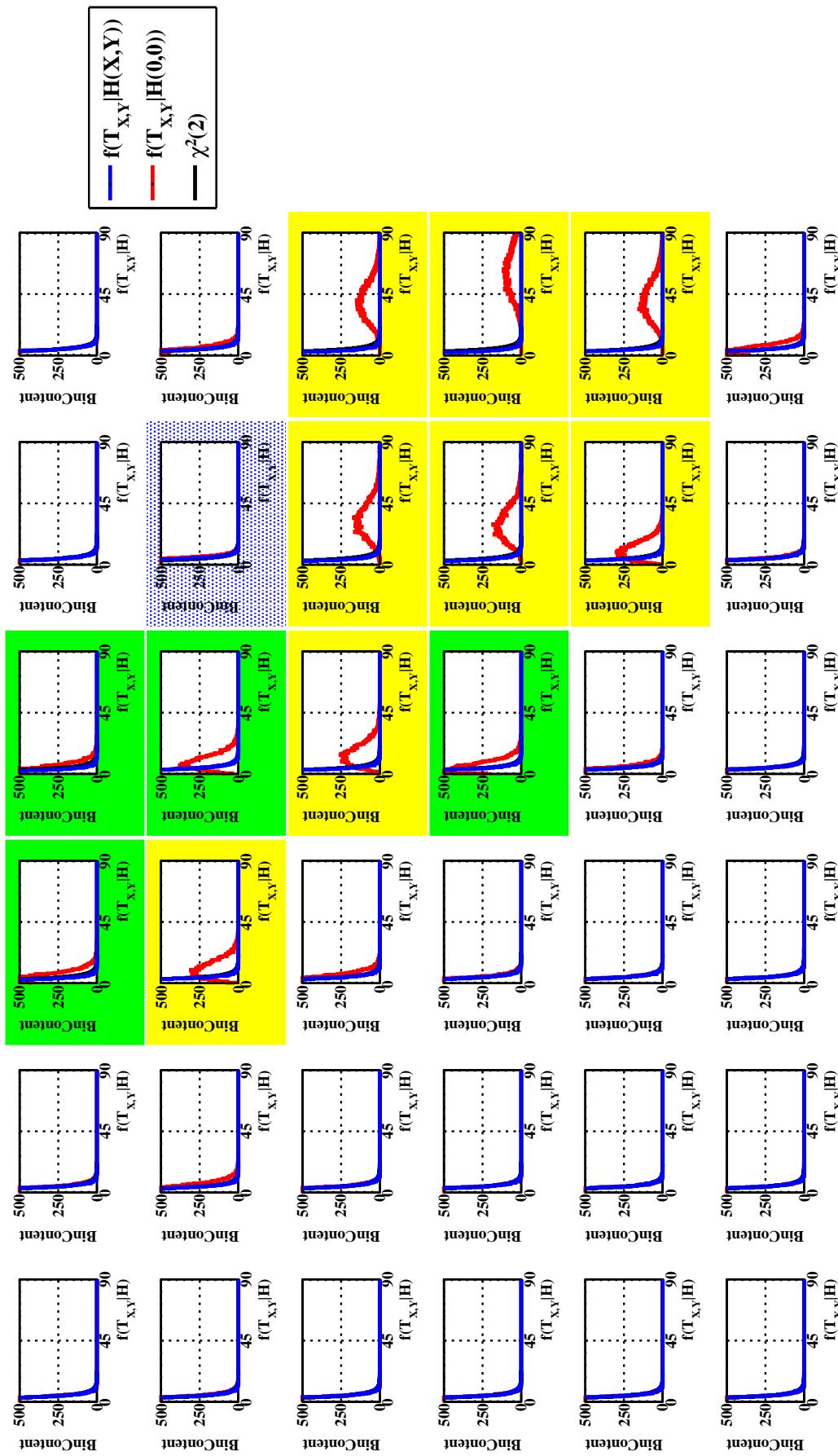


图 6.20 将轻惰性中微子的参数空间分为  $6 \times 6$  的格点。每个格点上  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(X, Y))$  (蓝线) 和  $f(\Delta\chi^2_{X,Y} | H(0, 0))$  (红线)。一并示出的还有自由度为 2 的  $\chi^2(2)$  分布 (淡蓝色线)。

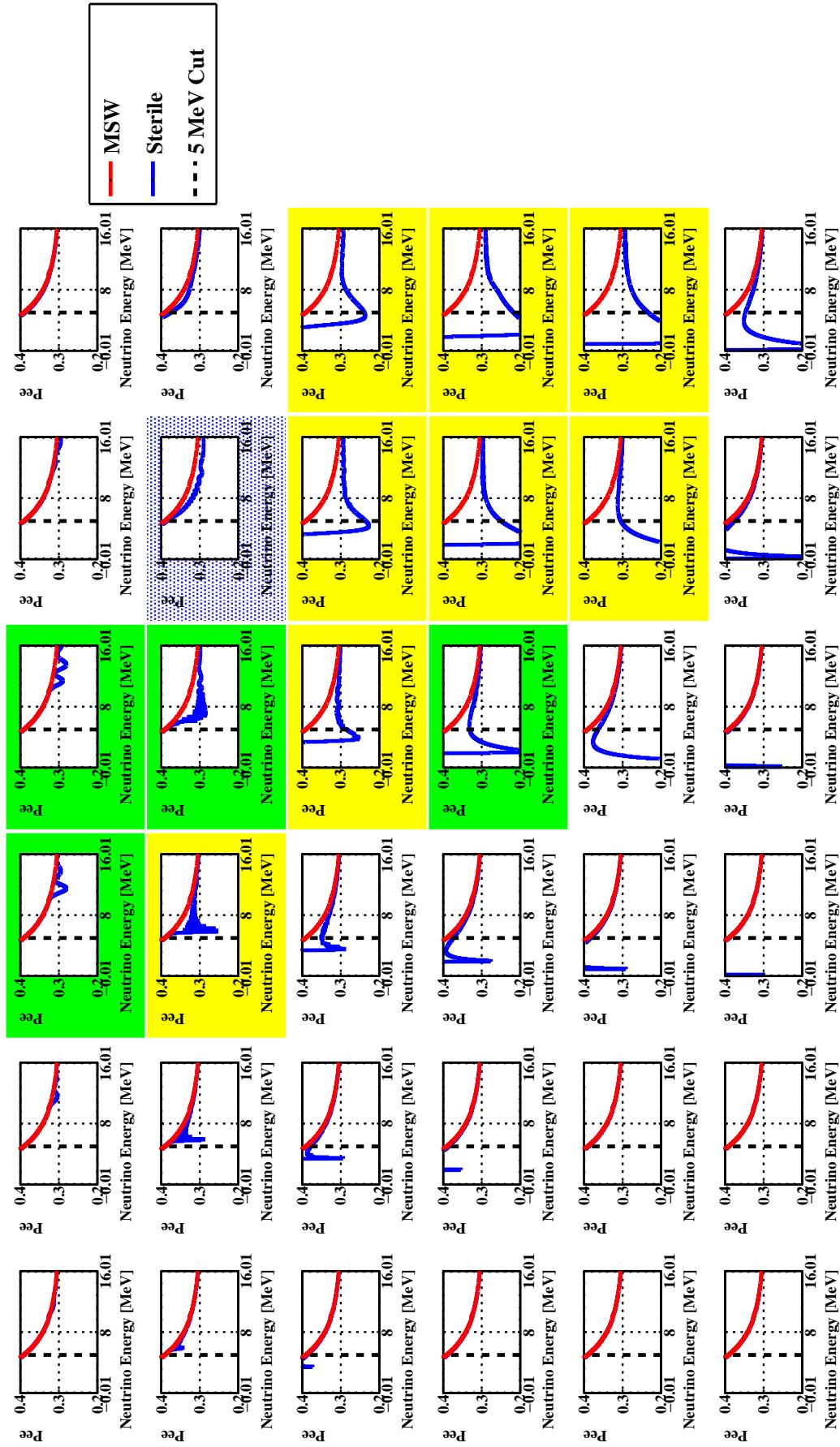


图 6.21 将轻惰性中微子的参数空间分为  $6 \times 6$  的格点。每个格点上惰性中微子的  $P_{ee}$  曲线（蓝线）和三代中微子的  $P_{ee}$  曲线（红线）。一并示出的还有 5 MeV 的能量选择条件（黑线）。

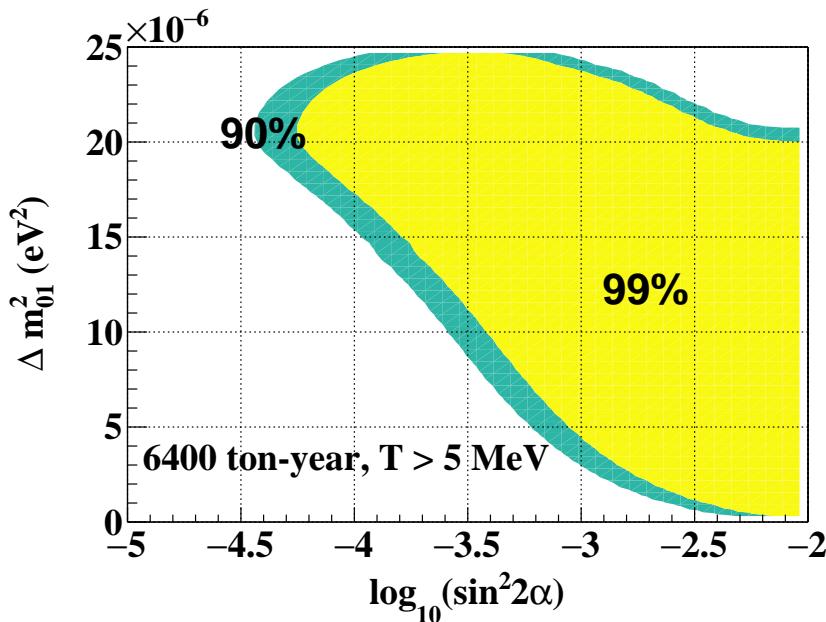


图 6.22 计算不同的轻惰性中微子混合参数对下的阿西莫夫数据集和标准参数下的阿西莫夫数据集之间的  $\chi^2$ , 得到 90% 和 99% 灵敏度的等高线。

虑图6.23中  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0,0))_{\text{Local}}$  中心值后的能谱（绿色虚线）一并画出，CC-rich 和 ES-rich 的能谱分别如图6.24和图6.25所示。

从图6.24和图6.25可以看到,  $H(X, Y)$  下的 CC-rich 能谱和 ES-rich 能谱与  $H(0,0)$  下对应的能谱相比, 在某些混合参数空间差异较大, 这些参数空间对应于图6.22中的等高线区域内的参数空间。在考虑  $([\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}}] | H(0,0))_{\text{Local}}$  中心值后,  $H(X, Y)$  下的 CC-rich 和 ES-rich 的能谱与  $H(0,0)$  下的能谱更加贴近, 尤其表现在图6.18右上角的参数空间区域(图6.19蓝色阴影区域)。说明系统误差确实能够和物理参数发生简并, 从而造成实际拟合的灵敏度等高线和阿西莫夫数据集的差异。

## 6.4 地球物质效应和地球成像的研究

在带电流的作用下, 中微子的能量信息可以得到, 从而能够看到中微子穿过地球后呈现的振荡结构, 如图 3.9所示, 这是检验地球物质效应的重要特征。我们基于是否存在地球效应这两种假设下的似然函数, 给出了一种检验地球物质效应的检验统计量。

### 6.4.1 事例数分布的结构

中微子的天顶角信息可以由时间完全确定, 在带电流情况下又能够确定中微子的能量, 在双重的信息下, 将能够看到由地球物质效应所带来的更为丰富的结

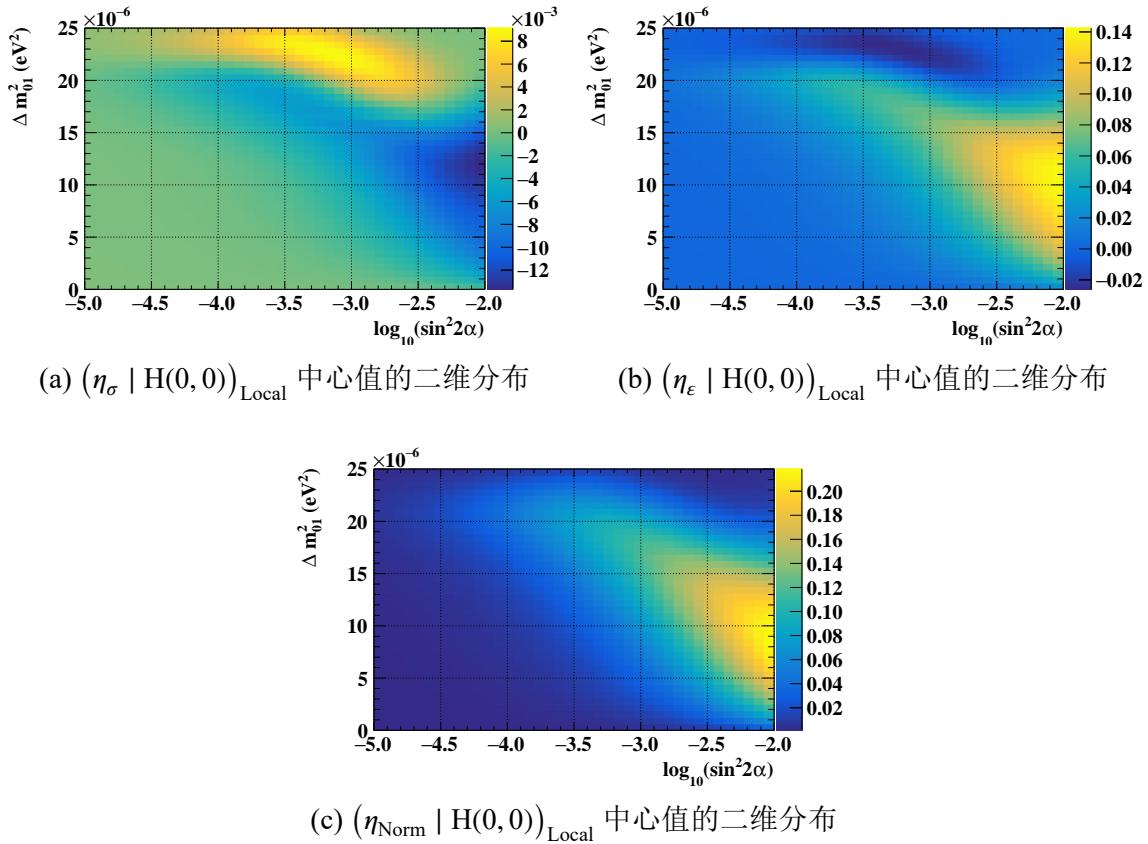


图 6.23 (a) 带电流截面误差  $(\eta_\sigma | H(0,0))_{\text{Local}}$  的中心值关于轻惰性中微子混合参数的二维分布。 (b) 弹性散射选择效率误差  $(\eta_\epsilon | H(0,0))_{\text{Local}}$  的中心值关于轻惰性中微子混合参数的二维分布。 (c) 归一化误差  $(\eta_{\text{Norm}} | H(0,0))_{\text{Local}}$  的中心值关于轻惰性中微子混合参数的二维分布。以上基于 6400 ton-year 的曝光。

构。并且白天和夜晚的结构是不同的。

白天带电流事例数和夜间带电流事例数分布分别如图6.26(a)和图6.26(b)所示。从图中都可以看出锦屏实验室曝光函数的结构（图2.18(a)）和<sup>8</sup>B中微子能谱的结构（图1.4），但是夜晚带电流事例数分布还具有振荡结构。

#### 6.4.2 地幔-地核双层成像

我们将 PREM 模型简化为地幔-地核双层模型，进行地幔-地核的双层成像。采用的双层模型为  $\rho_{\text{mantle}} = 4.663 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_{\text{core}} = 11.848 \text{ g/cm}^3$ , 双层模型的分界在古登堡界面  $0.546R_\oplus$  处（图A.2(a)）。这一双层模型下的密度为我们假设的密度分布真值  $\rho_{\text{truth}}$ 。

我们希望能够将能量和天顶角的区间分得足够得细，从而能够看到中微子的振荡结构，但是这样的话，大部分区间的事例数的预期值将会小于 1，所以采用最

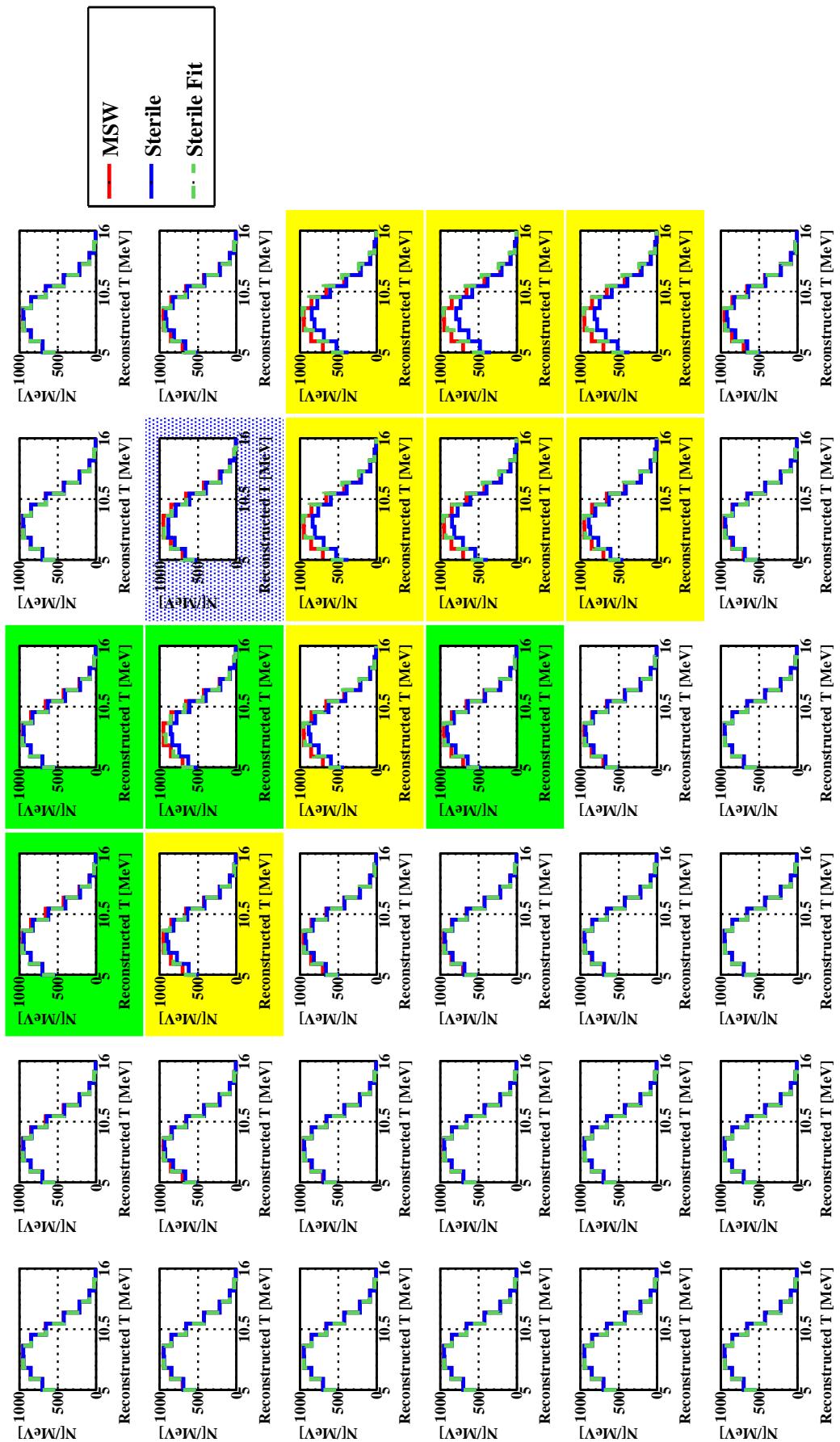


图 6.24  $H(0,0)$  下 CC-rich 能谱（红线），和  $H(X,Y)$  下 CC-rich 能谱（蓝线），以及  $H(X,Y)$  下考虑  $(\eta_\sigma, \eta_\epsilon, \eta_{\text{Norm}} | H(0,0))_{\text{Local}}$  中心值后的 CC-rich 能谱（绿色虚线）。

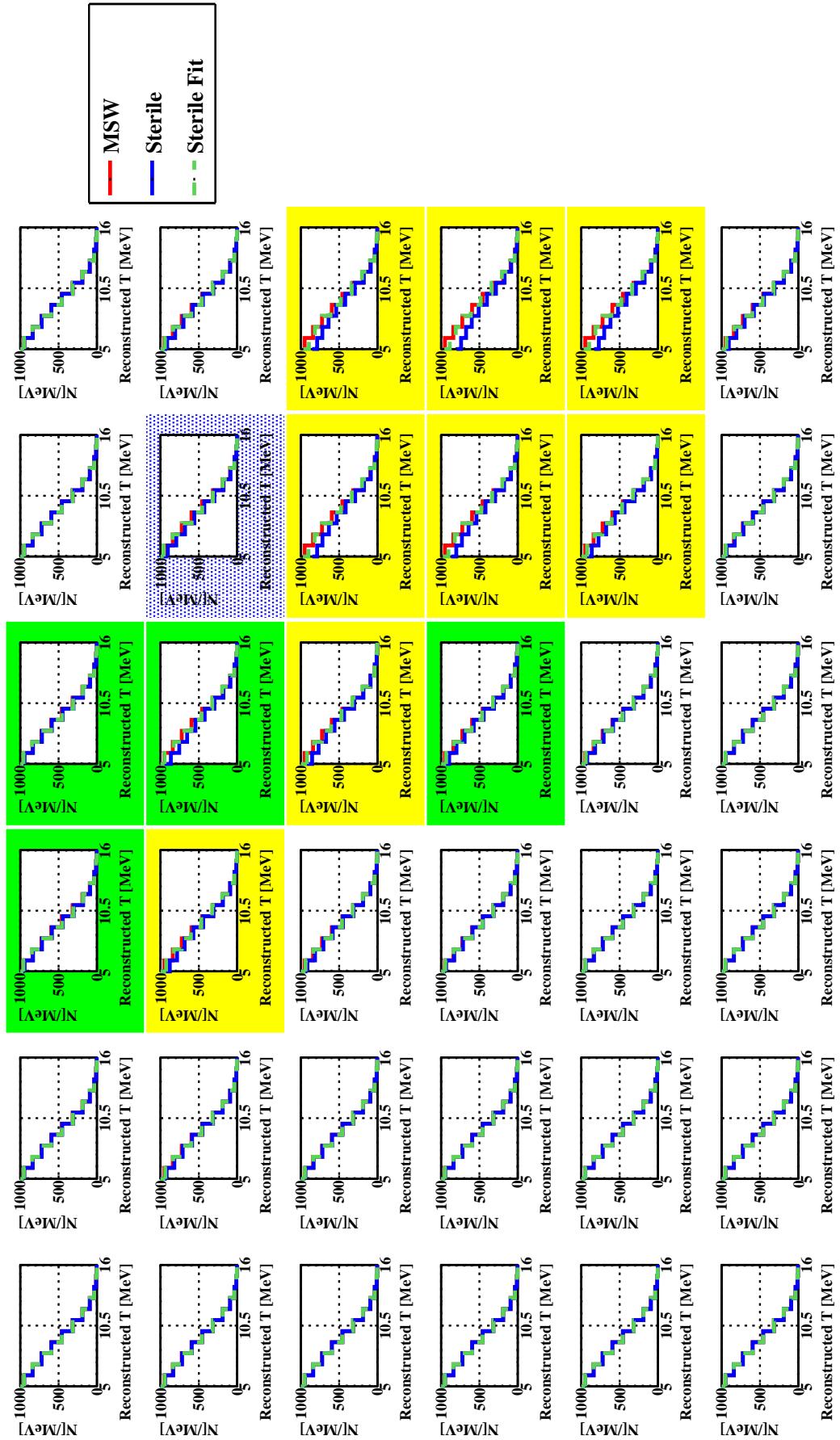
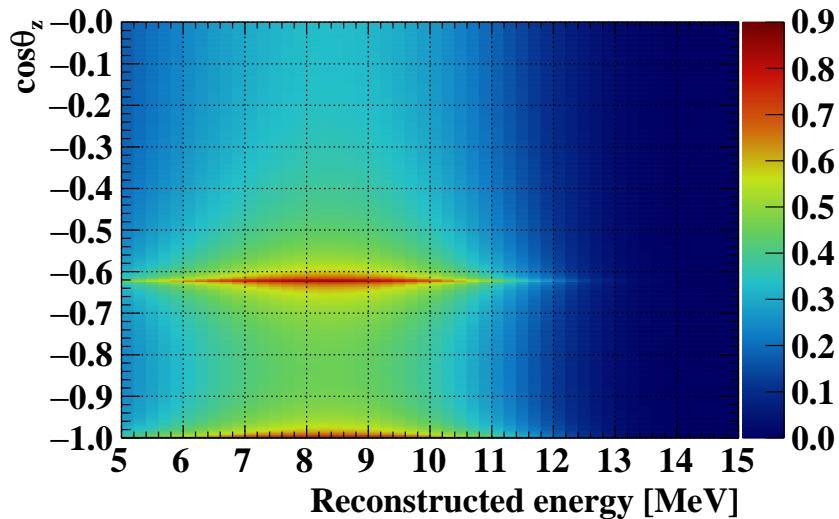
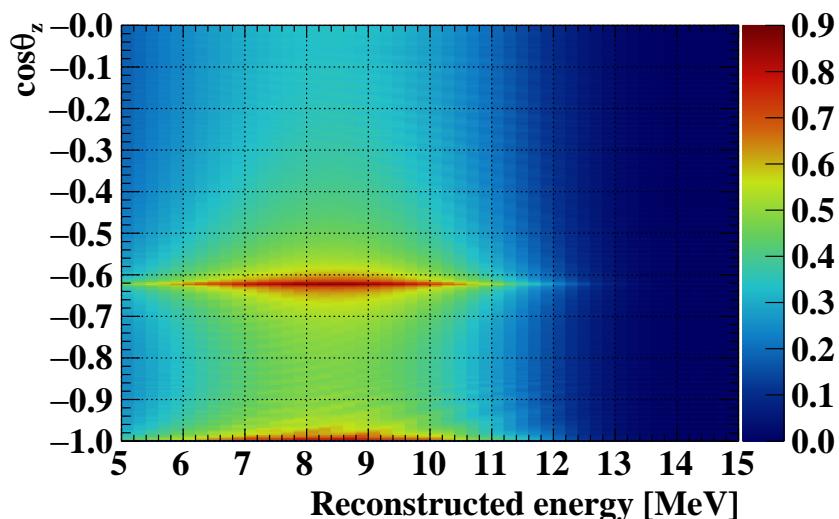


图 6.25  $H(0, 0)$  下 ES-rich 能谱（红线），以及  $H(X, Y)$  下 ES-rich 能谱（蓝线），以及  $H(X, Y)$  下考虑  $(\eta_\sigma, \eta_e, \eta_{\text{Norm}} | H(0, 0))_{\text{Local}}$  中心值后的 ES-rich 能谱（绿色虚线）。



(a) 白天的 CC 事例



(b) 夜晚的 CC 事例

图 6.26 (a) 白天的带电流事例关于中微子能量  $E_\nu$  和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值  $\cos\theta_Z$  的二维分布。(b) 夜晚的带电流事例关于中微子能量  $E_\nu$  和天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值  $\cos\theta_Z$  的二维分布。以上基于 6400 吨·年的曝光, 以及  $1/\sqrt{400E}$  [MeV] 的高能量分辨率。

大似然法进行地幔-地核的密度拟合。拟合的似然函数为：

$$L(n_{ij}[\rho = \rho_{\text{truth}}] | \rho) = \frac{\nu_{\text{total}}^{n_{\text{total}}}}{n_{\text{total}}!} e^{-\nu_{\text{total}}} \prod_{ij} f^{n_{ij}}(\cos \theta_i, E_j). \quad (6.15)$$

其中， $\rho$  是关于地幔-地核密度的假设值， $n_{ij}[\rho = \rho_{\text{truth}}]$  为地幔-地核密度为设定的“真实值”下，事例数的关于电子动能和  $\cos \theta_Z$  的二维分布， $n_{\text{total}}$  为事例数的总数， $\nu_{\text{total}}$  为预期事例数的总数。 $f(\cos \theta_i, E_j)$  是二维分布的概率密度函数。我们采用似然函数的自然对数值可以使计算变成简单的加法，从而变得容易：

$$\begin{aligned} & \ln L(n_{ij}[\rho = \rho_{\text{truth}}] | \rho) \\ &= -\nu_{\text{total}} + n_{\text{total}} \ln \nu_{\text{total}} - \ln n_{\text{total}}! + \sum_{ij} n_{ij} \ln f(\cos \theta_i, E_j). \end{aligned} \quad (6.16)$$

我们在确定地幔-地核边界的情况下拟合地幔和地核的密度。首先基于晚上带电流事例数量的分布生成蒙特卡罗随机样本，并将每个随机样本关于地幔和地核密度做拟合。拟合过程中没有考虑任何系统误差，并且基于  $1/\sqrt{400E \text{ [MeV]}}$  的高能量分辨率，从而给出氯化锂探测器对于地幔和地核密度拟合水平的初步估计。

图6.27中的六张图显示了在不同曝光下，基于地幔-地核双层模型下，地幔地核密度的拟合结果，其中 6400 ton-year 是探测器的基本曝光时间。在此基础上，将曝光量乘以 1、2.5、5、7.5、10 分别拟合地幔和地核的密度。随着曝光量的增加，地幔和地核的拟合结果越来越接近设定的真实值，且地幔的拟合精度略高于地核。并且在图6.27中也能注意到，在有效曝光大于 30000 ton-year，继续提高曝光量对于地幔地核拟合的精度提高的程度明显降低。

氯化锂探测器对于地幔和地核密度的拟合精度如图6.28所示。氯化锂探测器达到大约 10% 的精度只需要 10 kton-year 以内的有效曝光，与 DUNE 需要 400 kton-year 相比，优势明显，但本研究尚未考虑系统误差，并且是在高能量分辨下做的模拟，考虑系统误差的影响和低能量分辨的情况还有待更深入的研究。

如果振荡信息能够成功地从夜晚中微子事例数的二维分布（图6.26(b)）中提取出来，那么我们预计灵敏度会更高。

### 6.4.3 地球效应

我们提出了一种测试地球物质的新方法。在过去的中微子实验中，检验地球物质效应是通过计算昼夜中微子事例数的不对称效应，即式1.27。在只考虑统计误差的情况下，式1.27中  $A_{DN}$  的不确定度和对应的以  $n [\sigma]$  为单位的灵敏度为：

$$\sigma_{DN} = 4 \sqrt{\frac{D \times N}{(D + N)^3}}, \quad n [\sigma] = \frac{D - N}{2} \sqrt{\frac{D + N}{D \times N}}. \quad (6.17)$$

在本研究中，我们试图在存在物质效应的情况下产生模拟样本（对应  $\rho =$

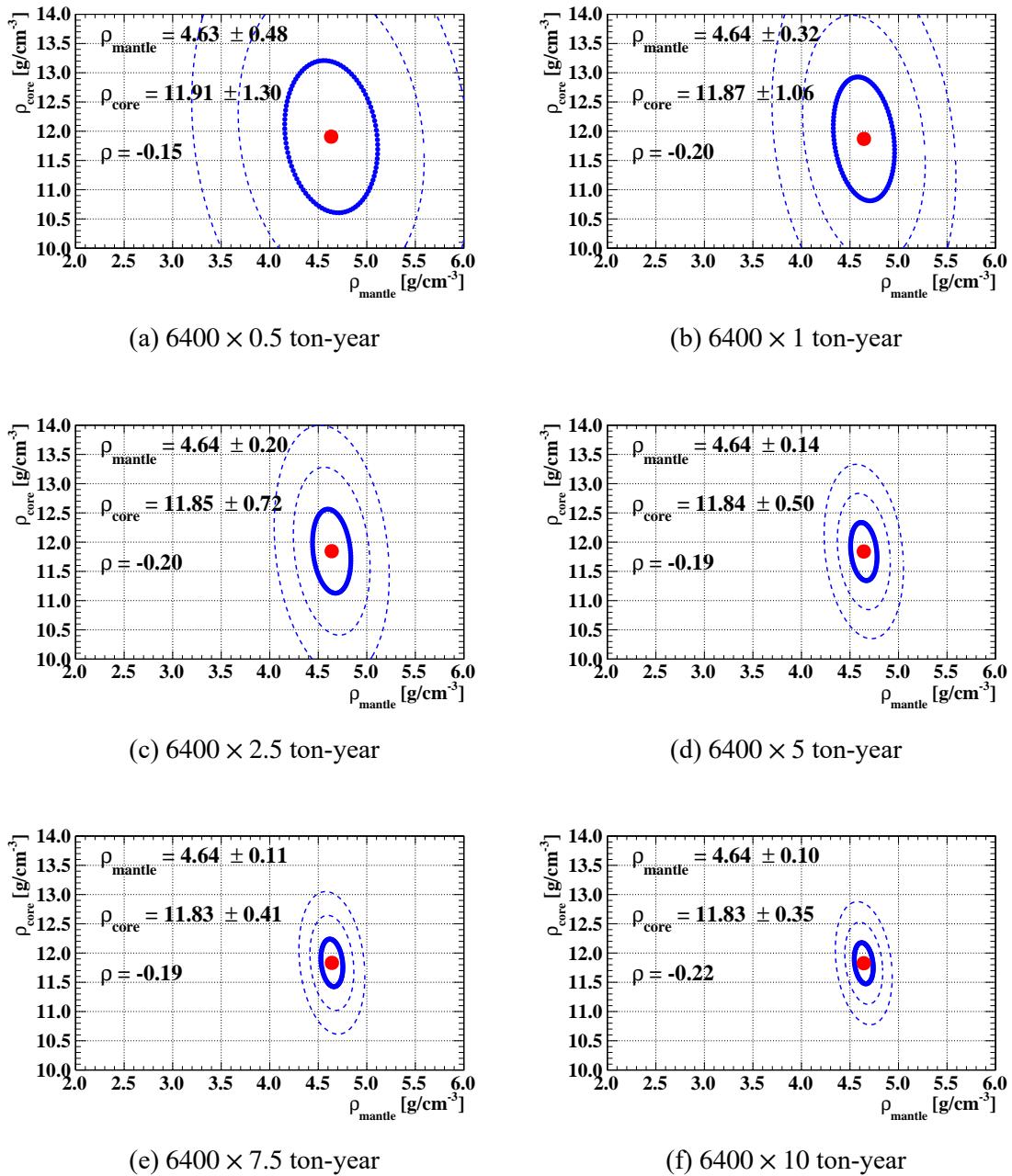


图 6.27 6400 ton-year 是探测器的基本曝光时间。在此基础上，将曝光量分别乘以 1、2.5、5、7.5、10 后，地幔和地核密度拟合值的分布结果（红点处）和  $1\sigma$  范围（蓝色实线椭圆区域）和  $2, 3\sigma$  范围（蓝色虚线椭圆区域）。以上基于  $1/\sqrt{400E} [\text{MeV}]$  的高能量分辨率。

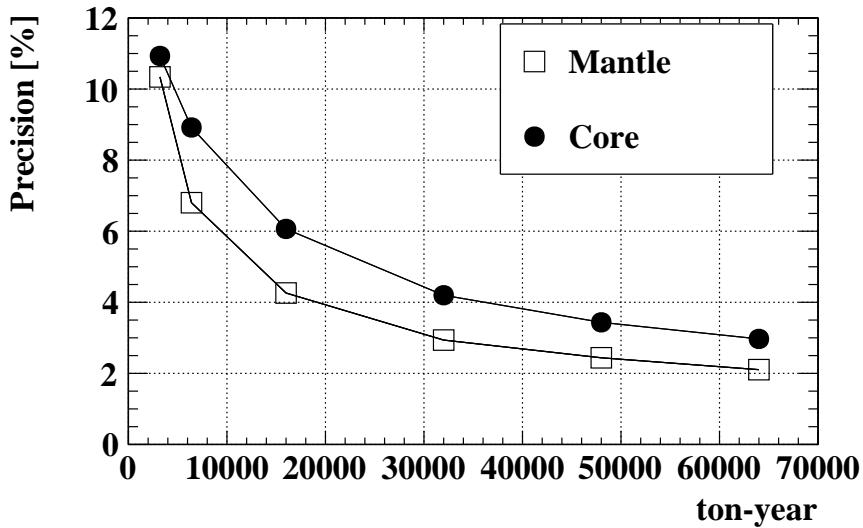


图 6.28 LiCl 探测器对于地幔、地核密度的拟合精度随着曝光的变化，拟合过程中没有考虑系统误差。

$\rho_{\text{PREM}}$ ），并比较在有地球物质效应（对应  $\rho = 0$ ）和没有地球物质效应（对应  $\rho = \rho_{\text{PREM}}$ ）这两种假设下似然函数自然对数值的分布，即：

- 存在地球物质效应假设下的似然函数自然对数值：

$$\ln L(n_{ij}[\rho = \rho_{\text{PREM}}] | \rho = 0), \quad (6.18)$$

- 存在地球物质效应假设下的似然函数自然对数值：

$$\ln L(n_{ij}[\rho = \rho_{\text{PREM}}] | \rho = \rho_{\text{PREM}}), \quad (6.19)$$

考察这两个分布之间是否存在显著区别。

图6.29是在  $1/\sqrt{400E \text{ [MeV]}}$  的高能量分辨率下，两种情况似然函数的自然对数值的分布。在 6400 ton-year 曝光的基础上，将曝光乘以  $1 \times 10^4$  倍。我们用高斯分布来拟合这两种分布，灵敏度  $S$  通过

$$S = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \quad (6.20)$$

得到 LiCl 水溶液探测器对地球物质效应的敏感度大约是  $2\sigma$ 。

如果能像概率分布一样从事件数的二维分布图中提取出清晰的振荡信息，将有望提高统计量的检验能力。

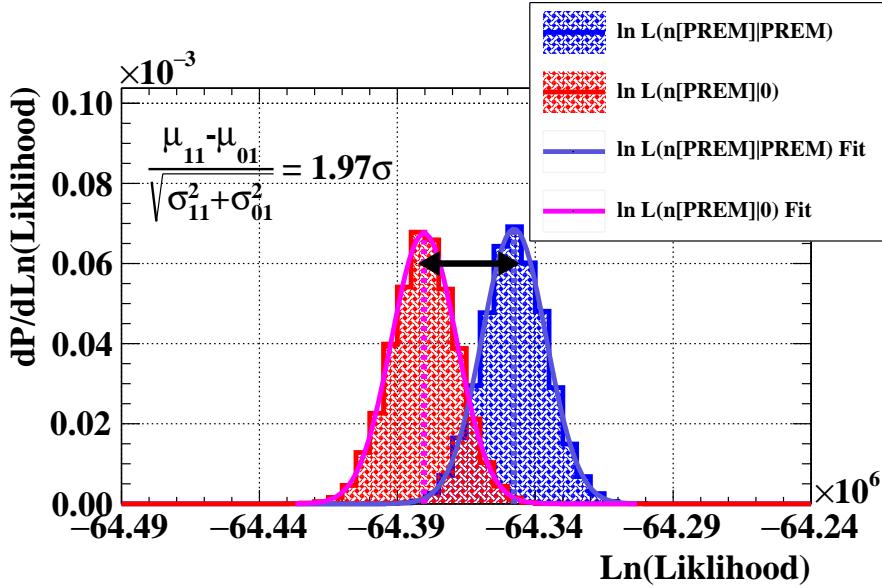


图 6.29 无地球物质效应下的似然函数自然对数值（式6.18）的分布（红色区域）以及这一分布的高斯拟合（粉色实线），以及有地球物质效应下的似然函数自然对数值（式6.19）的分布（蓝色区域）以及这一分布的高斯拟合（紫色实线）。以上基于  $6400 \times 10^4$  吨·年的有效曝光量，以及  $1/\sqrt{400E} [\text{MeV}]$  的高能量分辨率。

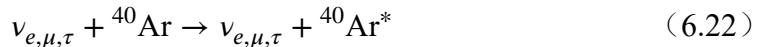
## 6.5 DUNE 液氩探测器的表现

我们考察 DUNE 液氩探测器对于概率上升效应的探测灵敏度。DUNE 实验将采用纯天然液氩，DUNE 的近点探测器有 2 个液氩探测器（将来升级到 4 个液氩探测器），每个有 10 kton 的基准体积，周围是 1 m 厚的液氩屏蔽层<sup>[138]</sup>。我们采用  $4 \times 10^4$  ton 的基准体积进行计算，有效曝光时间同样设置为 20 year。 $^{40}\text{Ar}$  的天然丰度为 99.6%<sup>[251]</sup>。

DUNE 采用两个反应过程来探测太阳中微子。分别是  $\nu_e$  和 Ar 的带电流过程，即：



以及  $\nu_\alpha - e^-$  弹性散射。而中性流过程



的反应截面很小，反应6.22末态  $\text{Ar}^*$  退激放出的光子则可视为本底。采用  $40^\circ$  的角度选择条件，CC-rich 样本包含 88% 的 CC 事例和 19% 的 ES 事例；ES-rich 样本包含 12% 的 CC 事例和 81% 的 ES 事例<sup>[138]</sup>。

$\nu_e$  的 CC 过程到 K 的基态的 Q 值是 1.50 MeV，但是到基态的过程是禁戒的，因为 Ar 和 K 的自旋宇称分别为  $0^+$  和  $4^-$ ，这是严重压低的反应道，所以反应是到 K

的第一激发态。为了降低本底采用 9 MeV 的能量选择条件，从表6.3可知对应的中微子能量  $E_\nu > 12.833$  MeV。 $^{40}\text{Ar}$  的  $B_i(\text{F})$  和  $B_i(\text{GT})$  如表6.3所示。采用表6.3计算带电流过程（式6.21）的反应截面。

标准三代中微子情况下的 CC-rich 和 ES-rich 分别如图6.30(a)和6.30(b)所示；水平概率  $P_{ee} = 1/3$  下的 CC-rich 和 ES-rich 分别如图6.30(c)和6.30(d)所示。可以看到，MSW 下的能谱和水平概率的能谱差异很小，这是因为在中微子能量  $E_\nu > 12.833$  MeV， MSW 下  $P_{ee}$  曲线和水平概率  $P_{ee} = 1/3$  下的  $P_{ee}$  曲线差异很小，如图3.6(b)所示。可以预期 DUNE 的液氩探测器在概率上升效应的约束能力弱于相同曝光的 LiCl 探测器。

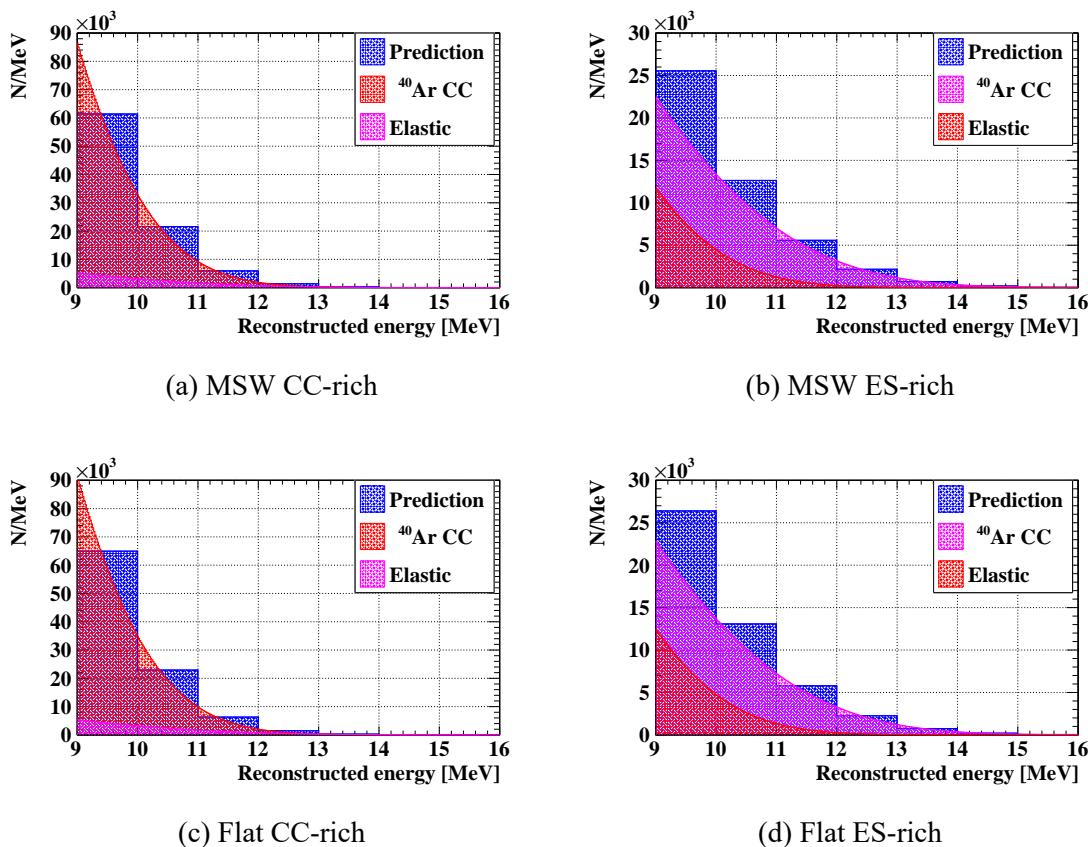


图 6.30 (a) MSW 振荡下，带电流富集 CC-rich 的能谱。(b) MSW 振荡下，弹性散射富集 ES-rich 的能谱。(c) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  下带电流富集 CC-rich 的能谱。(d) 水平概率  $P_{ee} = 1/3$  下弹性散射富集 ES-rich 的能谱。以上 DUNE 探测器的曝光量设置为  $40000 \times 20$  ton-year。

采用6.2.1一致的过程给出  $P_{ee}$  概率曲线的二次函数拟合，DUNE 的二次函数拟合结果如图6.31所示。并与 6400 ton-year 曝光，5 MeV 能量选择条件的 LiCl 水溶液探测器的结果对比（图6.6），可以发现 LiCl 水溶液探测器有着更显著的概率

上升效应趋势，以及更小的不确定度。这是因为 DUNE 液氩带电流的高反应阈值使得能够探测到的中微子能量  $E_\nu > 12.833 \text{ MeV}$ ，这一能段的概率上升效应很小，如图1.11(a)所示，所以 DUNE 的液氩探测过程对概率上升效应不敏感。

表 6.3  ${}^{40}\text{Ar}$  带电流的  $B_l(\text{F})$  和  $B_l(\text{GT})$ ，本表来自于<sup>[138]</sup>。

$l$	$\Delta E_l[\text{MeV}]$	$B_l(\text{F})$	$B_l(\text{GT})$
1	2.333		1.64
2	2.775		1.49
3	3.204		0.06
4	3.503		0.16
5	3.870		0.44
6	4.384	4.00	
7	4.421		0.86
8	4.763		0.48
9	5.162		0.59
10	5.681		0.21
11	6.118		0.48
12	6.790		0.71
13	7.468		0.06
14	7.795		0.14
15	7.952		0.97
total		4.00	8.29

## 6.6 本章小结

本章研究了 LiCl 水溶液探测器对于中微子振荡参数的测量，概率上升效应的探测，太阳惰性中微子的寻找，以及地球物质效应和地球成像等物理目标的灵敏度。

对于太阳中微子振荡参数的探测灵敏度，基于 6400 ton-year 的有效曝光， $\theta_{13}$  采用大亚湾拟合的结果作为系统误差，我们得到  $\sin^2 \theta_{12} = 0.302 \pm 0.019$ ，约 6.3% 的精度， $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.675 \pm 1.519$ ，约 20% 的精度。能够达到和目前太阳中微子全局拟合有竞争力的约束能力。另外，如果放开  $\theta_{13}$  同时参与约束，那么

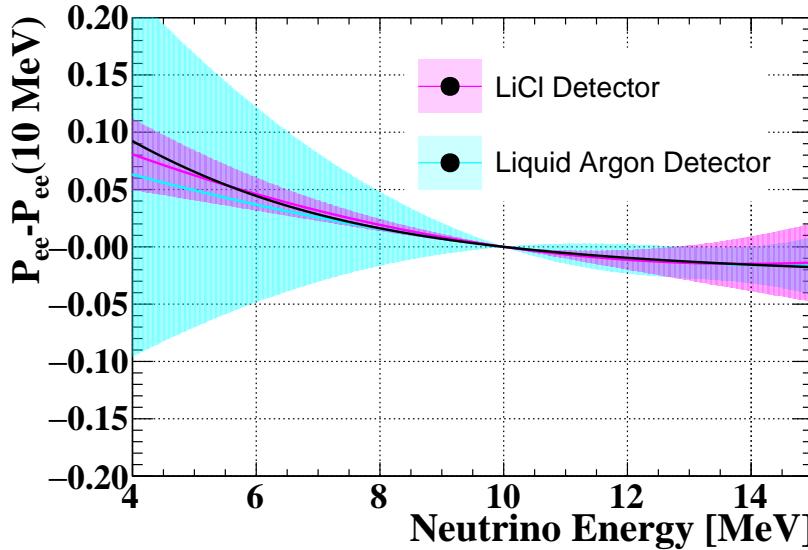


图 6.31 图中蓝线为 DUNE 关于  $c_1, c_2$  拟合均值下的  $\nu_e$  存活曲线，浅蓝色区域为液氩探测器概率曲线 1 倍 RMS 范围。粉色区域是曝光量为 6400 ton-year 的氯化锂探测器的结果，用以对比。黑色线为目前振荡参数  $\Delta m_{21}^2, \theta_{12}, \theta_{13}$  下的振荡概率曲线。DUNE 的有效曝光设置为  $40000 \times 20$  ton-year。

$\sin^2 \theta_{12}, \Delta m_{21}^2$  将会出现两处局域极值，这是由于在这两处局域极值下， $\theta_{13}$  的拟合中心值分别为 0.323 和 0 附近，能够在 5 MeV 能量选择条件下产生基本相同的  $\nu_e$  存活概率曲线。这是由于 5 MeV 能量选择条件所带来的简并。

在概率上升效应方面，采用曾在 Super-K 和 SNO 实验上采用过的二次函数，来拟合电子中微子的存活概率曲线，和这两个实验的对比结果显示，氯化锂水溶液探测器有着更为清晰显著的概率上升效应的趋势。另外，为了量化氯化锂水溶液探测器对于概率上升效应的探测灵敏度，采用了一次函数来拟合  $\nu_e$  的存活概率曲线。预期在 4 MeV 的能量选择条件下，基于 6400 ton-year 的有效曝光，对于概率上升效应的探测灵敏度能够达到  $3.7\sigma$ 。对比于 Hyper-K 的灵敏度趋势线，达到大致相同的灵敏度，LiCl 水溶液探测器的曝光可以低大致两个数量级。

在惰性中微子参数空间的排除灵敏度方面，采用费尔德曼-科森方法考察氯化锂水溶液探测器对于轻惰性中微子混合参数的排除能力，基于 6400 ton-year 的有效曝光量和 5 MeV 能量选择条件，氯化锂水溶液探测器对于混合参数对  $(\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2)$ ，排除能力在 99% 及以上的置信区间覆盖了顶点为  $(10^{-4}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 0)$  的近似三角形区域。并且细致研究了系统误差对于排除灵敏度结果的影响。

在地球效应和地球成像方面，采用 LiCl 的带电流过程来研究地球的中微子振荡成像。通过拟合地幔和地核的密度进行地球模型的双层成像。并找到一种新的

方法来评估地球物质效应。但是采用 LiCl 水溶液探测器需要  $10^7$  量级的曝光才能够将有地球物质效应和没有地球物质效应下的检验统计量分开，探测地球物质效应仍然需要极高的曝光。

DUNE 采用  $4 \times 10^4$  ton 液氩的带电流过程探测太阳中微子，靶体积尽管远大于 LiCl 水溶液探测器，但是在相同曝光时间下，关于  $P_{ee}$  拟合结果的不确定度远大于 LiCl 水溶液探测器，这是由于在 9 MeV 这一关于电子动能的能量选择条件下，对应中微子能量  $E_\nu > 12.833$  MeV。在这一太阳中微子能段的概率上升效应很小，使得 DUNE 的带电流过程对于概率上升效应不敏感。

综上所述，可以预期氯化锂水溶液探测器能够在太阳中微子相关的多个物理目标上贡献有竞争力的结果。

## 第 7 章 总结与展望

### 7.1 论文工作总结

太阳中微子是我们理解太阳内部演化，验证标准模型理论，甚至寻找超出标准模型新物理的重要研究对象。太阳中微子从太阳到地球探测器的过程中，首先穿过太阳，发生太阳物质效应，然后在日地飞行的过程中质量态之间退相干，如果是夜晚到达地球还会穿过地球，发生地球物质效应。中微子到达地球探测器的存活概率随着中微子能量变化的曲线，称为  $P_{ee}$  曲线，包含了重要的物理信息。

但是目前的中微子实验中，有些实验受限于时代和实验条件，是计数实验，无法得到中微子的能量信息；有些实验采用的是中微子电子弹性散射过程，对于确定的中微子能量，反冲电子能量是连续分布的，反冲电子能谱会模糊掉中微子能谱的物理结构。SNO 实验尽管采用带电流过程测量中微子，但是 SNO 的带电流信号容易被中性流产物所掩盖。本研究开发基于氯化锂水溶液的带电流探测技术，通过多种模拟手段，给出这一技术对于太阳中微子物理探测的优势，并给出关于太阳中微子振荡参数的测量，概率上升效应的探测，太阳惰性中微子的寻找，以及地球物质效应和地球成像等物理目标上的灵敏度。本文的主要工作如下：

第一，在模拟太阳中微子产生、演化、飞行的全过程时，验证了多种数值方法，包括分层演化、四阶龙格库塔方法，以及龙格-库塔-费尔伯格方法的准确性，并在同一精度下比较了三种方法的效率。四阶龙格库塔在步长较长时，在物质势剧烈变化的地方会有发散的风险，而分层演化方法和龙格-库塔-费尔伯格各有优势。同时给出了锦屏地下中微子实验室对于太阳中微子的曝光函数，发现锦屏地下实验室是目前覆盖的天顶角范围最大的中微子实验室： $\cos \theta_Z = [-0.99655, 0.99655]$ 。锦屏实验室能够测量到穿过地核的中微子，覆盖的地核范围也是最大的，可以覆盖 99.94% 的地核区域和全部的非地核区域，这对研究地球物质效应时至关重要。

第二，研究了氯化锂水溶液中的中微子探测过程，比较了氯化锂水溶液中带电流过程和弹性散射过程关于概率上升效应，惰性中微子，以及地球物质效应的信号强度：

1. 氯化锂的带电流过程能够完整保留  $P_{ee}$  曲线中 23% 的概率上升效应，而  $\nu_\alpha - e^-$  弹性散射过程中只有 6.9% 的概率上升效应，比带电流过程的 1/3 还要少。
2. 氯化锂的带电流过程能够完整保留轻惰性中微子模型下  $P_{ee}$  曲线中的下沉和扭动的结构。而  $\nu_\alpha - e^-$  弹性散射过程中下沉和扭动的结构明显减弱。
3. 氯化锂的带电流过程能够完整中微子存活概率关于天底角和能量的二维图

中出现的结构，这些结构和地球密度有关，而  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射过程中这些重要结构被抹平了。信号强度由 7.5% 下降到 3.3%。

氯化锂的带电流过程在以上太阳中微子物理中，有着比  $\nu_\alpha$ - $e^-$  弹性散射过程更高的信号强度，意味着要达到相同灵敏度，只需要更少的曝光量。

第三，设计了一个氯化锂水溶液的探测器方案，并预期了这一探测器的能量分辨、角度分辨、本底情况和探测阈值等属性。氯化锂水溶液探测器将能够达到和 Super-K, SNO+ 等探测器大约一致的  $1/\sqrt{10E \text{ [MeV]}}$  的能量分辨率，并能够实现和 Super-K, SNO+ 等探测器相一致的角度分辨：对于 5 MeV 以上的电子，约 35° 的角度分辨。

测量了即将在锦屏百吨上部署的北方夜视生产的 MCP-PMT 的十只样品，测量了 MCP-PMT 波形的上升时间、下降时间、半高宽、暗噪声计数率、峰谷比、增益，和北方夜视给出的参考值相符。尤其是在关于 MCP-PMT 量子效率的测量中，采用了一种轮转的测量方法，将已知量子效率的滨松 PMT 做刻度，得到北方夜视生产的 MCP-PMT 的量子效率约为滨松 PMT 量子效率的 1.5 倍，约为 30%，同样和北方夜视给出的参考值相符。

第四，研究了太阳中微子振荡参数的测量精度，太阳高密度物质所致的中微子存活概率上升效应的探测灵敏度，太阳轻惰性中微子混合参数的排除灵敏度，以及地球物质效应的探测灵敏度。基于太阳角的角度选择条件，分离带电流信号和弹性散射信号，使得富集带电流信号的样本和富集弹性散射信号的样本均有着良好的信噪比。然后做了灵敏度分析：

1. 在  $\sin^2 \theta_{12} = 0.307$ ,  $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.49$  的真值设定下，采用 6400 ton-year 曝光的氯化锂水溶液探测器的拟合结果为： $\sin^2 \theta_{12} = 0.302 \pm 0.019$ , 约 6.3% 的精度； $\Delta m_{21}^2(10^{-5}) \text{ eV}^2 = 7.675 \pm 1.519$ , 约 20% 的精度。达到了和目前太阳中微子全局拟合相竞争的约束能力。
2. 在 5 MeV 的能量选择条件下，基于 6400 ton-year 的有效曝光，氯化锂水溶液探测器对于概率上升效应的探测灵敏度能够达到  $3.7\sigma$ 。对比于 Hyper-K，要达到大致相同的灵敏度，氯化锂水溶液探测器的曝光可以比 Hyper-K 低大致两个数量级。和 Super-K 和 SNO 实验相比，氯化锂水溶液探测器拟合得到的  $P_{ee}$  曲线有着更为清晰显著的概率上升效应和更小的展宽。
3. 基于 6400 ton-year 的有效曝光量和 5 MeV 能量选择条件，氯化锂水溶液探测器能够排除惰性中微子的部分参数空间。对于混合参数对  $(\sin^2 2\alpha, \Delta m_{01}^2)$ ，排除能力在 99% 及以上的置信区间覆盖了顶点为  $(10^{-4}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 20 \times 10^{-6} \text{ eV}^2)$ ,  $(10^{-2}, 0)$  的近似三角形区域。

4. 在不考虑系统误差的情况下，基于氯化锂水溶液探测器对地球效应和地球成像的灵敏度做了初步估计。在地幔-地核双层模型下，对地幔，地核密度的拟合达到大约 10% 的精度只需要 10 kton-year 以内的有效曝光。
5. 液氩的 DUNE 实验，在和氯化锂探测器同样曝光量的条件下，受限于探测的中微子能量集中在过渡区以上，所以对太阳高密度物质所致的概率上升效应不敏感。氯化锂探测器有着显著的优势。

综上所述，本文有如下的创新点：

1. 首次提出基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案，研究了探测器的性质。揭示了锂-7 带电流探测过程的截面高，阈值低，反冲电子能量与入射中微子能量有着一一对应关系，锂-7 天然丰度高，氯化锂水溶性高的特点。
2. 首次给出了该中微子探测器方案对于太阳中微子振荡参数的预期测量精度。
3. 首次给出了该中微子探测器方案对于太阳高密度物质所致的中微子存活概率上升效应的探测灵敏度。
4. 首次给出了该中微子探测器方案对于来自太阳的轻惰性中微子参数空间的排除灵敏度。
5. 发现基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案在同样曝光量的条件下，对比超级神冈的纯水探测方案，以及 DUNE 的液氩探测方案有着明显优势。

## 7.2 展望

本文尚有以下几点有待更加深入挖掘之处：

1. 在运用分层演化，龙格-库塔，龙格-库塔-费尔伯格等多种数值方法模拟中微子在物质中的演化时，只比较了三种方法的在几种特殊物质势下的效率，没有分析造成三种方法效率差异的原因，这一原因还有待深入研究。
2. 关于氯化锂水溶液探测器对于地球效应的研究中，在 PREM 模型下，基于氯化锂水溶液探测器，白天和夜晚的事例数有着不同的事例数关于天底角和能量的二维分布。我们由此构造是否存在地球物质效应假设下的似然函数，但是这两个似然函数的差异并不显著。可见所构造的检验地球效应的统计量尚无法将带电流探测过程的优势充分发挥出来。我们期待一种新方法能够充分利用中微子的能量信息和太阳方位信息，将中微子穿过地球的物质效应从事例数关于天底角和能量的二维分布图中提取出来，以期得到关于地球物质效应更好的探测灵敏度。
3. 另外，为了本文所设计的氯化锂水溶液探测器在实验上能够真正实现太阳中微子 5 MeV 的探测阈值，甚至达到 4 MeV 抑或是 3 MeV 的探测阈值，放射

性本底是需要更加深入细致研究的重要问题。

在将来，中微子探测器技术的发展一个重要的方向就是提高能量分辨率，为了提高能量分辨率，可以向水中或有机液体中掺杂类似于氯化锂的无机盐，本研究中的灵敏度分析方法可以推广到其他无机盐的探测方案上，为将来的太阳中微子探测技术的发展提供重要支撑。

## 参考文献

- [1] Pauli W. Letter sent to the tubingen conference[J]. December 4th, 1930.
- [2] Chadwick J. Intensitätsverteilung im magnetischen spectrum der  $\beta$ -strahlen von radium b+ c [J]. Verhandl. Dtsc. Phys. Ges., 1914, 16: 383.
- [3] Kronig R d L. Der drehimpuls des stickstoffkerns[J]. Naturwissenschaften, 1928, 16(19): 335-335.
- [4] Heitler W, Herzberg G. Gehorchen die stickstoffkerne der bose-schen statistik?[J]. Naturwissenschaften, 1929, 17(34): 673-674.
- [5] Rasetti F. Über die rotations-ramanspektren von stickstoff und sauerstoff[J]. Zeitschrift für Physik, 1930, 61(9-10): 598-601.
- [6] Ahmad Q R, Allen R, Andersen T, et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory[J]. Physical review letters, 2002, 89(1): 011301.
- [7] Wolfenstein L. Neutrino oscillations in matter[J]. Physical Review D, 1978, 17(9): 2369.
- [8] Mikheyev S, Smirnov A Y. Resonance amplification of oscillations in matter and spectroscopy of solar neutrinos[J]. Yadernaya Fizika, 1985, 42(6): 1441-1448.
- [9] Mikheyev S, Smirnov A Y. Resonant amplification of  $\nu$  oscillations in matter and solar-neutrino spectroscopy[J]. Il Nuovo Cimento C, 1986, 9: 17-26.
- [10] Abe K, Haga Y, Hayato Y, et al. Solar neutrino measurements in super-kamiokande-iv[J]. Physical Review D, 2016, 94(5): 052010.
- [11] Aharmim B, Ahmed S, Anthony A, et al. Combined analysis of all three phases of solar neutrino data from the sudbury neutrino observatory[J]. Physical Review C, 2013, 88(2): 025501.
- [12] Eguchi K, Enomoto S, Furuno K, et al. First results from kamland: evidence for reactor antineutrino disappearance[J]. Physical review letters, 2003, 90(2): 021802.
- [13] Bahcall J N, Krastev P, Smirnov A Y. Is a large mixing angle msw effect the solution of the solar neutrino problems?[J]. Physical Review D, 1999, 60(9): 093001.
- [14] Mikheyev S P, Smirnov A Y. Resonance oscillations of neutrinos in matter[J]. Soviet Physics Uspekhi, 1987, 30(9): 759.
- [15] Baltz A, Weneser J. Effect of transmission through the earth on neutrino oscillations[J]. Physical Review D, 1987, 35(2): 528.
- [16] Lisi E, Montanino D. Earth regeneration effect in solar neutrino oscillations: an analytic approach[J]. Physical Review D, 1997, 56(3): 1792.
- [17] Akhmedov E K, Tórtola M A, Valle J W. Geotomography with solar and supernova neutrinos [J]. Journal of High Energy Physics, 2005, 2005(06): 053.
- [18] Bakhti P, Smirnov A Y. Oscillation tomography of the earth with solar neutrinos and future experiments[J]. Physical Review D, 2020, 101(12): 123031.

- 
- [19] Nakajima Y. Recent results and future prospects from super-kamiokande[J]. Zenodo: Geneva, Switzerland, 2020.
  - [20] Fukuda S, Fukuda Y, Ishitsuka M, et al. Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of super-kamiokande-i data[J]. Physics Letters B, 2002, 539(3-4): 179-187.
  - [21] Cravens J, Abe K, Iida T, et al. Solar neutrino measurements in super-kamiokande-ii[J]. Physical review D, 2008, 78(3): 032002.
  - [22] Abe K, Hayato Y, Iida T, et al. Solar neutrino results in super-kamiokande-iii[J]. Physical Review D, 2011, 83(5): 052010.
  - [23] Friedland A, Lunardini C, Pena-Garay C. Solar neutrinos as probes of neutrino–matter interactions[J]. Physics Letters B, 2004, 594(3-4): 347-354.
  - [24] Gonzalez-Garcia M C, Maltoni M. Phenomenology with massive neutrinos[J]. Physics Reports, 2008, 460(1-3): 1-129.
  - [25] De Holanda P, Smirnov A Y. Homestake result, sterile neutrinos, and low energy solar neutrino experiments[J]. Physical Review D, 2004, 69(11): 113002.
  - [26] de Holanda P C, Smirnov A Y. Solar neutrino spectrum, sterile neutrinos, and additional radiation in the universe[J]. Physical Review D, 2011, 83(11): 113011.
  - [27] Hasert F, Faissner H, Krenz W, et al. Search for elastic muon-neutrino electron scattering[J]. Physics letters B, 1973, 46(1): 121-124.
  - [28] Hasert F, Kabe S, Krenz W, et al. Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the gargamelle neutrino experiment[J]. Nuclear Physics B, 1974, 73(1): 1-22.
  - [29] Fukuda Y, Hayakawa T, Ichihara E, et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos[J]. Physical review letters, 1998, 81(8): 1562.
  - [30] Yang C N, Mills R L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance[J]. Physical review, 1954, 96(1): 191.
  - [31] Decamp D, Deschizeaux B, Lees J P, et al. Determination of the number of light neutrino species [J]. Physics Letters B, 1989, 231(4): 519-529.
  - [32] Aarnio P, Abreu P, Adam W, et al. Measurement of the mass and width of the  $z_0$ -particle from multihadronic final states produced in  $e^+ e^-$  annihilations[J]. Physics Letters B, 1989, 231(4): 539-547.
  - [33] Adeva B, Adriani O, Aguilar-Benitez M, et al. A determination of the properties of the neutral intermediate vector boson  $z_0$ [J]. Physics Letters B, 1989, 231(4): 509-518.
  - [34] Akrawy M, Alexander G, Allison J, et al. Measurement of the  $z_0$  mass and width with the opal detector at lep[J]. Physics Letters B, 1989, 231(4): 530-538.
  - [35] Prager H. Phenomenology of extra quarks at the lhc[A]. 2018.
  - [36] Higgs P W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons[J]. Physical review letters, 1964, 13(16): 508.
  - [37] Higgs P W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields[J]. Phys. Lett., 1964, 12: 132-133.

- 
- [38] Englert F, Brout R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons[J]. Physical review letters, 1964, 13(9): 321.
  - [39] Guralnik G S, Hagen C R, Kibble T W. Global conservation laws and massless particles[J]. Physical Review Letters, 1964, 13(20): 585.
  - [40] Yukawa H. On the interaction of elementary particles. i[J]. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series, 1935, 17: 48-57.
  - [41] Glashow S L. Partial-symmetries of weak interactions[J]. Nuclear physics, 1961, 22(4): 579-588.
  - [42] Weinberg S. A model of leptons[J]. Physical review letters, 1967, 19(21): 1264.
  - [43] Greiner W, Müller B, et al. Gauge theory of weak interactions: Vol. 5[M]. Springer, 1996.
  - [44] Nakano T, Nishijima K. Charge independence for  $\nu$ -particles[J]. Progress of Theoretical Physics, 1953, 10(5): 581-582.
  - [45] Nishijima K. Charge independence theory of  $\nu$  particles[J]. Progress of Theoretical Physics, 1955, 13(3): 285-304.
  - [46] Nishijima K. Some remarks on the even-odd rule[J]. Progress of Theoretical Physics, 1954, 12 (1): 107-108.
  - [47] Gell-Mann M. The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets[J]. Il Nuovo Cimento (1955-1965), 1956, 4: 848-866.
  - [48] Giunti C, Kim C W. Fundamentals of neutrino physics and astrophysics[M]. Oxford university press, 2007.
  - [49] Maki Z, Nakagawa M, Sakata S. Remarks on the unified model of elementary particles[J]. Progress of Theoretical Physics, 1962, 28(5): 870-880.
  - [50] Cabibbo N. Unitary symmetry and leptonic decays[J]. Physical Review Letters, 1963, 10(12): 531.
  - [51] Pontecorvo B. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge[J]. Sov. Phys. JETP, 1968, 26(984-988): 165.
  - [52] Aguilar A, Auerbach L, Burman R, et al. Evidence for neutrino oscillations from the observation of  $\nu e$  appearance in a  $\nu \mu$  beam[J]. Physical Review D, 2001, 64(11): 112007.
  - [53] Aguilar-Arevalo A, Brown B, Bugel L, et al. Significant excess of electronlike events in the miniboone short-baseline neutrino experiment[J]. Physical review letters, 2018, 121(22): 221801.
  - [54] Aguilar-Arevalo A A, Brown B, Conrad J, et al. Updated miniboone neutrino oscillation results with increased data and new background studies[J]. Physical Review D, 2021, 103(5): 052002.
  - [55] Mueller T A, Lhuillier D, Fallot M, et al. Improved predictions of reactor antineutrino spectra [J]. Physical Review C, 2011, 83(5): 054615.
  - [56] Abdurashitov J, Gavrin V, Girin S, et al. The russian-american gallium experiment (sage) cr neutrino source measurement[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(23): 4708.
  - [57] Abdurashitov J, Gavrin V, Gorbatchev V, et al. Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. iii. results for the 2002–2007 data-taking period[J]. Physical Review C, 2009, 80(1): 015807.

- 
- [58] Anselmann P, Fockenbrock R, Hampel W, et al. First results from the  $^{51}\text{Cr}$  neutrino source experiment with the gallex detector[J]. Physics Letters B, 1995, 342(1-4): 440-450.
  - [59] Kaether F, Hampel W, Heusser G, et al. Reanalysis of the gallex solar neutrino flux and source experiments[J]. Physics Letters B, 2010, 685(1): 47-54.
  - [60] Adey D, An F, Balantekin A, et al. Measurement of the electron antineutrino oscillation with 1958 days of operation at daya bay[J]. Physical review letters, 2018, 121(24): 241805.
  - [61] Group P D, Zyla P, Barnett R, et al. Review of particle physics[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2020, 2020(8): 083C01.
  - [62] Nussinov S. Solar neutrinos and neutrino mixing[J]. Physics Letters B, 1976, 63(2): 201-203.
  - [63] Giunti C, Kim C W. Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach[J]. Physical Review D, 1998, 58(1): 017301.
  - [64] Kuo T K, Pantaleone J. Neutrino oscillations in matter[J]. Reviews of Modern Physics, 1989, 61(4): 937.
  - [65] Torres F R, Guzzo M M. Wave packet description of neutrino oscillation in a progenitor star supernova environment[J]. Brazilian journal of physics, 2007, 37: 1273-1278.
  - [66] Altarelli G, Feruglio F. Neutrino masses and mixings: a theoretical perspective[J]. Physics reports, 1999, 320(1-6): 295-318.
  - [67] Majorana E. Teoria simmetrica dell' elettrone e del positrone[J]. Il Nuovo Cimento (1924-1942), 1937, 14: 171-184.
  - [68] Weinberg S. Phenomenological lagrangians[J]. Physica, A;(Netherlands), 1979, 96.
  - [69] Mohapatra R N, Senjanović G. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation[J]. Physical Review Letters, 1980, 44(14): 912.
  - [70] Minkowski P.  $\mu \rightarrow e\gamma$  at a rate of one out of 109 muon decays?[J]. Physics Letters B, 1977, 67 (4): 421-428.
  - [71] Gell-Mann M, Ramond P, Slansky R. Complex spinors and unified theories[M]//Murray Gell-Mann: Selected Papers. World Scientific, 2010: 266-272.
  - [72] Yanagida T. Horizontal symmetry and masses of neutrinos[J]. Progress of Theoretical Physics, 1980, 64(3): 1103-1105.
  - [73] Magg M, Wetterich C. Neutrino mass problem and gauge hierarchy[J]. Phys. Lett. B, 1980, 94 (CERN-TH-2829): 61-64.
  - [74] Wetterich C. Neutrino masses and the scale of bl violation[J]. Nuclear Physics B, 1981, 187 (2): 343-375.
  - [75] Lazarides G, Shafi Q, Wetterich C. Proton lifetime and fermion masses in an so (10) model[J]. Nuclear Physics B, 1981, 181(2): 287-300.
  - [76] Mohapatra R N, Senjanović G. Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation[J]. Physical Review D, 1981, 23(1): 165.
  - [77] Foot R, Lew H, He X G, et al. See-saw neutrino masses induced by a triplet of leptons[J]. Zeitschrift für Physik C Particles and Fields, 1989, 44: 441-444.

- [78] Ma E. Pathways to naturally small neutrino masses[J]. Physical Review Letters, 1998, 81(6): 1171.
- [79] Kanaya K. Neutrino mixing in the minimal so (10) model[J]. Progress of Theoretical Physics, 1980, 64(6): 2278-2281.
- [80] Schechter J, Valle J W. Neutrino decay and spontaneous violation of lepton number[J]. Physical Review D, 1982, 25(3): 774.
- [81] Davis Jr R. Solar neutrinos. ii. experimental[J]. Physical Review Letters, 1964, 12(11): 303.
- [82] Bethe H A, Critchfield C L. The formation of deuterons by proton combination[J]. Physical Review, 1938, 54(4): 248.
- [83] Nakahata M. History of solar neutrino observations[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2022, 2022(12): 12B103.
- [84] Bahcall J, Fowler W A, Iben Jr I, et al. Solar neutrino flux.[J]. The Astrophysical Journal, 1963, 137: 344-346.
- [85] Bahcall J N. Neutrino astrophysics[M]. Cambridge University Press, 1989.
- [86] Bahcall J N, Pinsonneault M, Basu S. Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties[J]. The Astrophysical Journal, 2001, 555(2): 990.
- [87] Bahcall J N, Pinsonneault M. What do we (not) know theoretically about solar neutrino fluxes? [J]. Physical Review Letters, 2004, 92(12): 121301.
- [88] Bahcall J N, Serenelli A M, Basu S. 10,000 standard solar models: a monte carlo simulation [J]. The Astrophysical Journal Supplement Series, 2006, 165(1): 400.
- [89] Vinyoles N, Serenelli A M, Villante F L, et al. A new generation of standard solar models[J]. The Astrophysical Journal, 2017, 835(2): 202.
- [90] Grevesse N, Sauval A. Standard solar composition[J]. Space Science Reviews, 1998, 85: 161-174.
- [91] Asplund M, Grevesse N, Sauval J. The solar chemical composition[A]. 2004.
- [92] Asplund M, Grevesse N, Sauval A J, et al. The chemical composition of the sun[J]. Annual review of astronomy and astrophysics, 2009, 47: 481-522.
- [93] Collaboration B. Experimental evidence of neutrinos produced in the cno fusion cycle in the sun[J]. Nature, 2020, 587(7835): 577-582.
- [94] Xu X J, Wang Z, Chen S. Solar neutrino physics[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2023: 104043.
- [95] Oreb Gann G D, Zuber K, Bemmerer D, et al. The future of solar neutrinos[J]. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 2021, 71: 491-528.
- [96] Fukuda Y, Hayakawa T, Inoue K, et al. Solar neutrino data covering solar cycle 22[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(9): 1683.
- [97] Altmann M, Balata M, Belli P, et al. Complete results for five years of gno solar neutrino observations[J]. Physics Letters B, 2005, 616(3-4): 174-190.
- [98] Hosaka J, Ishihara K, Kameda J, et al. Solar neutrino measurements in super-kamiokande-i[J]. Physical Review D, 2006, 73(11): 112001.

- [99] Aharmim B, Ahmed S, Anthony A, et al. Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of b-8 solar neutrinos from measurements with nacl dissolved in the heavy-water detector at the sudbury neutrino observatory[J]. Physical Review C, 2005, 72(5).
- [100] Aharmim B, Ahmed S, Amsbaugh J, et al. Independent measurement of the total active b 8 solar neutrino flux using an array of he 3 proportional counters at the sudbury neutrino observatory [J]. Physical Review Letters, 2008, 101(11): 111301.
- [101] Bahcall J. Url <http://www.sns.ias.edu/jnb>[J]. SNdata/solarmodels. html, 1999.
- [102] Ianni A. Solar neutrinos[J]. Progress in particle and nuclear physics, 2017, 94: 257-281.
- [103] Cleveland B T, Daily T, Davis Jr R, et al. Measurement of the solar electron neutrino flux with the homestake chlorine detector[J]. The Astrophysical Journal, 1998, 496(1): 505.
- [104] Askins M, Bagdasarian Z, Barros N, et al. Theia: an advanced optical neutrino detector[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80: 1-31.
- [105] Abe K, Abe T, Aihara H, et al. Letter of intent: The hyper-kamiokande experiment—detector design and physics potential—[A]. 2011.
- [106] Hirata K S, Kajita T, Kifune T, et al. Observation of b 8 solar neutrinos in the kamiokande-ii detector[J]. Physical review letters, 1989, 63(1): 16.
- [107] Aharmim B, Ahmed S, Andersen T, et al. Measurement of the cosmic ray and neutrino-induced muon flux at the sudbury neutrino observatory[J]. Physical Review D, 2009, 80(1): 012001.
- [108] Gando A, Gando Y, Hanakago H, et al. Be 7 solar neutrino measurement with kamland[J]. Physical Review C, 2015, 92(5): 055808.
- [109] Abe S, Furuno K, Gando A, et al. Measurement of the 8 b solar neutrino flux with the kamland liquid scintillator detector[J]. Physical Review C, 2011, 84(3): 035804.
- [110] Appel S, Bagdasarian Z, Basilico D, et al. Improved measurement of solar neutrinos from the carbon-nitrogen-oxygen cycle by borexino and its implications for the standard solar model[J]. Physical review letters, 2022, 129(25): 252701.
- [111] Agostini M, Altenmüller K, Appel S, et al. Search for low-energy neutrinos from astrophysical sources with borexino[J]. Astroparticle physics, 2021, 125: 102509.
- [112] Davis Jr R, Harmer D S, Hoffman K C. Search for neutrinos from the sun[J]. Physical Review Letters, 1968, 20(21): 1205.
- [113] Collaboration B. Comprehensive measurement of pp-chain solar neutrinos[J]. Nature, 2018, 562(7728): 505-510.
- [114] Basilico D, Bellini G, Benziger J, et al. Final results of borexino on cno solar neutrinos[A]. 2023.
- [115] Albanese V, Alves R, Anderson M, et al. The sno+ experiment[J]. Journal of Instrumentation, 2021, 16(08): P08059.
- [116] Marti Magro L, Collaboration S K, et al. Sk-gd looks forward[C]/37th International Cosmic Ray Conference. 12-23 July 2021. Berlin. 2022: 1088.
- [117] An F, An G, An Q, et al. Neutrino physics with juno[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2016, 43(3): 030401.

- [118] Abe K, Abe K, Aihara H, et al. Hyper-kamiokande design report[A]. 2018.
- [119] Acciarri R, Acero M, Adamowski M, et al. Long-baseline neutrino facility (lbnf) and deep underground neutrino experiment (dune) conceptual design report, volume 4 the dune detectors at lbnf[A]. 2016.
- [120] Beacom J F, Chen S, Cheng J, et al. Physics prospects of the jinping neutrino experiment[J]. Chinese physics C, 2017, 41(2): 023002.
- [121] Guo Z y, Bathe-Peters L, Chen S m, et al. Muon flux measurement at china jinping underground laboratory[J]. Chinese Physics C, 2021, 45(2): 025001.
- [122] Zhao L, Luo W, Bathe-Peters L, et al. Measurement of muon-induced neutron yield at the china jinping underground laboratory[J]. Chinese Physics C, 2022, 46(8): 085001.
- [123] Beacom J F, Vagins M R. Antineutrino spectroscopy with large water čerenkov detectors[J]. Physical review letters, 2004, 93(17): 171101.
- [124] Abusleme A, Adam T, Ahmad S, et al. Juno physics and detector[A]. 2021.
- [125] Zhao J, Yue B, Lu H, et al. Model independent approach of the juno  ${}^8\text{B}$  solar neutrino program [A]. 2022.
- [126] Guo Z, Yeh M, Zhang R, et al. Slow liquid scintillator candidates for mev-scale neutrino experiments[J]. Astroparticle Physics, 2019, 109: 33-40.
- [127] Biller S D, Leming E J, Paton J L. Slow fluors for effective separation of cherenkov light in liquid scintillators[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2020, 972: 164106.
- [128] Aalbers J, Agostini F, Alfonsi M, et al. Darwin: towards the ultimate dark matter detector[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2016, 2016(11): 017.
- [129] collaboration D, Aalbers J, Agostini F, et al. Solar neutrino detection sensitivity in darwin via electron scattering[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80: 1-10.
- [130] Aprile E, Aalbers J, Agostini F, et al. Search for coherent elastic scattering of solar  ${}^8\text{B}$  neutrinos in the xenon1t dark matter experiment[J]. Physical review letters, 2021, 126(9): 091301.
- [131] Aalbers J, Akerib D, Akerlof C, et al. First dark matter search results from the lux-zeplin (lz) experiment[A]. 2022.
- [132] Corona M A, Bonivento W, Cadeddu M, et al. New constraint on neutrino magnetic moment from lz dark matter search results[A]. 2022.
- [133] Zhou X, Zeng X, Ning X, et al. A search for solar axions and anomalous neutrino magnetic moment with the complete pandax-ii data[J]. Chinese Physics Letters, 2021, 38(1): 011301.
- [134] Aalseth C E, Acerbi F, Agnes P, et al. Darkside-20k: A 20 tonne two-phase lar tpc for direct dark matter detection at lngs[J]. The European Physical Journal Plus, 2018, 133: 1-129.
- [135] Agnese R, Anderson A, Aramaki T, et al. Projected sensitivity of the supercdms snolab experiment[J]. Physical Review D, 2017, 95(8): 082002.
- [136] Strauss R, Rothe J, Angloher G, et al. The  $\nu$ -cleus experiment: a gram-scale fiducial-volume cryogenic detector for the first detection of coherent neutrino–nucleus scattering[J]. The European Physical Journal C, 2017, 77(8): 506.

- [137] Kang K J, Cheng J P, Li J, et al. Introduction to the cdex experiment[J]. *Frontiers of Physics*, 2013, 8: 412-437.
- [138] Capozzi F, Li S W, Zhu G, et al. Dune as the next-generation solar neutrino experiment[J]. *Physical review letters*, 2019, 123(13): 131803.
- [139] Billard J, Figueroa-Feliciano E, Strigari L. Implication of neutrino backgrounds on the reach of next generation dark matter direct detection experiments[J]. *Physical Review D*, 2014, 89(2): 023524.
- [140] O'Hare C, Loomba D, Altenmüller K, et al. Recoil imaging for directional detection of dark matter, neutrinos, and physics beyond the standard model[A]. 2022.
- [141] Goldsack A, Collaboration S K, et al. The new phase of super-kamiokande: Sk-gd[C]/The 22nd International Workshop on Neutrinos from Accelerators. 6-11 Sep 2021. Cagliari. 2022: 170.
- [142] Abi B, Acciarri R, Acero M A, et al. Deep underground neutrino experiment (dune), far detector technical design report, volume ii: Dune physics[A]. 2020.
- [143] Athar M S, Barwick S W, Brunner T, et al. Status and perspectives of neutrino physics[J]. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2022, 124: 103947.
- [144] An F, An Q, Bai J, et al. Improved measurement of electron antineutrino disappearance at daya bay[J]. *Chinese Physics C*, 2013, 37(1): 011001.
- [145] Capozzi F, Lisi E, Marrone A. Neutrino mass hierarchy and precision physics with medium-baseline reactors: Impact of energy-scale and flux-shape uncertainties[J]. *Physical Review D*, 2015, 92(9): 093011.
- [146] Haxton W C, Hamish Robertson R, Serenelli A M. Solar neutrinos: status and prospects[J]. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 2013, 51: 21-61.
- [147] Pulido J, Das C. Sterile neutrinos in the 3+ s scenario and solar data[A]. 2013.
- [148] Tešić G. Extraction of active and sterile neutrino mixing parameters with the sudbury neutrino observatory[D]. Carleton University, 2009.
- [149] Ahmad Q, Allen R, Andersen T, et al. Measurement of day and night neutrino energy spectra at sno and constraints on neutrino mixing parameters[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(1): 011302.
- [150] Renshaw A, Abe K, Hayato Y, et al. First indication of terrestrial matter effects on solar neutrino oscillation[J]. *Physical review letters*, 2014, 112(9): 091805.
- [151] Collaboration B, et al. Absence of day-night asymmetry of 862 kev be-7 solar neutrino rate in borexino and msw oscillation parameters[A]. 2011.
- [152] De Rújula A, Glashow S, Wilson R R, et al. Neutrino exploration of the earth[J]. *Physics Reports*, 1983, 99(6): 341-396.
- [153] Wilson T L. Neutrino tomography: Tevatron mapping versus the neutrino sky[J]. *Nature*, 1984, 309(5963): 38-42.
- [154] Ralston J P, Jain P, Frichter G M. Core, mantle, crust: Imaging the earth's interior with ultra-high energy neutrino tomography[A]. 1999.

- [155] Jain P, Ralston J P, Frichter G M. Neutrino absorption tomography of the earth's interior using isotropic ultra-high energy flux[J]. *Astroparticle Physics*, 1999, 12(3): 193-198.
- [156] Winter W. Probing the absolute density of the earth's core using a vertical neutrino beam[J]. *Physical Review D*, 2005, 72(3): 037302.
- [157] Gonzalez-Garcia M C, Halzen F, Maltoni M, et al. Radiography of earth's core and mantle with atmospheric neutrinos[J]. *Physical review letters*, 2008, 100(6): 061802.
- [158] Borriello E, Mangano G, Marotta A, et al. Sensitivity on earth core and mantle densities using atmospheric neutrinos[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009, 2009(06): 030.
- [159] Bezrukov L, Sinev V. Atmospheric neutrinos for investigation of earth interior[J]. *Physics of Particles and Nuclei*, 2016, 47: 915-917.
- [160] Donini A, Palomares-Ruiz S, Salvado J. Neutrino tomography of earth[J]. *Nature Physics*, 2019, 15(1): 37-40.
- [161] Nicolaïdis A. Neutrinos for geophysics[J]. *Physics Letters B*, 1988, 200(4): 553-559.
- [162] Nicolaïdis A, Janmane M, Tarantola A. Neutrino tomography of the earth[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1991, 96(B13): 21811-21817.
- [163] Freund M, Ohlsson T. Matter enhanced neutrino oscillations with a realistic earth density profile [J]. *Modern Physics Letters A*, 2000, 15(13): 867-874.
- [164] Akhmedov E K. Matter effects in oscillations of neutrinos traveling short distances in matter [J]. *Physics Letters B*, 2001, 503(1-2): 133-139.
- [165] Ohlsson T, Winter W. Reconstruction of the earth's matter density profile using a single neutrino baseline[J]. *Physics Letters B*, 2001, 512(3-4): 357-364.
- [166] Ohlsson T, Winter W. Could one find petroleum using neutrino oscillations in matter?[J]. *Europhysics letters*, 2002, 60(1): 34.
- [167] Ioannian A N, Smirnov A Y. Matter effects of thin layers: Detecting oil by oscillations of solar neutrinos[A]. 2002.
- [168] Lindner M, Ohlsson T, Tomàs R, et al. Tomography of the earth's core using supernova neutrinos[J]. *Astroparticle physics*, 2003, 19(6): 755-770.
- [169] Ioannian A, Smirnov A Y. Neutrino oscillations in low density medium[J]. *Physical review letters*, 2004, 93(24): 241801.
- [170] Oliveira J, Aquino V. Using neutrino to get information on earth's structure[C]//AIP Conference Proceedings: Vol. 1123. American Institute of Physics, 2009: 246-248.
- [171] Lebbal S, Mimouni J. Probing the absolute density of the matter with the oscillation of supernova neutrinos[C]//AIP Conference Proceedings: Vol. 1295. American Institute of Physics, 2010: 278-283.
- [172] Wang B, Chen Y Z, Li X Q. Earthquake forecast via neutrino tomography[J]. *Chinese Physics C*, 2011, 35(4): 325.
- [173] Agarwalla S K, Li T, Mena O, et al. Exploring the earth matter effect with atmospheric neutrinos in ice[A]. 2012.

- [174] Millhouse M A, Latimer D C. Neutrino tomography[J]. American Journal of Physics, 2013, 81(9): 646-654.
- [175] Rott C, Taketa A, Bose D. Spectrometry of the earth using neutrino oscillations[J]. Scientific reports, 2015, 5(1): 15225.
- [176] Ioannian A, Smirnov A Y. Attenuation effect and neutrino oscillation tomography[J]. Physical Review D, 2017, 96(8): 083009.
- [177] Asaka T, Okui H, Tanaka M, et al. Tomography by neutrino pair beam[J]. Physics Letters B, 2018, 785: 536-542.
- [178] Bourret S, Coelho J, Kaminski E, et al. Probing the earth core composition with neutrino oscillation tomography[J]. PoS ICRC2019, 2020, 1024.
- [179] D' Olivo J C, Herrera Lara J A, Romero I, et al. Earth tomography with atmospheric neutrino oscillations[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80: 1-13.
- [180] Kelly K J, Machado P A, Martinez-Soler I, et al. Dune atmospheric neutrinos: Earth tomography [J]. Journal of High Energy Physics, 2022, 2022(5): 1-46.
- [181] Maderer L, Kaminski E, Coelho J A, et al. Unveiling the outer core composition with neutrino oscillation tomography[J]. Frontiers in Earth Science, 2023, 11: 1008396.
- [182] Adrian-Martinez S, Ageron M, Aharonian F, et al. Letter of intent for km3net 2.0[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2016, 43(8): 084001.
- [183] Bourret S, Coelho J A, Van Elewyck V, et al. Neutrino oscillation tomography of the earth with km3net-orca[C]//Journal of Physics: Conference Series: Vol. 888. IOP Publishing, 2017: 012114.
- [184] Bourret S, Van Elewyck V. Earth tomography with neutrinos in km3net-orca[C]//EPJ Web of Conferences: Vol. 207. EDP Sciences, 2019: 04008.
- [185] Ageron M, Aiello S, Alshamsi M, et al. Km3net performance on oscillation and absorption tomography of the earth[C]//37th International Cosmic Ray Conference: ICRC2021: 12-23 July 2021, Berlin, Germany-online. arXiv, 2021.
- [186] Klein S R. A radio detector array for cosmic neutrinos on the ross ice shelf[J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2013, 60(2): 637-643.
- [187] Hampel W, Handt J, Heusser G, et al. Gallex solar neutrino observations: Results for gallex iv [J]. Physics Letters B, 1999, 447(1-2): 127-133.
- [188] Kovacs T, Mitchell J, Raghavan P, et al. Borex: Solar neutrino experiment via weak neutral and charged currents in boron-11[J]. Solar Physics, 1990, 128: 61-65.
- [189] Pfeiffer L, Mills Jr A P, Raghavan R, et al. Indium-loaded liquid scintillator for low-energy solar-neutrino spectroscopy[J]. Physical Review Letters, 1978, 41(1): 63.
- [190] Zuber K. Spectroscopy of low energy solar neutrinos using cdte detectors[J]. Physics Letters B, 2003, 571(3-4): 148-154.
- [191] Wang Z, Xu B, Chen S. Delayed coincidence in electron-neutrino capture on gallium for neutrino spectroscopy[J]. Astroparticle Physics, 2021, 126: 102519.
- [192] Haselschwardt S, Lenardo B, Pirinen P, et al. Solar neutrino detection in liquid xenon detectors via charged-current scattering to excited states[J]. Physical Review D, 2020, 102(7): 072009.

- [193] Bahcall J. Neutrino-spectroscopy of the solar interior[Z]. 1964.
- [194] Reines F, Woods Jr R. New approach to the detection of solar neutrinos via inverse beta decay [J]. Physical Review Letters, 1965, 14(1): 20.
- [195] Kuzmin V, Zatsepin G. On the neutrino spectroscopy of the sun[C]//International Cosmic Ray Conference: Vol. 2. 1965: 1023.
- [196] Bahcall J N. What next with solar neutrinos?[J]. Physical Review Letters, 1969, 23(5): 251.
- [197] Peak L. The lost neutrinos of the sun[J]. Australian Journal of Physics, 1980, 33(5): 821-826.
- [198] Rowley J K. 7 li-7 be experiment[R]. Brookhaven National Lab., 1978.
- [199] Kopylov A, Orekhov I, Petukhov V, et al. A lithium-beryllium method for the detection of solar neutrinos[A]. 2009.
- [200] Haxton W. Salty water cerenkov detectors for solar neutrinos[J]. Physical review letters, 1996, 76(10): 1562.
- [201] Alonso J, Barros N, Bergevin M, et al. Advanced scintillator detector concept (asdc): A concept paper on the physics potential of water-based liquid scintillator[A]. 2014.
- [202] Liang Y, Xu T, Zhang J, et al. Optical property measurements of lithium chloride aqueous solution for a novel solar neutrino experiment[J]. Journal of Instrumentation, 2023, 18(07): P07039.
- [203] Luo W, Liu Q, Zheng Y, et al. Reconstruction algorithm for a novel cherenkov scintillation detector[J]. Journal of Instrumentation, 2023, 18(02): P02004.
- [204] Runge C. Über die numerische auflösung von differentialgleichungen[J]. Mathematische Annalen, 1895, 46(2): 167-178.
- [205] Kutta W. Beitrag zur näherungsweisen integration totaler differentialgleichungen[M]. Teubner, 1901.
- [206] Landau L. Zur theorie der energieübertragung. ii[J]. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 1932, 2: 46.
- [207] Zener C. Non-adiabatic crossing of energy levels[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1932, 137 (833): 696-702.
- [208] Petcov S. Exact analytic description of two-neutrino oscillations in matter with exponentially varying density[J]. Physics Letters B, 1988, 200(3): 373-379.
- [209] Krastev P, Petcov S. On the analytic description of two-neutrino transitions of solar neutrinos in the sun[J]. Physics Letters B, 1988, 207(1): 64-74.
- [210] Petcov S. On the oscillations of solar neutrinos in the sun[J]. Physics Letters B, 1988, 214(1): 139-146.
- [211] Kuo T K, Pantaleone J. Nonadiabatic neutrino oscillations in matter[J]. Physical Review D, 1989, 39(7): 1930.
- [212] Parke S J. Nonadiabatic level crossing in resonant neutrino oscillations[J]. Physical Review Letters, 1986, 57(10): 1275.

- [213] Haxton W. Analytic treatments of matter-enhanced solar-neutrino oscillations[J]. Physical Review D, 1987, 35(8): 2352.
- [214] Pizzochero P. Nonadiabatic level crossing in neutrino oscillations for an exponential solar density profile[J]. Physical Review D, 1987, 36(8): 2293.
- [215] Petcov S. On the non-adiabatic neutrino oscillations in matter[J]. Physics Letters B, 1987, 191 (3): 299-303.
- [216] Balantekin A. Exact solutions for matter-enhanced neutrino oscillations[J]. Physical Review D, 1998, 58(1): 013001.
- [217] Toshev S. Exact analytical solution of the two-neutrino evolution equation in matter with exponentially varying density[J]. Physics Letters B, 1987, 196(2): 170-174.
- [218] Kaneko T. Analytic solution for resonant mixing of solar neutrinos[J]. Progress of Theoretical Physics (Kyoto), 1987, 78(3): 532-534.
- [219] Ito M, Kaneko T, Nakagawa M. On analytic solution of resonant mixing for solar neutrino oscillations[J]. Progress of Theoretical Physics, 1988, 79(1): 13-18.
- [220] Dyson F J. The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman[J]. Physical Review, 1949, 75(3): 486.
- [221] Press W H. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing[M]. Cambridge university press, 2007.
- [222] Fehlberg E. Classical fifth-and seventh-order runge-kutta formulas with stepsize control[J]. Computing, 1969, 4: 93-106.
- [223] Fehlberg E. Classical fourth-and lower order runge-kutta formulas with stepsize control and their application to heat transfer problems[J]. Computing, 1970, 6: 61-71.
- [224] Cash J R, Karp A H. A variable order runge-kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides[J]. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 1990, 16 (3): 201-222.
- [225] Aliani P, Antonelli V, Picariello M, et al. Hamevol1. 0: a c++ code for differential equations based on runge-kutta algorithm. an application to matter enhanced neutrino oscillation[A]. 2003.
- [226] de Holanda P C. Solar neutrino limits on decoherence[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2020, 2020(03): 012.
- [227] Fujita Y. Nuclei as neutrino detectors[C]//Solar Neutrinos: Proceedings of the 5th International Solar Neutrino Conference. World Scientific, 2019: 175-189.
- [228] Fujita Y, Zuber K, Fujita H. Constraining the solar neutrino survival probability curve by using li 6, li 7, c 12, o 18, f 19, and ca 42 nuclear targets[J]. Physical Review D, 2021, 104(1): 013004.
- [229] Shimbara Y, Fujita Y, Adachi T, et al. High-resolution study of gamow-teller transitions with the  $^{37}\text{Cl}$  ( $^3\text{He}, \gamma$ )  $^{37}\text{Ar}$  reaction[J]. Physical Review C, 2012, 86(2): 024312.
- [230] Agostini M, Altenmüller K, Appel S, et al. Improved measurement of  $b = 8$  solar neutrinos with 1.5 kt·y of borexino exposure[J]. Physical Review D, 2020, 101(6): 062001.
- [231] Tanaka H, Watanabe H. 6Li-loaded directionally sensitive anti-neutrino detector for possible geo-neutrino imaging applications[J]. Scientific reports, 2014, 4(1): 4708.

- [232] Prior G, Collaboration S, et al. Results from the sudbury neutrino observatory phase iii[J]. Nuclear Physics B-Proceedings Supplements, 2009, 188: 96-100.
- [233] Ashenfelter J, Balantekin A, Baldenegro C, et al. The prospect reactor antineutrino experiment [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2019, 922: 287-309.
- [234] An F, Balantekin A, Band H, et al. Independent measurement of the neutrino mixing angle  $\theta_{13}$  via neutron capture on hydrogen at daya bay[J]. Physical Review D, 2014, 90(7): 071101.
- [235] Bahcall J N. Solar neutrino experiments[J]. Reviews of Modern Physics, 1978, 50(4): 881.
- [236] Bahcall J N. Phase-space integrals for beta decay and nuclear matrix elements[J]. Nuclear Physics, 1966, 75(1): 10-16.
- [237] Barinov V, Cleveland B, Gavrin V, et al. Revised neutrino-gallium cross section and prospects of best in resolving the gallium anomaly[J]. Physical Review D, 2018, 97(7): 073001.
- [238] Kobayashi M, Maskawa T. Cp-violation in the renormalizable theory of weak interaction[J]. Progress of theoretical physics, 1973, 49(2): 652-657.
- [239] Patrignani C, Agashe K, Aielli G, et al. Review of particle physics[Z]. 2016.
- [240] Bahcall J N. Overlap and exchange effects in beta decay[J]. Physical Review, 1963, 129(6): 2683.
- [241] Durand III L. Electron screening corrections to beta-decay spectra[J]. Physical Review, 1964, 135(2B): B310.
- [242] Bahcall J N, Lisi E, Alburger D, et al. Standard neutrino spectrum from b 8 decay[J]. Physical Review C, 1996, 54(1): 411.
- [243] Bahcall J N. Neutrino-electron scattering and solar neutrino experiments[J]. Reviews of Modern Physics, 1987, 59(2): 505.
- [244] Hampel W, Heusser G, Kiko J, et al. Final results of the 51cr neutrino source experiments in gallex[J]. Physics Letters B, 1998, 420(1-2): 114-126.
- [245] Abdurashitov J, Gavrin V, Girin S, et al. Measurement of the response of a gallium metal solar neutrino experiment to neutrinos from a 51 cr source[J]. Physical Review C, 1999, 59(4): 2246.
- [246] Hooft G. Prediction for neutrino-electron cross-sections in weinberg's model of weak interactions[J]. Physics Letters B, 1971, 37(2): 195-196.
- [247] Liao W, Luo Y, Wu X H. Effect of interaction with neutrons in matter on flavor conversion of super-light sterile neutrino with active neutrino[J]. Journal of High Energy Physics, 2014, 2014 (6): 1-20.
- [248] Giunti C, Kim C, Monteno M. Atmospheric neutrino oscillations with three neutrinos and a mass hierarchy[J]. Nuclear Physics B, 1998, 521(1-2): 3-36.
- [249] Akhmedov E K, Tórtola M A, Valle J W. A simple analytic three-flavour description of the day-night effect in the solar neutrino flux[J]. Journal of High Energy Physics, 2004, 2004(05): 057.
- [250] De Holanda P, Liao W, Smirnov A Y. Toward precision measurements in solar neutrinos[J]. Nuclear Physics B, 2004, 702(1-2): 307-332.

- 
- [251] database E. Version available at [http://www.nndc.bnl.gov/ensarchivals/.\[Z\]](http://www.nndc.bnl.gov/ensarchivals/.[Z]). From ENSDF database as of Nov. 18, 2019.
  - [252] database C. Version available at [http://www.chemister.ru/database/search-en.php.\[Z\]](http://www.chemister.ru/database/search-en.php.[Z]). From Chemister database as of Aug.20,2020.
  - [253] Dai X, Rollin E, Bellerive A, et al. Wavelength shifters for water cherenkov detectors[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2008, 589(2): 290-295.
  - [254] Land B, Bagdasarian Z, Caravaca J, et al. Mev-scale performance of water-based and pure liquid scintillator detectors[J]. Physical Review D, 2021, 103(5): 052004.
  - [255] KamLAND-Zen, SNO+. Presentation at the neutrino 2020 conference[C]//Presentation at the Neutrino 2020 conference. 2020.
  - [256] Fukuda S, Fukuda Y, Hayakawa T, et al. The super-kamiokande detector[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2003, 501(2-3): 418-462.
  - [257] Ahmed S, Anthony A, Beier E, et al. Measurement of the total active b 8 solar neutrino flux at the sudbury neutrino observatory with enhanced neutral current sensitivity[J]. Physical review letters, 2004, 92(18): 181301.
  - [258] collaboration S, et al. Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of  ${}^8\text{B}$  solar neutrinos from the 391-day salt phase sno data set[A]. 2005.
  - [259] Anderson M, Andringa S, Asahi S, et al. Measurement of the b 8 solar neutrino flux in sno+ with very low backgrounds[J]. Physical Review D, 2019, 99(1): 012012.
  - [260] Koshio Y. Overview of the solar neutrino observation[C]//Talk at the XXX International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Seoul, Korea. 2022.
  - [261] Haxton W, Rule E, Elliott S, et al. The gallium neutrino absorption cross section and its uncertainty[A]. 2023.
  - [262] Roger T, Büscher J, Bastin B, et al. Precise determination of the unperturbed b 8 neutrino spectrum[J]. Physical Review Letters, 2012, 108(16): 162502.
  - [263] Winter W, Freedman S, Rehm K, et al. The b 8 neutrino spectrum[J]. Physical Review C, 2006, 73(2): 025503.
  - [264] Serenelli A M, Haxton W C, Pena-Garay C. Solar models with accretion. i. application to the solar abundance problem[J]. The Astrophysical Journal, 2011, 743(1): 24.
  - [265] Ji X, Gu W, Qian X, et al. Combined neyman–pearson chi-square: An improved approximation to the poisson-likelihood chi-square[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2020, 961: 163677.
  - [266] Brun R, Rademakers F, et al. Root| a data analysis framework[J]. CERN, <http://root.cern.ch>, 2012.
  - [267] Cowan G, Cranmer K, Gross E, et al. Asymptotic formulae for likelihood-based tests of new physics[J]. The European Physical Journal C, 2011, 71: 1-19.

- [268] Cowan G. Statistical data analysis[M]. Oxford university press, 1998.
- [269] Feldman G J, Cousins R D. Unified approach to the classical statistical analysis of small signals [J]. Physical review D, 1998, 57(7): 3873.
- [270] Agostini M, Neumair B. Statistical methods applied to the search of sterile neutrinos[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80(8): 1-22.

## 附录 A 中微子的物质效应

L. Wolfenstein<sup>[A.1]</sup>于 1978 年发现了中微子的物质效应：即使真空中的中微子质量态和味道态之间混合的混合角很小，只要物质势合适，物质中的有效混合就能达到最大，此时物质中的有效混合角与真空混合角的值无关。1985 年，S. Mikheyev 和 A. Smirnov<sup>[A.2-A.3]</sup>发现，在物质效应下，中微子从一个味道态到另一个味道态的转化概率能够得到加强，甚至能够实现完全转化。

中微子在物质中的演化过程中，根据中微子质量态之间是否会发生相互转化，可以分为绝热演化（Adiabatic Propagation）和非绝热演化（Non-adiabatic Propagation）。在两代中微子情况下，判断中微子在物质中的演化属于哪种演化方式，是通过在驱动中微子有效质量态演化的矩阵中，量化主对角项和非对角项两者相对大小的绝热参数来判断。而在三代中微子框架和加入一种弱混合的轻惰性中微子的四代中微子框架下，由于分别存在一个和两个质量态独立演化，使得它们均可以简化为两代中微子混合的情况，同样能够定义绝热参数来判断中微子在物质中是绝热演化还是非绝热演化。

### A.1 MSW 方程

$\nu_e$  会和物质中的电子发生带电流相互作用， $\nu_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) 会和物质中的电子，质子，中子发生中性流相互作用。带电流等效势  $V_{\text{CC}}$  和中性流等效势  $V_{\text{NC}}$  分别为<sup>[A.4]</sup>：

$$V_{\text{CC}} = \sqrt{2}G_F N_e, \quad V_{\text{NC}}^f = \sqrt{2}G_F N_f g_V^f, \quad (\text{A.1})$$

其中  $f$  ( $f = e, p, n$ ) 代表通常物质中的费米子。 $g_V^f$  是  $f$  的矢量流耦合常数（式1.7）。在质子和中子需要考虑价夸克的贡献，可以通过式1.7和式1.6计算得出：

$$g_V^p = 2g_V^u + g_V^d = \frac{1}{2} - 2s_W^2 = -g_V^e, \quad g_V^n = g_V^u + 2g_V^d = -\frac{1}{2}. \quad (\text{A.2})$$

由式A.2可知，电子和质子的中性势相互抵消，只有中子的中性势会贡献。

初态  $\nu_\alpha$  到质量态  $\nu_i$  的跃迁振幅  $\psi_{\alpha i} \equiv \langle \nu_i | \nu_\alpha \rangle$  ( $i = 1 \sim k$ , 总共  $k = 3 + n$  个质量态,  $i = 1, 2, 3$  为 3 个活跃中微子质量态,  $i = s_1, s_2 \dots s_n$  为引入的  $n$  个惰性中微子态) 组成的矢量  $\Psi_{\alpha i}$  为：

$$\Psi_{\alpha i} = (\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2}, \psi_{\alpha 3}, \psi_{\alpha s_1}, \dots, \psi_{\alpha s_n})^T, \quad (\text{A.3})$$

$\Psi_{\alpha i}$  的演化方程为:

$$i \frac{d}{dx} \Psi_{\alpha i} = \mathcal{H}_M \Psi_{\alpha i} = (\mathcal{M} + U^\dagger \mathcal{V} U) \Psi_{\alpha i}, \quad (\text{A.4})$$

其中:

$$\mathcal{M} = \text{Diag} \left( 0, \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}, \frac{\Delta m_{31}^2}{2E}, \frac{\Delta m_{41}^2}{2E}, \dots, \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{V} = \text{Diag} (V_{CC} + V_{NC}, V_{NC}, V_{NC}, 0, \dots, 0). \quad (\text{A.6})$$

$\mathcal{V}$  是味道态下的等效势, 需要转变为  $U^\dagger \mathcal{V} U$ ,  $\mathcal{H}_M$  是驱动质量态演化的哈密顿量。

初态  $\alpha$  到味道态  $\beta$  的跃迁振幅  $\psi_{\alpha\beta} \equiv \langle v_\beta | v_\alpha \rangle$  组成的矢量  $\Psi_{\alpha\beta}$  为:

$$\Psi_{\alpha\beta} = (\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha \mu}, \psi_{\alpha \tau}, \psi_{\alpha s_1}, \dots, \psi_{\alpha s_n})^T, \quad (\text{A.7})$$

其中惰性中微子不参与弱相互作用, 所以不需要做味道态和质量态的区分。 $\Psi_{\alpha i}$  和  $\Psi_{\alpha\beta}$  关系为:  $\Psi_{\alpha i} = U^\dagger \Psi_{\alpha\beta}$ 。常数物质中  $dU^\dagger/dx$  为 0, 所以  $\psi_{\alpha\beta}$  的演化方程为:

$$i \frac{d}{dx} \Psi_{\alpha\beta} = \mathcal{H}_F \Psi_{\alpha\beta} = (U \mathcal{M} U^\dagger + \mathcal{V}) \Psi_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.8})$$

式A.8即 MSW 方程<sup>[A.1-A.3]</sup>,  $\mathcal{H}_F$  是驱动味道态演化的哈密顿量。

厄米矩阵  $U \mathcal{M} U^\dagger + \mathcal{V}$  可以用么正矩阵  $U_m$  做对角化:

$$U_m^\dagger (U \mathcal{M} U^\dagger + \mathcal{V}) U_m = \mathcal{M}', \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{M}' = \text{Diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \quad (\text{A.10})$$

$\lambda_i$  ( $i = 1 \sim k$ ) 为  $k$  个本征值。此时可以定义初态  $|v_\alpha\rangle$  到物质中有效质量态  $\langle v_{im} |$  的跃迁振幅  $\psi_{\alpha i}^m \equiv \langle v_{im} | v_\alpha \rangle$  组成的矢量  $\Psi_{\alpha i}^m$ :

$$\Psi_{\alpha i}^m = (\psi_{\alpha 1}^m, \psi_{\alpha 2}^m, \psi_{\alpha 3}^m, \dots, \psi_{\alpha i}^m, \dots, \psi_{\alpha k}^m)^T, \quad (\text{A.11})$$

$\Psi_{\alpha i}^m$  和  $\Psi_{\alpha\beta}$  关系为:  $\Psi_{\alpha i}^m = U_m^\dagger \Psi_{\alpha\beta}$ 。如果  $U_m$  不依赖于  $x$ , 对应于常数密度下的物质, 那么变换后的 MSW 方程是解耦的。变换后的跃迁振幅A.11矩阵元独立演化, 所以  $v_{im}$  是物质中独立演化的有效质量态。实际跃迁振幅是独立演化的跃迁振幅的叠加:

$$\Psi_{\alpha\beta} = (\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha \mu}, \psi_{\alpha \tau}, \dots, \psi_{\alpha s_n})^T = U_m (\psi_{\alpha 1}^m, \psi_{\alpha 2}^m, \psi_{\alpha 3}^m, \dots, \psi_{\alpha k}^m)^T, \quad (\text{A.12})$$

从而能够解出初始态到味道态的跃迁振幅。物质中第  $i$  个有效质量态  $v_{im}$  的概率为:

$$P_{im} = |\psi_{ei}^m|^2. \quad (\text{A.13})$$

为了使得有效质量态  $v_{im}$  和真空中的质量态  $v_i$  始终对应, 将  $\lambda_i$  的大小顺序和真空中质量态的质量大小顺序保持一致, 并且将  $U_m$  的列按对应的  $\lambda_i$  的大小顺序重新排列。

## A.2 太阳和地球的密度分布

中微子的物质效应与穿越路径上的电子数密度和中子数密度有关，如式A.1所示。本节讨论太阳和地球的电子数密度和中子数密度分布。

### A.2.1 太阳密度分布

太阳的密度分布由 B16-GS98 所预测。太阳内部的电子数分布和中子数分布如图A.1(a)所示，以及相应等效势的分布如图A.1(b)所示。从图中可以看出粒子数分布和等效势分布近似服从指数分布：

$$N_e = 125.4 e^{-\frac{R [R_\odot]}{0.14}}, \quad N_n = 61.6 e^{-\frac{R [R_\odot]}{0.09}}, \quad (\text{A.14})$$

其中  $R$  以太阳半径  $R_\odot$  为单位，指数分布的衰减长度均在  $0.1 R_\odot$  左右。但式A.14只能粗糙地描述，起始段和终了段均会偏离式A.14的指数分布，如图A.1(a)所示。

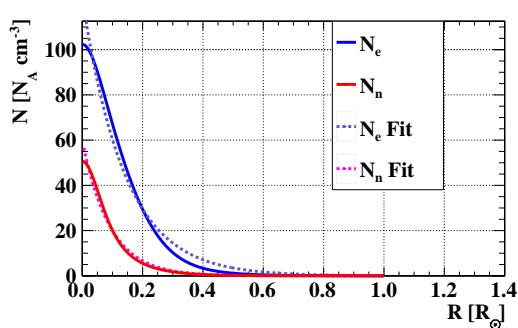
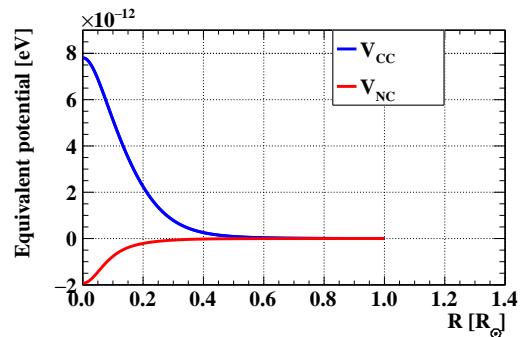
(a)  $N_e$  和  $N_n$  的分布(b)  $V_{CC}$  和  $V_{NC}$  的分布

图 A.1 (a) 太阳内部电子数分布（蓝线）和中子数分布（红线），数据来自于<sup>[A.5]</sup>。(b) 太阳内部带电流等效势（蓝线）和中性流等效势的分布（红线）。

### A.2.2 地球密度分布

地球密度分布由地震学方法给出的初步地球参考模型<sup>[A.6]</sup>（Preliminary Reference Earth Model，简称 PREM 模型）描述。这一模型将地球从内到外分为多段区域，主要有：内地核，外地核，下地幔，上地幔，地壳（包括下地壳和上地壳），海洋等等。每段区域的密度用自变量为约化半径的最高三次多项式拟合，约化半径和分界处对应的天顶角  $\theta_Z$  的  $\cos$  值为：

$$r = \frac{R}{R_\oplus}, \quad \cos \theta_Z = \sqrt{1 - r^2}, \quad (\text{A.15})$$

其中  $R_\oplus$  是地球半径。

地幔和地核化学组成差异很大，不同的化学组成反映在总的质子数  $Z$  与总的

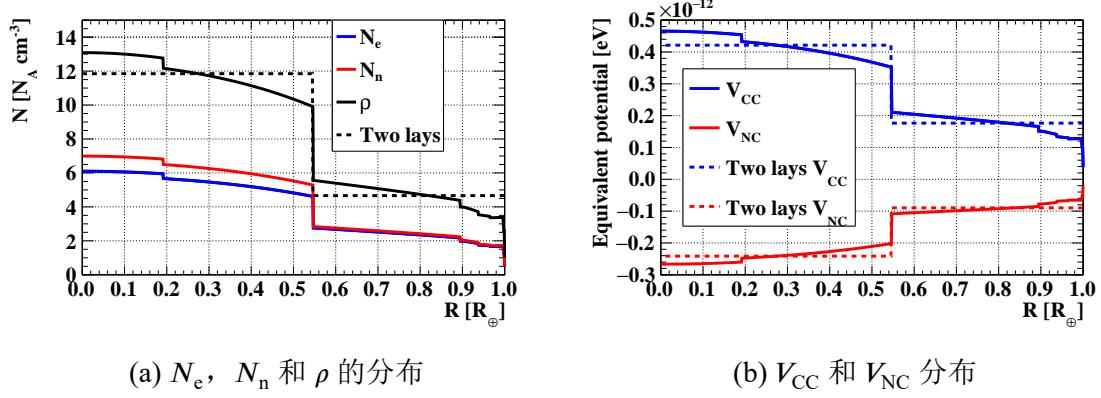


图 A.2 (a) 初步地球参考模型下的地球内部的电子数密度分布 (蓝线)、中子数密度分布 (红线)、密度分布 (黑线)，以及简化的双层模型下的密度分布 (粉色虚线)。(b) 地球内部的带电流等效势分布 (蓝线) 和中性流等效势分布 (红线)。

核子数 A 之比 Z/A 的值上<sup>[A.7]</sup>。化学组成中的电子数密度  $N_e$  和中子数密度  $N_n$  与密度  $\rho$  的关系为：

$$N_e [N_A] = \frac{\rho}{M} \cdot \frac{Z}{A}, \quad N_n [N_A] = \frac{\rho}{M} \left(1 - \frac{Z}{A}\right), \quad (\text{A.16})$$

其中  $M$  是质子的摩尔质量 1,  $N_A$  是阿伏伽德罗常数。Z/A 对于地幔和地核来说是不同的。本研究采用的是由文献<sup>[A.8]</sup>化学组成下确定的 Z/A 的值：对于地幔和地壳为 0.466，对于地核为 0.496。由此确定的地球内部的密度，电子数密度以及中子数密度如图A.2(a)所示。地球内部的等效势分布如图A.2(b)所示。从图A.2可以看出，密度和等效势变化最大的是  $r = 0.546$  处，对应地幔-地核的分界处，这一界面也称为古登堡界面<sup>[A.9]</sup> (Gutenberg Discontinuity)。以古登堡界面为分界，初步地球参考模型可以简化为地幔-地核双层地球模型，密度分别为地幔和地核密度的平均值： $\rho_{\text{mantle}} = 4.663 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_{\text{core}} = 11.848 \text{ g/cm}^3$ , 如图A.2(a)中粉色虚线所示。

### A.3 两代中微子的物质效应

两代中微子只有 1 个混合角  $\theta$ ，混合矩阵为  $e^{i\theta\sigma_2}$ ，所以式A.8中驱动味道态演化的哈密顿量  $\mathcal{H}_F$  可以展开为：

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta m_{21}^2 s_\theta^2 + A_{CC} & \Delta m_{21}^2 s_\theta c_\theta \\ \Delta m_{21}^2 s_\theta c_\theta & \Delta m_{21}^2 c_\theta^2 \end{pmatrix} + \frac{A_{NC} + m_1^2}{2E}, \quad (\text{A.17})$$

其中,  $c_\theta$  和  $s_\theta$  分别是  $\theta$  的  $\cos$  和  $\sin$  值。常数项作为演化的公共相位已经提取出来, 因为公共相位不影响转化概率,  $\mathcal{H}_F$  还可以写成相对对称的形式:

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 c_{2\theta} + A_{CC} & \Delta m^2 s_{2\theta} \\ \Delta m^2 s_{2\theta} & \Delta m^2 c_{2\theta} - A_{CC} \end{pmatrix} + \frac{A_{CC} + 2A_{NC} + \Delta m^2 + 2m_1^2}{4E} I, \quad (A.18)$$

其中,  $c_{2\theta}$  和  $s_{2\theta}$  分别是  $\cos 2\theta$ ,  $\sin 2\theta$ ,  $I$  是单位矩阵,  $A_{CC,NC} = 2EV_{CC,NC}$ 。其中常数  $m_1^2/2E$  中的绝对质量  $m_1$  是未知的。对角化A.18中的对称矩阵后得到解耦合的  $\mathcal{H}'_F$ :

$$\mathcal{H}'_F = \frac{1}{4E} \text{Diag}(-\Delta m_m^2, \Delta m_m^2), \quad \Delta m_m^2 = \sqrt{(\Delta m^2 c_{2\theta} - A_{CC})^2 + (\Delta m^2 s_{2\theta})^2}, \quad (A.19)$$

总的本征值  $\lambda_{1,2}$  为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_{CC} + 2A_{NC} + \Delta m^2 + 2m_1^2}{4E} \mp \frac{\Delta m_m^2}{4E}. \quad (A.20)$$

1 对应 - 号, 2 对应 + 号。物质中的混合矩阵为  $U_m = e^{i\theta_m \sigma_2}$ , 能够和真空中的混合矩阵保持形式不变, 物质中的有效混合角  $\theta_m$  为:

$$t_{2\theta_m} = \frac{t_{2\theta}}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 c_{2\theta}}}, \quad c_{2\theta_m} = \frac{\Delta m^2 c_{2\theta} - A_{CC}}{\Delta m_m^2}, \quad s_{2\theta_m} = \frac{\Delta m^2 s_{2\theta}}{\Delta m_m^2}, \quad (A.21)$$

其中  $c_{2\theta_m}$  和  $s_{2\theta_m}$  分别是  $\cos 2\theta_m$ ,  $\sin 2\theta_m$ , 有效混合角完全不受式A.18中常数矩阵项的影响<sup>①</sup>。可以看到  $1/t_{2\theta_m}$  表征的正是式A.18中  $\mathcal{H}_F$  第一个矩阵的主对角项与非对角项之比, 当  $A_{CC}^R = \Delta m^2 c_{2\theta}$  时, 主对角项为 0 使得  $\nu_e \leftrightharpoons \nu_\mu$  能达到最大程度, 对应的电子数密度  $N_e^R$  和有效质量平方差  $\Delta m_m^2|_R$  为:

$$N_e^R = \frac{\Delta m^2 c_{2\theta}}{2\sqrt{2}EG_F}, \quad \Delta m_m^2|_R = \Delta m^2 s_{2\theta}, \quad (A.22)$$

此时  $\theta_m = \pi/4$ , 中微子的位置称为共振位置, 在这一位置实现了味道态和有效质量态最大程度的混合。

初始  $\alpha$  味道的中微子消失概率和存活概率分别对应式1.16中的真空混合角和质量平方差替换为物质中的有效混合角  $\theta_m$  和有效质量平方差  $\Delta m_m^2$  的结果:

$$P_{\alpha\beta} = s_{2\theta_m}^2 s^2 \left( \pi \frac{L}{L_{osc}^m} \right), \quad P_{\alpha\alpha} = 1 - P_{\alpha\beta} = 1 - s_{2\theta_m}^2 s^2 \left( \pi \frac{L}{L_{osc}^m} \right), \quad (A.23)$$

其中  $L_{osc}^m$  为式1.13中的质量平方差替换为有效质量平方差的结果。如果是  $N_e = N_e^R$  的常数密度物质, 从A.23可知在  $L = L_{osc}^m/2$  能实现  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  的完全转化。

<sup>①</sup> 因为对角矩阵  $t_{2\theta_m} =$  非对角项之和/对角项之差。

## A.4 绝热演化

在两代中微子味道态的哈密顿量（即式A.18）中考察的是初始味道态到任一位置味道态的跃迁振幅  $\Psi_{e\beta}$  的演化，还可以考察初始味道态到物质中的有效质量态  $\nu_{im}$  跃迁振幅  $\psi_{ei}^m$  的演化，这称为绝热表象。在新定义的表象下，式A.18变为关于  $\psi_{ei}^m$  的演化方程，驱动物质中的  $\Psi_{ei}^m$ （式A.11）演化哈密顿量记为  $\mathcal{H}_A$ ：

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{e1}^m \\ \psi_{e2}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m_m^2}{4E} & -i \frac{d\theta_m}{dx} \\ i \frac{d\theta_m}{dx} & \frac{\Delta m_m^2}{4E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{e1}^m \\ \psi_{e2}^m \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

非对角项是由随着路径变化的  $U_m$  的微分引起的。方程A.24的初始条件为  $\Psi_{ek}^{m(0)} = (\psi_{e1}^{m(0)}, \psi_{e2}^{m(0)})^T = (c_{\theta_m}^{(0)}, s_{\theta_m}^{(0)})^T$ ，如果一种物质的密度不变，即  $d\theta_m/dx = 0$  时，物质中的质量态独立演化，如果物质的密度不是常数，就要考虑  $d\theta_m/dx$  的贡献，此时物质中的有效混合角会随着中微子穿过物质的过程中而变化。从而  $d\theta_m/dx$  会贡献到A.24的非对角元上，正是非对角元不为0，从而两个有效质量本征态会发生相互转化，这正是量子力学中的能级交叉（Level Crossing）现象。

如果式A.24非对角元很小，也就是说  $\theta_m$ （取决于物质中的带电流等效势  $A_{CC}$ ，即式A.21）随着中微子穿过物质的过程变化很缓慢，那么有效质量态  $\nu_{im}$  之间的转化很小，此时质量态近似不变，这称为中微子的绝热演化。 $U_m$  中的矩阵元近似不变，只需要对相位做路径上的积分，绝热情况下  $\nu_e$  的存活概率为：

$$P_{ee}^{\text{绝热}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_{2\theta_m}^{(0)} c_{2\theta_m}^{(L)} + \frac{1}{2} s_{2\theta_m}^{(0)} s_{2\theta_m}^{(L)} \cos \left( \int_0^L \frac{\Delta m_m^2(x)}{2E} dx \right), \quad (\text{A.25})$$

其中 (0) 和 (L) 分别对应有效混合角在产生点和探测点处计算，一般探测点处的有效混合角近似为真空混合角。质量态的退相干（式1.15）会使得最后振荡项的总效应为0，这样就得到  $\bar{P}_{ee}^{\text{绝热}}$  为：

$$\bar{P}_{ee}^{\text{绝热}} = \sum_i^2 \left| U_{ei}^{m(0)} \right|^2 \left| U_{ei} \right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_{2\theta_m}^{(0)} c_{2\theta}. \quad (\text{A.26})$$

若初始有效混合角  $\theta_m = \pi/2$  时，对应的存活概率最低，这和常数密度中  $\theta_m = \pi/4$  时存活概率最低（式A.23）不同，原因在于只有初始点在物质中，终了点在真空中。

## A.5 非绝热演化

如果在驱动两代中微子有效质量态演化的哈密顿量A.24中，非对角项相比于主对角项不可忽视，那么就会发生有效质量态之间的相互转化，定义对角项之差

除以 2 再和非对角项之比  $\gamma$  为绝热参数<sup>①</sup>。如果将  $\theta_m$  随着  $x$  的变化和等效势  $A_{CC}$  随着  $x$  的变化联系起来，就能够得到  $\gamma$  的多种表达式：

$$\frac{d\theta_m}{dx} = \frac{1}{2} \frac{s_{2\theta_m}}{\Delta m_m^2} \frac{dA_{CC}}{dx} \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta m_m^2}{4E \left| \frac{d\theta_m}{dx} \right|} = \frac{(\Delta m_m^2)^2}{2Es_{2\theta_m} \left| \frac{dA_{CC}}{dx} \right|} = \frac{\Delta m^2 s_{2\theta}}{2E \left| \frac{dc_{2\theta_m}}{dx} \right|}, \quad (\text{A.27})$$

主对角项远大于非对角项对应于绝热参数  $\gamma$  远大于 1，所以绝热条件为：

$$\gamma \gg 1, \quad (\text{A.28})$$

从式A.27可以看出，能量越大越容易破坏绝热条件A.28，能量一定，绝热条件在  $c_{2\theta_m}$  变化最大的地方发生最大破坏。绝热最大破坏处（Maximum Violation of Adiabaticity，简称 MVA）对应于<sup>[A.4]</sup>：

$$\frac{d^2 c_{2\theta_m}}{dx^2} \Big|_{x=x_M} = 0 \Rightarrow \left[ 3c_{2\theta_m} s_{2\theta_m} \left( \frac{dA_{CC}}{dx} \right)^2 + \Delta m^2 s_{2\theta} \frac{d^2 A_{CC}}{dx^2} \right]_{x=x_M} = 0, \quad (\text{A.29})$$

而共振条件是  $c_{2\theta_m}|_R = 0$ ，所以共振处一般不等于绝热最大破坏处<sup>[A.4]</sup>。只有  $\frac{d^2 A_{CC}}{dx^2}|_R = 0$  两者才相等。

另外，因为：

$$\theta_m = \frac{1}{2} \arctan \frac{t_{2\theta}}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 c_{2\theta}}}, \quad (\text{A.30})$$

由反正切函数在原点的性质可知共振处是  $\theta_m$  变化最快的地方，并且  $\theta_m$  通常在相对很窄的区域发生巨大变化，绝热破坏区域可以近似为单点破坏。在破坏处  $v_{1m}$  和  $v_{2m}$  相互跃迁的概率  $P_c$  为：

$$P_c = |\langle v'_{1m} | v_{2m} \rangle|^2 = |\langle v'_{2m} | v_{1m} \rangle|^2, \quad (\text{A.31})$$

第二个等号是  $U_m$  的幺正性所决定的， $v'_{im}$  是经过非绝热转化后新的有效质量态。那么非绝热演化下， $v_e$  的平均存活概率的帕克公式（Parke Formula）为：

$$\bar{P}_{ee} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 2P_c) c_{2\theta_m}^{(0)} c_{2\theta}, \quad (\text{A.32})$$

由 S. Parke 于 1986 年首先得到<sup>[A.13]</sup>。对比A.26，第二项中  $1 \rightarrow 1 - 2P_c$ 。

如果  $\gamma \ll 1$ ，对应极端非绝热情况，此时绝热表象下的  $\mathcal{H}_A$  非对角项完全压制了主对角项，密度突变是极端非绝热情况之一。极端非绝热情况下  $\gamma$  表达式A.27中的  $\Delta m^2 s_{2\theta} dx \simeq 0$ ，使得  $\mathcal{H}_F$  非对角项为 0，意味着味道态在极端非绝热情况下不发

<sup>①</sup> 在物质效应的几何描述中<sup>[A.10-A.12]</sup>，物质效应则被描述为在酉空间和中微子态对应的矢量绕着和  $v_m$  对应的矢量做进动，此时绝热参数定义为回转角速度除以 2 再和回转轴的旋转角速度之比，两种定义完全等价。

生变化。此时新的有效质量态  $\nu'_{im}$  和旧的有效质量态  $\nu_{im}$  的关系为:

$$\begin{pmatrix} \nu'_{1m} \\ \nu'_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\Delta\theta_m} & -s_{\Delta\theta_m} \\ s_{\Delta\theta_m} & c_{\Delta\theta_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix}, \quad \Delta\theta_m = \theta'_m - \theta_m. \quad (\text{A.33})$$

其中  $\Delta\theta_m$  为中微子穿过非绝热点处后和穿过前的有效混合角之差, 所以新的有效质量态的概率  $P'_{im}$  和旧的有效质量态的概率  $P_{im}$  的关系为:

$$P'_{1m} = c_{\Delta\theta_m}^2 P_{1m} + s_{\Delta\theta_m}^2 P_{2m}, \quad P'_{2m} = s_{\Delta\theta_m}^2 P_{1m} + c_{\Delta\theta_m}^2 P_{2m}, \quad (\text{A.34})$$

此时有[A.14]:

$$P_c \simeq s_{\Delta\theta_m}^2, \quad (\text{A.35})$$

在  $\gamma$  很小并且非绝热区域很窄时, 这是一个很好的近似公式。

## A.6 三代中微子的物质效应

三代中微子的质量态到味道态的转化矩阵, 即式1.10中, 马约拉纳相位不起作用, 而狄拉克相位是与  $\theta_{13}$  相乘,  $\theta_{13}$  很小(式1.11), 在太阳中微子情况下的效应是很小的, 所以可以不考虑复相位的贡献。混合矩阵  $\mathbf{U} = \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{12}$ <sup>[A.15]</sup> ①。

接下来做表象变换, 达到解耦的目的。我们可以用  $\mathbf{R}_{13}^{-1}\mathbf{R}_{23}^{-1}$  作用于味道态来做表象变换, 即分别在  $\mu - \tau$  和  $e - \tau$  做转动。好处是在新的基底中, 可以避免变换矩阵中的  $\theta_{23}, \theta_{13}$ 。新的跃迁振幅为:

$$\Psi''_{\alpha\beta} = (\psi_{\alpha e''}, \psi_{\alpha\mu''}, \psi_{\alpha\tau''})^T = \mathbf{R}_{13}^{-1}\mathbf{R}_{23}^{-1}(\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha\mu}, \psi_{\alpha\tau})^T, \quad (\text{A.36})$$

其中  $\psi_{\alpha\beta''} \equiv \langle \nu_\beta'' | \nu_\alpha \rangle$ ,  $\nu_{\beta''}$  即经过两次旋转后和未旋转之前的  $\nu_\beta$  对应的态, 现在的转化矩阵  $\mathbf{U}''$  和驱动味道态演化的哈密顿量  $\mathcal{H}_F''$  为:

$$\mathbf{U}'' = \mathbf{R}_{12}, \quad \mathcal{H}_F'' = \mathbf{U}'' \mathcal{M} \mathbf{U}''^\dagger + \mathbf{R}_{13}^{-1} \mathbf{R}_{23}^{-1} \mathcal{V} \mathbf{R}_{23} \mathbf{R}_{13}, \quad (\text{A.37})$$

$\mathcal{H}_F''$  可以展开为:

$$\mathcal{H}_F'' = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}}^2 + A_{CC} c_{\theta_{13}}^2 & \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}} c_{\theta_{12}} & A_{CC} c_{\theta_{13}} s_{\theta_{13}} \\ \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}} c_{\theta_{12}} & \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}}^2 & \\ A_{CC} c_{\theta_{13}} s_{\theta_{13}} & & \Delta m_{31}^2 + A_{CC} s_{\theta_{13}}^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

因为  $\theta_{13}$  很小, 且无论是太阳等效势还是地球等效势都有  $\Delta m_{21}^2 \simeq A_{CC} \ll \Delta m_{31}^2$ , 见图A.1(b)、图A.2(b)和式1.11。所以 1–3 矩阵元相比于 3–3 对角元来说很小,

① 为了和 PMNS 矩阵保持一致,  $\mathbf{R}_{13}$  和文献[A.15]中第二个  $e$  指数上相差一个负号。

$\nu_{3m} \simeq \nu_{\tau''}$  可以解耦出去。所以可以忽略高阶小量：

$$\mathcal{H}_F'' = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}}^2 + A_{CC} c_{\theta_{13}}^2 & \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}} c_{\theta_{12}} \\ \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}} c_{\theta_{12}} & \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}}^2 \\ & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

现在  $\mathcal{H}_F''$  实现部分解耦，三代中微子情况退化为两代中微子情况  $(\psi_{\alpha e''}, \psi_{\alpha \mu''})^T$ 。现在可以应用二代中微子的解耦方案，即式A.20。唯一不同的是，现在的带电流等效势是  $V_{CC}c_{13}^2$ ，即之前的带电流等效势基础上乘以一个常数  $c_{13}^2$ ，有效质量态的本征值为：

$$\text{Diag} \left( \lambda_1^{\text{LMA}}, \lambda_2^{\text{LMA}}, \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \right), \quad \lambda_{1,2}^{\text{LMA}} = \lambda_{1,2} \Big|_{A_{CC}^{\text{eff}} = A_{CC} c_{13}^2}. \quad (\text{A.40})$$

$\theta_{12m}$  的值只需要将两代中微子情况下的  $A_{CC}$  替换为  $A_{CC}c_{13}^2$  即可求出。并且  $\nu_{3m} \simeq \nu_3$ ，这是因为：

$$(\langle \nu_{1m} |, \langle \nu_{2m} |, \langle \nu_{3m} |)^T = R_{12m}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} R_{13} R_{12} (\langle \nu_1 |, \langle \nu_2 |, \langle \nu_3 |)^T. \quad (\text{A.41})$$

同样可以像两代中微子情况下定义三代中微子的绝热参数：

$$\gamma_3 = \frac{\Delta m_m^2}{4E \left| \frac{d\theta_m}{dx} \right|} = \frac{(\Delta m_m^2)^2}{2E s_{2\theta_m} c_{13}^2 \left| \frac{dA_{CC}}{dx} \right|} = \frac{\Delta m^2 s_{2\theta}}{2E \left| \frac{dc_{2\theta_m}}{dx} \right|}, \quad (\text{A.42})$$

只需要将两代中微子情况下的  $A_{CC}$  替换为  $A_{CC}c_{13}^2$  即可。整个解耦合过程中一共转了三次：

$$\Psi_{\alpha i}^m = (\psi_{\alpha 1}^m, \psi_{\alpha 2}^m, \psi_{\alpha 3}^m)^T = R_{12m}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} (\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha \mu}, \psi_{\alpha \tau})^T, \quad (\text{A.43})$$

原始跃迁振幅是新表示下独立演化的跃迁振幅的叠加，式A.43反解就能得到原始跃迁振幅。

## A.7 轻惰性中微子的物质效应

当引入弱混合的轻惰性中微子模型后共有四代中微子，四代中微子的混合为：

$$(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \nu_s)^T = U (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)^T, \quad U = R'_{34} R'_{24} R'_{14} U_{\text{PMNS}}^{(4)} \quad (\text{A.44})$$

其中  $U_{\text{PMNS}}^{(4)} = \text{Diag}(U_{\text{PMNS}}, 1)$ ， $R_{ij}$  如式1.9所示。因为  $SU(3)$  空间形成一个子空间，所以  $U = R'_{34} R'_{24} R'_{14} U_{\text{PMNS}}^{(4)} = U_{\text{PMNS}}^{(4)} R_{14} R_{24} R_{34}$ 。

本研究关注于混合只存在于第一个质量本征态和第四个质量本征态之间，即  $\theta_{34} = \theta_{24} = 0$ ，其他混合情况见[A.16-A.18]。此时  $U = R_{23} R_{13} R_{12} R_{14}$ ，同样做表象变

换  $R_{13}^{-1}R_{23}^{-1}$ :

$$\Psi''_\alpha = (\psi_{\alpha e''}, \psi_{\alpha \mu''}, \psi_{\alpha \tau''}, \psi_{\alpha s''})^T = R_{13}^{-1}R_{23}^{-1}(\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha \mu}, \psi_{\alpha \tau}, \psi_{\alpha s})^T. \quad (\text{A.45})$$

新表象下的跃迁振幅的演化为:

$$i\frac{d}{dx}\Psi''_\alpha = \mathcal{H}_F''\Psi''_\alpha, \quad \mathcal{H}_F'' = R_{12}R_{14}\mathcal{M}R_{14}^{-1}R_{12}^{-1} + R_{13}^{-1}R_{23}^{-1}\mathcal{V}R_{23}R_{13}, \quad (\text{A.46})$$

其中:

$$\mathcal{M} = \text{Diag}\left(0, \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}, \frac{\Delta m_{31}^2}{2E}, \frac{\Delta m_{41}^2}{2E}\right), \quad \mathcal{V} = \text{Diag}(V_{CC}, 0, 0, -V_{NC}), \quad (\text{A.47})$$

$\mathcal{H}_F''$  展开为:

$$\mathcal{H}_F''(1, 1) : \frac{1}{2E} \left( \Delta m_{41}^2 s_{\theta_{14}}^2 c_{\theta_{12}}^2 + \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}}^2 + A_{CC} c_{\theta_{13}}^2 \right), \quad (\text{A.48})$$

$$\mathcal{H}_F''(1, 2) : \frac{1}{2E} \left( -\Delta m_{41}^2 s_{\theta_{14}}^2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_{12}} + \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.49})$$

$$\mathcal{H}_F''(1, 3) : \frac{1}{2E} \left( A_{CC} c_{\theta_{13}} s_{\theta_{13}} \right), \quad (\text{A.50})$$

$$\mathcal{H}_F''(1, 4) : \frac{1}{2E} \left( \Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}} s_{\theta_{14}} c_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.51})$$

$$\mathcal{H}_F''(2, 1) : \frac{1}{2E} \left( -\Delta m_{41}^2 s_{\theta_{14}}^2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_{12}} + \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.52})$$

$$\mathcal{H}_F''(2, 2) : \frac{1}{2E} \left( \Delta m_{41}^2 s_{\theta_{14}}^2 s_{\theta_{12}}^2 + \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}}^2 \right), \quad (\text{A.53})$$

$$\mathcal{H}_F''(2, 3) : 0, \quad (\text{A.54})$$

$$\mathcal{H}_F''(2, 4) : \frac{1}{2E} \left( -\Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}} s_{\theta_{14}} s_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{H}_F''(3, 1) : \frac{1}{2E} \left( A_{CC} c_{\theta_{13}} s_{\theta_{13}} \right), \quad (\text{A.56})$$

$$\mathcal{H}_F''(3, 2) : 0, \quad (\text{A.57})$$

$$\mathcal{H}_F''(3, 3) : \frac{1}{2E} \left( \Delta m_{31}^2 + A_{CC} s_{\theta_{13}}^2 \right), \quad (\text{A.58})$$

$$\mathcal{H}_F''(3, 4) : \frac{1}{2E} \left( -\Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}} s_{\theta_{14}} s_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.59})$$

$$\mathcal{H}_F''(4, 1) : \frac{1}{2E} \left( \Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}} s_{\theta_{14}} c_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.60})$$

$$\mathcal{H}_F''(4, 2) : \frac{1}{2E} \left( -\Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}} s_{\theta_{14}} s_{\theta_{12}} \right), \quad (\text{A.61})$$

$$\mathcal{H}_F''(4, 3) : 0, \quad (\text{A.62})$$

$$\mathcal{H}_F''(4, 4) : \frac{1}{2E} \left( \Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}}^2 - A_{NC} \right). \quad (\text{A.63})$$

尽管  $\theta_{13}$  相对于  $\theta_{14}$  较大, 但是无论是地球物质势还是太阳物质势都有  $1-3$  和  $2-3$  矩阵元相比于  $3-3$  主对角元很小,  $v_{3m} \simeq v_{\tau''}$  可以解耦出去, 这和三代中微子的

情况是一致的。同时略去高阶小量  $\Delta m_{41}^2 s_{\theta_{14}}^2$ ,  $\mathcal{H}_F''$  变为:

$$\frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta m_{21}^2 s_{\theta_{12}}^2 + A_{CC} c_{\theta_{13}}^2 & \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_{12}} & \Delta m_{41}^2 \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\theta_{12}} \\ \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_{12}} & \Delta m_{21}^2 c_{\theta_{12}}^2 & -\Delta m_{41}^2 \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} s_{\theta_{12}} \\ \Delta m_{41}^2 \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\theta_{12}} & -\Delta m_{41}^2 \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} s_{\theta_{12}} & \Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}}^2 - A_{NC} \end{pmatrix} + \frac{A_{NC} + m_1^2}{2E}, \quad (A.64)$$

1–2 矩阵块正是修正的带电流等效势下的两代中微子哈密顿量, 所以可以采用修正的带电流等效势下的有效混合角, 相当于做了第三次旋转  $R_{12m}^{-1}$  得到  $\Psi_{\alpha\alpha''''}$ :

$$(\psi_{ae''''}, \psi_{\alpha\mu''''}, \psi_{\alpha\tau''''}, \psi_{\alpha s''''})^T = R_{12m}^{-1} R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} (\psi_{ae}, \psi_{\alpha\mu}, \psi_{\alpha\tau}, \psi_{\alpha s})^T, \quad (A.65)$$

从而得到经过三次旋转的  $\mathcal{H}_F'''$ :

$$\mathcal{H}_F''' = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\text{LMA}} & & \Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\Delta\theta_{12}} \\ & \lambda_2^{\text{LMA}} & -\Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} s_{\Delta\theta_{12}} \\ \Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\Delta\theta_{12}} & -\Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} s_{\Delta\theta_{12}} & \Delta_{41} c_{\theta_{14}}^2 \end{pmatrix}, \quad (A.66)$$

其中  $\Delta_{41} = \Delta m_{41}^2 / 2E$ ,  $\Delta\theta_{12} = \theta_{12} - \theta_{12m}$ ,  $\lambda_{1,2}^{\text{LMA}}$  为去掉了公共项  $m_1^2 / 2E$  之后的  $\lambda_{1,2}$ 。小角耦合  $\theta_{14} \ll 1$  使得式 A.66 中 2–2 矩阵元远大于与之同行和同列的项, 这样  $\nu_{2m}$  也解耦了, 得到:

$$\mathcal{H}_F''' = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\text{LMA}} & \Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\Delta\theta_{12}} \\ \Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\Delta\theta_{12}} & \Delta_{41} c_{\theta_{14}}^2 \end{pmatrix}, \quad (A.67)$$

就可以做最后一次旋转  $R_{14m}^{-1}$  得到  $\Psi_{\alpha i}^m$ :

$$(\psi_{\alpha 1}^m, \psi_{\alpha 2}^m, \psi_{\alpha 3}^m, \psi_{\alpha 4}^m)^T = R_{14m}^{-1} R_{12m}^{-1} R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} (\psi_{ae}, \psi_{\alpha\mu}, \psi_{\alpha\tau}, \psi_{\alpha s})^T, \quad (A.68)$$

此时有效质量态和真空质量态的关系为:

$$(\langle \nu_{1m} |, \langle \nu_{2m} |, \langle \nu_{3m} |, \langle \nu_{4m} |)^T = R_{14m}^{-1} R_{12m}^{-1} R_{12} R_{14} (\langle \nu_1 |, \langle \nu_2 |, \langle \nu_3 |, \langle \nu_4 |)^T, \quad (A.69)$$

所以有  $\nu_{3m} \simeq \nu_3$ ,  $\nu_{2m} \simeq \nu_{\mu''''}$ , 其中  $\nu_{\mu''''}$  即经过三次旋转后和未旋转之前的  $\nu_\mu$  对应的态。混合角和有效质量平方差分别为:

$$\begin{aligned} t_{2\theta_{14m}} &= \frac{\Delta_{41} s_{2\theta_{14}} c_{\Delta\theta_{12}}}{\Delta_{41} c_{\theta_{14}}^2 - \lambda_1^{\text{LMA}}}, \\ \frac{\Delta m_{41m}^2}{4E} &= \sqrt{\left( \frac{\Delta_{41} c_{\theta_{14}}^2 - \lambda_1^{\text{LMA}}}{2} \right)^2 + \left( \Delta_{41} \frac{s_{2\theta_{14}}}{2} c_{\Delta\theta_{12}} \right)^2}, \end{aligned} \quad (A.70)$$

总的本征值  $\Lambda_{1,4}$  为 (去掉公共的  $m_1^2/2E$ ):

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,4} &= \frac{\Delta_{41} c_{\theta_{14}}^2 + \lambda_1^{\text{LMA}}}{2} \pm \frac{\Delta m_{41m}^2}{4E} \\ &= \frac{\Delta m_{41}^2 c_{\theta_{14}}^2 + A_{\text{CC}} + 2A_{\text{NC}} + \Delta m_{21}^2 - \Delta m_{21m}^2}{4E} \pm \frac{\Delta m_{41m}^2}{4E},\end{aligned}\quad (\text{A.71})$$

简化为两代演化矩阵后, 轻惰性中微子的绝热参数可以定义为:

$$\gamma_4 = \frac{\Delta m_{41m}^2}{4E \left| \frac{d\theta_{14m}}{dx} \right|}, \quad (\text{A.72})$$

此时绝热参数  $\gamma_4$  中  $\Delta m_{41m}^2$  和  $\theta_{14m}$  都由  $\lambda_1^{\text{LMA}}$  和  $c_{\Delta\theta_{12}}$  间接依赖  $1-2$  振荡的有效质量平方差  $\Delta m_{21m}^2$  和有效混合角  $\theta_{12m}$ 。弱混合下, 式A.70中有效质量平方差中第二个平方项的贡献很小, 两个本征值  $\lambda_1, \lambda_4$  可以靠的特别近, 式A.70中当

$$\Delta_{41}^2 c_{\theta_{14}}^2 = \lambda_1^{\text{LMA}} \quad (\text{A.73})$$

处, 发生了能级交叉, 使得绝热参数很小, 发生非绝热演化。式A.73是物质势的二次方程, 所以最多有两处能级交叉。类似于两代中微子情况, 极端非绝热情况下  $\nu_{1m} \rightleftharpoons \nu_{4m}$  的概率为:

$$P_c \simeq s_{\Delta\theta_{14m}}^2. \quad (\text{A.74})$$

可以近似描述  $\gamma$  很小且非绝热区域很窄的情况。

为了和文献[A.16-A.17]保持一致, 在正文和接下来的附录中, 将  $\Delta m_{41}^2$  记作  $\Delta m_{01}^2$ , 将  $\theta_{14}$  记作  $\alpha$ ,  $\theta_{14m}$  记作  $\alpha_m$ 。

## A.8 穿过太阳的中微子存活概率

采用解析方法计算穿过太阳的中微子存活概率时, 必须根据太阳密度分布(图A.1(b)), 检查三代中微子和轻惰性中微子情况下是否破坏绝热条件A.28, 才能给出  $\nu_e$  存活概率的解析公式。

### A.8.1 绝热条件的检查

中微子在太阳内部的演化情况分别在三代中微子框架和轻惰性中微子框架下考察绝热参数, 从而判断是否为绝热演化。考察时选取太阳中微子的最大特征能量 20 MeV, 由式A.27可知这是绝热条件最容易破坏的能量。

根据A.6和A.7节中的讨论, 这两种情况下  $\nu_{3m} \simeq \nu_3$  都会独立演化, 无需考虑对应于  $\nu_{3m}$  的本征值  $\lambda_3$ 。 $\nu_{3m}$  对应的  $\lambda_3$  约为  $\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}$ 。由式A.38可知, 三代中微子下有  $\theta_{23m} = \theta_{23}$ ,  $\theta_{13m} \simeq \theta_{13}$ , 由式A.54和A.57可知, 轻惰性中微子下有  $\theta_{23m} = \theta_{23}$ ,  $\theta_{13m} \simeq$

$$\theta_{13} \circ$$

三代中微子演化绝热条件的检查

下面检验太阳的密度分布是否会破坏绝热条件A.28, 采用的数据来自式1.11。分别画出对应于  $v_{1m}, v_{2m}$  的本征值  $\lambda_1, \lambda_2$  (去掉公共项  $(m_1^2 + A_{NC})/2E$ ) (图A.3(a)), 有效混合角  $\cos 2\theta_{12m}$  (图A.3(b)) 以及绝热参数  $\gamma_3$  随着太阳半径的变化 (图A.3(c))。

从图A.3中可以看出共振位置不是绝热最大破坏位置，并且从图A.3(c)可以看出在三代中微子框架下，太阳的绝热参数始终在 900 以上，绝热演化保持的很好。

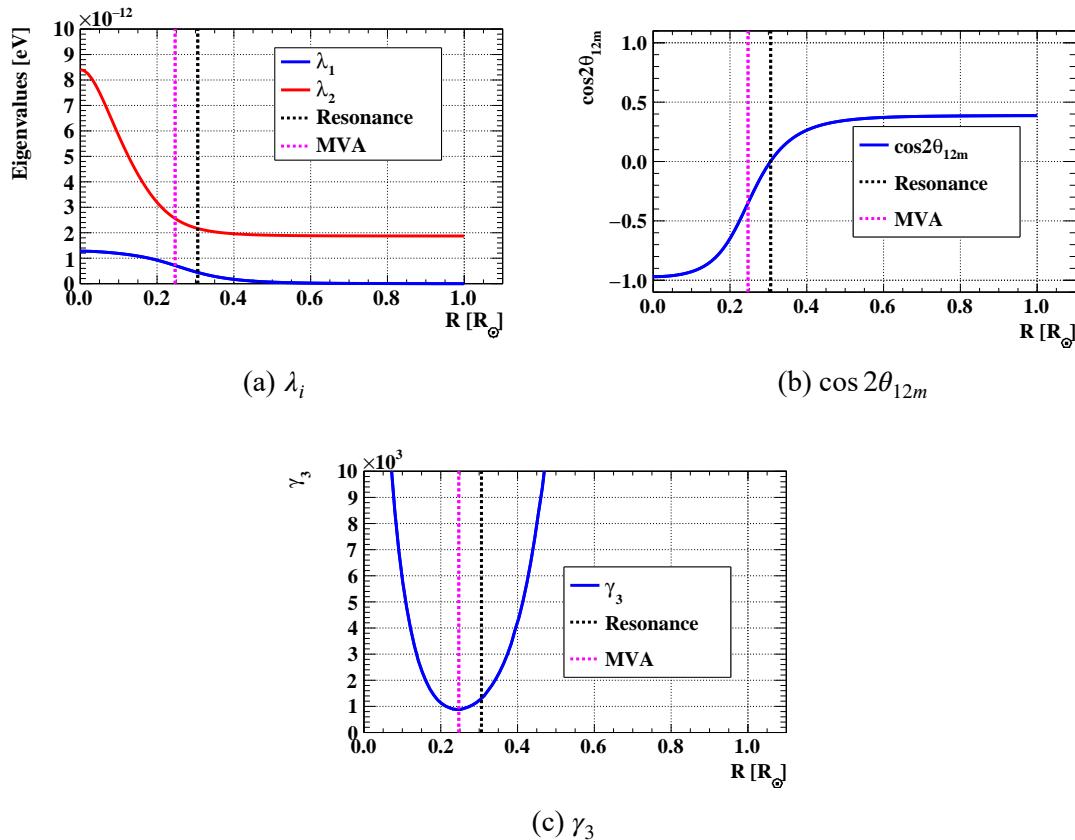


图 A.3 (a)  $v_{1m}, v_{2m}$  的本征值  $\lambda_1$  (蓝线),  $\lambda_2$  (红线) 随太阳半径的变化,  $v_{3m} \simeq v_3$  独立演化, 对应的  $\lambda_3$  约为  $\Delta m_{31}^2/2E$ 。(b)  $\cos 2\theta_{12m}$  (蓝线) 随太阳半径的变化。(c)  $\gamma_3$  (蓝线) 随太阳半径的变化。以上在三代中微子框架下, 中微子能量为 20 MeV。图中黑色虚线为共振处, 粉色虚线为绝热最大破坏处。

轻惰性中微子演化绝热条件的检查

对于轻惰性中微子，选取惰性中微子的混合参数为  $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$  ( $R_\Delta$  的定义见式1.25)，对应图1.11(d)惰性中微子特征最明显的地方。分别画出对应于  $\nu_{1m}, \nu_{2m}, \nu_{0m}$  的本征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0$  (去掉公共的  $m_1^2/2E$ ) (图A.4(a)), 有效

混合角  $\theta_{12m}, \alpha_m$  (图A.4(b)) 以及绝热参数  $\gamma_4$  随着太阳半径的变化 (图A.4(c))。

图A.4(a)表明在两处发生了能级交叉。从图A.4(b)和图A.4(c)中可以看出这两处能级交叉对应于两处绝热最大破坏处，而且由图A.4(c)可知在绝热最大破坏处  $\gamma \ll 1$ ，是极端非绝热转化。此时A.4(b)中  $\alpha_m$  会发生  $0 \rightarrow \pi/2 \rightarrow 0$  的变化。并且由于在太阳表面物质势接近 0，所以在太阳表面，三代中微子和轻惰性中微子中  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的本征值  $\lambda_1, \lambda_2$  也是一致的，如图A.3(a)和A.4(a)所示。

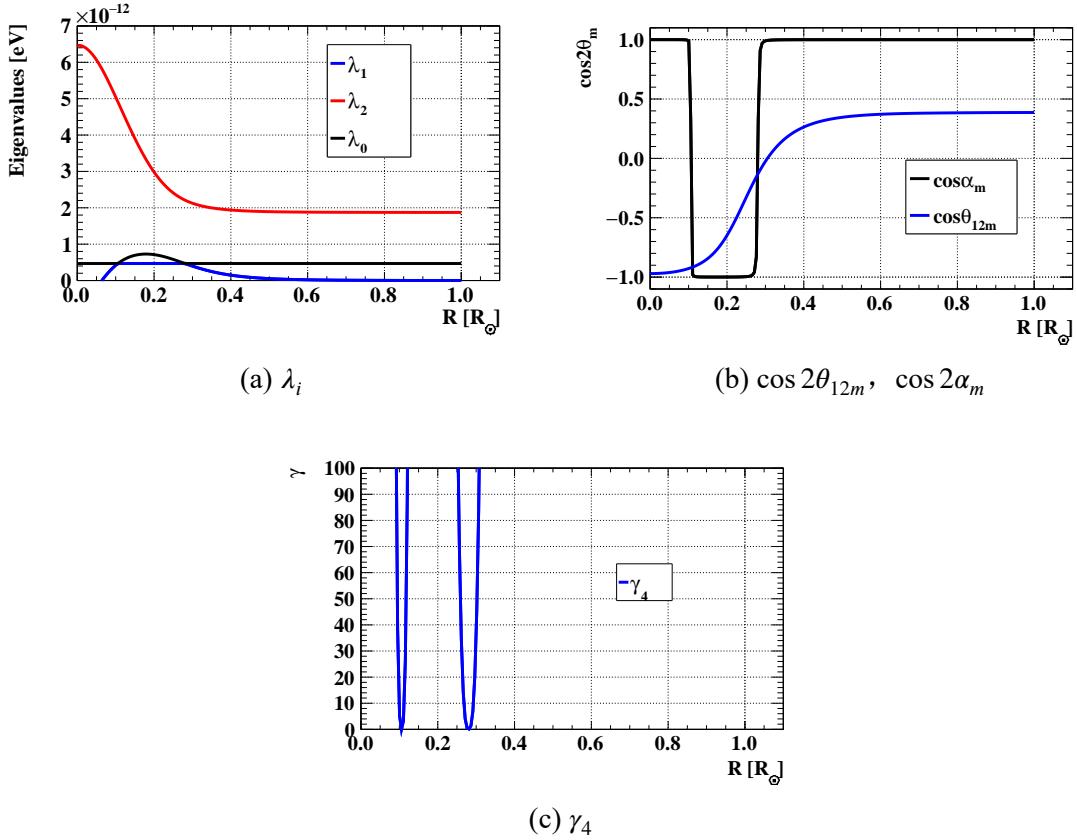


图 A.4 (a)  $\nu_{1m}, \nu_{2m}, \nu_{0m}$  的本征值  $\lambda_1$  (蓝线),  $\lambda_2$  (红线),  $\lambda_0$  (黑线) 随太阳半径的变化。  
 $\nu_{3m} \simeq \nu_3$  独立演化, 对应的  $\lambda_3$  约为  $\Delta m_{31}^2/2E$ 。 (b)  $\cos 2\theta_{12m}$  (蓝线),  $\cos 2\alpha_m$  (黑线) 随着太阳半径的变化。 (c) 绝热参数  $\gamma_4$  (蓝线) 随着太阳半径的变化。以上在轻惰性中微子情况下, 中微子能量为 20 MeV。  $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。

### A.8.2 中微子存活概率

#### 三代中微子情况

三代中微子下，由绝热条件的检查（A.8.1节）可知  $\nu_{1m}, \nu_{2m}, \nu_{3m}$  基本不会发生相互转化，到太阳表面第  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 个质量态的概率  $P_k^\odot$  为：

$$P_{1,2}^\odot = \frac{c_{\theta_{13}}^2}{2} \left[ 1 \pm c_{2\theta_{12m}}^{(0)} (1 - 2P_c) \right], \quad P_c \sim 0, \quad P_3^\odot = s_{\theta_{13}}^2. \quad (\text{A.75})$$

1 对应 +，2 对应 -。 $c_{2\theta_{12m}}^{(0)}$  表示中微子产生处  $c_{2\theta_{12m}}$  的值。在这种绝热演化情况下， $\nu_e$  的存活概率为：

$$P_{ee}^{\text{绝热}} = \frac{c_{\theta_{13}}^4}{2} \left( 1 + c_{2\theta_{12m}}^{(0)} c_{2\theta_{12}} \right)_{A_{\text{eff}}=A_{\text{CC}}} + s_{\theta_{13}}^4, \quad (\text{A.76})$$

在  $E \lesssim 2\text{MeV}$ ，混合角和本征值约等于真空下的值，存活概率就等于真空振荡的平均值，这一能区是真空效应主导的区域。而对  $E \gg 2\text{MeV}$ ，混合角  $\theta_{12m}$  受物质效应影响很大，发生了  $\pi/2 \rightarrow \pi/4 \rightarrow 0$  的变化，这一能区是物质效应主导的能区。这两种情况的中微子存活概率分别为：

$$P_{ee}^{\text{真空效应主导}} \simeq c_\theta^4 + s_\theta^4 = 1 - \frac{1}{2}s_{2\theta}^2, \quad P_{ee}^{\text{物质效应主导}} \simeq c_\theta^2(c_{\theta_m}^{(0)})^2 + s_\theta^2(s_{\theta_m}^{(0)})^2 = s_\theta^2, \quad (\text{A.77})$$

介于这两者即是  $\nu_e$  存活概率曲线1.11(a)的过渡区。

#### 轻惰性中微子情况

轻惰性中微子情况下， $\nu_{1m}$  和  $\nu_{0m}$  可能会发生相互转化， $\nu_{2m}$  和  $\nu_{3m}$  独立演化。假设有  $n$  ( $n = 1, 2$ ) 处绝热破坏点，在绝热破坏点处  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{0m}$  相互转化的概率分别为  $P_{ic}$  ( $i = 1 \dots n$ )，那么到太阳表面第  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 个质量态的概率  $P_k^\odot$  为的表达式为：

$$\begin{aligned} P_{1,4}^\odot &= \frac{c_{\theta_{13}}^2 (c_{\theta_{12m}}^{(0)})^2}{2} \left[ 1 \pm c_{2\alpha_m}^{(0)} \prod_{i=1}^n (1 - 2P_{ic}) \right], \\ P_2^\odot &= c_{\theta_{13}}^2 (s_{\theta_{12m}}^{(0)})^2, \quad P_3^\odot = s_{\theta_{13}}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

1 对应 +，4 对应 -。那么  $\nu_e$  的存活概率为：

$$P_{ee}^{\text{非绝热}} = \frac{c_{\theta_{13}}^4 (c_{\theta_{12m}}^{(0)})^2 c_{\theta_{12}}^2}{2} \left( 1 + c_{2\alpha_m}^{(0)} c_{2\alpha} \prod_{i=1}^n (1 - 2P_{ic}) \right) + c_{\theta_{13}}^4 (s_{\theta_{12m}}^{(0)})^4 + s_{\theta_{13}}^4. \quad (\text{A.79})$$

## A.9 穿过地球的中微子存活概率

如果中微子是夜晚观测到的，那么将会穿过地球，中微子在夜晚穿越地球时，由于地球密度存在多个断层处，导致密度梯度在断层处过大，有可能破坏绝热条件。

### A.9.1 绝热条件的检查

中微子在地球内部的演化情况分别在三代中微子框架和轻惰性中微子框架下考察绝热参数，从而判断是否为绝热演化。考察时选取太阳中微子的最大特征能量 20 MeV，由式A.27可知这是绝热条件最容易破坏的能量。

这两种情况下  $\nu_{3m} \simeq \nu_3$  都会独立演化，如A.6和A.7节所示，同样无需考虑对应于  $\nu_{3m}$  的本征值  $\lambda_3$ 。 $\nu_{3m}$  对应的  $\lambda_3$  约为  $\frac{\Delta m^2_{31}}{2E}$ 。由式A.38可知，三代中微子下有  $\theta_{23m} = \theta_{23}$ ,  $\theta_{13m} \simeq \theta_{13}$ ，由式A.54和A.57可知，轻惰性中微子下有  $\theta_{23m} = \theta_{23}$ ,  $\theta_{13m} \simeq \theta_{13}$ 。

#### 三代中微子演化绝热条件的检查

下面检验地球的密度分布是否会破坏绝热条件A.28，采用的数据来自表1.11，分别画出  $\nu_{1m}, \nu_{2m}$  的本征值  $\lambda_1, \lambda_2$ （去掉公共的  $(m_1^2 + A_{NC})/2E$ ）（图A.5(a)），有效混合角  $\theta_{12m}$ （图A.5(b)）和  $\cos \theta_{12m}$ （图A.5(c)）以及绝热参数（图A.5(d)）随着地球半径的变化图。

地球的密度存在多个断层，虽然没有发生共振即  $\cos 2\theta_m = 0$ ，但是在断层处密度会发生很大变化，致使绝热参数在断层处被破坏，无法采用绝热近似。图A.5(d)中绝热参数在断层处远小于 1 接近 0，是极端非绝热情况，但是  $\theta_{12m}$  在古登堡界面才有较大变化（如图A.5(b)所示），即使在古登堡界面， $\theta_{12m}$  也只有大概 0.05 的变化。

$$P_c \simeq \sin^2 \Delta\theta_{12m} \approx 0.05^2 = 0.0025, \quad (\text{A.80})$$

质量态的相互转化概率完全可以忽略不计，可以认为质量态始终绝热演化。

#### 轻惰性演化绝热条件的检查

对于轻惰性中微子，选取惰性中微子的混合参数为  $R_\Delta = 0.25$ ,  $\sin^2 2\alpha = 5 \times 10^{-4}$ ，分别画出  $\nu_{1m}, \nu_{2m}, \nu_{0m}$  对应的本征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0$ （去掉公共的  $m_1^2/2E$ ）（图A.6(a)），有效混合角  $\theta_{12m}, \alpha_m$ （图A.6(b)）和  $\cos$  值（图A.6(c)），以及绝热参数  $\gamma_4$  随着地球半径的变化（图A.6(d)）。

文献[A.18]发现轻惰性中微子的共振效应在地球中性势下可以忽略不计，所

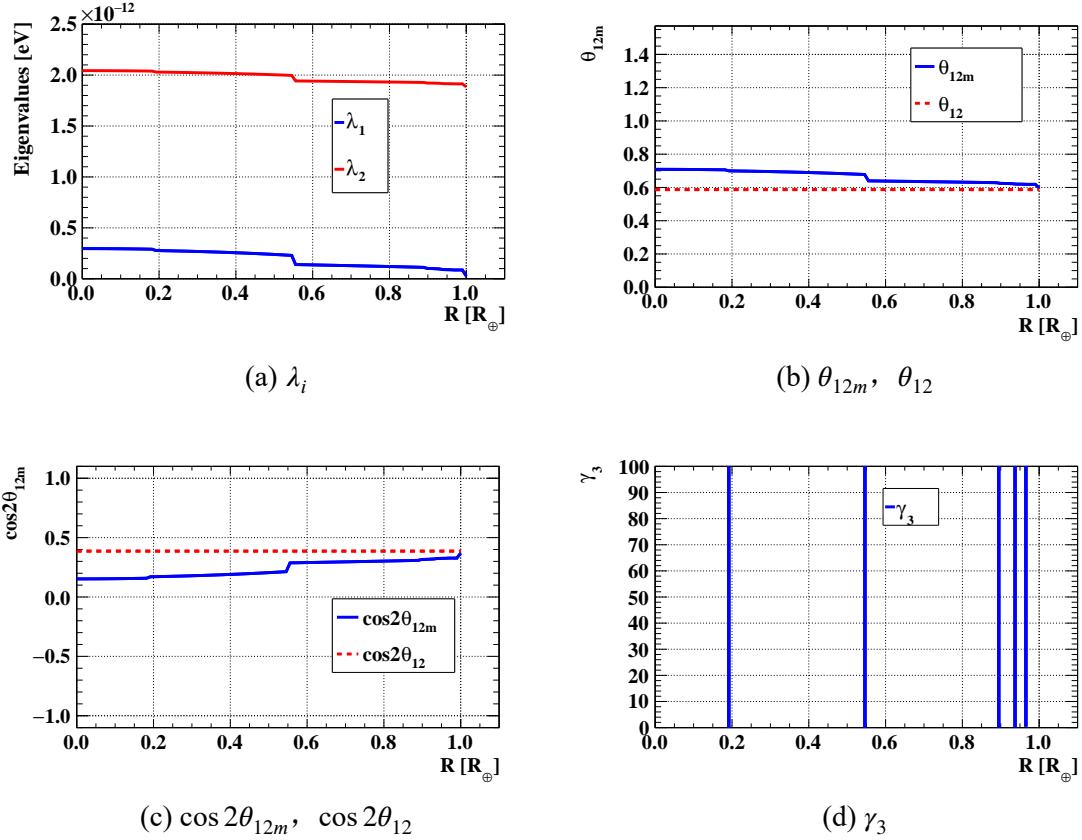


图 A.5 (a)  $\nu_{1m}$  和  $\nu_{2m}$  的本征值  $\lambda_1$  (蓝线),  $\lambda_2$  (红线) 随地球半径的变化。 $\nu_{3m} \approx \nu_3$  独立演化, 对应的  $\lambda_3$  约为  $\Delta m_{31}^2/2E$ 。(b)  $\cos 2\theta_{12m}$  (蓝色实线) 以及  $\cos 2\theta_{12}$  (红色虚线) 随地球半径的变化。(c)  $\theta_{12m}$  (蓝色实线) 以及  $\theta_{12}$  (红色虚线) 随地球半径的变化。(d)  $\gamma_3$  (蓝线) 随地球半径的变化。以上在三代中微子框架下, 中微子能量为 20 MeV。

以不用考虑轻惰性中微子地球物质效应的情况。从图A.6(b)和图A.6(c)中看是因为  $P_c \simeq s_{\Delta\alpha_m}^2$ 。 $\nu_{0m}$  的概率基本不变。尽管地球断层会产生多处非绝热区域, 即图A.6(d)所示, 但是由于  $\Delta\alpha_m$  变化很小, 导致有效质量态  $\nu_{0m}$  的概率基本不变。只有  $\nu_{2m}$  和  $\nu_{1m}$  等价于三代中微子框架下的转化, 但是  $s_{\Delta\theta_{12m}}^2$  和三代中微子情况相同, 最大只有在古登堡界面的

$$P_c \simeq s_{\Delta\theta_{12m}}^2 \approx 0.05^2 = 0.0025, \quad (\text{A.81})$$

可以忽略不计。

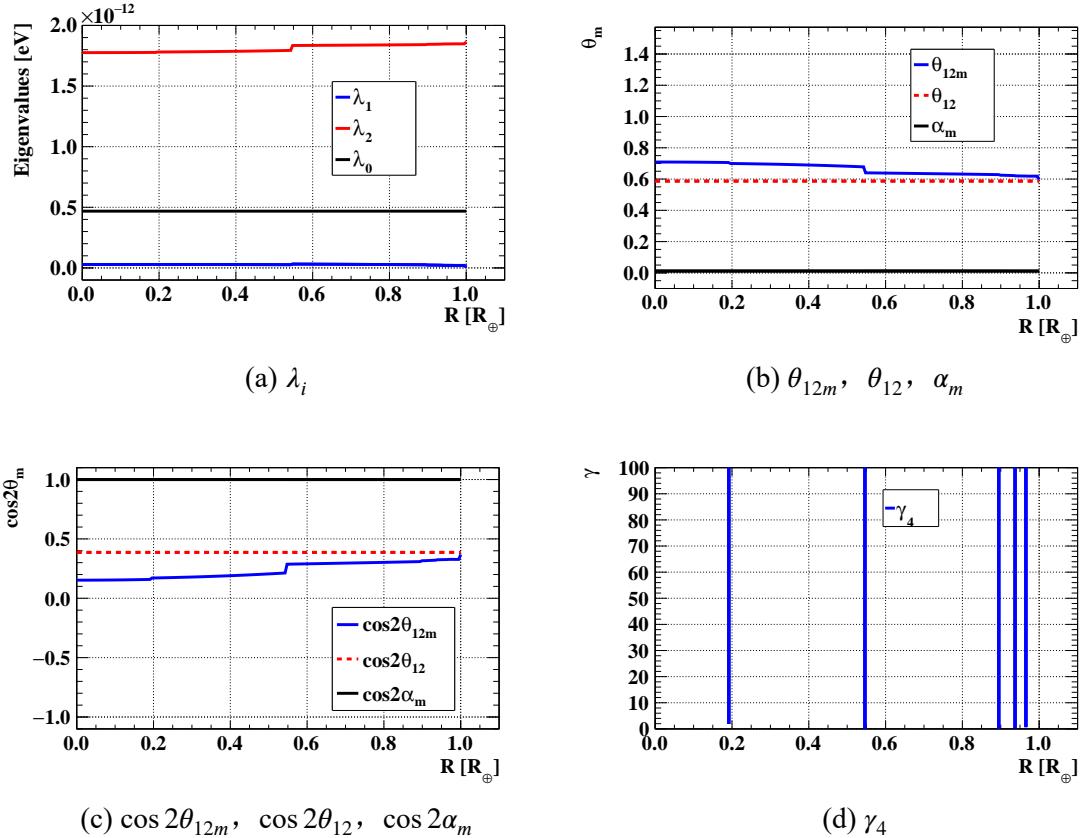


图 A.6 (a)  $\nu_{1m}$ ,  $\nu_{2m}$ ,  $\nu_{0m}$  的本征值  $\lambda_1$  (蓝线),  $\lambda_2$  (红线),  $\lambda_0$  (黑线) 随着地球半径的变化。 $\nu_{3m} \approx \nu_3$  独立演化, 对应的  $\lambda_3$  约为  $\Delta m_{31}^2/2E$ 。(b)  $\theta_{12m}$  (蓝线),  $\theta_{12}$  (红色虚线),  $\alpha_m$  (黑线) 随地球半径的变化。(c)  $\cos 2\theta_{12m}$  (蓝线),  $\cos 2\theta_{12}$  (红色虚线),  $\cos 2\alpha_m$  (黑线) 随着地球半径的变化。(d) 绝热参数  $\gamma_4$  (蓝线) 随着地球半径的变化。以上在轻惰性中微子情况下, 中微子能量为 20 MeV。

### A.9.2 中微子存活概率

中微子到达地球时是已经退相干成为了质量态，地球物质中质量态的存活概率为：

$$P_{im}^{\oplus} = \sum_j^{3 \text{ or } 4} P_k^{\odot} P_{ki}^{\oplus}, \quad (\text{A.82})$$

其中  $P_{im}^{\oplus}$  是地球中第  $i$  个有效质量态的概率， $P_k^{\odot}$  是到太阳表面第  $k$  个质量态的概率（式A.78）， $P_{ki}^{\oplus}$  是刚进入地球物质时为确定的第  $k$  个质量态，在地球物质中转化为第  $i$  个有效质量态的概率。中微子在地球内部穿越的最长路径为  $2R_{\oplus} = 1.28 \times 10^7 \text{ m} \ll L_{coh}$ ，不满足退相干条件，所以到达地球的质量态在穿越地球时不会退相干。

白天的  $\nu_e$  的存活概率可以表示为各个退相干的中微子质量态（概率为  $P_k^{\odot}$ ）到电子中微子态的概率  $P_{ke}^0 (k = 1, 2)$  之和，而夜晚  $\nu_e$  的存活概率中  $P_{ke}^{\oplus} (i = 1, 2)$  是退相干的质量态穿过地球后转化为  $\nu_e$  的概率<sup>[A.19]</sup>：

$$P_D = \sum_k^{3 \text{ or } 4} P_k^{\odot} P_{ke}^{(0)}, \quad P_N = \sum_k^{3 \text{ or } 4} P_k^{\odot} P_{ke}^{\oplus}. \quad (\text{A.83})$$

白天的  $\nu_e$  存活概率和夜晚的  $\nu_e$  存活概率之差为：

$$P_N - P_D = \sum_i^{3 \text{ or } 4} P_k^{\odot} (P_{ke}^{\oplus} - P_{ke}^{(0)}). \quad (\text{A.84})$$

三代中微子和轻惰性中微子情况下第三个质量态都会独立演化，轻惰性中微子情况下尽管在多个断层处破坏了绝热条件，但是在地球上  $\nu_{0m}$  可以认为是独立演化。

### 三代中微子情况

演化矩阵的幺正性要求  $P_{1e}^{\oplus} - P_{1e}^{(0)} = -(P_{2e}^{\oplus} - P_{2e}^{(0)})$ 。所以式A.84可以变为：

$$P_N - P_D = (P_2^{\odot} - P_1^{\odot})(P_{2e}^{\oplus} - P_{2e}^{(0)}) = -c_{\theta_{13}}^2 \overline{c_{2\theta_{12m}}} f_{reg}. \quad (\text{A.85})$$

其中  $P_{2e}^{\oplus} - P_{2e}^{(0)}$  定义为重生因子（Regeneration Factor） $f_{reg}$ ，所以昼夜的概率之差完全由重生因子决定。

若将地球视为常数密度的物质，那么  $f_{reg}$  为：

$$f_{reg} = s_{\phi_1}^2 s_{2\theta_{12m}} s_{2\Delta\theta_{12m}}, \quad (\text{A.86})$$

其中  $\phi_1 = \Delta m_{21m}^2 L / 4E$ 。从太阳过来的退相干的  $\nu_{2m}$ ，尽管转化到  $\nu_{1m}$  的概率很小，如式A.80所示，这是因为  $P_c$  是  $\Delta\theta_{12m}$  的二次项，但是式A.86来自于相干项，是  $\Delta\theta_{12m}$  的一次项，就能够产生较可观的  $\nu_{2m} \rightarrow \nu_e$  的概率。

若地球密度可以用地幔-地核双层模型来近似，只穿过地幔的重生因子可以通过单层演化矩阵  $e^{-i\mathcal{H}_F^{\text{mantle}}L}$  计算为式A.86。单层只有一个振荡相位，而穿过地核的重生因子可以通过三层演化矩阵  $e^{-i\mathcal{H}_F^{\text{mantle}}L_1}e^{-i\mathcal{H}_F^{\text{core}}L_2}e^{-i\mathcal{H}_F^{\text{mantle}}L_1}$  计算为[A.20]：

$$f_{reg}^{\oplus(\text{mantle+core})} = (W_1)^2 c_{2\theta_{12}} + W_1 W_3 s_{2\theta_{12}}, \quad (\text{A.87})$$

其中  $\overrightarrow{W}$  为：

$$\overrightarrow{W} = 2s_{\phi_1} R \hat{n}_1 + s_{\phi_2} \hat{n}_2, \quad R = c_{\phi_1} c_{\phi_2} - s_{\phi_1} s_{\phi_2} (\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2), \quad (\text{A.88})$$

$\hat{n}_{1,2}$  分别是地幔和地核中的  $(s_{2\theta_{12m}}, 0, -c_{2\theta_{12m}})$ ,  $\phi_1$  为地幔-地核-地幔路径中在一侧地幔部分积累的相位  $\phi_1 = \Delta m_{21m}^2 L_1 / 4E$ ,  $\phi_2$  为在地核中积累的相位  $\phi_2 = \Delta m_{21m}^2 L_2 / 4E$ 。

对于一般层数的地球物质势分布，文献[A.21]采用微扰方法推导出了一般层数地球的重生因子表达式：

$$f_{reg} = \frac{2E s_{2\theta_{12}}^2}{\Delta m_{21}^2} \sin \Phi_1 \sum_{i=1}^n \Delta V_i \sin \Phi_i, \quad (\text{A.89})$$

地球内部有  $n$  层，那么中微子穿过地球就会经过  $2n$  个断层，将地球分为最中心的 1 个球体和外面的  $n-1$  个球壳，式A.89中  $\Phi_i$  为从进入第  $n-i$  个球壳到离开第  $n-i$  个球壳所积累的相位， $\Delta V_i$  为带电势在断层处的变化。由积化和差可知式A.89有  $2n-1$  个振荡模式，这  $2n-1$  个振荡模式的相位分别为，从断层位置到中微子射出地球终点的相位累积。但是公式中的相位累积同样需要数值求解。

### 轻惰性中微子情况

轻惰性中微子情况下，由于地球物质使得  $\nu_{3m}, \nu_{0m}$  都可以独立演化，所以四代中微子的地球物质效应等价于三代中微子的地球物质效应。

$$\begin{aligned} P_N - P_D &= (P_2^\odot - P_1^\odot)(P_{2e}^\oplus - P_{2e}^{(0)}) \\ &= c_{\theta_{13}}^2 \left( (s_{\theta_{12m}}^{(0)})^2 - (c_{\theta_{12m}}^{(0)})^2 \frac{1 + c_{2\alpha_m}^{(0)} \prod_{i=1}^n (1 - 2P_{ic})}{2} \right) f_{reg}, \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

注意此时  $(P_2^\odot - P_1^\odot)$  不同于三代中微子情况下的  $(P_2^\odot - P_1^\odot)$ 。 $\nu_{0m}$  可以视作独立演化，所以  $f_{reg}$  在三代中微子和轻惰性中微子情况下是一样的。

### 参考文献

- [A.1] Wolfenstein L. Neutrino oscillations in matter[J]. Physical Review D, 1978, 17(9): 2369.

- [A.2] Mikheyev S, Smirnov A Y. Resonance amplification of oscillations in matter and spectroscopy of solar neutrinos[J]. *Yadernaya Fizika*, 1985, 42(6): 1441-1448.
- [A.3] Mikheyev S, Smirnov A Y. Resonant amplification of  $\nu$  oscillations in matter and solar-neutrino spectroscopy[J]. *Il Nuovo Cimento C*, 1986, 9: 17-26.
- [A.4] Giunti C, Kim C W. Fundamentals of neutrino physics and astrophysics[M]. Oxford university press, 2007.
- [A.5] Bahcall J. Url <http://www.sns.ias.edu/jnb>[J]. SNdata/solarmodels. html, 1999.
- [A.6] Dziewonski A M, Anderson D L. Preliminary reference earth model[J]. *Physics of the earth and planetary interiors*, 1981, 25(4): 297-356.
- [A.7] Lisi E, Montanino D. Earth regeneration effect in solar neutrino oscillations: an analytic approach[J]. *Physical Review D*, 1997, 56(3): 1792.
- [A.8] Kaminski E, Javoy M. A two-stage scenario for the formation of the earth's mantle and core[J]. *Earth and Planetary Science Letters*, 2013, 365: 97-107.
- [A.9] Gutenberg B. Seismicity of the earth and associated phenomena[M]. Read Books Ltd, 2013.
- [A.10] Kim C, Nussinov S, Sze W K. Non-adiabatic resonant conversion of solar neutrinos in three generations[J]. *Physics Letters B*, 1987, 184(4): 403-409.
- [A.11] Kim C, Sze W K, Nussinov S. Neutrino oscillations and the landau-zener formula[J]. *Physical Review D*, 1987, 35(12): 4014.
- [A.12] Kim C, Kim J, Sze W K. Geometrical representation of neutrino oscillations in vacuum and matter[J]. *Physical Review D*, 1988, 37(4): 1072.
- [A.13] Parke S J. Nonadiabatic level crossing in resonant neutrino oscillations[J]. *Physical Review Letters*, 1986, 57(10): 1275.
- [A.14] Kuo T K, Pantaleone J. Nonadiabatic neutrino oscillations in matter[J]. *Physical Review D*, 1989, 39(7): 1930.
- [A.15] Shi X, Schramm D N. Solar neutrinos and the msw effect for three-neutrino mixing[R]. 1991.
- [A.16] De Holanda P, Smirnov A Y. Homestake result, sterile neutrinos, and low energy solar neutrino experiments[J]. *Physical Review D*, 2004, 69(11): 113002.
- [A.17] de Holanda P C, Smirnov A Y. Solar neutrino spectrum, sterile neutrinos, and additional radiation in the universe[J]. *Physical Review D*, 2011, 83(11): 113011.
- [A.18] Liao W, Luo Y, Wu X H. Effect of interaction with neutrons in matter on flavor conversion of super-light sterile neutrino with active neutrino[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2014, 2014 (6): 1-20.
- [A.19] Akhmedov E K, Tórtola M A, Valle J W. A simple analytic three-flavour description of the day-night effect in the solar neutrino flux[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2004, 2004(05): 057.
- [A.20] Akhmedov E K. Parametric resonance of neutrino oscillations and passage of solar and atmospheric neutrinos through the earth[J]. *Nuclear Physics B*, 1999, 538(1-2): 25-51.
- [A.21] De Holanda P, Liao W, Smirnov A Y. Toward precision measurements in solar neutrinos[J]. *Nuclear Physics B*, 2004, 702(1-2): 307-332.

## 附录 B 地球公转和自转所致的中微子通量变化

由于太阳和地球相比于漫长的日地距离来说可以看成质点，中微子是以平行束流射向地球的。同时由于太阳中微子是各向同性飞行，使得中微子通量随着飞行长度  $L$  成  $1/L^2$  衰减。另外，地球绕着太阳公转和自转也会导致中微子的通量发生变化。地球公转会导致中微子通量的季节变化，地球自转会导致中微子通量在一天的时间内也会发生改变。

### B.1 中微子通量的季节变化

地球绕着太阳是离心率  $\epsilon = 0.0167$  的椭圆轨道，如图B.1所示。Super-K 测到了由于地球轨道的由于离心率所带来的太阳中微子通量的季节变化<sup>[B.1-B.2]</sup>，椭圆轨道使得日地距离  $L(t)$  随着一年的时间发生变化：

$$L(t) = \frac{L_0}{1 + \epsilon \cos\left(2\pi\frac{\tau_d}{T}\right)} \approx L_0 \left[1 - \epsilon \cos\left(2\pi\frac{\tau_d}{T}\right)\right], \quad (\text{B.1})$$

其中  $L_0 = 1 \text{ au}$ , au 即天文单位 (astronomical unit),  $1 \text{ au} = 1.495979 \times 10^{11} \text{ m}$ , 约为日地之间的平均距离。 $\epsilon = 0.0167$  是地球轨道的离心率。 $T = 1 \text{ yr}$ ,  $\tau_d$  是从冬至开始地球在椭圆轨道已经公转的角度,  $\tau_d = 0$  对应地球在近日点的时候, 也就是冬至。这个修正为：

$$\Delta \text{ Flux} = \text{Flux} \times \left(\frac{L_0^2}{L_0^2(1 \pm \epsilon)^2} - 1\right), \quad (\text{B.2})$$

相对变化即  $(1 \pm \epsilon)^2 - 1 = \pm 2\epsilon \approx \pm 3.34\%$ , 带来的通量最大至最小可以变化  $4\epsilon \approx 6.68\%$ , 和 Super-K 测到的通量变化相符合<sup>[B.3]</sup>。

### B.2 中微子曝光函数

中微子穿过地球的路径在球对称模型下只和中微子天底角（太阳方向和天底方向之间的夹角，即中微子入射方向和天顶方向之间的夹角） $\eta$  有关，如图B.2所示。所以存活概率也只和天底角  $\eta$  有关。由于地球始终在自转和公转，相同天底角覆盖不同范围的时间，导致一年中的中微子存活概率不固定，全年的平均概率

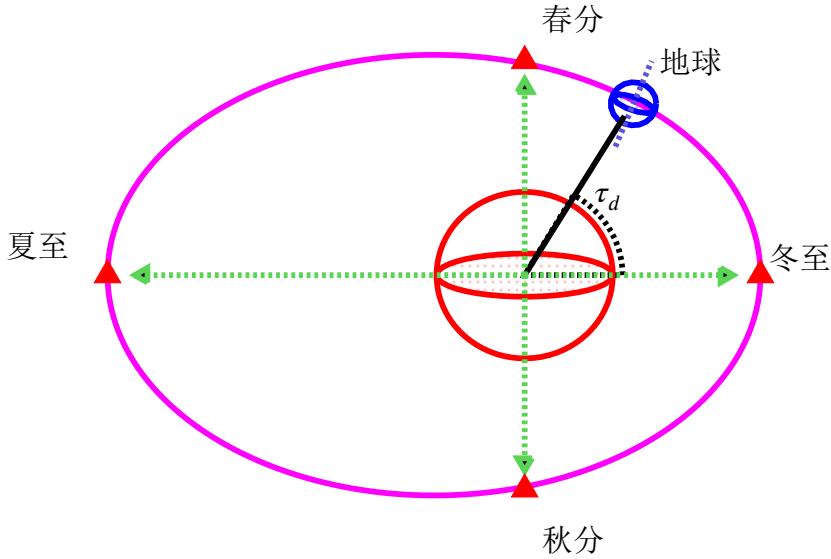


图 B.1 地球绕着太阳转。其中冬至离太阳最近，夏至离太阳最远。 $\tau_d$  是从冬至开始地球在椭圆轨道已经公转的角度。

$\langle P_{ee} \rangle$  为<sup>[B.4]</sup>：

$$\langle P_{ee} \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} d\tau_d \int_0^{2\pi} d\tau_h P_{ee}(\eta(\tau_d, \tau_h))}{\int_0^{2\pi} d\tau_d \int_0^{2\pi} d\tau_h} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta W(\eta) P_{ee}(\eta), \quad (\text{B.3})$$

其中  $\tau_d$  是从冬至开始地球在椭圆轨道已经公转的角度， $\tau_h$  是从午夜 0 点开始地球已经自转的角度：

$$\tau_d = \frac{N_{\text{day}}}{365} 2\pi, \quad \tau_h = \frac{N_{\text{hour}}}{24} 2\pi, \quad (\text{B.4})$$

$N_{\text{day}}$  是从冬至开始的第  $N_{\text{day}}$  天， $N_{\text{hour}}$  是从午夜 0 点开始的第  $N_{\text{hour}}$  个小时。所以  $\tau_d$  和  $\tau_h$  可以在  $[0, 2\pi)$  范围内取值。由式 B.3 就将关于时间的平均变为了关于天底角权重  $W(\eta)$  的积分，天底角权重  $W(\eta)$  称为曝光函数<sup>[B.4]</sup>，曝光函数  $W(\eta)$  解析求解十分困难<sup>[B.4]</sup>，可以采用数值方法，将一年和每天的时间细分，进而得到全年时间段下对应的  $\cos \eta$  或者  $\eta$  的分布函数，就是曝光函数  $W(\eta)$ 。

实验室在地球上的经度为  $\alpha$ ，纬度为  $\lambda$ 。地球赤道面和黄道面存在一个  $23.4397^\circ$  的夹角，记为地球倾角  $\beta$ ，也称为黄赤交角。由地球倾角  $\beta$  和地球某一天在公转轨道上的位置  $\tau_d$ ，可以得到太阳赤纬  $\theta$ ，即在地球来看，太阳所处的纬度：

$$\sin \theta = -\sin \beta \cos \tau_d. \quad (\text{B.5})$$

式中  $\theta$  的取值范围为  $-\beta \sim \beta$ ， $\theta = -\beta$  对应冬至，即  $\tau_d = 0$ ； $\theta = \beta$  对应夏至，即

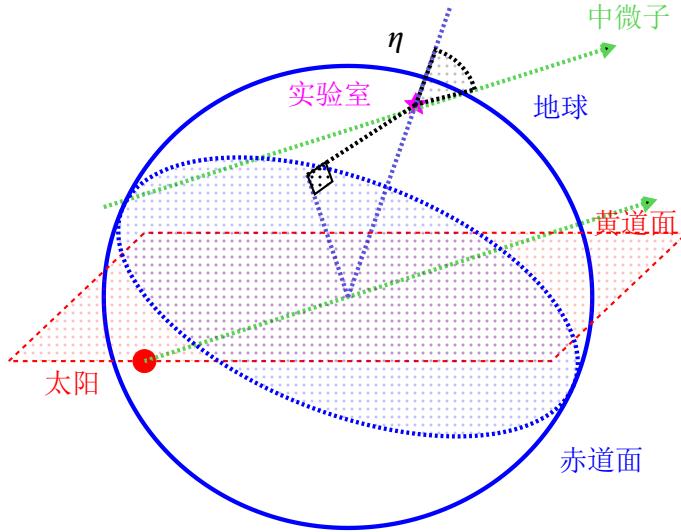


图 B.2 中微子天底角, 即中微子方向和天顶方向之间的角度  $\eta$ 。一并标出的还有太阳和实验室相对于地球的位置。

$$\tau_d = \pi.$$

由太阳赤纬  $\theta$ , 实验室的纬度  $\lambda$ , 地球从午夜 0 点开始已经自转的角度  $\tau_h$ , 可以得到从太阳射过来的中微子的天底角  $\eta$  为<sup>[B.4]</sup>:

$$\cos \eta = \cos \lambda \cos \tau_h \cos \theta - \sin \lambda \sin \theta. \quad (\text{B.6})$$

通过式B.5和式B.6就能够得到对应的  $\cos \eta$  或者  $\eta$  的分布函数, 即曝光函数  $W(\cos \eta)$  或者  $W(\eta)$ 。

在式B.5中, 对于确定的  $\tau_d$ , 都有对应的  $\tau'_d$ :

$$\tau'_d = \begin{cases} \pi - \tau_d, & (\text{对于 } \tau_d \leq \pi), \\ 3\pi - \tau_d, & (\text{对于 } \tau_d > \pi), \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

使得  $\sin \theta' = -\sin \theta$ , 所以可知  $\theta$  全年的权重函数关于  $\theta = 0$  是对称的。并且在

$$\tau'_h = \begin{cases} \pi - \tau_h, & (\text{对于 } \tau_h \leq \pi), \\ 3\pi - \tau_h, & (\text{对于 } \tau_h > \pi), \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

和  $\sin \theta' = -\sin \theta$  下, 有  $\cos \eta' = -\cos \eta$ 。所以  $\cos \eta$  全年曝光的权重函数关于  $\cos \eta = 0$  对称。根据式B.6经过简单分析可知  $\cos \eta$  的范围:

$$\cos \eta = [-(\cos \lambda \cos \beta + \sin \lambda \sin \beta) \sim (\cos \lambda \cos \beta + \sin \lambda \sin \beta)]. \quad (\text{B.9})$$

## 参考文献

- [B.1] Fukuda Y, Hayakawa T, Ichihara E, et al. Measurements of the solar neutrino flux from super-kamiokande's first 300 days[J]. Physical review letters, 1998, 81(6): 1158.
- [B.2] Smy M, Ashie Y, Fukuda S, et al. Precise measurement of the solar neutrino day-night and seasonal variation in super-kamiokande-i[J]. Physical Review D, 2004, 69(1): 011104.
- [B.3] Koshio Y. Overview of the solar neutrino observation[C]//Talk at the XXX International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Seoul, Korea. 2022.
- [B.4] Lisi E, Montanino D. Earth regeneration effect in solar neutrino oscillations: an analytic approach[J]. Physical Review D, 1997, 56(3): 1792.

## 致 谢

感谢导师王喆，严谨认真的科研态度值得我学习。

感谢计算中心林皎，为我在部署集群上的计算答疑解惑。

感谢实验室同学窦威，梁晔，杨迪的帮助。

本文的图片均采用 CERN ROOT 软件绘制，感谢 CERN ROOT 的开发人员。

感谢我的父亲邵伦明，感谢我的母亲朱凤鹏，是他们坚定地让子女读书成才！

感谢我的姥姥徐桂花，在我很小的时候，是我的姥姥一手将我带大，那个时候，我的姥姥在景德镇莲花塘的早集卖菜，我的姥姥一手肩挑扁担，一手抱着很小的我，养育之恩没齿难忘。我的姥姥今年八十多了，依然硬朗如年轻人，她如今六个子女都已成家立业，儿孙绕膝，我目前最大的愿望，就是希望我的姥姥长命百岁！

感谢我的妹妹邵文琪，她是我从小到大，所见过的最正气，最才华横溢的人。记得在她很小的时候，特别不喜欢走路，总是要我抱她，她拉着我的衣角，对我说：“哥哥抱”，每当回想起这个时候，就足以治愈我贫瘠的一生，希望我的妹妹永远有着少年气！

感谢我的未婚妻李培霞，和她在一起是我人生最幸运的事之一，我一定会用一生照顾好她，矢志不渝！

声 明

---

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：邵文辉 日 期：2024.5.26

## 个人简历、在学期间完成的相关学术成果

### 个人简历

1996年6月17日出生于江西省景德镇市。

2014年9月考入中国农业大学理学院应用力学系工程力学专业，2018年6月本科毕业并获得工学学士学位。

2019年9月考入清华大学工程物理系攻读物理学硕士学位。2022年9月，提前攻博进入清华大学工程物理系攻读物理学博士学位至今。

### 在学期间完成的相关学术成果

#### 参与署名的学术论文：

- [1] Shao W, Xu W, Liang Y, et al. The potential to probe solar neutrino physics with LiCl water solution[J]. The European Physical Journal C, 2023, 83(9): 799.  
[arXiv:2203.01860] (SCI 收录; 检索号:001066620200004; 影响因子: 4.4)
- [2] Zhang A, Xu B, Weng J, et al. Performance evaluation of the 8-inch MCP-PMT for Jinping Neutrino Experiment[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2023, 1055: 168506.  
[arXiv:2303.05373] (SCI 收录; 检索号:001122570000001; 影响因子: 1.4)
- [3] Wu Y, Li J, Chen S, et al. Performance of the 1-ton prototype neutrino detector at CJPL-I[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2023: 168400.  
[arXiv:2212.13158] (SCI 收录; 检索号:001122623800001; 影响因子: 0.52)
- [4] Zhao L, Luo W, Bathe-Peters L, et al. Measurement of muon-induced neutron yield at the China Jinping Underground Laboratory[J]. Chinese Physics C, 2022, 46(8): 085001.  
[arXiv:2108.04010] (SCI 收录; 检索号:000832746900001; 影响因子: 3.6)
- [5] Guo Z, Bathe-Peters L, Chen S, et al. Muon flux measurement at china jinping underground laboratory[J]. Chinese Physics C, 2021, 45(2): 025001.  
[arXiv:2007.15925] (SCI 收录; 检索号:000612624300001; 影响因子: 3.6)

#### 专利：

无

## 指导教师评语

在太阳中微子的领域，很多物理研究都与中微子能量有着密切的关系，包括太阳高密度物质所致的概率上升效应，地球物质密度所致的概率变化效应，以及轻惰性中微子导致的中微子振荡概率变化。精确测量电子中微子存活概率随着能量的变化曲线对研究这些太阳中微子物理有着直接的重要作用。

太阳高密度物质所致的概率上升效应等太阳中微子物理目前的实验探测灵敏度很低，未来实验所需要的曝光量很大。本文基于氯化锂水溶液的物理和化学特性，以及锂-7 上能够直接探测中微子能量的带电流过程，对其在太阳中微子物理的研究潜能展开了研究。主要工作内容和创新性成果如下：

1. 首次提出了基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案，研究了探测器的性能。揭示了锂-7 对电子中微子的带电流探测过程截面高，阈值低，反冲电子能量与入射中微子能量有一一对应关系，并且锂-7 天然丰度高，氯化锂水溶性高的特点。太阳硼-8 电子中微子谱加权的总带电流相互作用截面约为与电子的弹性散射过程的 60 倍。
2. 给出了该中微子探测器方案对于太阳中微子振荡参数， $\sin^2 \theta_{12}$  和  $\Delta m_{21}^2$ ，的预期测量精度。
3. 给出了该中微子探测器方案对于太阳高密度物质所致的中微子存活概率上升效应的探测灵敏度。可以以较小的曝光量达到  $3\sigma$ 。
4. 给出了该中微子探测器方案对于来自太阳的轻惰性中微子的参数空间的排除灵敏度曲线。
5. 对比万吨级的顶级神冈的纯水探测方案和 DUNE 的液氩探测方案，发现基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案，在太阳中微子物理研究方面，在同样曝光量的条件下，有着明显优势。

## 答辩委员会决议书

检验标准太阳模型与研究中微子振荡是中微子物理热门课题之一。论文针对目前实验上太阳中微子存活概率上升效应灵敏度低，未来实验所需要的曝光量极大的问题，开展了新型太阳中微子探测技术及其对物理灵敏度影响的研究，选题具有重要的科学意义。

论文的主要工作和创新性成果如下：

1. 提出了基于氯化锂饱和水溶液的中微子探测器方案，并研究了相应的探测器能量和方向重建性能，以及带电流过程和弹性散射过程的区分能力，为未来锦屏中微子实验提供参考。
2. 基于该方案，研究了太阳中微子存活概率上升效应的探测灵敏度，给出了太阳中微子振荡参数的测量精度预期，给出了对于来自太阳的轻惰性中微子的排除灵敏度曲线。对比了顶级神冈的纯水探测方案和 DUNE 的液氩探测方案，发现在同样曝光量的条件下，对太阳中微子概率上升效应的研究有着明显优势。

论文结构合理，逻辑正确，写作规范，数据详实，结论可靠，反映出作者掌握了粒子物理专业知识和实验技能，具备独立开展科学研究的能力。

论文答辩表述清楚，回答问题准确。答辩委员会一致同意通过博士论文答辩，建议授予邵文辉同学理学博士学位。